YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İNDİRGEMELİ DİZİLER VE UYGULAMALARI

SELÇUK SAĞBAŞ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR
Aralık-2014

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Rafail ALİZADE (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü Müdürü

ÖZET

İNDİRGEMELİ DİZİLER VE UYGULAMALARI

SAĞBAŞ, Selçuk

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Aralık 2014, 46 sayfa

Bu çalışmada; indirgemeli dizilerin bazı sayma problemlerinin çözümündeki uygulamaları ile ilgili kullanılışı gösterildi. Sayma problemlerinde indirgeme bağıntısının kuruluşu anlatıldı. İndirgeme bağıntıları başlıklar halinde sınıflandırıldı. Ayrıca bazı örneklerde indirgeme bağıntısı kullanılarak dizilerin genel terimlerinin bulunması ile ilgili çeşitli yöntemler olduğu üzerinde duruldu. Bu yöntemler teleskopik, karakteristik ve üretici fonksiyon olarak incelendi. Uygulama bölümünde ise indirgemeli diziler ve sayma problemleri ile ilgili sorular çözüldü.

Anahtar Kelimeler: İndirgemeli Dizi, İndirgeme Bağıntısı, İndirgemeli Dizilerin Genel Terimi, Üretici Fonksiyon, Sayma Problemleri.

ABSTRACT

RECURSIVE SEQUENCES AND THEIR APPLICATIONS

SAĞBAŞ, Selçuk

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

December 2014, 46 pages

In this thesis the usage of recursive sequences on solutions of some counting problems is considered. It is also mentioned about how to set up recurrence relations on counting problems. Recurrence relations are classified. Telescopic, Characteristic and Generating Function methods are used to find general term of recursive sequences for some problems. As an application, it is also solved some problems about recursive sequences and counting problems .

Keywords: Recursive Sequences, Recurrence Relation, Genaral Term of Recursive Sequences, Generating Function, Counting Problems.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca ufkumu genişleterek sürekli gelişmemi sağlayan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Rafail ALİZADE' ye ve yine çalışmalarım boyunca sabır gösterip beni destekleyen eşim Gülşen SAĞBAŞ ve oğullarımız Ahmet SAĞBAŞ ve Süleyman Emre SAĞBAŞ' a teşekkür ederim.

Selçuk SAĞBAŞ
İzmir, 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İndirgemeli Diziler ve Uygulamaları” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

18.12.2014
Selçuk SAĞBAŞ

İÇİNDEKİLER

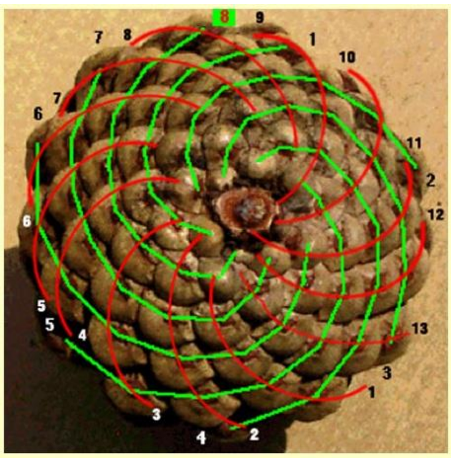
Sayfa

1 GİRİŞ

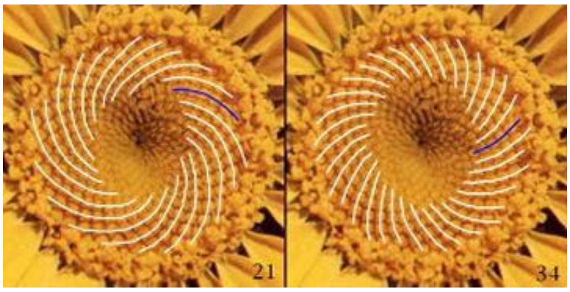
Kendisinden önceki terim veya terimler kullanılarak elde edilebilen terimlerden oluşan dizilere indirgemeli dizi denir. İndirgemeli dizilerin birbirini takip eden eleman veya elemanları arasında kurulabilecek denklemsel ilişkiye de indirgeme bağıntısı denmektedir. İndirgemeli dizilerin terimlerine indirgeme bağıntısı yardımıyla bir genel terim de bulunabilir. İndirgemeli dizilerin sınıflandırılması indirgeme bağıntısına göre yapılabilir. İndirgemeli dizilerin, uygun olan durumlarda genel terimlerinin bulunması ve sonlu matematikteki bazı sayma problemlerinde indirgeme bağıntısının kurularak uygulanması mümkündür. Teleskopik toplam, karakteristik denklem ve üretici fonksiyon yöntemleri indirgemeli dizilerin genel terimlerinin bulunmasında kullanışlı olabilir.

Klasik problem çözme yöntemleri ile oldukça zor çözülen, örneklerine uluslararası ve ulusal matematik olimpiyatlarında rastlanabilen bazı problemler indirgeme bağıntısı kurularak çok kolay bir şekilde çözülebilmektedir. Her ne kadar indirgeme bağıntısını kurmak zor olabilse de kurduktan sonraki kısım sadece işlemdir.

Aritmetik ve geometrik diziler birer indirgemeli dizi olduğu gibi en yaygın bilinen indirgemeli dizilerden birisi de Fibonacci dizisidir.



Bu kozalağın kabuklarının diziliminde saat yönünde 8 sıra kabuk pulu varken, saat yönünün tersinde 13 sıra kabuk pulu bulunur. Bu sayıların birbirlerine bölümü 1.6'yı yani altın oranı verir.

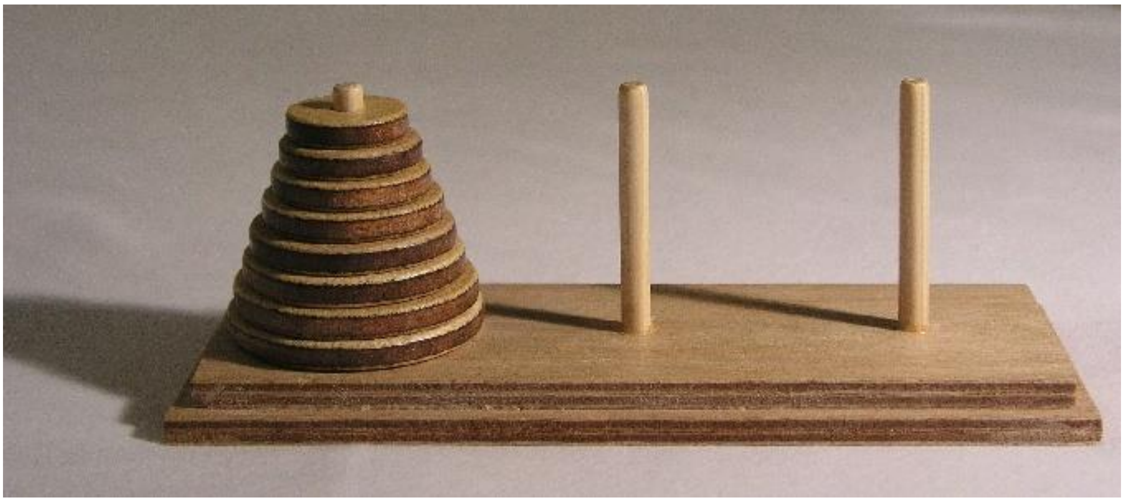


1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, . . . şeklinde devam eden Fibonacci dizisi ilk ve ikinci terimi 1 olacak şekilde her terim kendisinden önce gelen iki terimin toplamı ile, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ kuralına göre inşa edilmektedir.

Fibonacci dizisiyle ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Fibonacci sayıları ve altın orana doğada, sanatta ve mimaride bir düzen olarak karşılaşılması üzerine bir çok kitap yazılmıştır.

Fibonacci sayıları arasında kurulan bir çok ilişki oldukça ilginçtir. Bununla ilgili güncel kaynaklarda ve bilimsel literatürde eserler bulunmaktadır.

Hanoi Kuleleri adıyla bilinen bir diğer problem ise indirgemeli diziler yardımıyla çözülebilmektedir.



Hanoi Kuleleri probleminde büyükten küçüğe bir çubuğa sıralanmış halkaların hepsinin her hamlede bir halka hareket ettirmek ve herhangi bir halkanın kendisinden küçük bir halkanın üzerine gelmemesi koşuluyla boş olan diğer iki çubuktan birine kaç hamlede aynı şekilde sıralanabileceği sorulmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde ön bilgiler başlığı altında tezde kullanılan sayma ve analiz yöntemleri ile ilgili bilgi verilip kullanılışları gösterilmiştir. Üçüncü bölümde ise indirgemeli diziler sınıflandırılarak tanıtılmış ve örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde uygulamalar başlığı altında içlerinde matematik olimpiyat yarışmalarından soruların da bulunduğu çeşitli problemler çözülmüştür. Beşinci bölümde çalışma ile ilgili genel bir değerlendirme yapılmıştır.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan yöntemlerle ilgili ön bilgiler yer almaktadır.

2.1 Temel Sayma Yöntemleri

Seçmekle karşı karşıya kalınan herhangi bir şey, durumlar veya olaylar ayrık olarak A_1, A_2, A_3, ... ile isimlendirilsin ve bunların olma alternatifi sayıları a_1, a_2, a_3, ... olsun. Bu durumda A_1, A_2, A_3, ... den birinin olma sayısı **saymanın toplama prensibi** kullanılarak $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ ile, A_1, A_2, A_3, ... lerin aynı anda olmasının doğuracağı durum sayısı ise **saymanın çarpma prensibi** kullanılarak $a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots$ ile hesaplanabilir.

n tane nesnenin yan yana sıralanma sayısı $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ ile içlerinden r tanesinin sıralanma sayısı (n ' nin r ' li sıralamaları) ise **permütasyon** $P(n,r) = n!/(n-r)!$ ile hesaplanabilir. Sıralanmak istenen nesnelerin içinde aynı nitelikte veya özdeş diye tabir edilebilecek olanların kendi içlerindeki sıralanmaları farklı bir sıralama oluşturmayacağından sıralanma sayısı bunların farklı nesneymiş gibi sırlanması oranında düşürülür. **Tekrarlı permütasyon** olarak isimlendirilen bu durum bütün tekrar eden farklı özdeş nesneler için uygulanır.

n tane farklı nesnenin içinden sıralama önemsenmeden yapılan r tane nesneden oluşan gruplama veya seçim sayısı ise **kombinasyon** $C(n,r) = n!/[(n-r)!\, r!]$ ile hesaplanabilir.

