T.C.

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAFESLERDE TÜREV

Nur KAYANSELÇUK

DANIŞMAN

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

İzmir, 2014

Nur KAYANSELÇUK tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan "**Kafeslerde Türev**" başlıklı bu çalışma Y.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 16./7./2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri			**İmza**
Jüri Başkanı	:	**Prof. Dr. Mehmet TERZİLER**	
Raportör Üye	:	**Doç. Dr. Tahsin ÖNER**	
Üye	:	**Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL**	

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Kafeslerde Türev" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

16/7/2014

NUR KAYANSELÇUK

TEŞEKKÜR

Lisans dönemimden başlayarak bugüne kadar her konuda yanımda olan, emeğini ve sabrını asla esirgemeyen, değerli bilgileriyle her zaman bu yolda bana ışık tutan danışmanım **Sayın Prof. Dr. Mehmet TERZİLER'** e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım sürecinde bana destek olan eşim **İbrahim KAYANSELÇUK' a,** oğullarım **Toprak** ve **Batu' ya** gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez esas olarak iki bölümden oluşuyor.

Birinci bölümde; kafeslerle ilgili temel kavramlar tanıtıldıktan sonra kafesin iki farklı tanımının denkliği gösteriliyor. Literatürde yer alan sonuçlardan önemli olanların kanıtları veriliyor.

İkinci bölümde; kafeslerde türev kavramı bol örneklerle tanıtılıyor ve monoton (ya da izoton) türev aracılığıyla Birkhoff' un $M_3 - N_5$ kafesleri için ifade ettiği karakterizasyon teoremine türevsel bir betimleme veriliyor. Bunun için özellikle [12] ve [13] kaynaklarından yararlanılıyor.

ABSTRACT

This thesis consists mainly of two chapters.

In the first chapter, after introducing basic concept on lattices, we establish the equivalence of two different definitions (approaches) of a lattice. We prove only some of the important results occurring in the litterature.

In the second chapter, we illustrate the derivative notion on lattices with examples and we give a derivative characterization of Birkhoff' s $M_3 - N_5$ theorem. To do this we refer especially to [12] and [13].

GİRİŞ

Kafes kavramının kökeni lojiği formalleştirmek için 19. yy da yapılan girişimlere dayanır. 1850 li yıllarda *G. Boole* tarafından bulunan *Boole Cebirleri* aksiyomlarını incelerken *C. S. Pierce* ve *E. Schröder* ve bağımsız olarak *R. Dedekind* kafes kavramını tanıttılar. *R. Dedekind* dağılmalı kafeslerin zayıflatılmış biçimi olan modüler kafesleri tanımlayarak modern cebir ve kafes kuramı arasındaki bağlantıyı kurdu. Daha sonra, özellikle, *Jonsson, Tarski* ve *Birkhoff* kafes kuramının gelişmesinde dikkat çekici katkılarda bulundu. Kuramın gelişiminde dağılmalı kafesler yaşamsal rol oynadı; gerçekten, kafeslerle ilgili bir çok koşul dağılmalılık özelliğinden itibaren zayıflatıldı.

Genelde kafes olarak adlandırılan iki tamamen farklı matematiksel yapı vardır; ilki kısmi sıralı kümeler (posetler)le ilgili iken ikincisi uzayda noktaların düzenlenmesiyle bağlantılıdır. 19. yy da *Minkowski'nin* çalışmaları sayıların kuramı ve geometrisinde kafes kuramının kullanımını heveslendirdi. Bilgisayar bilimlerinin gelişmesi; tamsayı polinomlarının çarpanlarına ayrılması, tamsayı programlaması ve şifreleme gibi kurumsal alanlarda kafes kuramının uygulanmasına yol açtı. Kafes kuramı üzerine önemli güncel araştırmaları *Birkhoff, Dilworth* ve *Grätzer* başlattı.

Esas olarak iki bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde; temel kavramlar tanıtıldıktan sonra, iki farklı yaklaşımla tanımlanan kafes kavramlarının denk olduğu gösteriliyor. İkinci bölümde ise kafeslerde türev kavramı bol örneklerle tanıtıldıktan sonra monoton türev aracılığıyla; *Birkhoff Teoremi'nin* dağılmalı ve modüler kafesler için $M_3 - N_5$ karakterizasyonu yanında, türevsel bir betimleme veriliyor. Bunun için özellikle [12] ve [13] kaynaklarından yararlanılıyor.

1.BÖLÜM

KAFESLER

Grup, halka ve benzer cebirsel yapıların ortak özelliklerinin çalışmasında kafesler doğal olarak en önde yer alır; kafesler başlı başına bir cebir sınıfı oluşturur. Bu bölümde kafesler genel hatlarıyla tanıtılıyor ve kavramların anlaşılabilmesi için açıklayıcı örnekler veriliyor.

1.1.KAFES TANIMLARI

Bir kafesi tanımlamanın iki standart yolu vardır: ilki cebirsel tabanlı, ikincisi geometrik kavrayış sunan sıralama kavramına dayanır. Bu iki tanımın denkliği kanıtlanacaktır.

Tanım 1.1.1 : $\vee$ ve $\wedge$, L üzerinde ikili işlemler olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, boştan farklı bir L kümesine bir kafes denir ve $< L,\vee,\wedge >$ yazılır:

L_1: **(a)** $x \vee y = y \vee x$ **(b)** $x \wedge y = y \wedge x$ (değişme yasaları)

L_2: **(a)** $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ **(b)** $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (birleşme yasaları)

L_3: **(a)** $x \vee x = x$ **(b)** $x \wedge x = x$ (eşgüç yasaları)

L_4: **(a)** $x = x \vee (x \wedge y)$ **(b)** $x = x \wedge (x \vee y)$ (yutma yasaları)

Örnek 1.1.2 : L önermelerin kümesi olsun. $\vee$ "veya" bağlacını ve $\wedge$ "ve" bağlacını göstersin. O zaman $L_1 - L_4$ önermeler lojiğinin iyi bilinen özellikleridir.

Örnek 1.1.3 : $L = \mathbb{N}$, doğal sayıların kümesi olsun. $\vee$ "en küçük ortak katı" ve $\wedge$ "en büyük ortak böleni" göstersin. O zaman $<\mathbb{N},\vee,\wedge>$ bir kafestir.

Örnek 1.1.4 : *A* boştan farklı keyfi bir küme olsun ve $\wp(A)$, A nın kuvvet kümesini göstersin. $\vee$ "küme birleşimi" $\cup$ yu ve $\wedge$ "küme kesişimi" $\cap$ yi göstersin. O zaman $<\wp(A),\cup,\cap>$ bir kafestir.

Bir kafesin ikinci tanımını vermeden önce kısmi sıralama kavramına ihtiyaç vardır.

Tanım 1.1.5 : A boştan farklı bir küme olsun. A üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\leq$ ikili bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir. Her $x,y,z \in A$ için

(1)	$x \leq x$	(yansıma)
(2)	$x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$	(ters simetri)
(3)	$x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x = z$	(geçişme)

Bunlara ek olarak her x,y için

(4) $x \leq y$ ya da $y \leq x$

ise $\leq$ bağıntısına A üzerinde bir tam yada doğrusal sıralama bağıntısıdır denir. Kısmi sıralı bir kümeye "poset" (partially ordered set) ve tam sıralı bir kümeye de "zincir" diyeceğiz.

Örnek 1.1.6 : Herhangi bir A kümesi için $<\wp(A),\subseteq>$ bir posettir.

Örnek 1.1.7 : $\mathbb{N}$ kümesi üzerinde "m, n yi böler" bağıntısını | ile gösterelim. O zaman $<\mathbb{N},|>$ bir posettir. Öte yandan $\leq$, $\mathbb{N}$ üzerindeki doğal sıralama ise $<\mathbb{N},\leq>$ bir zincirdir.

Örnek 1.1.8 : Bir A kümesi için 2^A, A dan $2=\{0,1\}$ e tüm fonksiyonların kümesini göstersin. $f,g \in 2^A$ için $f \sqsubseteq g$, her $x \in A$ için $f(x) \leq g(x)$ olarak tanımlansın. O zaman $< 2^A,\sqsubseteq>$ bir posettir.

Gerçel sayılar için geliştirilmiş kavramların çoğu, sıralama söz konusu olduğunda, posetlere genişletilebilir.

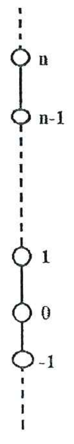
Tanım 1.1.9 : P bir poset ve A, P nin bir alt kümesi olsun. A nın her a elemanı için $a \leq p$ ise, P nin p elemanına A nın bir üst sınırı denir. p, A için en küçük üst sınır ise p ye A nın en küçük üst sınırı ya da supremumu denir ve SupA yazılır. Benzer şekilde alt sınır, en büyük alt sınır, infimum tanımlanır. P deki a,b elemanları için $a < b$ ve $a \leq c \leq b$ durumunda $a=c$ ya da $c=b$ ise b elemanı a elemanını örter ya da a, b tarafından örtülür denir ve $a \prec b$ ile gösterilir.