2.2 Kuvvet Serisi

$(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi katsayılarını oluşturan

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

şeklindeki ifadelere **kuvvet serileri** denmektedir. Dizi $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = c$ gibi bir sabit dizi olduğunda ve $|x| < 1$ aralığında değerler aldığında **kuvvet serisi geometrik seriye** dönüşür. Bu durum bazı fonksiyonların biçimsel olarak serilerle ifade edilebileceği sonucunu doğurur. Bu tip fonksiyonlara aşağıda örnekler verilebilir.

- $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$
- $\dfrac{a}{1-x} = \sum_{n\geq 0} ax^n = a(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)$
- $\dfrac{1}{1-ax} = \sum_{n\geq 0} (ax)^n = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots + a^n x^n + \cdots$
- $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{n\geq 0} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots$
- $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum_{n\geq 0} x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$
- $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} + \cdots + \dfrac{x^n}{2^n} + \cdots$
- $\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{dy}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} x^n\right) = \dfrac{dy}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)$

  alındığında veya

  $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)^2 = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2$ alındığında

  $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$

- $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^3 = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$

  $= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2$

  $= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots)$

  her bir çarpan tek tek dağıtılacak olursa

$$\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^3 = \begin{array}{r} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \\ x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots \\ x^2 + 2x^3 + \cdots + (n-1)x^n + \ldots \\ x^3 + \cdots + (n-2)x^n + \ldots \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = 1 + (1 + 2)x + (1 + 2 + 3)x^2 + \cdots + (1 + 2 + \cdots + (n + 1))x^n + \cdots$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} x^n + \cdots$$

2.3 Üretici Fonksiyon (Generating Function)

Üretici fonksiyon (üreteç fonksiyon, generating function) bir dizinin terimlerini katsayı olarak kullanan biçimsel kuvvet serisi olarak tanımlanır. Bu sayede dizinin genel teriminin bulunması amaçlanmaktadır. Yöntem uygulanırken üretici fonksiyon

$$A(x) = \textstyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad (1)$$

şeklinde alınır. Buradaki katsayıların dizinin terimleri olduğu kabul edilir. Özellikle indirgemeli dizilerde bu biçimsel kuvvet serisi çok kullanışlı durumlar doğurabilmektedir.

Örneğin çok yaygın bilinen bir indirgemeli dizi olan Fibonacci dizisinde indirgeme bağıntısı $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ şeklinde düşünülecek olursa ve eşitliğin her iki tarafı x^n ile çarpılacak olursa $(a_{n+2})x^n = (a_{n+1})x^n + (a_n)x^n$ elde edilir. Bu denklemde n için sonsuz toplamlar alınırsa her bir terim biçimsel kuvvet serisine dönüşecektir.

$$\textstyle\sum_{n\geq 0} a_{n+2} x^n = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

Bu eşitlikteki katsayı ve x' in kuvveti arasındaki uyumsuzluk denklemin her iki tarafını x' in uygun kuvvetiyle çarparak aşılabilmektedir. Biçimsel kuvvet serisini ifade eden toplam sembollerinde toplam n değişkenine bağlı olduğundan bu çarpma işlemi sorun teşkil etmez.

$$x^2\left(\textstyle\sum_{n\geq 0} a_{n+2} x^n\right) = x^2\left(\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n\right) + x^2\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)$$

denklemi tekrar düzenlenerek

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+2} = x(\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1}) + x^2(\sum_{n\geq 0} a_n x^n) \tag{2}$$

şekline dönüştürülür. Denklemin son halinde başlangıç değerlerindeki farklılıklar ekleme çıkarma yapılarak düzenlenip, serilerin fonksiyonları üretmesi sağlanabilir. Örneğin eşitliğin sol tarafı ele alındığında

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+2} = a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

ifadesine uygun üretici fonksiyonu (1) ' i doğurmak için gerekli olan $(a_0 + a_1x)$ eklenip çıkarılır. Sonuç olarak

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+2} = A(x) - (a_0 + a_1x)$$

denkliği elde edilir. Benzer şekilde (2) denkliğinde denklemin sağ tarafındaki

$$x(\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1}) = x(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...)$$

olan terim

$$x(\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1}) = x(A(x) - a_0)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu şekilde (2) denkliği tamamı ile

$$A(x) - (a_0 + a_1x) = x(A(x) - a_0) + x^2A(x) \tag{3}$$

denkliğine dönüşür. Fibonacci dizisi için başlangıç değerleri olan $a_0 = 0, a_1 = 1$ kullanıldığında (3) denkliği

$$A(x) - x = x\,A(x) + x^2A(x) \tag{4}$$

şekline gelir. Bu denklikten $A(x)$ çekilecek olursa

$$A(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1} \tag{5}$$

kesirli ifadesi elde edilir. (5)' de ulaşılan $A(x)$ basit kesirlerine ayrılacak olursa

$$\frac{-x}{x^2 + x - 1} = \frac{-x}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{M}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{N}{\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$M = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ve $N = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ bulunur. Bulunan sonuçlar yerine konularak

$$A(x) = \frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \tag{6}$$

elde edilir. Bu adımdan sonra kuvvet serisi tekrar kullanılacaktır. $k, t \in \mathbb{R}$ ve $|tx| < 1$ olmak üzere

$$\frac{k}{1 - tx} = k\,(1 + tx + t^2x^2 + t^3x^3 + \ldots)$$

şeklinde açılabileceğinden (6) denkliği düzenlenerek

$$A(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(1 + \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)x + \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^2 x^2 + \ldots\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)x + \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^2 x^2 + \ldots\right)$$

denkliğine, biraz daha düzenlenerek

$$A(x) = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + \ldots\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 x^2 + \ldots\right)$$

ve buradan

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]x + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]x^2 + \ldots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}_{a_n}x^n + \ldots$$

elde edilir. Başta belirtildiği gibi *A(x)'* in katsayıları sırayla Fibonacci dizisinin elemanlarını verecektir. Böylelikle genel terim

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

bulunmuş olur.

Üretici fonksiyonla genel terim bulma tekniği sonlu matematikteki bir probleme analiz yöntemleri kullanarak çözüm bulmaktadır. İki disiplin arasında köprü olması matematikte problem çözme stratejilerinin ne kadar çeşitlenebileceğinin ve gelişebileceğinin etkileyici bir göstergesidir. Burada Fibonacci dizisinin genel terimini bulmak için üretici fonksiyonun indirgemeli dizilerde kullanımına verilen örnek çalışmanın içinde uygun olan kısımlarda uygun şekilde tekrar kullanılacaktır.

3 İNDİRGEMELİ DİZİLER

3.1 Doğrusal İndirgemeli Diziler

(a_n) genel terimiyle verilen bir dizide, k_0, $k_r \neq 0$ olmak üzere, $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_r$ katsayılı ve $1 \leq r \leq n$ şartlarını sağlayan

$$k_0 a_n + k_1 a_{n-1} + \ldots + k_r a_{n-r} = f(n) \tag{7}$$

biçimindeki indirgemeli dizilere r inci mertebeden sabit katsayılı doğrusal indirgemeli dizi denir.

3.1.1 Homojen Doğrusal İndirgemeli Diziler

(7) denkliğinde $f(n) = 0$ olduğunda homojen doğrusal indirgemeli dizi olarak adlandırılır.

Bu durumda Fibonacci dizisi ikinci mertebeden homojen doğrusal indirgemeli dizidir.

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

Fibonacci dizisine genel terim bulunmak istendiğinde kural doğrusal bir denklem formuna getirildikten sonra dizinin kullanılan ardışık terimler karakteristik denkleme dönüştürülerek aşağıdaki adımlar uygulanır. (Markuschewitsch, 1963, 11)

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

dönüştürülen karakteristik denklemin çözümü yapılarak kökleri bulunur.

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

kökleri bulunarak A, B katsayı ve $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

denklemi kurulur. Bu denklemden $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur. Böylelikle Fibonacci dizisinin genel terimi

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

şeklinde olacaktır.

Bu bölümün devamında homojen doğrusal indirgemeli dizilere örnekler verilecektir.

ÖRNEK.1

0 ve *1*' lerden oluşan ve içinde *00* bulunmayan *8* terimli kaç dizi vardır?

ÇÖZÜM.

Bu soru indirgemeli dizi uygulanmadan şöyle çözülebilir. İlk önce bu *8* terimli dizide yan yana *2* tane *0*'ın gelmemesi için en az *4* tane *1* bulunması gerektiği görülmelidir.

4 tene *1* ve *4* tane *0*' ı, *2* tane *0* yan yana gelmemek koşuluyla sıralamak için

_ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ dizisinde alt çizgi ile belirtilen yerlerden *4*'ünü *0*'ları yerleştirmek için seçmek yeterli olacaktır. Bu da *C(5,4)= 5*' dir.

Benzer şekilde *5* tane *1* ve *3* tane *0* için

_ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ dizisinde alt çizgi ile belirtilen yerlerden *3* yer seçilmelidir. *C(6,3) = 20*.

6 tane *1* ve *2* tane *0* için ise dizi

_ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ şeklinde olup alt çizgili yerlerden *2*' si *0*' lar için seçildiğinde *C(7,2) = 21* bulunur.

7 tane *1* ve *1* tane *0* için ise dizi

_ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ *1* _ şeklindedir ve *C(8,1) = 8* farklı yer *0* için seçilebilir.

Son olarak 8 tane 1 için 1 dizi oluşur. Buradan sonuç $5 + 20 + 21 + 8 + 1 = 55$ bulunur.

İndirgemeli dizi ile çözüm yaparken öncelikle şöyle bir tanımlama yapılır: a_n öyle bir dizi elemanı olsun ki; n elemanlı 1 ve 0' lardan oluşup 00 içermeyen sıralanış sayılarını versin. Buradan $a_1 = 2$ (0 ve 1), $a_2 = 3$ (11, 10 ve 01), $a_3 = 5$ (111, 110, 101, 011 ve 010) n' in küçük değerleri için gözlemlenir. n değerleri büyüdükçe hesaplamak zorlaşacaktır. Oysa şöyle bir indirgeme ile hesap kolaylaştırılabilir. Bu dizi kaç elemanlı olursa olsun ilk elemanı ya 0 ya 1 olacaktır. Eğer ilk eleman 1 ise ikinci sıradaki için herhangi bir kısıtlama olmayacağından geriye kalan $n-1$ eleman a_{n-1} ile eğer ilk eleman 0 ise ikinci sırada 0 olamayacağından 1 olacaktır ve üçüncü sıradaki için bir kısıtlama kalmayacağından geriye kalan $n-2$ eleman a_{n-2} ile hesaplanabilir.

Bu durumda $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Fibonacci indirgeme formülü kullanışlı hale gelecektir. Tek fark başlangıç değerlerinin farklı olmasıdır. Sonrası sadece toplamadır.