HASSE DİYAGRAMI

Posetler örtüm bağıntısı yardımıyla çizilebilir ve çizilen şekle posetin Hasse diyagramı denir. Küçük bir daire "o" kümenin bir elemanını temsil eder ve $a \prec$ ise a yı temsil eden daire altta kalmak üzere üstte b yi temsil eden daireye bir doğru ile birleştirilir; paralel doğruya izin verilmez. Posetin diyagramından sıralama bağıntısı tekrar elde edilebilir, şöyle ki: $a<b$ ancak ve ancak kümede

$$a = c_1 \prec c_2 \prec \ldots\ldots\ldots \prec c_{n-1} \prec c_n$$

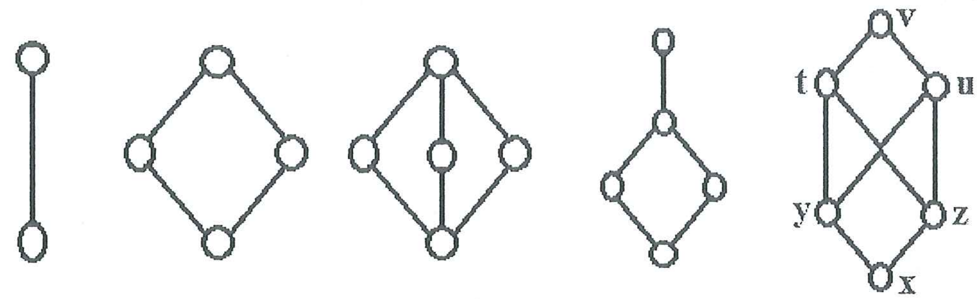
gibi sonlu bir $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n$ dizisi varsa doğrudur. Sonsuz posetlerin çizimi açık değildir, ancak tamsayıların poseti bir zincir olarak Şekil-1 deki gibi çizilir:



Şekil - 1

Tanım 1.1.10 : Bir L posetinde L deki her a,b için (L de) Sup$\{a,b\}$ ve Inf$\{a,b\}$ mevcut ise L posetine bir kafes denir ve $a \vee b$=Sup$\{a,b\}$, $a \wedge b$=Inf$\{a,b\}$ yazılır.

Şekil-2 de diyagramları çizilen posetler, (e) dışında, bir kafestir. (e) bir kafes değildir, çünkü t ve u, y ve z nin üst sınırlarıdır fakat kıyaslanamadıkları için Sup$\{y,z\}$ mevcut değildir.



(a) (b) (c) (d) (e)

Şekil - 2

Notasyon : P bir poset ve S, P nin bir alt kümesi olsun. Sup$S$ ve Inf$S$ mevcut olduğunda bunlar sırasıyla $\bigvee_p S$ ve $\bigwedge_p S$ ile gösterilir. Eğer S=$\{ X_i \mid i \in I \}$ ise $\bigvee$S yerine $\bigvee_{i \in I} x_i$ ve $\bigwedge$S yerine $\bigwedge_{i \in I} x_i$ yazılır.

Önemli Uyarı 1.1.11 : (Uç Durumların İncelenmesi)

P bir poset ve S=$\emptyset$ olsun. O zaman $\bigvee_p \emptyset$ ve $\bigwedge_p \emptyset$ nin varlığı P nin bir en küçük ve en büyük elemanının olmasına bağlıdır. Var olduklarında, P nin en küçük elemanını $\perp$ ve en büyük elemanını $\top$ ile gösterelim (bu elemanlara sırasıyla taban ve tepe elemanlar da denir).

Şimdi $S=\emptyset$ ise P kümesinin tamamı S için üst sınırların kümesidir. O halde $\bigvee_p \emptyset$ nin mevcut olması ancak ve ancak P nin bir $\perp$ elemanı varsa mümkündür ve bu durumda $\bigvee_p \emptyset = \perp$ dir. Dual olarak, $\bigwedge_p \emptyset$ mevcuttur ancak ve ancak P bir $\top$ tepe elemanına sahiptir ve öyle ise $\bigwedge_p \emptyset = \top$ dir.

Öte yandan $S=P$ ise $\bigvee_p S$ ancak ve ancak P bir $\top$ tepe elemanına sahip ise mevcuttur ve o zaman $\bigvee_p P = \top$ dir. Dual olarak $\bigwedge_p P$ ancak ve ancak P nin bir $\perp$ taban elemanı varsa mevcuttur ve öyle ise $\bigwedge_p P = \perp$ dir.

Aşağıdaki lemma supremum ve infimumların basit ancak yararlı özelliklerini verir.

Lemma 1.1.12 **:** P bir poset, S ve T, P nin alt kümeleri ve $\bigvee_p S$, $\bigvee_p T$, $\bigwedge_p S$, $\bigwedge_p T$ mevcut olsun. O zaman;

(a) $x \in S$ ise $\bigwedge S \leq x \leq \bigvee S$ dir.

(b) $x \in P$ ise $x \leq \bigwedge S$ dir ancak ve ancak her $a \in S$ için $x \leq a$ dır.

(c) $x \in P$ ise $x \geq \bigvee S$ dir ancak ve ancak her $a \in S$ için $x \geq a$ dır.

(d) $S \subseteq T$ ise $\bigvee S \leq \bigvee T$ ve $\bigwedge S \geq \bigwedge T$ dir.

($\bigvee_p$, yerine $\bigvee$, $\bigwedge_p$ yerine $\bigwedge$ yazılabilir; çünkü $S,T \subseteq P$ dir.)

Kanıt **:**

(a) Infimum ve supremum tanımlarının sonucudur.

(b) $x \leq \bigwedge S$ ise her $a \in S$ için $x \leq \bigwedge S \leq a$ ve buradan $x \leq a$ dır. Şimdi her $a \in S$ için $x \leq a$ ise x, S kümesinin bir alt sınırıdır; $\bigwedge S$, $\bigwedge S$ nin en büyük alt sınırı olduğu için de $x \leq \bigwedge S$ elde edilir.

(c) (b) nin dual ifadesidir.

(d) $S \subseteq T$ ise her $b \in$ T için $b \leq \bigvee T$ ve S, T nin bit alt kümesi olduğundan her $a \in S$ için de $a \leq \bigvee T$ dir. O halde $\bigvee S \leq \bigvee T$ dir. $\bigwedge S \geq \bigwedge T$ dual olarak kanıtlanır. ⊠

Tanım 1.1.13 : Bir P kafesinin her alt kümesinin infimum ve supremumu P de mevcut ise P ye bir tam kafes denir.

Lemma 1.1.14 : L bir kafes ise her a,b,c $\in$ L için

$\bigvee\{a,b,c\}=(a \vee b) \vee c$ dir.

Kanıt : $d=a \vee b$ ve $e=d \vee c$ olsun. O zaman $a \leq d$, $b \leq d$, $c \leq e$ ve $d \leq e$ dir. Geçişme özelliğinden $a,b,c \leq e$ sonuçlanır. Böylece e,$\{a,b,c\}$ nin bir üst sınırıdır. f, $\{a,b,c\}$ için keyfi bir üst sınır olsun. O zaman $a \leq f$, $b \leq f$, $c \leq f$ ve buradan $d=a \vee b \leq f$, $e=c \vee d \leq f$, dolayısıyla da $e \leq f$ bulunur. O halde $\bigvee\{a,b,c\}=e=(a \vee b) \vee c$ dir. ⊠

Sonuç Teoremi 1.1.15 : L bir kafes ise her $a,b,c \in L$ için

$\bigvee\{a,b,c\}=(a \vee b) \vee c=a \vee (b \vee c)=a \vee b \vee c$ dir. ⊠

Lemma 1.1.16 : Her sonlu kafes tamdır.

Kanıt : L sonlu bir kafes ve S, L nin keyfi bir alt kümesi olsun; $S=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ diyelim ve n üzerinde tümevarım uygulayalım.

$n=2$ için $\bigvee S=a_1 \vee a_2=\mathrm{Sup}\{a_1, a_2\}$, $\bigwedge S=a_1 \wedge a_2=\mathrm{Inf}\{a_1, a_2\}$ tanım gereği doğrudur. *Lemma 1.1.14* den $n=3$ için doğru olduğu görülür. Buna dayanarak $\bigvee S=a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n$ ve düal olarak da $\bigwedge S=a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ olduğu açıktır. ⊠

Aşağıdaki teorem çoğu durumda belirli bir posetin bir tam kafes olduğunu gösterirken kolaylık sağlar.

Teorem 1.1.17 : P bir poset ve her S$\subseteq$P için $\bigwedge S$ mevcut olsun. O zaman

$$\bigvee S=\bigwedge\{x \in P \mid (\forall a \in S), a \leq x\}$$

olmak üzere P bir tam kafestir.

Kanıt : $A = \{x \in P \mid (\forall a \in S), a \leq x\}$ olsun. S nin herhangi bir elemanı A nın bir alt sınırıdır ve bu yüzden $\bigwedge A$, S için bir üst sınırdır. Eğer z, S nin bir başka üst sınırı ise zorunlu olarak $\bigwedge A \leq z$ dir, dolayısıyla $\bigwedge A$, S nin supremumudur: $S = \bigwedge A$ dır. ⊠

Örnek 1.1.18 : Bir A kümesi için $< \wp(A), \subseteq >$ bir tam kafestir. Gerçekten, $\mathcal{H} \subseteq \wp(A)$ verildiğinde $\bigvee \mathcal{H} = \cup \mathcal{H}$ ve $\bigwedge \mathcal{H} = \cap \mathcal{H}$ mevcuttur, o halde kafes tamdır.

Örnek 1.1.19 : A keyfi bir küme olmak üzere, $\emptyset \neq \mathcal{L} \subseteq \wp(A)$ verilsin. Sonlu birleşim ve sonlu kesişimlere kapalı ise $\mathcal{L}$ ye bir **kümeler halkası**, keyfi birleşim ve keyfi kesişimlere kapalı ise bir **tam kümeler halkası** denir. $\mathcal{L}$ bir kümeler halkası (tam kümeler halkası) ise $A \vee B = A \cup B$ ve $A \wedge B = A \cap B$ olmak üzere $< \mathcal{L}, \subseteq >$ bir kafes (tam kafes)tir.

Aşağıdaki lemma $\leq$ sıralama bağıntısı ile $\wedge, \vee$ işlemleri arasındaki ilişkileri sunar.

Lemma 1.1.20 : L bir kafes ve $a, b, x \in L$ olsun. O zaman ;

(a) $a \leq b$ ancak ve ancak $a \wedge b = a$ ancak ve ancak $a \vee b = b$ dir;

(b) $a \leq b$ ise $a \vee x \leq b \vee x$ ve $a \wedge x \leq b \wedge x$ dir.

Kanıt

(a) $a \leq b$ ise a, a ve b nin bir alt sınırıdır. c, a ve b nin bir alt sınırı ise $c \leq a$ dir; böylece a, a ve b nin en büyük alt sınırı, yani $a = a \wedge b$ dir. Tersine, $a \wedge b = a$ ise o zaman $a = a \wedge b \leq b$ dir. İkinci denklik dual olarak kanıtlanır.

(b) $a \leq b$ ise $a \leq b \leq b \vee x$ ve $x \leq b \vee x$ olduğu açıktır. Buradan $a \vee x \leq b \vee x$ sonuçlanır. Kalan kısım benzer şekilde gösterilir. ⊠

Verilen iki kafes tanımının şu anlamda denk olduğu gösterilecektir: L iki tanımdan birinin tanımladığı kafes ise aynı L kümesi üzerinde diğer tanımla bir kafes inşa edilmiştir; bir tanımı diğerine dönüştüren iki inşa ters inşalardır.

Teorem 1.1.21 : L boştan farklı bir küme olsun ve $L_1 - L_4$ özelliklerini sağlasın. L üzerinde bir $\leq$ ikili bağıntısı $a \leq b$ ancak ve ancak $a \vee b = b$ olarak tanımlanırsa $< L,\leq >$ bir kafestir ve her $a,b \in L$ için $a \vee b = \text{Sup}\{a,b\}$ ve $a \wedge b = \text{Inf}\{a,b\}$ dir.

Kanıt : $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralamadır; gerçekten, L_3 den $a \vee a = a$, $a \leq a$ demektir. $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise **Lemma 1.1.20(a)** ya göre $a \vee b = b$ ve $b \vee a = a$ dır. Buradan L_1 aracılığıyla $a = b$ sonuçlanır. Nihayet $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \vee b = b$ ve $b \vee c = c$ dir.

O zaman $a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$ L_2(a) nın bir sonucudur; bu ise $a \leq c$ demektir. O halde $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Şimdi $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$ nedeniyle $a \leq a \vee b$ ve benzer şekilde $b \leq a \vee b$ dir.

Böylece $a \vee b$, $\{a,b\}$ nin bir üst sınırıdır. c, $\{a,b\}$ nin herhangi bir başka üst sınırı olsun: $a \leq c$, $b \leq c$. Buradan **Lemma 1.1.20(a)** dan $a \vee c = c$ ve $b \vee c = c$ yazılır.

Şimdi $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c$ olduğu için $a \vee b \leq c$ dir, başka bir deyişle $a \vee b$, $\{a,b\}$ nin en küçük üst sınırıdır. O halde $a \vee b = \text{Sup}\{a,b\}$ dir. Benzer akıl yürütme ile $a \wedge b = \text{Inf}\{a,b\}$ gösterilebilir. ⊠

Bu teorem "L bir kafes olsun" denildiğinde L yerine $< L,\leq >$ ya da $< L,\vee,\wedge >$ alınabileceğini ifade eder.

1.2 İZOMORF KAFESLER VE ALT KAFESLER

İzomorfizma sözcüğü, elemanların doğası dışında, iki yapının aynı olduğunu belirtmek için kullanılır.

Tanım 1.2.1 : L ve K iki kafes olsun. Her a, $b \in L$ için L den K ye $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ ve $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$ gerçeklenecek şekilde bir h bijeksiyonu varsa L ve K izomorftur denir ve h ye bir izomorfizma adı verilir. L ve K izomorf ise bu $L \cong K$ ile gösterilir.

h, L ve K kafesleri arasında bir izomorfizma ise h^{-1} in K dan L ye bir izomorfizma ve iki izomorfizmanın birleşiminin bir izomorfizma olduğu iyi bilinmektedir. İzomorfizma tanımı sıralama bağıntıları açısından yeniden biçimlendirilebilir.

Tanım 1.2.2 : P_1 ve P_2 iki poset ve α, P_1 den P_2 ye bir dönüşüm olsun. P_1 de $a \leq b$ olduğunda P_2 de $\alpha(a) \leq \alpha(b)$ ise α dönüşümüne sıra koruyan (ya da izoton) denir.

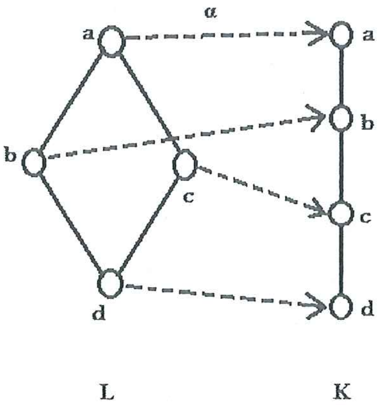
Teorem 1.2.3 : L ve K kafeslerinin izomorf olması için α ve α^{-1} in sıra koruyan olacak şekilde L den K ye bir α bijeksiyonunun var olması gerek ve yeterdir.

Kanıt :

Koşul Gerektir ; α, L den K ye bir izomorfizma ve L de $a \leq b$ ise o zaman $a = a \wedge b$ dir. Buradan $\alpha(a) = \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge \alpha(b)$ ve dolayısıyla $\alpha(a) \leq \alpha(b)$ elde edilir. O halde α^{-1}, bir izomorfizma olduğu için, sıra koruyandır.

Koşul Yeterdir ; α, hem α hem de α^{-1} sıra koruyan olacak şekilde, L den K ye bir bijeksiyon olsun. Şimdi a, $b \in L$ için $a \leq a \vee b$ ve $b \leq a \vee b$ olduğu açıktır; α sıra koruyan olduğundan $\alpha(a) = \alpha(a \vee b)$, $\alpha(b) = \alpha(a \vee b)$ ve dolayısıyla $\alpha(a) \vee \alpha(b) \leq \alpha(a \vee b)$ elde edilir. Öte yandan $\alpha(a) \vee \alpha(b) \leq u$ ise $\alpha(a) \leq u$ dır, o nedenle $a \leq \alpha^{-1}(u)$ ve $b \leq \alpha^{-1}(u)$, böylece $a \vee b \leq (u)$ sonuçlandırılır. Ama $a \vee b \leq \alpha^{-1}(u)$ $\alpha(a \vee b) \leq u$ verir; buradan da $\alpha(a) \vee \alpha(b) = \alpha(a \vee b)$ ye ulaşılır. $\alpha(a) \wedge \alpha(b) = \alpha(a \wedge b)$ yi göstermek için benzer akıl yürütmede kullanılır. ⊠

Uyarı 1.2.4 : Kafesler arasında izomorfizma olmayan fakat sıra koruyan bijeksiyon örnekleri bulunabilir, Şekil - 3 buna bir örnektir.



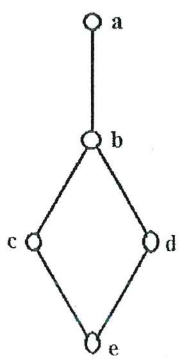
α dönüşümü sıra koruyan ve bijektif olduğu halde α^{-1} sıra koruyan değildir.

Şekil - 3

Tanım 1.2.5 : L bir kafes ve $S\neq\emptyset$, L nin bir alt kümesi olsun. Her $a,b \in$ S için $a \vee b$ ve $a \wedge b$ S de ise S, L nin bir alt kafesidir denir; $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri S ye kısıtlıdır.

S, L nin bir alt kafesi ise S deki $a \leq b$ durumunun L de geçerli olduğu açıktır.

Uyarı 1.2.6 : Bir kafeste poset bağlamında kafes olan alt kümeler bulunabilir fakat $\vee,\wedge$ işlemleri kafesteki işlemlerle uyuşmadığı için bu alt kümeler alt kafes olamazlar. Bu durum Şekil 4 de örneklendirilmiştir. L={a,b,c,d,e} kafesinde P={a,c,d,e} alt kümesi poset olarak bir kafes iken, $c \vee d$ = Sup{c,d} = $b \notin P$ nedeniyle L nin bir alt kafesi değildir.



Şekil - 4

Tanım 1.2.7 : L ve K kafesleri verilsin. K nin bir alt kafesi L ye izomorf ise L kafesi K kafesine gömülebilir denir. Başka bir ifadeyle, α: L → K bir gömmedir eğer

$$(\text{L de})\ a \leq b \Leftrightarrow (\text{K de})\ \alpha(a) \leq \alpha(b)$$

ise; bu gömmenin birebir bir dönüşüm olduğu açıktır.

Örnek 1.2.8 : G bir grup olsun ve $S(G)$, G nin alt gruplarının boştan farklı bir kümesi olsun. O zaman $< S(G),\subseteq >$ taban elemanı $\{o\}$ aşikar alt grubu ve tepe elemanı G nin kendisi olan bir tam kafestir. İkili işlemler H,K $\in S(G)$ için $H \wedge K = H \cap K$ ve $H \vee K = < H \cup K >$ olarak tanımlanır. ($< H \cup K >$, $H \cup K$ nin ürettiği alt gruptur). G nin normal alt gruplarının $N(G)$ kümesi kapsama bağıntısı altında $S(G)$ nin bir alt kafesidir.

Örnek 1.2.9 : $A = \{a,b,c\}$ olmak üzere $L = < \wp(A),\subseteq >$ bir tam kafestir. $S=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \subseteq \wp(A)$, $\subseteq$ altında L nin bir alt kafesidir.

1.3 BİRLEŞİM ALT KAFESLERİ, KESİŞİM ALT KAFESLERİ

Bu kavramlar iki kafesin izomorf olduğunu göstermek için, kolaylık sağladıklarından kullanılışlıdır.

Tanım 1.3.1 : P ve Q poset ve $f: P \rightarrow Q$ bir dönüşüm olsun.

(a) $a,b \in P$ için $a \vee b$, P de mevcut olduğunda $f(a) \vee f(b)$, Q da mevcut ve $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ ise f ye bir birleşim morfizma denir.

(b) $S \subseteq P$ için $\bigvee S$, P de mevcut olduğunda $\bigvee f(S)$, Q de mevcut ve $f(\bigvee S) = \bigvee f(S)$ ise f ye bir tam birleşim morfizma denir.

Kesişim morfizma ve tam kesişim morfizma dual olarak tanımlanır.

(c) Bir birleşim ve kesişim morfizmaya, morfizma denir. Tam morfizma benzer şekilde tanımlanır.