$n = 4$ için $a_4 = a_3 + a_2$ den $a_4 = 8$

$n = 5$ için $a_5 = a_4 + a_3$ den $a_5 = 13$

$n = 6$ için $a_6 = a_5 + a_4$ den $a_6 = 21$

$n = 7$ için $a_7 = a_6 + a_5$ den $a_7 = 34$

$n = 8$ için $a_8 = a_7 + a_6$ den $a_8 = 55$

ÖRNEK.2

Aslı 12 şekeri günde 1 veya 3 şeker yiyerek kaç farklı şekilde tüketebilir?

ÇÖZÜM.

Çok basit gibi görünen bu soruya indirgemeli dizi uygulanmadan şöyle bir çözüm yapılabilir. Çözüme giderken 1 veya 3 istenildiği kadar kullanılarak toplama işlemi ile 12 elde edilme sayısı yol gösterebilir. Olası durumlar ve sıralanma sayıları maddeler halinde incelendiğinde;

- $3 + 3 + 3 + 3$ (*4* tane *3* kullanıldığında *1* sıralama)
- $3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1$ (*3* tane *3* ve *3* tane *1* kullanıldığında *20* sıralama)
- $3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (*2* tane *3* ve *6* tane *1* kullanıldığında *28* sıralama)
- $3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (1 tane *3* ve *9* tane *1* kullanıldığında *10* sıralama)

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (*12* tane *1* kullanıldığında *1* sıralama)

toplamları ve buradaki *5* durumdaki her toplamdaki sayıların farklı dizilişleri (permütasyonları) hesaplandığında cevap *60* olarak bulunacaktır. Görüldüğü gibi bu çözüm zaman alıcı.

İndirgemeli dizi ile çözümü ise şöyle bir fikre dayanmaktadır. a_n öyle bir dizi elemanı olsun ki; n tane şekerin günde 1 veya 3 şeker yeme şartına bağlı olarak kaç günde yenilebileceğini hesaplasın. Bu durumda $a_1 = 1$, $a_2 = 1\ (1 + 1)$, $a_3 = 2\ (1 + 1 + 1$ veya $3)$, $a_4 = 3\ (1 + 1 + 1 + 1$ veya $1 + 3$ veya $3 + 1)$ şeklinde hesaplanabilir. Burada bir indirgemeli dizi yakalanmak istenmektedir. Şu şekilde yapılabilir: ilk gün yapılan tercih *1* şeker yemek yönünde veya *3* şeker yemek yönünde olacaktır. Bu durumda $n > 3$ şartıyla ilk gün *1* şeker yenirse kalan n-1 şekerin yenme sayısı a_{n-1} ile ilk gün 3 şeker yenirse kalan n-3 şekerin yenme sayısı a_{n-3} ile hesaplanabileceğinden n tane şekerin yenme sayısının aslında $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ homojen doğrusal indirgemeli dizi denkliği ile hesaplanabileceği görülür. Buradan sonrası uzun gibi görünse de aslında sadece toplamadır.

$n = 5$ için $a_5 = a_4 + a_2$ den $a_5 = 4$

$n = 6$ için $a_6 = a_5 + a_3$ den $a_6 = 6$

$n = 7$ için $a_7 = a_6 + a_4$ den $a_7 = 9$

$n = 8$ için $a_8 = a_7 + a_5$ den $a_8 = 13$

$n = 9$ için $a_9 = a_8 + a_6$ den $a_9 = 19$

$n = 10$ için $a_{10} = a_9 + a_7$ den $a_{10} = 28$

$n = 11$ için $a_{11} = a_{10} + a_8$ den $a_{11} = 41$

$n = 12$ için $a_{12} = a_{11} + a_9$ den $a_{12} = 60$

ÖRNEK.3

{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} kümesinin, herhangi iki ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?

ÇÖZÜM.

İyi tanımlanmış bir a_n bu problemin çözümünü çok kolaylaştıracaktır. a_n öyle bir dizi elemanı olsun ki; ardışık n tamsayıdan oluşan $\{1,2,3,...,n\}$ kümesinin iki tane ardışık tam sayı içermeyen alt küme sayısını veren. Bu şartı sağlayan dizinin başlangıç koşulları kolaylıkla belirlenebilir. Bir elemanlı bir kümenin hiçbir alt kümesi ardışık sayı içeremeyeceğinden bütün alt kümeleri bu şartı sağlar. $a_1 = 2$ (2^1 den). İki elemanlı kümede ise sadece kümenin kendisi ardışık iki sayıdan oluştuğundan öz alt kümeleri istenen şartı sağlar. $a_2 = 3$ ($2^2 – 1$ den). a_n' e gelindiğinde ise bu alt kümelerde 1' in olup olmamasının incelenmesi indirgemeli diziyi doğuracaktır. Bu alt kümelerde 1 yok ise geriye kalan $n – 1$ ardışık elemanla bu şartı sağlayan a_{n-1} alt küme olacağı görülebilir. Eğer 1 var ise 2 bulunamayacağından ve geriye kalan $n – 2$ eleman için başka kısıtlama kalmadığından bu şartı sağlayan a_{n-2} alt küme olacağı görülebilir. Buradan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ indirgeme ilişkisine ulaşılır. Fibonacci dizisinden farklı başlangıç koşulları olmasına rağmen dizinin elemanları Fibonacci sayılarından oluşacaktır.

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

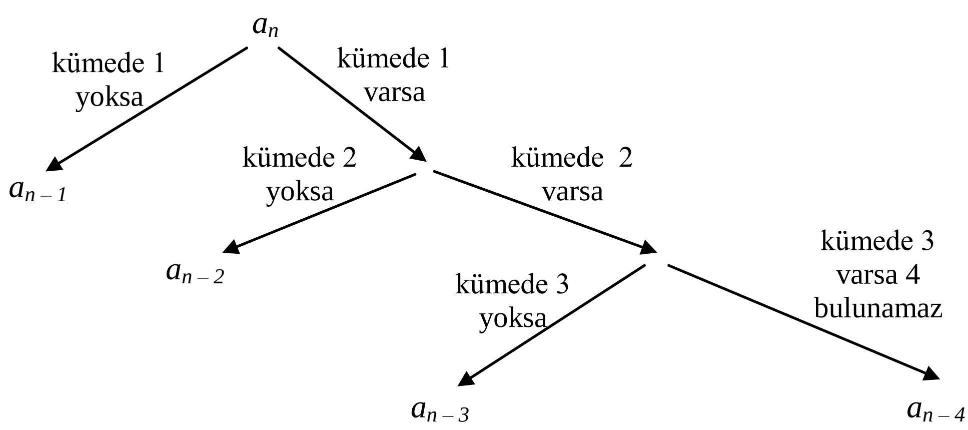
Böylelikle problemde istenen $a_{11} = 233$ kolaylıkla bulunmuş olur.

ÖRNEK.4 (2012-UMO)

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır? (TÜBİTAK)

ÇÖZÜM.

Böyle bir soruya indirgemeli çözüm üretirken a_n'i tanımlamak çok önemlidir. a_n öyle bir dizi elemanı olsun ki; $\{1,2,3,...,n\}$ kümesinin dört tane ardışık tam sayı içermeyen alt küme sayısını veren. Bu durumda bir, iki ve üç elemanlı kümelerin alt kümeleri hiçbir şekilde ardışık sayı içeremeyeceğinden $a_1 = 2$ (2^1 den), $a_2 = 4$ (2^2 den), $a_3 = 8$ (2^3 den) olduğu ve dört elemanlı kümenin alt kümelerinden sadece bir tanesi (kendisi) ardışık dört sayı içerdiğinden $a_4 = 15$ ($2^4 - 1$ den) olduğu kolaylıkla görülebilir. a_n için indirgeme oluşturulurken bir alt küme düşünülür öyle ki; bu alt kümede $1, 2$ ve 3 bulunuyor ise 4'ün bulunmaması gerekir. Geri kalan $n-4$ tane ardışık elemanı a_{n-4} verecektir. Bir tablo ile incelenecek olursa;



$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$ indirgeme ilişkisine ulaşılır. Bulunan başlangıç değerleri dizinin devam eden elemanlarını bulmak için yeterli olacaktır.

$n = 5$ için $a_5 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1$ den $a_5 = 29$

$n = 6$ için $a_6 = a_5 + a_4 + a_3 + a_2$ den $a_6 = 56$

$n = 7$ için $a_7 = a_6 + a_5 + a_4 + a_3$ den $a_7 = 108$

$n = 8$ için $a_8 = a_7 + a_6 + a_5 + a_4$ den $a_8 = 208$

$n = 9$ için $a_9 = a_8 + a_7 + a_6 + a_5$ den $a_9 = 401$

$n = 10$ için $a_{10} = a_9 + a_8 + a_7 + a_6$ den $a_{10} = 773$

ÖRNEK.5 (UMO-2013)

Gerçel sayılardan oluşan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi her $n \geq 3$ için,

$$a_n = (n-1)\, a_1 + (n-2)\, a_2 + \cdots + 2\, a_{n-2} + a_{n-1}$$

eşitliğini sağlamaktadır. $a_{2011} = 2011$ ve $a_{2012} = 2012$ ise, a_{2013} nedir? (TÜBİTAK)

ÇÖZÜM.

$$\begin{array}{rl} & a_n = (n-1)\, a_1 + (n-2)\, a_2 + \cdots + 2\, a_{n-3} + 2\, a_{n-2} + a_{n-1} \\ - & a_{n-1} = (n-2)\, a_1 + (n-3)\, a_2 + \cdots + 2\, a_{n-3} + a_{n-2} \\ \hline & a_n - a_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} \end{array}$$

taraf tarafa çıkarılarak elde edilen denklemde n = 2013 ve n = 2012 değerleri verilerek elde edilen denklikler de taraf tarafa çıkarılır.

$$\begin{array}{lrl} n = 2013, & & a_{2013} - a_{2012} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} + a_{2011} + a_{2012} \\ n = 2012, & - & a_{2012} - a_{2011} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} + a_{2011} \\ \hline & & a_{2013} - 2\, a_{2012} + a_{2011} = a_{2012} \end{array}$$

Böylece

$$a_{2013} = 3\, a_{2012} - a_{2011}$$

$$a_{2013} = 4025$$

olarak bulunur.

3.1.2 Homojen Olmayan Doğrusal İndirgemeli Diziler

(7) denkliğinde $f(n) \neq 0$ olduğunda homojen olmayan doğrusal indirgemeli dizi olarak adlandırılır.