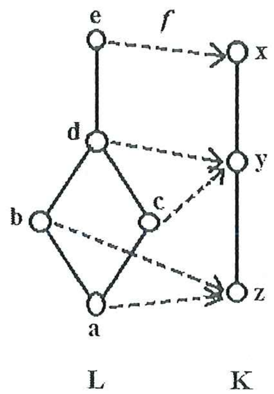
(d) Taban ve tepe elemanları olan bir posete sınırlı poset denir.

(1) *P* ve *Q* iki sınırlı poset olsun. Bir $f\colon P \to Q$ dönüşümü $f(\perp_P) = \perp_Q$ eşitliğini sağlıyorsa taban koruyan ve $f(T_P) = T_Q$ yü sağlıyorsa tepe koruyan denir. O zaman iki sınırlı poset arasındaki her tam birleşim morfizma taban koruyan ve her tam kesişim morfizma tepe koruyandır.

(2) Her sıra izomorfizma bir tam morfizmadır ve her tam birleşim, kesişim morfizma sıra koruyandır.

(3) *P* ve *Q* (tam) kafes ve *f* bir (tam) birleşim morfizma ise $f(P)$, *Q* nün bir (tam) birleşim alt kafesidir. Benzer gözlemler kesişim morfizmaları için de geçerlidir.

Örnek 1.3.2 : Şekil 5 de *f*, *L* ile *K* arasında bir tam morfizmadır.



Şekil - 5

İzleyen sonuç iki kafesin izomorf olduğunu gösterirken bir bijektif birleşim morfizma (bazen birleşim izomorfizma denir) bulmanın yeterli olduğunu ileri sürüyor. Buna göre ya birleşim ya da kesişim işleminin sıralama yapısını tamamen belirlediği ortaya çıkıyor.

Lemma 1.3.3 : L, K kafes ve f: $L \to K$ bir bijeksiyon ise aşağıdakiler denktir:

(a) f bir sıra izomorfizmadır;

(b) f bir birleşim morfizmadır;

(c) f bir kesişim morfizmadır.

Kanıt : (a) $\Leftrightarrow$ (b) denkliğini göstermek yeterlidir.

(a) $\Rightarrow$ (b) : a,b $\in L$ için a $\leq$ a $\vee$ b, b $\leq$ a $\vee$ b ve f sıra koruyan olduğundan f (a) $\vee$ f (b) $\leq$ f (a $\vee$ b) elde edilir. x, {f (a), f (b)} nin bir üst sınırı olsun: f (a), f (b) $\leq$ x. f bijektif olduğundan bir c $\in L$ için x = f (c) yazılır. f (a), f (b) $\leq$ x ve x = f (c) den a,b $\leq$ c sonuçlanır. Böylece a $\vee$ b $\leq$ c ve f nin sıra korumasından f (a $\vee$ b) $\leq$ f (c) = x elde edilir; başka bir deyişle, f (a $\vee$ b) = f (a) $\vee$ f (b) dir ve f nin birleşim morfizma olduğu gösterilmiştir.

(b) $\Rightarrow$ (a) : (b) geçerli ise a $\leq$ b, f (a) $\leq$ f (b) yi gerektirir. Öte yandan f (a) $\leq$ f (b) ise f (a $\vee$ b) = f (a) $\vee$ f (b) dir. Bu ise a $\vee$ b = b ve a $\leq$ b yi verir. Böylece f bir sıra izomorfizmadır. ⊠

1.4 DAĞILMALI KAFESLER, MODÜLER KAFESLER

Kümesel birleşim ve kesişimler birbirleri üzerine dağılırlar. Kafes birleşim ve kesişimlerinin de aynı özelliklere sahip olması incelemeye değerdir.

Tanım 1.4.1 : Aşağıdaki dağılma yasalarını sağlayan bir L kafesine dağılmalı kafes denir :

(D_1) $\quad (\forall\, x,y,z \in L)\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(D_2) $\quad (\forall\, x,y,z \in L)\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Lemma 1.4.2 : (D_1) i sağlayan her L kafesi (D_2) yi sağlar ve tersi de doğrudur.

Kanıt : (D_1) geçerli olsun. $x,y,z \in L$ için $a=x\vee y$, $b=x$ ve $c=z$ diyelim. O zaman aşağıdakiler vardır :

$$(x\vee y) \wedge (x\vee z) = a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c) \qquad (D_1)$$

ve

$$\begin{aligned}
(a\wedge b)\vee(a\wedge c) &= ((x\vee y)\wedge x)\vee((x\vee y)\wedge z) \\
&= x \vee ((x\vee y)\wedge z) && (L_4(b)) \\
&= x \vee ((x\wedge z)\vee(y\wedge z)) && (D_1) \\
&= (x \vee (x\wedge z)) \vee (y\wedge z) && (L_2(a)) \\
&= x \vee (y\wedge z) && (L_4(a))
\end{aligned}$$

Böylece (D_1), (D_2) yi gerektirir. Dual olarak yürütmeyle (D_2) nin (D_1) i gerektiği gösterilebilir. ⊠

Bu lemma bir kafesin dağılmalı olduğunu göstermek için sadece (D_1) i ya da (D_2) yi göstermenin yeterli olacağını ifade ediyor. Öte yandan, izleyen lemmada bir kolaylık daha getiriliyor.

Lemma 1.4.3 **:** L bir kafes ise her a,b,c $\in$ L için aşağıdaki eşitsizlikler her zaman geçerlidir :

(a) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;

(b) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Kanıt **:** Bu ifadeler dual olduğu için sadece (a) kanıtlanacaktır. $b \vee c \geq b$ ve $b \vee c \geq c$ nedeniyle **Lemma 1.1.20(b)** den $a \wedge (b \vee c) \geq a \wedge b$ ve $a \wedge (b \vee c) \geq a \wedge c$ ve aynı Lemmadan $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ elde edilir. ⊠

Sonuç Teorem 1.4.4 **:** Bir kafesin değılmalı olduğunu göstermek için

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

ya da

$$a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

eşitsizliklerinden birini doğrulamak yeterlidir. ⊠

Örnek 1.4.5 **:** Her kümeler halkası dağılmalı bir kafestir, çünkü keyfi A,B,C kümeleri için $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir. Özellikle, $< \wp(A),\subseteq >$ kafesi dağılmalıdır.

Örnek 1.4.6 **:** Her zincir bir dağılmalı kafestir. (D_1) i gerçeklemek için üç durumu değerlendirmek yeterlidir:

$x \leq y \leq z$, $y \leq x \leq z$ ve $y \leq z \leq x$.

Örnek 1.4.7 **:** A sonsuz bir küme ve P_S(E), E nin tüm sonlu alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman $< P_S(E),\subseteq >$, $\emptyset$ taban elemanlı ama tepe elemansız dağılmalı bir kafestir.

Örnek 1.4.8 : E sonsuz bir kafes olsun. E nin E de tümleyeni sonlu bir alt kümesine tümleyen sonlu küme denir. E nin sonlu ya da tümleyen sonlu alt kümelerinin kümesi $\subseteq$ kapsama bağıntısı altında bir dağılmalı kafestir.

Son örnek, çok açıdan önemli ve ilginç bir örnektir.

Örnek 1.4.9 : Bölünebilirlik bağıntısına göre sıralanan P={1,2,3,...} kümesi dağılmalı bir kafestir; bu kafesi <P,|> ile gösterelim. Aritmetiğin temel teoremine göre her m pozitif tamsayısı, P_k k. asal sayı olmak üzere,

$$m = 2^{\alpha_m(1)}\, 3^{\alpha_m(2)}\, 5^{\alpha_m(3)} \ldots P_k^{\alpha_m(k)}$$

biçiminde gösterilebilir. n > k için $\alpha_m(n) = 0$ tanımlayalım. Bu yolla her bir pozitif m tamsayısına bir α_m: P⟶ℕ dönüşümü atayabilir. Bu atama altında ebob{m,n} = m ∧ n ve ekok{m,n} = m ∨ n sırasıyla $\alpha_m \sqcap \alpha_n$ ve $\alpha_m \sqcup \alpha_n$ ye uygulanır. Böylece α: m⟼ α_m bir kafes morfizmasıdır. m|n ⟺ $\alpha_m \sqsubseteq \alpha_n$ nedeniyle < P,| >, $\mathbb{N}^P$ (yani, P den ℕ ye tanımlı tüm fonksiyonların kümesi) dağılmalı kafesinin $\mathrm{I}_m\alpha$ alt kafesine izomorftur. O halde, < P,| > bir dağılmalı kafestir.

Uyarı : L dağılmalı bir kafes ve X herhangi bir küme ise L^X dağılmalı bir kafestir.

Tanım 1.4.10 : Aşağıdaki koşulu sağlayan bir kafese modüler kafes denir :

$$\text{(M)} \qquad x \le y \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)\,.$$

Bu tanıma göre aşağıdakiler açıktır.

(1) $a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b$ nedeniyle bir kafeste (M) modüler yasası

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge z) \vee z)$$

ifadesine denktir.

(2) Her kafes

$$x \leq y \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$$

yi sağladığından

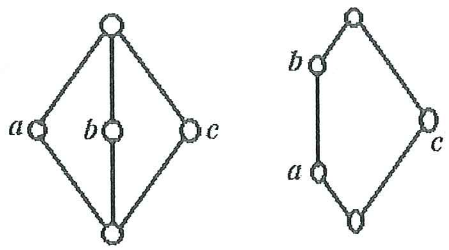
$$x \leq y \Longrightarrow y \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$$

yi göstermek yeterlidir.

Teorem1.4.11 : Her dağılmalı kafes bir modüler kafestir.

Kanıt : Bunun için $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ denkliğini ve (D_2) yi kullanmak yeterlidir. ⊠

İzleyen iki teorem, Şekil 6 da diyagramları çizilmiş M_3 ve N_5 kafesleri açısından, dağılmalı ve modüler kafeslerin çok ilginç bir mertebesini veriyor.



M_3 N_5

Şekil - 6

Her iki kafesin dağılmalı olmadığı, N_5 in modüler olmadığı fakat M_3 in bir modüler kafes olduğu gösterilmektedir.

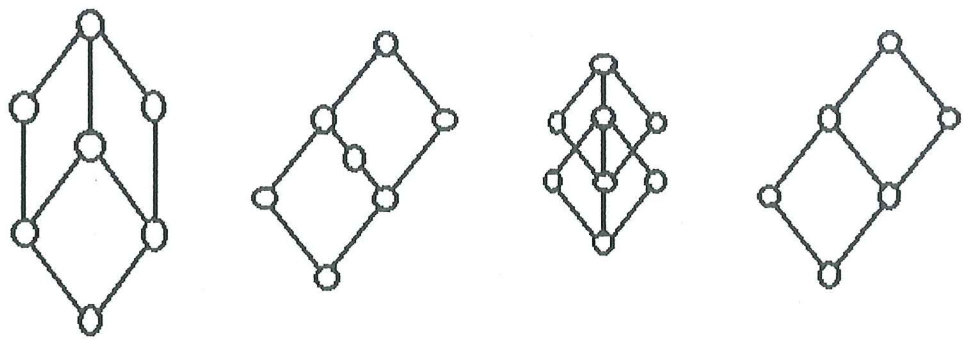
Teorem 1.4.12 (Dedekind Teoremi)

L nin modüler bir kafes olmaması için bir gerek ve yeter koşul, N_5 in L ye gömülebilmesidir. (Kanıt için [4] ya da [3] e bakılabilir.) $\boxtimes$

Teorem 1.4.13 (Birkhoff Teoremi)

L nin dağılmalı bir kafes olmaması için bir gerek ve yeter koşul M_3 ya da N_5 in L ye gömülebilmesidir. (Kanıt için [3] ya da [4] e başvurulabilir.) $\boxtimes$

Örnek 1.4.14 : Şekil 7 deki kafesleri inceleyelim. L_1, L_2 kafesleri N_5 ile izomorf alt kafeslere sahip olduklarından modüler değildirler. M_3 , L_3 e gömülebildiği için L_3 dağılmalı değildir. Diyagramlardan N_5 in L_3 e gömülemediği; N_5 ve M_3 ün L_4 e gömülemediği açık görünmekle beraber bu iddiaların doğrulanması gerekir.



L_1 L_2 L_3 L_4

Şekil - 7

1.5 İDEALLER VE SÜZGEÇLER

İdeallerin cebirdeki önemi esastır. Kafes ideallerinin sıra dualleri olan süzgeçler lojik ve topolojide çeşitli uygulamalara sahiptir.

Tanım 1.5.1 **:** L bir kafes olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa, L nin boştan farklı bir I alt kümesine bir (kafes) ideali denir :

(a) $a,b \in I$ ise $a \vee b \in I$ dır ;

(b) $a \in L$, $b \in I$ ve $a \leq b$ ise $a \in I$ dır.

Bir L kafesinin her I ideali bir alt kafestir; çünkü $a,b \in L$ için $a \wedge b \leq a$ ve $a \in I$, $a \wedge b \in I$ yi gerektirir.

Tanım 1.5.2 **:** L bir kafes ve F, L nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa F ye bir süzgeç denir :

(a) $a,b \in F$ ise $a \wedge b \in F$ dir ;

(b) $a \in L$, $b \in F$ ve $b \leq a$ ise $b \in F$ dir.

L ile çakışmayan bir ideale (süzgeç) öz denir.

Bu tanımlardan çıkan bazı sonuçlar şunlardır :

(1) L, 1 tepe elemanlı bir kafes ve I, L nin bir ideali olsun. O zaman I öz idealdir ancak ve ancak $1 \notin I$ dır.

(2) L, 0 taban elemanlı bir kafes ve F, L de bir süzgeç olsun. O zaman F öz süzgeçtir ancak ve ancak $0 \notin F$ dir.

Tanım 1.5.3 **:** L bir kafes ve $a \in L$ olsun. a tarafından üretilmiş ideale (süzgece) esas ideal (süzgeç) denir ve

$(a] = \{x \in L : x \leq a\}$ $\quad ([a) = \{x \in L : a \leq x\})$

ile gösterilir.

Örnek 1.5.4 : Sonlu bir kafeste her ideal(süzgeç) esastır.

Örnek 1.5.5 : $\wp(X)$ bir X kümesinin kuvvet kümesini göstersin. p, X in belli bir elemanı olsun. O zaman

(a) $I_p = \{A \in \wp(X) : p \notin A\}$ bir idealdir.

(b) $I_f = \{A \in \wp(X) : \text{A sonlu}\}$ bir idealdir.

Örnek 1.5.6 : L ve K sınırlı iki kafes olsun. Bir f: L⟶K dönüşümüne ; $f(0_L) = 0_K$, $f(1_L) = 1_K$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ ve $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ yi sağlıyorsa bir $\{0,1\}$ homomorfizması denir. f böyle bir dönüşüm ise $f^{-1}(0)$, L de bir ideal ve $f^{-1}(1)$, L de bir süzgeçtir.

Tanım 1.5.7 : L bir kafes ve I(F), L nin bir öz ideali(süzgeci) olsun. $a \wedge b \in I$ ($a \vee b \in F$), $a \in I$ veya $b \in I$ ($a \in F$ ya da $b \in F$) yi gerektiriyorsa I ya (F ye) L nin bir asal ideali (asal süzgeci) denir. L nin asal ideallerinin (süzgeçlerinin) kümesi $I_P(L)$ ($F_P(L)$) ile gösterilir.

Tanım 1.5.8 : L bir kafes ve I (F), L nin bir öz ideali (süzgeci) olsun. I yı kapsayan tek ideal L ise I ya L nin bir maksimal ideali denir. Başka bir deyişle, I maksimal ideaildir ancak ve ancak I, $< I(L)\backslash\{L\},\subseteq >$ posetinde bir maksimal elemandır; burada I(L), L nin ideallerinin kümesidir. Maksimal süzgeç yerine ultrasüzgeç kullanılır ve dual biçimde tanımlanır.

Teorem 1.5.9 : L, 1 tepe elemanlı dağılmalı bir kafes olsun. O zaman L nin her maksimal ideali, asal idealdir. Dual olarak, 0 taban elemanlı dağılmalı bir kafeste her ultrasüzgeç bir asal süzgeçtir.

Kanıt : ([4], sayfa 233).

Teorem 1.5.10 : L sonlu dağılmalı bir kafes olsun ve L de $a \not\leq b$ olsun. O zaman L nin $a \notin I$ ve $b \in I$ olacak şekilde bir I asal ideali vardır.

Kanıt : ([9], sayfa 49).

Sınırlı, dağılmalı ve tümleyenli bir kafese Boole cebiri denir.

Teorem 1.5.11 : B bir Boole cebiri ve I, B nin bir öz ideali olsun. O zaman aşağıdaki denktir :

(a) I bir maksimal idealdir ;

(b) I bir asal idealdir ;

(c) a', a nın tümleyeni olmak üzere her $a \in B$ için $a \in I$ ancak ve ancak $a' \notin I$ dır.

Kanıt : ([4], sayfa 234).

Teorem 1.5.12 : I ve F birleşimi L kafesi olan iki ayrık küme olsun. O zaman I bir asal idealdir eğer ve yalnız eğer F bir asal süzgeçtir.

Kanıt : ([9], sayfa 47).

Bu teorem bir L kafesinin asal idealleri ve asal süzgeçleri arasında doğal bir birebir eşlemenin olduğunu gösterir. Bu eşleme her I ideli $F = I' = L \setminus I$ şeklinde bağlantılandırılarak elde edilir. Buna göre kuramsal tümleyen anlamında I' bir asal süzgeçtir ve her bir F asal süzgeci $F = I'$ biçimlidir.

2.BÖLÜM

KAFESLERLERİN MONOTON TÜREVLE KARAKTERİZASYONU

Türev kavramı cebirsel sistemlerin yapı ve özelliklerinin incelenmesinde bazı kolaylıklar sağlar. Halkalar üzerinde tanımlanan türevlerin yanında ([1], [2], [6], [8]) , kafeslerde türev ilk kez [11] tarafından tanımlanmıştır. Bu alanda son yıllarda yoğun çalışmalar yapılmaktadır.

Bu bölümde izoton (monoton ya da sıra koruyan) türev aracılığıyla modüller ve dağılmalı kafesler betimleniyor. Tezde yapılan kanıtlar [12] den esinlenerek yapılıyor.

2.1 KAFESLERDE TÜREVLER

Bu kesimde [10] ve [11] de yapılan çalışmalar [5] den alıntılar yapılarak özetleniyor.

Tanım *2.1.1* : $< L,\vee,\wedge >$ bir kafes olsun. L üzerinde bir türev aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir f: L→L fonksiyonudur : her x,y ∈ L için

(1) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

(2) $f(x \wedge y) = (f(x) \wedge y) \vee (x \wedge f(y))$

Bu tanımdaki (2) sadeleştirilebilir.

Önerme *2.1.2* : (2) koşulu

(2') $f(x \wedge y) = f(x) \wedge y = x \wedge f(y)$

koşuluna denktir.

Kanıt : (1) de $x = y$ alındığında $f(x \wedge x) = f(x) = (f(x) \wedge x) \vee (x \wedge f(x))$ ve buradan da $f(x) \leq x$ sonuçlanır. Şimdi $x \vee (x \wedge y) = x$ (L_4) ve (1) den $f(x) = f(x \vee (x \wedge y)) = f(x) \vee f(x \wedge y)$, yani $f(x \wedge y) \leq f(x)$ elde edilir. Ayrıca $f(x \wedge y) \leq x \wedge y \leq y$ vardır. (Bu sonuçlar aşağıdaki teoremden görülebilir.) O halde $f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge y$ dir. Aynı şekilde $f(x \wedge y) \leq x \wedge f(y)$ gösterilir. Böylece (2) , (2') ile denktir. ⊠

(2') koşulunu sağlayan bir dönüşüme [11] de bir kesişim ötelemesi denir.

Genel kafes kavramında gerekli ilk kavram dual kapanış kavramıdır.

Tanım 2.1.3 : L bir kafes olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir f: L → L fonksiyonuna bir dual kapanış denir.

(1) f bir sıra-morfizmadır.