Giriş kısmında bahsedilen Hanoi Kuleleri problemi hatırlanacak olursa, büyükten küçüğe bir çubuğa sıralanmış halkaların hepsinin her hamlede bir halka hareket ettirmek ve herhangi bir halkanın kendisinden küçük bir halkanın üzerine gelmemesi koşuluyla boş olan diğer iki çubuktan birine kaç hamlede aynı şekilde sıralanabileceği sorulmaktaydı. (Guichard, 2001)

Bu problemi çözerken n halka sayısı olmak üzere a_n'in hamle sayısını veren ifade olduğu kabul edilsin. $a_1=1$, $a_2=3$ olduğu kolaylıkla görülebilecektir. Halka sayısı arttıkça sayma işlemi zorlaşacaktır. a_n'i hesaplarken en dipte bulunan n'inci halkanın alınabilmesi için üzerindeki n-1 halkanın diğer çubuklardan birine sıralı bir şekilde yerleştirilmesi gerekir. Daha sonra bu en büyük halka yerinden alınarak üçüncü çubuğun en altına yerleştirilebilir. a_{n-1} hamlede gelinen bu durumdan sonra en büyük halka için 1 hamle yapıldıktan sonra n-1 halka tekrar a_{n-1} hamle ile büyük halkanın üzerine getirilebilir. Bu da $a_{n-1}+1+a_{n-1}$'den $a_n=2a_{n-1}+1$ homojen olmayan doğrusal indirgeme bağıntısını verecektir. Elde edilen indirgeme bağıntısı ile istenilen halka sayısına göre hesaplama yapılabilir.

$n=3$ için $a_3=2a_2+1$ den $a_3=7$

$n=4$ için $a_4=2a_3+1$ den $a_3=15$

$n=5$ için $a_5=2a_4+1$ den $a_3=31$

$n=6$ için $a_6=2a_5+1$ den $a_3=63$

şeklinde rahatlıkla hesaplanabilir.

Bu dizi için genel terim bulunurken teleskopik toplamdan faydalanılabilir. İndirgeme bağıntısı uygun katsayılarla genişletilerek tekrar tekrar alt alta yazılır ve sonra taraf tarafa toplama işlemi yapılır.

2^{n-2}./ $a_2 = 2a_1+1$

2^{n-3}./ $a_3=2a_2+1$

2^{n-4}./ $a_4=2a_3+1$

2^{n-5}./ $a_5=2a_4+1$

.

.

.

2^2./ $a_{n-2}=2a_{n-3}+1$

2./ $a_{n-1}=2a_{n-2}+1$

$a_n=2a_{n-1}+1$

$\Rightarrow$

$$\cancel{2^{n-2}a_2} = 2^{n-1}a_1 + 2^{n-2}$$

$$\cancel{2^{n-3}a_3} = \cancel{2^{n-2}a_2}+2^{n-3}$$

$$\cancel{2^{n-4}a_4} = \cancel{2^{n-3}a_3}+2^{n-4}$$

$$2^{n-5}a_5 = \cancel{2^{n-4}a_4}+2^{n-5}$$

.

.

.

$$\cancel{2^2a_{n-2}} = 2^3a_{n-3}+2^2$$

$$\cancel{2\,a_{n-1}} = \cancel{2^2a_{n-2}}+2$$

$$+\quad a_n = \cancel{2a_{n-1}}+1$$

$$a_n = 2^{n-1}a_1 + \underbrace{1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}}_{\frac{2^{n-1}-1}{2-1}}$$

$$a_1 = 1 \quad ,$$

$$a_n = 2^{n-1} + \frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$

$a_n = 2^n - 1$ genel terimi bulunur.

Hanoi Kuleleri problemi için bulunan indirgeme bağıntısı ve üretici fonksiyon yöntemi kullanılarak da genel terim bulunabilir. Üreteci fonksiyon katsayıları dizinin elemanları olacak şekilde

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \qquad (8)$$

alındıktan sonra $a_n=2a_{n-1}+1$ indirgeme bağıntısı n yerine $n + 1$ yazılarak düzenlenir ve eşitliğin her iki tarafı x^n ile çarpılarak n için sonsuz toplamlar alınır. Elde edilen

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = 2\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n$$

eşitliğinde katsayı indisi ve x' in kuvvetinin uyumunu sağlamak için her iki taraf x ile çarpılarak

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + x\sum_{n\geq 0} x^n$$

bulunur. Bulunan denklik (8)' deki üretici fonksiyon ve kuvvet serisi kullanılarak

$$A(x) - a_0 = 2x\,A(x) + x\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

haline getirilir. 0 halka için başlangıç değeri $a_0 = 0$ alındığında ve $A(x)$ çekildiğinde

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} \tag{9}$$

bulunur. (9)' da bulunan denklik basit kesirlerine ayrılarak

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \tag{10}$$

elde edildikten sonra

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots + 2^nx^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

fonksiyonları uygun olan şartlarda kuvvet serileri ile ifade edilebileceğinden (10) denkliği

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = (1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^nx^n + \cdots) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots)$$

denkliğine dönüştürülerek düzenlendiğinde

$$A(x) = [(2-1)x + (2^2-1)x^2 + \cdots + (2^n-1)x^n + \cdots] \tag{11}$$

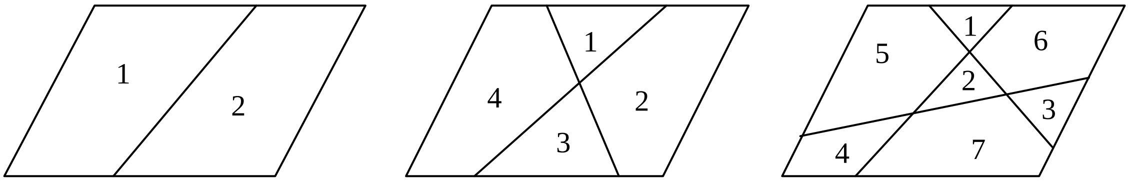
fonksiyonuna ulaşılır. (8) denkliğinde katsayılarını dizinin elemanları olarak aldığımız fonksiyon ile (11) de bulduğumuz fonksiyonun eşitliğinden yararlanarak genel terim bulunur.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \underbrace{[(2-1)x + (2^2-1)x^2 + \cdots + (2^n-1)x^n + \cdots]}_{a_n = 2^n - 1}$$

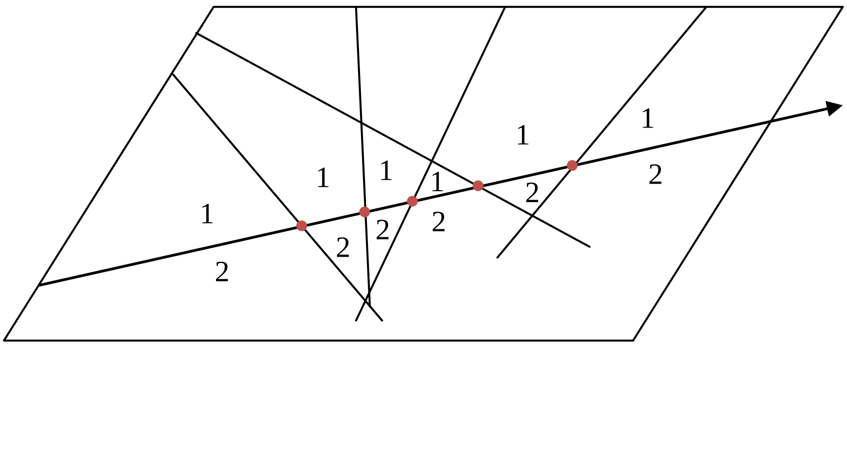
ÖRNEK.6

n tane doğru düzlemi en çok kaç bölgeye ayırır?

ÇÖZÜM.



n tane doğrunun düzlemi ayırabileceği en çok bölge sayısı a_n olarak tanımlansın. Şekillerde de kolaylıkla görülebileceği gibi $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ ve $a_3 = 7$ başlangıç değerleri bulunacaktır. Bir sonraki adımda çizilen her doğru bölge sayısını çoğaltmak adına mümkün olduğu kadar çok bölgeden geçmelidir. Bir doğrunun çok bölgeden geçmesi çok kesişme yaşamasıyla mümkündür. Çok kesişme ise kendisinden önce çizilmiş bütün doğrularla kesişmesi anlamına gelmektedir. Bu durumda n. çizilen doğru kendisinden önce çizilmiş n – 1 doğruyla kesişmeli ve n – 1 kesişme noktası ortaya çıkmalıdır.



n – 1 tane kesişme yaşayan n. doğrunun girip çıktığı bölge sayısının n olduğu ve girip çıktığı her bölge 1 bölgeyken 2 bölge haline geldiği görülebilir. Bu da n tane yeni bölge demektir. Böylelikle indirgeme bağıntısı $a_n = a_{n-1} + n$ olarak bulunur. Homojen olmayan doğrusal indirgemeli dizi bağıntısı için birkaç farklı yöntemle genel terim bulunabilir.

$a_n - a_{n-1} = n$ şeklinde düzenlenebilen indirgeme bağıntıları n yerine adım adım değerler yazılarak alt alta yazılıp toplandığında genel terime ulaşılabilmektedir. Teleskopik toplam yöntemiyle genel terim bulunmuş olur.

$n = 2$ için, $\cancel{a_2} - a_1 = 2$

$n = 3$ için, $\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = 3$

$n = 4$ için, $a_4 - \cancel{a_3} = 4$

. .

. .

. .

n yerine $n-2$ için, $\cancel{a_{n-2}} - a_{n-3} = n-2$

n yerine $n-1$ için, $\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} = n-1$

ve n için, $+ \quad a_n - \cancel{a_{n-1}} = n$

$$a_n - a_1 = \underbrace{2 + 3 + 4 + \cdot \cdot \cdot + n}_{\frac{n(n+1)}{2} - 1}$$

$$a_n - 2 = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

Genel terim $a_n = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ şeklinde bulunur.

Üretici fonksiyon kullanarak da bu dizinin genel terimi bulunabilir. İndirgeme bağıntısı n yerine n + 1 yazılarak yeniden düzenlenir. (Wilf, 1992)

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

Eşitliğin her iki tarafı x^n *ile* çarpılarak n için sonsuz toplam alınır.

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$$

katsayı indisi ve x' in kuvvetinin uyumunu sağlamak için her iki taraf x ile çarpılır.

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} = x\sum_{n\geq 0} a_n x^n + x\sum_{n\geq 0} (n+1)x^n$$

Eşitliğin son halinde uygun olan kuvvet serileri (8) deki üretici fonksiyon ile diğer kuvvet serileri ise ön bilgiler bölümünde bahsedilen uygun olan fonksiyon ile ifade edilir.

$$A(x) - a_0 = x\,A(x) + x\left(\frac{1}{1-x}\right)^2$$

$$A(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^3}$$

Basit kesirlerine ayırma işlemi yapılır.

$$A(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^3}$$

A(x) fonksiyonu tekrar kuvvet serilerine dönüştürülür.

$$A(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) - (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots) + (1 + 3x + 6x^2 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n + \cdots)$$

$$A(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 7x^3 + \cdots + \underbrace{\left[1 - (n+1) + \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)\right]}_{a_n}x^n + \cdots$$

Genel terim $a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ şeklinde bulunur.