(2) Her $x \in L$ için $f(x) \leq x$ dir.

(3) Her $x \in L$ için $f(f(x)) = f(x)$ dir.

f nin bir sıra-morfizma olması $x \leq y$ için $f(x) \leq f(y)$ olması anlamındadır. Aşağıdaki teorem [10], [11] de serpiştirilen bazı sonuçların bir derlenmesidir.

Teorem 2.1.4 : Her kafes türevi bir dual kapanıştır.

Kanıt : f: L → L bir kafes türevi olsun.

(1) $x, y \in L$ için $x \leq y$ ise $x \wedge y = x$ dir; O zaman $f(x) = f(x \wedge y) = x \wedge f(y) \leq f(y)$, f nin sıra-koruyan olduğunu gösterir.

(2) (2') den $f(x) = f(x \wedge x) = f(x) \wedge x$, yani $f(x) \leq x$ dir.

(3) $f^2(x) = f(f(x)) = f(f(x \wedge x)) = f(f(x) \wedge x) = f(x) \wedge f(x) = f(x)$ ⊠

Önerme 2.1.5 : f, L kafesi üzerinde bir türev olsun. L, 0 taban elemanlı ise

(a) f bir kafes homomorfizmasıdır.

(b) $\mathrm{Kerf} = \{ a \in L : f(a) = 0 \}$ L nin bir idealidir.

Kanıt :

(a) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ *Tanım 2.1.1* (1) gereğidir. Şimdi $x \wedge y \leq x$ ve $x \wedge y \leq y$ ise *Teorem 2.1.4* den $f(x \wedge y) \leq f(x) \wedge f(y)$ sonuçlanır.

Öte yandan $f(y) \leq y$ bilindiğinden

$f(x) \wedge f(y) \leq f(x) \wedge y = f(x \wedge y)$ (2') den yazılır. Böylece $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ ve f bir kafes homomorfizmadır.

(b) $x, y \in \mathrm{Kerf}$ ise $f(x) = 0 = f(y)$ dir. O halde $f(x) \vee f(y) = 0$ ve (a) şıkkından $f(x \vee y) = 0$ dır. O halde $x \vee y \in \mathrm{Kerf}$ dir. $x \in \mathrm{Kerf}$ ve $x \geq y$ ise $f(x) = 0$ ve f sıra-koruyan olduğu için de $f(y) \leq f(x)$ dir. Buradan $f(y) = 0$, yani $y \in \mathrm{Kerf}$ elde edilir. ⊠

Tanım 2.1.6 : L bir kafes ve f, L nin bir türevi olsun. $a = f(a)$ ise $a \in L$ elemanına f türevi için "sabit" eleman denir. f nin sabit elemanlarının kümesi Fix (f) ile gösterilir.

Önerme 2.1.7 : L bir kafes, f bir türev olsun. O zaman Fix (f) kümesi L nin bir idealidir.

Kanıt : $x, y \in \mathrm{Fix}(f)$ olsun. f bir türev olduğu için $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = x \vee y$ ve buradan da $x \vee y \in \mathrm{Fix}(f)$ elde edilir. Şimdi $x \in \mathrm{Fix}(f)$ ve $y \leq x$ olsun.

$y = y \wedge x = y \wedge f(x) = f(x \wedge y) = f(y)$ den $y \in \mathrm{Fix}(f)$ sonuçlanır. O halde Fix(f), L nin bir idealidir. ⊠

Gözlem : L bir modüler kafes ise *Tanım 2.1.1* (2) koşulu aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$f(x \wedge y) = (f(x) \wedge y) \vee (x \wedge f(y)) = y \wedge (f(x) \vee (x \wedge f(y)))$$

$$= y \wedge (x \wedge (f(x) \vee f(y))) = (x \wedge y) \wedge (f(x \vee y))$$

Tanım 2.1.8 : L bir kafes ve a, L nin bir elemanı olsun. L deki her x, y elemanları için $a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$ ise a elemanına dağılmalı denir. Bir kafesin tüm dağılmalı elemanlarının kümesine kafesin merkezi denir.

Teorem 2.1.9 : ([11]) L, 1 tepe elemanlı bir kafes olsun. f: L → L dönüşümü L nin bir türevidir ancak ve ancak her $x \in L$ için $f(x) = a \wedge x$ olacak şekilde bir $a \in L$ dağılmalı elemanı vardır. Bu durumda $a = f(1)$ olduğu açıktır.

Kanıt : Koşul yeterlidir: $a \in L$ bir dağılmalı eleman ise $f(x) = a \wedge x$ biçimindeki her fonksiyonun L üzerinde bir türev olduğu gösterilmelidir. Bunun için *Tanım 2.1.1* (1) ve (2') koşulları gerçekleniyor.

(1) $f(x \vee y) = a \vee (x \vee y) = (a \vee x) \vee (a \wedge y) = f(x) \vee f(y)$

(2') $f(x \wedge y) = a \wedge (x \wedge y) = (a \wedge x) \wedge y = f(x) \vee y$

Koşul Gerektir: f bir türev ise her $x \in L$ için $f(x) = a \wedge x$ olacak şekilde bir $a \in L$ dağılmalı elemanının var olduğu (2') den $f(x) = f(x \wedge 1) = x \wedge f(1)$ görülür, çünkü f bir türev olduğu için $f(1)$ elemanı dağılmalı olmak zorundadır.

Böylece 1 tepe elemanlı dağılmalı bir L kafesi verildiğinde L nin türevlerinin kümesi f_a: L → L, $x \to f_a(x) = a \wedge x$ ile tanımlanan dönüşümlerin kümesi ile çakışır.

Daha açık söylemek gerekirse f_a, L nin $f(1) = a$ olacak şekilde tek türevidir. Bu türevlere (L dağılmalı olmasa bile) basit türevler ve f_a ya a bağlantılı basit türev denir. [11] de kafeslerdeki dağılmalılık ötelemeler aracılığıyla betimlenir.

Önerme 2.1.10 : L bir kafes, f ve g L nin iki türevi olsun. O zaman

(a) $f \circ g$ L nin bir türevidir;

(b) $f \vee g$ ve $f \wedge g$ L nin türevleridir;

(c) $f \wedge g = f \circ g$

Kanıt : Aşağıdaki hesaplamalar f ve g nin türev olmalarının sonucudur.

(a) $(f \circ g)(x \vee y) = f(g(x \vee y)) = f(g(x) \vee g(y))$

$= f(g(x)) \vee f(g(y))$

$= (f \circ g)(x) \vee (f \circ g)(y)$

(b) $(f \vee g)(x \vee y) = f(x \vee y) \vee g(x \vee y)$

$= f(x) \vee f(y) \vee g(x) \vee g(y)$

$= (f(x) \vee g(x)) \vee (f(y) \vee g(y))$

$= (f \vee g)(x) \vee (f \vee g)(y)$

$(f \vee g)(x \vee y) = f(x \wedge y) \vee g(x \wedge y)$

$= (f(x) \wedge y) \vee (g(x) \wedge y)$

$= y \wedge (f(x) \vee g(x))$

$= (f \vee g)(x) \wedge y$

Benzer şekilde $f \wedge g$ nin bir türev olduğu gösterilir.

(c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x \wedge g(x)) = f(x) \wedge g(x) = (f \wedge g)(x)$ ⊠

$f \circ g = f \wedge g$ eşitliği L nin dağılmalı bir kafes olmasına bağlı değildir, yani L dağılmalı olmasa bile f ve g, L nin türevleri ise $f \wedge g$, L nin bir türevidir.

Bu bölümü anlamlı bir örnek ile sonlandırıyoruz.

Örnek 2.1.11 : ([5], [7])

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere m, n $\in \mathbb{N}$ için; $m \vee n = \min(m,n)$ ve $m \wedge n = \max(m, n)$ tanımları altında $< \mathbb{N}, \vee, \wedge >$, $< \mathbb{N}, \leq >$ ye karşılık gelen kafestir. Bu kafesin bir tepe elemanı yoktur ve aşağıdaki teoremin de belirttiği gibi sadece aşikar türevlere sahiptir.

Teorem 2.1.12 : Bir f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü $f = id_{\mathbb{N}}$ ya da bir $a \in \mathbb{N}$ için $f(x) = \min(a, n)$ ise ancak f N nin bir türevidir.

Kanıt : ([5]) ⊠

2.2 TÜREVİN ÖZELLİKLERİ

Bu kesimde [11] deki türev tanımı yerine genel tanım olarak kabul edilene örnek veriliyor ve bazı özellikleri inceleniyor.

Tanım 2.2.1 : L bir kafes ve d: L → L bir fonksiyon olsun.

$$d (x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$$

sağlanıyorsa d ye bir türev denir. d(x) yerine dx yazılabilecektir.

Örnek 2.2.2 : L bir kafes olsun. d:, $x \mapsto dx = 0$ bir türevdir; 0 taban elemanlı bu türeve L nin sıfır türevi denir. $d = id_L$ türevine, yani $dx = x$, L nin birim türevi denir.

Örnek 2.2.3 : L diyagramı Şekil 8 de çizilen kafes olsun. d: L $\rightarrow$ L fonksiyonu

$$dx=\begin{cases} 0 & x=0 \text{ ya da } 1 \\ b & x=a \\ b & x=b \end{cases}$$

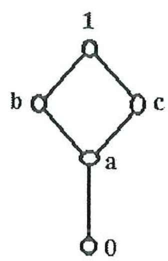
L üzerinde bir türevdir.

Şekil - 8

Örnek 2.2.4 : L diyagramı Şekil 9 da çizilen kafes olsun.
d: L $\rightarrow$ L fonksiyonu,

$$dx=\begin{cases} 0 & x=0 \\ a & x=a\,,\,c \\ b & x=b\,,\,1 \end{cases}$$

L üzerinde bir türevdir.