ÖRNEK. (UMO-2013)

Yalnızca 1, 2, 3 rakamları kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakam yer alan ve herhangi ardışık iki basamağında aynı rakam yer almayan kaç farklı 10 basamaklı pozitif tam sayı yazılabilir? (TÜBİTAK)

ÇÖZÜM.

a_n yalnızca 1, 2, 3 kullanılarak, ilk ve son basamaklarında aynı rakamın yer aldığı ve ardışık iki basamağında aynı rakamın bulunmadığı n basamaklı tam sayıların sayısı olsun. Öncelikle birkaç tane başlangıç değeri bulunur. $a_1 = 3$ *(1, 2, 3)*, $a_2 = 0$ *(*iki basamaklı bu şartları sağlayan sayı yazılamaz*)*, $a_3 = 6$ *(121, 131, 212, 232, 313, 323).*

a_n' i inşa ederken ilk basamak için 3 alternatifin olduğu ve ilk basamak belirlendiğinde son basamağında belli olduğu unutulmamalıdır. Ardışık basamaklarda da aynı rakam bulunamayacağından aradaki $n - 2$ basamak için 2 alternatif olduğu düşünülse de $(n - 1)$. basamağa gelen sayının n. basamakla aynı olma durumu olabilir. Bu durum da 1. basamakla $(n - 1)$. basamağa aynı sayının gelmesi şartı bozacaktır. Aynı şartlarda 1. ve $(n - 1)$. basamağın aynı olduğu tam sayıların sayısı a_{n-1} ile hesaplanabileceğinden indirgeme bağıntısına $a_n = 3 \cdot 2^{n-2} - a_{n-1}$ olarak ulaşılır. Soruda a_{10} istenmektedir.

$n = 3$ için $a_3 = 3 \cdot 2 - a_2$ den $a_3 = 6$

$n = 4$ için $a_4 = 3 \cdot 2^2 - a_3$ den $a_4 = 6$

$n = 5$ için $a_5 = 3 \cdot 2^3 - a_4$ den $a_5 = 18$

. .

. .

. .

$n = 10$ için $a_{10} = 3 \cdot 2^8 - a_9$ den $a_{10} = 510$ adım adım hesaplanarak bulunur.

Bu homojen olmayan doğrusal indirgemeli diziye üretici fonksiyon ile genel terim bulmak mümkündür. İndirgeme bağıntısında n yerine n + 1 yazılarak yeniden düzenlenir.

$$a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Eşitliğin her iki tarafı x^n *ile* çarpılarak n için sonsuz toplam alınır.

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0}(3 \cdot 2^{n-1})x^n$$

katsayı indisi ve x' in kuvvetinin uyumunu sağlamak için her iki taraf x ile çarpılır.

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} + x\sum_{n\geq 0} a_n x^n = \frac{3x}{2}\sum_{n\geq 0} (2x)^n$$

Eşitliğin son halinde uygun olan kuvvet serileri (8) deki üretici fonksiyon ile diğer kuvvet serileri ise ön bilgiler bölümünde bahsedilen uygun olan fonksiyon ile ifade edilir.

$$A(x) - a_0 + xA(x) = \frac{3x}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right) \tag{12}$$

İndirgeme bağıntısı kullanılarak $a_0 = -3/2$ olarak bulunur. (12) denkliği düzenlenerek $A(x)$ çekilir.

$$A(x) = \frac{9x-3}{(1-2x)(2+2x)}$$

$A(x)$ basit kesirlerine ayrılarak tekrar düzenlenir.

$$A(x) = \frac{1/2}{1-2x} - \frac{4}{2+2x}$$

$A(x)$ fonksiyonu tekrar kuvvet serilerine dönüştürülür.

$$A(x) = \frac{1}{2}(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots + 2^n x^n + \cdots) - 2(1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots)$$

$$A(x) = -\frac{3}{2} + 3x + 6x^3 + \cdots + \underbrace{[2^{n-1} - 2(-1)^n]}_{a_n} x^n + \cdots$$

Genel terim $a_n = 2^{n-1} - 2(-1)^n$ şeklinde bulunur.

3.2 Doğrusal Olmayan İndirgemeli Diziler

İndirgeme bağıntısında katsayılar reel sayılardan farklı olarak bir değişkene bağlı olduğunda veya dizinin elemanları birbiri ile çarpılarak oluşmuş (kendisi de olabilir) terimler bulunduğunda doğrusal olmayan indirgemeli dizi olarak adlandırılır. Bu bölümde bu tip indirgemeli dizilere örnekler verilecektir.

ÖRNEK.8 (UMO-2012)

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} kümesinin tüm a elemanları için $f(f(a)) = a$ koşulunu sağlayan kaç $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu vardır? (TÜBİTAK)

ÇÖZÜM.

a_n öyle tanımlansın ki n elemanlı bir küme için soruda istenen şartı sağlasın. Her zaman olduğu gibi başlangıç değerlerini bulmak kolay olacaktır ve çözüm için fikir verebilecektir.

Küme	**Fonksiyonlar**	a_n
A = {1}	$f_1(1) = 1$	$a_1 = 1$
A = {1, 2}	f_1 = {(1,1), (2,2)} f_2 = {(1,2), (2,1)}	$a_2 = 2$
A = {1, 2, 3}	f_1 = {(1,1), (2,2), (3,3)} f_2 = {(1,1), (2,3), (3,2)} f_3 = {(1,3), (2,2), (3,1)} f_4 = {(1,2), (2,1), (3,3)}	$a_3 = 4$

a_n' i inşa etmeye şöyle basit bir fikirle başlanabilir. Fonksiyonu bir eşleşme olarak düşünecek olursak *1* ya *1* ile eşleşir ya da eşleşmez. Eğer *1* ile eşleşirse (1,1) eşleşmesi $f(f(1)) = 1$ i sağlayacaktır. Geriye kalan $n - 1$ elmanın şartı sağlayan fonksiyon sayısı a_{n-1} ile hesaplanabilir. Eğer *1* ile eşleşmiyorsa başka bir elemanla eşleşmek için $n - 1$ alternatifi olacaktır. Ve şartı sağlamak için eşleştiği elemanın da *1* ile eşleşmesi gerekecektir. Örneğin (1,2) ve (2,1) eşleşmesi için $f(f(1)) = 1$ ve $f(f(2)) = 2$ sağlanır. Bu eşleşmenin ardından geri kalan $n - 2$ elemanın şartı sağlayan fonksiyon sayısı a_{n-2} ile hesaplanabilir. Böylelikle indirgeme bağıntısı

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

olarak bulunmuş olur. Soruda istenen a_7 adım adım bu doğrusal olmayan indirgeme bağıntısı ile kolayca hesaplanabilir.

$n = 4$ için $a_4 = a_3 + 3a_2$ den $a_4 = 10$

$n = 5$ için $a_5 = a_4 + 4a_3$ den $a_5 = 26$

$n = 6$ için $a_6 = a_5 + 5a_4$ den $a_6 = 76$

$n = 7$ için $a_7 = a_6 + 6a_5$ den $a_7 = 232$

ÖRNEK.9

8 arkadaş bir restorana gidiyor. Girişte paltolarını görevliye bırakıyorlar. Çıkışta hiçbirinin kendi paltosunu almadığı kaç farklı durum yaşanabilir?

ÇÖZÜM.

Paltoların 8 kişiye dağıtımı normalde $8!$ şeklinde olur. Yalnız bu durumlar karışıktır. Bir kişinin kendi paltosunu alıp almadığı her durum sayılmış olur. Eğer bir kişi kendi paltosunu aldıysa bu durumları tüm durumlardan çıkarmak gerekir. Kendi paltosunu alan bu kişi $C(8,1)$ yolla seçilebilir. Geri kalan 7 kişi için rastgele dağılım yine $7!$ ile hesaplanır. $8! - \binom{8}{1}7!$ ise sonucu vermez. Çünkü $7!$' in içinde başka kişi veya kişiler de kendi paltosunu almış olabileceğinden $\binom{8}{1}7!$ aynı durumları tekrar takrar saymış olur. Bu fazla sayılıp çıkarılan durumlar tekrar tüm durumlara eklenmelidir. Bahsedilen durum 2 kişinin kendi paltosunu aldığı durumlardır. Bu iki kişi $C(8,2)$ yolla belirlenebilir. Geri kalan 6 kişiye rastgele dağıtım yapılacaktır. $8! - \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6!$ ifadesi yine hatalı olacaktır. Bu seferde 3 kişinin kendi paltosunu aldığı durumlar fazla fazla eklenmiş olur. Benzer şekilde içerme dışarma yöntemiyle sonuç bulunur.

$$8! - \binom{8}{1}7! + \binom{8}{2}6! - \binom{8}{3}5! + \binom{8}{4}4! - \binom{8}{5}3! + \binom{8}{6}2! - \binom{8}{7}1! + \binom{8}{8} = 14833$$

a_n , n kişi için bu şartı sağlayan durum sayısı olsun. Başlangıç değerleri bulmak kolay olacaktır. $n = 1$ alınırsa 1 kişinin kendi paltosunu almadan çıkacağı bir durum olamayacağından $a_1 = 0$ olarak bulunur. $n = 2$ alınırsa 2 kişinin kendi paltolarını almadan çıkacağı durum sayısı kolaylıkla $a_2 = 1$ olarak bulunur. a_3' ü hesaplarken kişilerin 1., 2. ve 3. kişi olarak adlandırıldığı düşünülsün. Bu durumda hiçbirinin kendi paltosunu almadığı durum sayısı şöyle sayılabilir. 1. kişi eğer 2. kişinin paltosunu alırsa 2. kişi 1. kişinin paltosunu alamayacaktır. Çünkü alırsa 3. kişi kendi paltosunu alır. Bu ise şartı bozar. Demek ki 1. kişi 2. kişinin paltosunu aldığında 2. kişi mecburen 3. kişinin paltosunu almalıdır ve 3. kişi de 1. kişinin paltosunu alır. Bu bir durumdur. Aynı şekilde 1. kişi 3. kişinin paltosunu aldığında 3. kişi 2. kişinin ve 2. kişi de 1. kişinin paltosunu alabilir. Başka durum yoktur. Böylece $a_3 = 2$ olarak bulunur.

a_n' i inşa ederken problemi çözme stratejisi 1. kişinin paltosunu aldığı kişinin kimin paltosunu aldığı üzerine kurulacaktır. 1. kişinin kendi paltosu dışında $n - 1$ palto olduğundan doğal olarak $n - 1$ alternatifi olacaktır. Bu paltolardan birini aldığı düşünülsün. Bu durumda paltosunu aldığı kişi ya 1. kişinin paltosunu alır ya da almaz. Eğer 1. kişinin paltosunu alırsa kalan $n - 2$ kişi ve paltoları için şartı sağlayan durum sayısı a_{n-2} olur. Eğer 1. kişinin paltosunu almayacak olursa başka bir paltoyu alması gerekecektir. Bu durumda sanki 1. kişinin paltosu kendi paltosunun yerine geçmişi gibidir. O halde a_{n-1} bu durumların sayısını verir. Böylece

$$a_n = (n - 1)[a_{n-2} + a_{n-1}]$$

doğrusal olmayan indirgeme bağıntısına ulaşılır. Gerekli başlangıç değerler hesaplanmış olduğu için soruda istenen a_8 adım adım bulunabilir.

$n = 4$ için $a_4 = 3[a_2 + a_3]$ den $a_4 = 9$

$n = 5$ için $a_5 = 4[a_3 + a_4]$ den $a_5 = 44$

$n = 6$ için $a_6 = 5[a_4 + a_5]$ den $a_6 = 265$

$n = 7$ için $a_7 = 6[a_5 + a_6]$ den $a_7 = 1854$

$n = 8$ için $a_8 = 7[a_6 + a_7]$ den $a_8 = 14833$

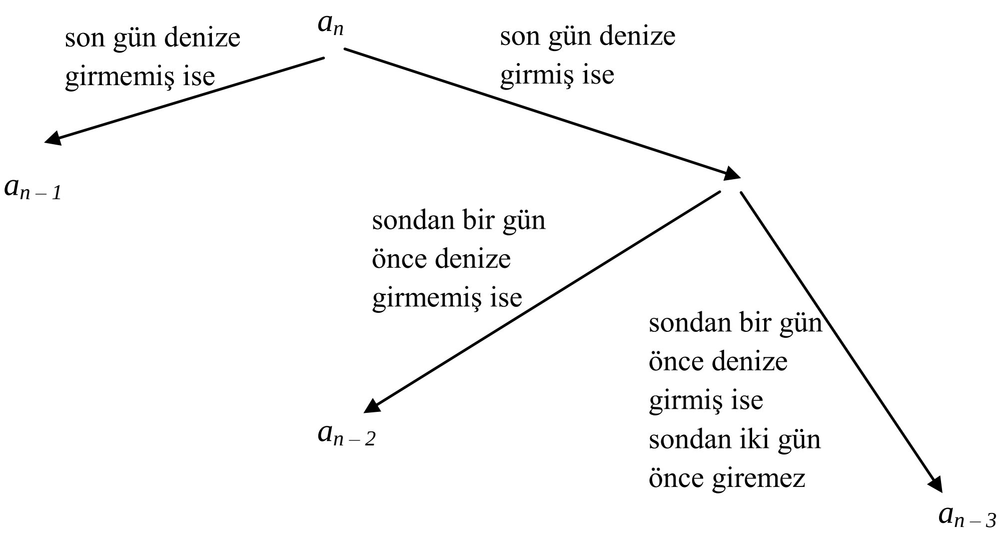
4 UYGULAMALAR

SORU.1

Deniz kenarına 9 günlük tatile giden birisi ilk gün denize girmek ve art arda 3 gün denize girmemek koşullarıyla denize girmek bakımından tatilini kaç farklı şekilde geçirebilir?

ÇÖZÜM.

Tatilde geçirilen gün sayısı n olduğunda a_n' in istenilen koşullarda tatili geçirilebilecek durum sayısı olduğu düşünülsün. Şartlarda ilk gün denize girdiği söylendiği için $a_1 = 1$ olur. Denize girdiği günlerin "D" girmediği günleri "B" ile ve soldan sağa doğru ilk günden başlayarak bir kodlama yapıldığı düşünülecek olursa 2 günlük tatil DD veya DB şeklinde geçirilebilir. $a_2 = 2$ olur. Benzer şekilde kodlayarak DDB, DBB, DBD ile $a_3 = 3$ olarak bulunur. 3 gün art arda denize girilmediğinden DDD alınmamıştır. İndirgeme bağıntısı kurulurken aşağıdaki gibi bir ağaç grafik daha anlaşılabilir olacaktır.



İndirgeme bağıntısı $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ olarak bulunur. Soruda istenen a_9 adım adım hesaplanır.

$n = 4$ için $a_4 = a_3 + a_2 + a_1$ den $a_4 = 6$

$n = 5$ için $a_5 = a_4 + a_3 + a_2$ den $a_5 = 11$

$n = 6$ için $\quad a_6 = a_5 + a_4 + a_3 \quad$ den $\quad a_6 = 20$

$n = 7$ için $\quad a_7 = a_6 + a_5 + a_4 \quad$ den $\quad a_7 = 37$

$n = 8$ için $\quad a_8 = a_7 + a_6 + a_5 \quad$ den $\quad a_8 = 68$

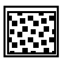
$n = 9$ için $\quad a_9 = a_8 + a_7 + a_6 \quad$ den $\quad a_9 = 125$

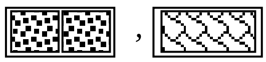
SORU.2

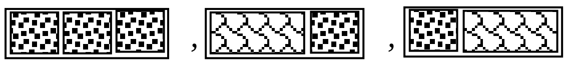
$1 \times n$ boyutlarındaki bir dikdörtgen 1×1 ve 1×2 boyutlarındaki dikdörtgenlerle kaç farklı şekilde kaplanabilir?

ÇÖZÜM.

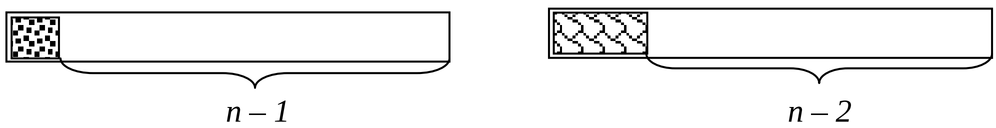
a_n $1 \times n$ lik bir dikdörtgen için istenilen döşeme sayısını vermek üzere

$a_1 = 1$ 

$a_2 = 2$ 

$a_3 = 3$ 

a_n' i kurgularken en sola yerleştirilecek dikdörtgenin 1×1 lik veya 1×2 lik olma durumu indirgeme bağıntısını doğuracaktır.



İndirgeme bağıntısı $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ olarak bulunur. Fibonacci dizisini veren bu indirgeme bağıntısının genel terimi bölüm 3.1.1 de bulunduğu gibidir. Başlangıç değerlerindeki farklılıktan dolayı kuvvetler birer arttırılmıştır.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

SORU.3

$a_0 = 1, a_1 = 2$ ve $a_2 = 3$ başlangıç koşullu

$a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$

indirgeme bağıntısı verilen dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM.

Üçüncü mertebeden homojen doğrusal indirgemeli dizi çarpanlarına ayrılabildiğinde karakteristik denklem yoluyla genel terim bulmak uygun olacaktır. İndirgemeli dizi karakteristik denkleme uyumlu hale getirildikten sonra çarpanlarına ayrılacaktır.

$$a_n - 7a_{n-1} + 15a_{n-2} - 9a_{n-3} = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$$

$$(x - 3)^2(x - 1) = 0$$

denklemlerinden karakteristik kökler $x_1 = 3$ (çift katlı kök) ve $x_2 = 1$ olarak bulunur. Bu durumda genel terim denklemi A, B ve C katsayıları için

$$a_n = (A + Bn)(3)^n + C(1)^n$$

şeklinde kurulur. Başlangıç koşulları kullanılarak $A = 1,\ B = -\frac{2}{3}$ ve $C = 0$ olarak bulunur. Genel terim için bu değerler kullanılarak sonuç yazılır.

$$a_n = \left(1 - \frac{n}{3}\right)3^n$$

$$a_n = (3 - n)3^{n-1} \quad , \quad n \geq 0$$

SORU.4

$a_0 = 1$ ve $a_1 = 0$ başlangıç koşullu

$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$

indirgeme bağıntısı verilen dizinin genel terimini bulunuz. (Ruppet, 2007)

ÇÖZÜM.

İkinci mertebeden homojen doğrusal indirgemeli dizi denklemi düzenlenerek karakteristik denklem haline getirilir ve kökleri bulunur.

$$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$$

$$a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Karakteristik denklemin kökleri karmaşık sayı olarak bulunur.

$$x_1 = 1 + i \text{ ve } x_2 = 1 - i$$

Karmaşık kökler kutupsal şekle dönüştürülür.

$$x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ ve } x_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Bu durumda genel terim denklemi A ve B katsayıları için

$$a_n = A(x_1)^n + B(x_2)^n$$

şeklinde kurulur. Kökler yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılır.

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left[A\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) + B\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left[(A + B)\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right) + (A - B)i\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

Başlangıç değerleri kullanılarak $A + B = 1$ ve $(A - B)i = -1$ bulunur. Sonuç olarak dizinin genel terimi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}\right) \quad , \quad n \geq 0$$

SORU.5

$a_0 = 3$ ve $a_1 = 8$ başlangıç koşullu

$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$

indirgeme bağıntısı verilen dizinin genel terimini bulunuz. (Tuffley, 2009)

ÇÖZÜM.

İkinci mertebeden homojen olmayan indirgemeli dizi için genel terim bulunurken karakteristik denklemden faydalanılabilir. İndirgeme bağıntısının dizi elemanlarından oluşan sol tarafı için $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$ denkliğinin karakteristik denklemi $x^2 - 3x + 2 = 0$ yazılır ve kökleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 2$ olarak bulunur. İndirgeme bağıntısı sadece bu terimlerden oluşmadığı için bu kısmın genel terime katkısı A ve B katsayılar olmak üzere

$$a_n^{(p)} = A(1)^n + B(2)^n = A + B2^n$$

şeklinde belirlenir. Bağıntının sağ tarafındaki üstel ifadenin genel terime katkısı ise C katsayı olmak üzere

$$a_n^{(k)} = C2^n$$

şeklinde alınacakken $a_n^{(p)}$' nin içinde benzer bir terim geçmesinden dolayı n ile çarpılarak

$$a_n^{(k)} = Cn2^n$$

şeklinde belirlenir. Sonuç olarak

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(k)}$$

$$a_n = A + B2^n + Cn2^n \tag{13}$$

olarak alınır ve başlangıç değerleri $a_0 = 3$, $a_1 = 8$ ve bunların yardımıyla indirgeme bağıntısından bulunan $a_2 = 22$ ile (13) denkleminde n yerine gerekli değerler yazılır katsayılar bulunur.