Şekil - 9

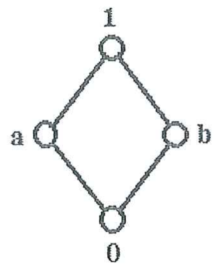
Örnek 2.2.5 : L şekil 10 daki kafes olsun ve d: L $\rightarrow$ L fonksiyonu

$d(0) = 0$, $d(a) = b$, $d(b) = a$, $d(1) = 1$ olarak tanımlansın. Şimdi

$0 = d(a) = d(a \wedge 1) \neq (da \wedge 1) \vee (a \wedge d1)$

$= (b \wedge 1) \vee (a \wedge 1) = b \vee a = 1$

nedeniyle d bir türev değildir.



Şekil - 10

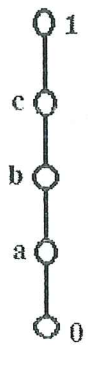
Örnek 2.2.6 : L Şekil 11 deki kafes olsun. d: L $\rightarrow$ L fonksiyonu

$d0 = 0$, $da = a$, $db = a$, $dc = c$, $d1 = c$ gibi tanımlanırsa,

$a = db = d(b \wedge 1) = (db \wedge 1) \vee (b \wedge d1)$

$= (a \wedge 1) \vee (b \wedge c) = a \vee b = b$

ve $a \neq b$ nedeniyle L nin bir türevi değildir.



Şekil - 11

Bu kesimin kalanında türevin bazı temel özellikleri çalışılıyor.

Önerme 2.2.7 : L bir kafes ve d, L nin bir türevi ise o zaman her x, y $\in$ L için

(a) $dx \leq x$;

(b) $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$;

(c) I, L nin bir ideali ise $d(I) \subseteq I$ dır;

(d) L 0 taban ve 1 tepe elemanlarına sahip ise $d0 = 0$ ve $d1 \leq 1$ dir.

Kanıt :

(a) $dx = d(x \wedge x) = (dx \wedge x) \vee (x \wedge dx) = dx \wedge x$, $dx \leq x$ yi gerektirir.

(b) $x \wedge y \leq x$ ve $x \wedge y \leq y$ ve (a) dan $d(x \wedge x) \leq d(x) \vee d(y)$ sonuçlandırılır. $d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$, $d(x \wedge y) \geq dx \wedge y$ ve $(x \wedge dy) = (dx \wedge dy) \wedge (x \wedge y) = (x \wedge dx) \wedge (y \wedge dy) = dx \wedge dy$ yani $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$ bulunur. Böylece istenilen eşitlikler gösterilmiş olur.

(c) (d) gereği $d0 = 0$ dır; dolayısıyla $0 = d0 \in d(I)$, yani $d(I) \neq 0$ dır. x, y $\in$ d(I) ise bazı a, b $\in$ I için $x = d(a)$, $y = d(b)$ ve buradan $x \vee y = d(a \vee b)$ elde edilir, yani $x \vee y \in d(I)$ dir. $x \in d(I)$, $c \in L$ ve $c \leq x$ olsun. $c = c \wedge x = c \wedge d(y)$, $y \in I$, buradan da türev tanımı sayesinde $c = d(c \wedge y)$ yazılır. $c \wedge y \leq y$ nedeniyle $c \wedge y \in I$ ve böylece $c \in d(I)$ bulunur. Böylece d(I) bir idealdir. Şimdi $x \in d(I)$ olsun. O zaman bir $z \in I$ için $x = d(z)$ dir. Madem ki $dz \leq z$ ve $dz = z \wedge dz$ dir. Buradan $dz = x \in I$ sonuçlandırılır; bu da $d(I) \subseteq I$ demektir.

(d) $d(0) = d(0 \wedge 0) = d0 \wedge 0 = 0 \wedge d0 = 0$ dır. **(a)** da $x = 1$ alınırsa $d1 \leq 1$ elde edilir. ⊠

Tanım 2.2.8 : L bir kafes ve d, L üzerinde bir türev olsun.

(a)$x \leq y$, $dx \leq dy$ yi gerektiriyorsa d türevine monoton yada izoton veya sıra-koruyan denir.

(b) d bire-bir ise injektif yada monik türev diye adlandırılır.

(c)Örten ise d ye bir epik türev denir.

Teorem 2.2.9 : L 1 tepe elemanlı bir kafes ise her $x \in L$ için aşağıdakiler vardır:

(a)$dx = (x \wedge d1) \vee dx$;

(b) $x \geq d1$ ise $dx \geq d1$ dir;

(c)$x \leq d1$ ise $dx = x$ dir.

Kanıt :

(a) $dx = d(x \wedge 1) = (dx \wedge 1) \vee (x \wedge d1) = dx \vee (x \wedge d1)$

(b) $x \geq d1$ varsayalım. **(a)** dan $dx \geq x \wedge d1$ ve $x \geq d1$ den $x \wedge d1 = d1$ olduğu için $dx \geq d1$ sonuçlanır.

(c) $x \leq d1$ olsun. O zaman $dx = d(x \wedge 1) = x \wedge d1 = x$ elde edilir. ☒

Önerme 2.2.10 : L bir kafes ve d, L üzerinde bir türev olsun. $y \leq x$ ve $dx = x$ ise o zaman $dy = y$ dir.

Kanıt : $y \leq x$ ise $y = x \wedge y$ dir ve böylece,

$dy = d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) = (x \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ yazılır. Şimdi $dy \leq y \leq x$ olduğundan $x \wedge dy = dy$ dir ve buradan $dy = y \vee dy = y$ elde edilir. ☒

Teorem 2.2.11 : L bir kafes ve d, L üzerinde bir türev olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) d birim türevdir;

(b) $d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (dx \vee y)$;

(c) d bir monik türevdir;

(d) d bir epik türevdir.

Kanıt :

(a) nın diğer koşulları gerektirdiği açıktır.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : (b) de $y = x$ olmak yeterlidir.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : d monik olsun. Eğer $d \neq a$ gibi bir $a \in L$ elemanı varsa $da \leq a$ olgusundan $da < a$ yazılır. $x = da$ olsun, öyleyse $x < a$ dır ve buradan

$$dx = d(x \wedge a) = (dx \wedge a) \vee (x \wedge da) = dx \vee x = x$$

ve böylece $dx = x = da$ dır. d monik olduğu için de $x = a$ sonuçlandırılır. Bu bir çelişkidir, dolayısıyla L de $da \neq a$ şeklinde eleman yoktur, yani de birim türevdir.

(d) $\Longrightarrow$ (a) : d epik, yani $d(L) = L$ olsun. Bu durumda $x = dy$ olacak şekilde her $x \in L$ için bir $y \in L$ vardır. $dx = d(dy) = d^2y = dy = x$ dir; gerçekten,

$d^2y = d(dy) = d(y \wedge dy) = (dy \wedge dy) \vee (y \wedge d^2y) = dy \vee dy = dy$ dir; böylece her $x \in L$ için $dx = x$ bulunur, yani d birim türevdir. ⊠

Teorem 2.2.12 : L 1 tepe elemanlı bir kafes ve d, L nin bir türevi olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

(a) d monoton bir türevdir;

(b) $dx = x \wedge d1$;

(c) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$;

(d) $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$.

Kanıt : **(a) ⟹ (b)** : d monoton olsun. 1 tepe eleman olduğu için $x \leq 1$ ve buradan $dx \leq d1$ olur. Ve $dx \leq x$ nedeniyle de $dx \leq x \wedge d1$ dir. Şimdi *Önerme 2.2.9* (a) uyarınca $dx = dx \vee (x \wedge d1) = x \wedge d1$ sonuçlanır.

(b) ⟹ (c) : (b) yardımıyla

$dx \wedge dy = (x \wedge d1) \wedge (y \wedge d1) = (x \wedge y) \wedge d1 = d(x \wedge y)$ bulunur.

(c) ⟹ (a) : (c) doğru ve $x \leq y$ olsun. O zaman

$x = x \wedge y$ ve $dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ den $dx \leq dy$ olduğu görülür,

yani d monotondur.

(a) ⟹ (d) : $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$ ve d monoton olduğu için

$dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ yazılır.

(d) ⟹ (a) : $x \leq y$ olsun. O zaman

$dx \vee dy \leq d(x \vee y) = dy$ ve $dx \vee dy = dy$ dir, ki bu $dx \leq dy$ demektir;

yani d monotondur. ⊠

2.3 MODÜLER VE DAĞILMALI KAFESLERİN MONOTON TÜREV ARACILIĞIYLA KARAKTERİZASYONU

***Teorem** 2.3.1* : L bir modüler kafes ve d, L üzerinde bir türev olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(a) d monotondur;

(b) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$;

(c) $dx = x$ ise $d(x \vee y) = dx \vee dy$ dir.

Kanıt : **(a) ⟹ (b)** : d monoton ise $x \wedge y \leq x$ ve $x \wedge y \leq y$ den $d(x \wedge y) \leq dx$ ve $d(x \wedge y) \leq dy$, böylece $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$ elde edilir. Öte yandan, L modüler ve $dx \wedge y \leq x$ olduğu için aşağıdakiler açıktır:

$$
\begin{aligned}
d(x \wedge y) &= (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy) \\
&= ((dx \wedge y) \vee dy) \wedge x \\
&= (dy \vee (dx \wedge y)) \wedge x \\
&= ((dy \vee dx) \wedge y) \wedge x \\
&\geq dx \wedge dy \wedge y \wedge x \\
&= dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

(b) ⟹ (a) : $x \leq y$ ise $x \wedge y = x$ ve $dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ dir. Buradan $dx \leq dy$, d nin monoton olduğunu gösterir.

(a) ⟹ (c) : $dx = x$ olsun. Şimdi L_4 yutma yasası ve türev tanımından $dy = dy \vee (y \wedge d(x \vee y))$ sonuçlanır. L modüler olduğu için $dy = (dy \vee y) \wedge d(x \vee y) = y \wedge d(x \vee y)$ elde edilir.