$a_0 = A + B = 3$

$a_1 = A + 2B + 2C = 8$

$a_2 = A + 4B + 8C = 22$

denkliklerinden $A = 2, B = 1$ ve $C = 2$ bulunur. Genel denklem yazılır.

$$a_n = 2 + 2^n + 2n2^n$$

$$a_n = 2 + 2^n + n2^{n+1} \quad , \quad n \geq 0$$

SORU.6

7 özdeş top *4* kovaya kaç farklı şekilde dağıtılabilir?(Öztürk, 1995, 9)

ÇÖZÜM.

Bu problemin çözümü için iki farlı yol izlenecektir.

Birincisi ayraç yöntemidir. Bu dağılımlar sıralı dörtlüler şeklinde incelenecek olursa kovalardaki top sayıları (a,b,c,d) ile gösterilir. $a + b + c + d = 7$ şartını sağlayan doğal sayı dörtlüleri dağılım sayısını verecektir. Ayraç tekniğinin uygulanışı ve açıklaması kısaca şöyledir . Ayraç tekniği 4 parçaya ayrılmak istenen aynı nesneden oluşan yan yana bir dizileme 3 ayraç kullanılması gerektiği fikrine dayanmaktadır.

OOOOOOO ifadesi yan yana 7 aynı nesneden oluşan dizilimi göstersin. Bu dizilime ayraçları temsil etmek üzere 3 aynı nesne yerleştirilsin. Ayraçların sağında solunda ve arasında kalan "O" sayısı kovalardaki top sayısını verecektir. Bu şekilde (a,b,c,d) sıralı dörtlülerinin oluşumu gözlenebilir.

DİZİLİM	TOPLARIN DAĞILIMI
OOIOIOOIOO	(2,1,2,2)
OIIOOOOIOO	(1,0,4,2)
IOIOOOIOOO	(0,1,3,3)
OOOIIIOOOO	(3,0,0,4)
OIOIOIOOOO	(1,1,1,4)
OOOOIOIIOO	(4,1,0,2)

Tabloya dikkat edilecek olursa dizilim sütununda oluşan sıralamalar 7 "O" ve 3 "I" ile oluşturulabilecek 10 haneli dizilimlerin sayısı kadar olacaktır. Bu sayede kaç dağılım yapılabileceği tekrarlı permütasyon ile kolayca hesaplanabilir.

$$\frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$$

İkincisi indirgeme yöntemidir. Bu problemin indirgemeli çözüm stratejisi kovalardan birinin boş olması veya olmaması fikrine dayanmaktadır. r özdeş topun k tane kovaya dağılım sayısı $s(r,k)$ ile gösterilsin. Örneğin 1 topun k tane kovaya dağılım sayısı kolayca $s(1,k) = k$, r tane topun 1 kovaya dağılımı $s(r,1) = 1$ olarak bulunur. İndirgeme bağıntısı ise şu şekilde kurulacaktır. Kovalardan ilki boş ise r tane top $k-1$ tane kovaya dağıtılır. Bunun sayısı $s(r, k-1)$ ile hesaplanır. Veya ilk kova dolu ise bu kovaya 1 top konup geri kalan $r-1$ top tekrar k kovaya dağıtılır. Bunun sayısı ise $s(r-1,k)$ ile hesaplanır. Böylece indirgeme bağıntısı kurulmuş olur.

$$s(r,k) = s(r, k-1) + s(r-1,k)$$

Soruda istenen 7 topun 3 kovaya dağıtılması olduğundan $r = 7$ ve $k = 4$ alınarak indirgeme bağıntısı kullanılarak adım adım cevap bulunur.

Başlangıç koşulları $s(7,1) = 1$ ve $s(1,4) = 4$ olarak kullanılır.

$$s(7,4) = s(7,3) + s(6,4) = [s(7,2) + s(6,3)] + [s(6,3) + s(5,4)]$$

$$= s(7,2) + 2s(6,3) + s(5,4)$$

$$s(7,4) = \underbrace{[\overbrace{s(7,1)}^{1} + s(6,2)]}_{s(7,2)} + 2\underbrace{[s(6,2) + s(5,3)]}_{s(6,3)} + \underbrace{[s(5,3) + s(4,4)]}_{s(5,4)}$$

$$= 3s(6,2) + 3s(5,3) + s(4,4) + 1$$

$$= 3[s(6,1) + s(5,2)] + 3[s(5,2) + s(4,3)] + [s(4,3) + s(3,4)] + 1$$

$$= 6s(5,2) + 4s(4,3) + s(3,4) + 4$$

$= 6[s(5,1) + s(4,2)] + 4[s(4,2) + s(3,3)] + [s(3,3) + s(2,4)] + 4$

$= 10s(4,2) + 5s(3,3) + s(2,4) + 10$

$= 10[s(4,1) + s(3,2)] + 5[s(3,2) + s(2,3)] + [s(2,3) + \overbrace{s(1,4)}^{4}] + 10$

$= 15s(3,2) + 6s(2,3) + 24$

$= 15[s(3,1) + s(2,2)] + 6[s(2,2) + s(1,3)] + 24$

$= 21s(2,2) + 57$

$= 21[s(2,1) + s(1,2)] + 57$

$= 21[1 + 2] + 57$

$= 63 + 57$

$s(7,4) = 120$

SORU.7

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} kümesinin tüm a elemanları için $f(f(f(a))) = a$ koşulunu sağlayan kaç $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu vardır? (Alizade ve Ufuktepe, 2014, 13)

ÇÖZÜM.

a_n öyle tanımlansın ki n elemanlı bir küme için soruda istenen şartı sağlasın. Başlangıç değerlerini bulmak kolay olacaktır ve çözüm için fikir verebilecektir.

Küme	**Fonksiyonlar**	a_n
A = {1}	$f_1(1) = 1$	$a_1 = 1$
A = {1, 2}	f_1 = {(1,1), (2,2)}	$a_2 = 1$
A = {1, 2, 3}	f_1 = {(1,1), (2,2), (3,3)} f_2 = {(1,2), (2,3), (3,1)} f_3 = {(1,3), (2,1), (3,2)}	$a_3 = 3$

a_n indirgeme bağıntısını kurmaya $1'$ in görüntüsünün ne olabileceği fikriyle başlanabilir. Fonksiyonu bir eşleşme olarak düşünecek olursak 1 ya 1 ile eşleşir ya da eşleşmez. Eğer 1 ile eşleşirse (1,1) eşleşmesi $f(f(f(1))) = 1$ i sağlayacaktır. Geriye kalan $n – 1$ elmanın şartı sağlayan fonksiyon sayısı a_{n-1} ile hesaplanabilir. Eğer 1 ile eşleşmiyorsa başka bir elemanla eşleşmek için $n – 1$ alternatifi olacaktır. Problemin buradan sonraki çözüm stratejisi $1'$ in eşleştiği elemanın yapacağı eşleşme üzerine kurulacaktır. $1'$ in eşleştiği eleman 1 ile eşleşemeyecektir. Bu durumda $1'$ in eşleştiği elemanın $n – 2$ eşleşme alternatifi kalır ve hangi elemanla eşleşti ise o elemanın şartı sağlamak için 1 ile eşleşmesi gerekir. Örneğin (1,2) ve (2,3) eşleşmeleri için (3,1) eşleşmesi şartı sağlatır. Bu eşleşmenin ardından geri kalan $n – 3$ elemanın şartı sağlayan fonksiyon sayısı a_{n-3} ile hesaplanabilir. Böylelikle indirgeme bağıntısı

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)(n-2)a_{n-3}$$

olarak bulunmuş olur. Soruda istenen a_7 adım adım bu doğrusal olmayan indirgeme bağıntısı ile kolayca hesaplanabilir.

$n = 4$ için $a_4 = a_3 + 3 \cdot 2 \cdot a_1$ den $a_4 = 9$

$n = 5$ için $a_5 = a_4 + 4 \cdot 3 \cdot a_2$ den $a_5 = 21$

$n = 6$ için $a_6 = a_5 + 5 \cdot 4 \cdot a_3$ den $a_6 = 81$

$n = 7$ için $a_7 = a_6 + 6 \cdot 5 \cdot a_4$ den $a_7 = 351$

SORU.8 (UMO-2000)

$x_1 = -1$ ve her n pozitif tam sayısı için $x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)x_n + \frac{4}{n}$ ise, x_{2000} nedir? (TÜBİTAK)

ÇÖZÜM.

Soruda verilen doğrusal olmayan indirgemeli dizi bağıntısında her iki taraf n ile çarpılarak düzenlenir.

$$nx_{n+1} = (n+2)x_n + 4$$

Ulaşılan denkliğin çarpan konumuna getirilebilmesi için her iki tarafa $2n$ eklenir ve gerekli düzenlemeler yapılır.

$$2n + nx_{n+1} = (n+2)x_n + 4 + 2n$$

$$n(2 + x_{n+1}) = (n+2)x_n + 2(2+n)$$

$$n(x_{n+1} + 2) = (n+2)(x_n + 2)$$

Çarpan konumuna getirildikten sonra her iki taraf n ve x_{n+2}' ye bölünür.

$$\frac{x_{n+1} + 2}{x_n + 2} = \frac{n+2}{n}$$

Teleskopik formata uygun hale getirilen denklemde n yerine adım adım değerler yazılarak taraf tarafa çarpma yapılarak istenilen x_{2000}' e ulaşılır.

$n = 1$ için $\quad \dfrac{x_2 + 2}{x_1 + 2} = \dfrac{3}{1}$

$n = 2$ için $\quad \dfrac{x_3 + 2}{x_2 + 2} = \dfrac{4}{2}$

$n = 3$ için $\quad \dfrac{x_4 + 2}{x_3 + 2} = \dfrac{5}{3}$

$n = 4$ için $\quad \dfrac{x_5 + 2}{x_4 + 2} = \dfrac{6}{4}$

. .

. .

. .