Böylece;

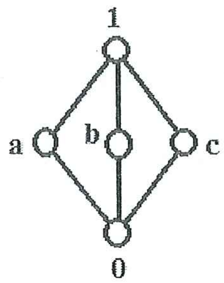
$$
\begin{aligned}
dx \vee dy &= dx \vee (y \wedge d(x \vee y)) \\
&= (dx \vee y) \wedge d(x \vee y) \\
&= (x \vee y) \wedge d(x \vee y) \\
&= d(x \vee y)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : $x \leq y$ olsun. $d(dx) = dx$ olduğu biliniyor. Varsayımdan $d(dx \vee dy) = d(dx) \vee dy = dx \vee dy$ yazabiliriz. Öte yandan $x \leq y$ $d(dx \vee dy) = dy$ yi gerektirir, dolayısıyla $dy = dx \vee dy$, yani $dx \leq dy$ dir. ☒

Bir modüler kafes ve d bir monoton türev ise genelde $d(x \vee y) = dx \vee dy$ geçerli olmayabilir.

Örnek 2.3.2 : L, Şekil 12 deki modüler kafes olsun. b tarafından üretilen $dx = x \wedge b$ türevi monotondur ve ***Teorem 2.3.1*** uyarınca $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ vardır. Ama $d(a \vee c) = d1 = b$, $da \vee dc = 0$ olduğu için $d(a \vee c) \neq da \vee dc$ dir.



Şekil - 12

Bununla birlikte dağılmalı bir kafeste d monoton ise $d(x \vee y) = dx \vee dy$ sağlanmaktadır.

Teorem 2.3.3 : L bir dağılmalı kafes ve d, L üzerinde bir türev olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(a) d monotondur;

(b) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$;

(c) $d(x \vee y) = dx \vee dy$.

Kanıt : Dağılmalı bir kafes modüler olduğu için *Teorem 2.3.1* uyarınca (a) $\Leftrightarrow$ (b) doğrudur.

(a) $\Longrightarrow$ (c) : d monoton ise $dx \leq d(x \vee y)$ ve $dy \leq d(x \vee y)$ dir. L_4 yutma yasası ve türev tanımından $dx = dx \vee (x \wedge d(x \vee y))$ olduğu gösterilebilir. Şimdi L dağılmalı bir kafes olduğu için $dx = (dx \vee x) \wedge (dx \vee d(x \vee y)) = x \wedge d(x \vee y)$ ve aynı şekilde $dy = y \wedge d(x \vee y)$ yazılabilir. O halde ;

$$dx \vee dy = (x \wedge d(x \vee y)) \vee (y \wedge d(x \vee y))$$

$$= (x \vee y) \wedge d(x \vee y) = d(x \vee y) \text{ elde edilir.}$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) : $d(x \vee y) = dx \vee dy$ olsun. $x \leq y$ ise $y = x \vee y$ ve buradan (c) gereği $dy = d(x \vee y) = dx \vee dy$ sonuçlanır; başka bir deyişle, $dx \leq dy$, d nin monoton olduğunu kanıtlar. ⊠

Önerme 2.3.4 : L dağılmalı bir kafes ve d_1, d_2 L üzerinde iki monoton türev olsun. O zaman

$$(d_1 \wedge d_2)(x) = d_1x \wedge d_2x$$

$$(d_1 \vee d_2)(x) = d_1x \vee d_2x$$

olarak tanımlanan $d_1 \wedge d_2$ ve $d_1 \vee d_2$ L üzerinde monoton türevlerdir.

Kanıt : Tanımdan $(d_1 \vee d_2)(x \wedge y) = d_1(x \wedge y) \vee d_2(x \wedge y)$ yazılabilir. d_1 ve d_2 türev oldukları için de, $d_1(x \wedge y) = d_1x \wedge y$ ve $d_1(x \wedge y) = d_2x \wedge y$ dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
(d_1 \vee d_2)(x \wedge y) &= (d_1x \wedge y) \vee (d_2x \wedge y) \\
&= (d_1x \vee d_2x) \wedge y \\
&= (d_1 \vee d_2)(x) \vee y
\end{aligned}
$$

ve benzer şekilde $(d_1 \vee d_2)(x \wedge y) = (d_1 \vee d_2)(y) \wedge x$ elde edilir. Bunlar kombine edildiğinde,

$(d_1 \vee d_2)(x \wedge y) = ((d_1 \vee d_2)(x) \wedge y) \vee ((d_1 \vee d_2)(y) \wedge x)$ oluşur ki bu, $d_1 \vee d_2$ nin L üzerinde bir türev olduğunu gösterir.

Öte yandan,

$$
\begin{aligned}
(d_1 \vee d_2)(x \vee y) &= d_1(x \vee y) \vee d_2(x \vee y) \\
&= (d_1x \vee d_1y) \vee (d_2x \vee d_2y) \\
&= (d_1x \vee d_2x) \vee (d_1y \vee d_2y) \\
&= (d_1 \vee d_2)(x) \vee (d_2 \vee d_2)(y)
\end{aligned}
$$

olduğu için ***Teorem 2.3.3*** uyarında $d_1 \vee d_2$ monotondur. $\boxtimes$

Teorem 2.3.5 : ([13])

L dağılmalı bir kafes ve M(L), L üzerindeki tüm monoton türevlerin bir kümesi olsun. O zaman $< M(L), \vee, \wedge >$ bir dağılmalı kafestir.

Kanıt : ([13]). $\boxtimes$

Aşağıdaki teore ğılmalı kafeslerin bir karakterizasyonunu verir.

Teorem 2.3.6 : L bir kafes olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(a) L dağılmalıdır.

(b) L nin her monoton türevi $d(x \vee y) = dx \vee dy$ yi sağlar. ⊠

Son olarak türevler aracılığıyla modüler kafesler karakterize edilecektir.

Önerme 2.3.7 : L bir kafes ve d, L nin bir monoton türevi olsun. $dx = x$; $d(x \vee y) = dx \vee dy$ yi gerektiriyorsa L bir modüler kafestir.

Kanıt : $x, y, z \in L$ ve $x \leq z$ olsun. Her $w \in L$ için d yi $dw = w \wedge z$ olarak tanımlayalım. d nin monoton olduğu açıktır. $x \leq z$ nedeniyle $dx = x \wedge z = x$ dir. Varsayımdan $d(x \vee y) = dx \vee dy$ vardır. Şimdi

$d(x \vee y) = (x \vee y) \wedge z$ ve $dx \vee dy = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) = x \vee (y \wedge z)$ dir. Buradan $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ sonuçlanır ki bu L nin bir modüler kafes olduğunu gösterir. ⊠

Teorem 3.7.8 : L bir kafes olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(a) L modülerdir.

(b) L nin $dx = x$ koşulunu sağlayan her d monoton türevi $d(x \vee y) = dx \vee dy$ yi gerektirir.

Kanıt : ([12]). ⊠

L bir kafes ve a, L nin bir türevi olsun. d_a fonksiyonunu her $x \in L$ için $d_a(x) = x \wedge a$ şeklinde tanımlayalım. $D(L) = \{d_a : a \in L\}$ olsun. O zaman yukarıdaki sonuçlardan aşağıdakiler elde edilir.

Teorem 3.7.9 : L dağılmalı bir kafes olsun. O zaman L ile D(L) izomorftur $\boxtimes$

Sonuç Teorem 3.7.10 : L dağılmalı bir kafes ise D(L) de dağılmalı bir kafestir $\boxtimes$

SONUÇ : Bu tezde bir kafes için türev kavramı tanıtılıyor. Esas olarak monoton türevler inceleniyor ve çeşitli kafes türlerinde monoton türevlerle ilgili bazı önemli yapısal özellikler kanıtlanıyor. Bunlar arasında d bir monoton türev ve Fix_d (L), L nin sabit elemanlarının kümesi ise Fix_d (L) nin L de bir ideal olduğu sonucu yer alıyor. Öte yandan Birkhoff'un M_3-N_5 teoremi dışında dağılmalı ve modüler kafesler monoton türevlerin sağladığı denk koşullar aracılığıyla karakterize ediliyor.

Bir kafes üzerinde çeşitli türevler tanımlanarak bazı karakterizasyon teoremleri elde edilebilir. Bunlardan bazıları şöyledir:

(a) Genelleştirilmiş (α, β) türev yardımıyla modüler kafesler karakterize ediliyor.

(b) Farklı türev aracılığıyla modüler ve dağılmalı kafesler betimleniyor.

(c) f – izoton türev tanımlanarak modüler ve dağılmalı kafesler betimleniyor.

(d) f – türevler aracılığıyla dağılmalı ve modüler kafesler betimleniyor.

KAYNAK DİZİNİ

[1] Bell, H. E. , Kappe, L.C. , Rings in whichderivativessatisfycertainalgebrabicconditions, Acta Math. Hungar 53 (3-4) (1989) 339-346.

[2] Bell ,H. E. , Masou, G. , On derivations in near-ringsandnear-fields, North Holland Math. Studies 137 (1987) 31-35.

[3] Birkhoff, G. , LatticeTheory, 3rdedition, Vol.25, AMS, Providence, 1963.

[4] Davey, B. A. , Priesty, H. A. , Introductiontolatticesandorder, Cambridge UniversityPress, 2002.

[5] Ferrari, L. , Onderivations of lattices, PU. M. A. Vol.12 (2001) No. 4, 1-18.

[6] Kaya K. , Prime ringswithαderivations, BullMatevSci. Eng. 16-16 (1987) 63-71, 1988.

[7] Kolibiar, M. Beunerkungenübertranslationen der verbünde, ActaFac. Ber. Nat. Univ. Comenianae, 5 (1961), 455-458.

[8] Posner, E. , Derivations in prime rings, Proc. Amer. Math. Sol. 8 (1957) 1093-1100.

[9] Rasiowa, H. , Sikorski, R. , Themathematics v1 metamathematics, PWN – PolishScientiticPublishers, 1963.

[10] Szasz, G. , Translationen der verbünde, ActaFac. Ber. Nat. Univ. Comenianae, 5 (1961), 57

[11] Szasz, G. , Derivations of lattices, ActaSci. Math. (Szeged), 37 (1975), 149-154

[12] Xiao, L. X. , Ti, Y. L. , Jing, H. L. , On derivationsoflattices, Information Sciences 178 (2008) 307-316

[13] XiaoLongXin, Thefixed set of a derivation in a lattices, Fixed Point Theoryand Applications, 2012, 2012:18