$n = 1998$ için $\quad \dfrac{x_{1999} + 2}{x_{1998} + 2} = \dfrac{2000}{1998}$

$n = 1999$ için $\quad \times \dfrac{x_{2000} + 2}{x_{1999} + 2} = \dfrac{2001}{1999}$

$$\frac{\cancel{x_2 + 2}}{x_1 + 2} \cdot \frac{\cancel{x_3 + 2}}{\cancel{x_2 + 2}} \cdot \frac{\cancel{x_4 + 2}}{\cancel{x_3 + 2}} \cdot \frac{x_5 + 2}{\cancel{x_4 + 2}} \cdots \frac{\cancel{x_{1999} + 2}}{\cancel{x_{1998} + 2}} \cdot \frac{x_{2000} + 2}{\cancel{x_{1999} + 2}} = \frac{\cancel{3}}{1} \cdot \frac{\cancel{4}}{2} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{4}} \cdots \frac{\cancel{1999}}{\cancel{1997}} \cdot \frac{2000}{\cancel{1998}} \cdot \frac{2001}{\cancel{1999}}$$

$$\frac{x_{2000} + 2}{x_1 + 2} = \frac{2000 \cdot 2001}{1 \cdot 2}$$

$$x_{2000} + 2 = 2001000$$

$$x_{2000} = 2000998$$

SORU.9 (UMO-2007)

$x_1 = 5$, $x_2 = 401$ ve her $3 \leq n \leq m$ için

$$x_n = x_{n-2} - \frac{1}{x_{n-1}}$$

ise, m' nin alabileceği en büyük değer nedir? (TÜBİTAK)

ÇÖZÜM.

Soruda verilen indirgeme bağıntısında her iki taraf x_{n-1} ile çarpılarak teleskopik toplama uygun hale getirilecek şekilde düzenleme yapılır.

$$x_n x_{n-1} = x_{n-2} x_{n-1} - 1$$

$$x_{n-2} x_{n-1} - x_{n-1} x_n = 1$$

$$\begin{array}{ll}
n = 3, & x_1 x_2 - \cancel{x_2 x_3} = 1 \\
n = 4, & \cancel{x_2 x_3} - \cancel{x_3 x_4} = 1 \\
n = 5, & \cancel{x_3 x_4} - x_4 x_5 = 1 \\
. & . \\
. & . \\
. & . \\
n = m-1, & \cancel{x_{m-3} x_{m-2}} - \cancel{x_{m-2} x_{m-1}} = 1 \\
n = m, & + \quad \cancel{x_{m-2} x_{m-1}} - x_{m-1} x_m = 1 \\
\hline
 & x_1 x_2 - x_{m-1} x_m = m-2
\end{array}$$

$$5 \cdot 401 - x_{m-1} x_m = m - 2$$

$$x_{m-1} x_m = 2007 - m$$

son ulaşılan denklikte m yerine 2007 yazılması $x_{2006}\ x_{2007} = 0$ sonucunu bu ise x_{2006} veya x_{2007}' den birinin sıfır olacağı sonucunu doğurur. Oysa ki soruda verilen indirgeme bağıntısında paydadaki terim herhangi bir terimin sıfır olmamasını gerektirir. m yerine 2006 yazıldığında ise $x_{2005}\ x_{2006} = 1$ olduğundan $x_{2006} \neq 0'$ dır. Demek ki $x_{2006}\ x_{2007} = 0$ denkliğini sıfır yapan x_{2007}' dir. Soruda paydada verilen terim x_{n-1} olduğundan n yerine $2007'$ ye kadar olan sayılar yazılabilir. Yani m en çok 2007 olabilir.

SORU.10 (2004-ÇEKOSLAVAKYA ULUSAL OLİMPİYATI)

n bir doğal sayı olmak üzere, yan yana sıralanmış A ve B harflerinden oluşan n haneli sıralamaların peş peşe dört A ve peş peşe üç B içermeyenlerinin sayısı p_n ise

$$\frac{p_{2004}-p_{2002}-p_{1999}}{p_{2001}+p_{2000}}$$

ifadesi kaça eşittir? (Final Round of 53rd Czech and Slovak Math. O.**,** 2004)

ÇÖZÜM.

Soruda A ve B harfleri için farklı şartlar verildiğinden bu harflerle ilgili durumları farklı değerlendirmek gerekir. İstenen şartı sağlayan sıralamanın ilk harfi A ile başlıyorsa bu sıralamaların sayısını a_n , B ile başlıyorsa b_n versin. Bu sıralamalar için başka bir durum da olamayacağından yani ya A ya da B ile başlayacağından soruda verilen $p_n = a_n + b_n$ olur.

Sıralamaların başında bulunan harf çeşitliliğini düşünmek indirgeme bağıntısını kurmayı rahatlatacaktır. İlk üç harf A olduğunda dördüncü harf mecburen B olur. Bu ise B ile başlayan $n-3$ harfli bir sıralama demektir ve b_{n-3} ile hesaplanabilir. Bu durumların bir tabloyla incelenmesi kolaylık sağlayacaktır.

	n harfli sıralamaların başlangıcı	sıralama sayısı
a_n	$A\underbrace{B...}_{n-1 \text{ harf}}$	b_{n-1}
	$AA\underbrace{B...}_{n-2 \text{ harf}}$	b_{n-2}
	$AAA\underbrace{B...}_{n-3 \text{ harf}}$	b_{n-3}

$$\Rightarrow \quad a_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$$

	n harfli sıralamaların başlangıcı	sıralama sayısı
b_n	$B\underbrace{A...}_{n-1 \text{ harf}}$	a_{n-1}
	$BB\underbrace{A...}_{n-2 \text{ harf}}$	a_{n-2}

$$\Rightarrow \quad b_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Yine tablolarla a_n ve b_n' in sadece kendi cinsinden indirgeme bağıntılarına dönüşümü gözlenebilir. Bulunan a_n ve b_n ile gerekli alt diziler hesaplanıp yerine yazılır.

a_n	b_{n-1}	$a_{n-2} + a_{n-3}$	$a_n = a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5}$
	b_{n-2}	$a_{n-3} + a_{n-4}$	
	b_{n-3}	$a_{n-4} + a_{n-5}$	

b_n	a_{n-1}	$b_{n-2} + b_{n-3} + b_{n-4}$	$b_n = b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5}$
	a_{n-2}	$b_{n-3} + b_{n-4} + b_{n-5}$	

$p_n = a_n + b_n$ eşitliğinde bulunan bağıntılar yerine yazılır ve düzenlemelerle p_n kendi cinsinden ifade edilir..

$$p_n = \underbrace{(a_{n-2} + 2a_{n-3} + 2a_{n-4} + a_{n-5})}_{a_n} + \underbrace{(b_{n-2} + 2b_{n-3} + 2b_{n-4} + b_{n-5})}_{b_n}$$

$$p_n = \underbrace{(a_{n-2} + b_{n-2})}_{p_{n-2}} + 2\underbrace{(a_{n-3} + b_{n-3})}_{p_{n-3}} + 2\underbrace{(a_{n-4} + b_{n-4})}_{p_{n-4}} + \underbrace{(a_{n-5} + b_{n-5})}_{p_{n-5}}$$

$$p_n = p_{n-2} + 2p_{n-3} + 2p_{n-4} + p_{n-5}$$

$$p_n - p_{n-2} - p_{n-5} = 2p_{n-3} + 2p_{n-4}$$

$$p_n - p_{n-2} - p_{n-5} = 2(p_{n-3} + p_{n-4})$$

$$\frac{p_n - p_{n-2} - p_{n-5}}{p_{n-3} + p_{n-4}} = 2$$

$n = 2004$ için istenen ifade bulunur.

$$\frac{p_{2004} - p_{2002} - p_{1999}}{p_{2001} + p_{2000}} = 2$$

SORU.11

$a_n = (3 + 2\sqrt{2}\,)^n + (3 - 2\sqrt{2}\,)^n$ genel terimi verilen dizide a_6 kaçtır?

ÇÖZÜM.

Bir dizinin genel teriminin bilinmesi bu soruda da olduğu gibi işleri her zaman kolaylaştırmamaktadır. Bazen indirgeme bağıntısını kullanarak cevaba ulaşmak daha kolay olabilir. Genel terimi verilen dizinin indirgeme bağıntısının olup olmadığı düşünüldüğünde karakteristik yöntemdeki sıranın tersten izlenmesi bir sonuç verebilir.

$r_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ ve $r_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ kökleri bilinen karakteristik denklem $r^2 - 6r + 1 = 0$ şeklinde kurulur. Bu denklem ise ikinci dereceden indirgemeli bir dizinin karakteristik denklemidir. Bu durumda $a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0$ indirgeme bağıntısına ulaşılmış olur. Başlangıç değerlerinin bulunması gerekir. Soruda verilen genel terimden $a_0 = 2$ ve $a_1 = 6$ değerleri bulunduktan sonra adım adım soruda istenen a_6' yı bulmak kolay olacaktır.

$n = 0$ için $\quad a_2 = 6a_1 + a_0$ dan $\quad a_2 = 34$

$n = 1$ için $\quad a_3 = 6a_2 + a_1$ den $\quad a_3 = 198$

$n = 2$ için $\quad a_4 = 6a_3 + a_2$ den $\quad a_4 = 1222$

$n = 3$ için $\quad a_5 = 6a_4 + a_3$ den $\quad a_5 = 7530$

$n = 4$ için $\quad a_6 = 6a_5 + a_4$ den $\quad a_6 = 46402$

SORU.12 (2011-ULUSAL ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYATI)

Aşağıdaki harf tablosunda, her satırdan sadece bir harf seçilmesi ve harflerin bulunduğu karelerin mutlaka birbirine dokunması şartıyla aşağıdan yukarıya veya yukarıdan aşağıya kaç tane FERMAT kelimesi oluşturulabilir? (Bir örnek yanda verilmiştir.) (Aliyev ve diğerleri, 2012, 79)

A	K	D	E	N	İ	Z
K	T	F	F	F	F	T
D	E	A	E	E	A	E
E	R	R	M	M	R	R
N	M	M	R	R	M	M
İ	A	E	A	A	E	A
Z	F	T	T	T	T	F

ÖRNEK:

A	K	D	E	N	İ	Z
K	T	**F**	F	F	F	T
D	**E**	A	E	E	A	E
E	R	**R**	M	M	R	R
N	M	**M**	R	R	M	M
İ	A	E	**A**	A	E	A
Z	F	T	T	**T**	T	F

ÇÖZÜM.

İndirgeme yaparak soru çözülürken genel mantık önceki adımlardan faydalanarak bir sonraki basamağı hesaplamaktır. Böyle bir soruda da indirgeme mantığı işe yarayabilir. FERMAT kelimesi oluşturmak istendiğinde çok açıktır ki ilk olarak bir F harfi belirlenmeli ve onun başlanmalıdır. İkinci belirlenmesi gereken ise bir E harfi olmalıdır. Kaç F' den kaç E' ye aynı şekilde kaç E' den kaç R' ye gidilebileceği düşüncesi T' ye kadar ulaşıldığında kaç FERMAT oluşabileceğini sayacaktır. Uygun olan harfin sol üst köşesine o harfe kaç harften gelinebileceği yazılacak olursa bu sayma işlemi kolaylaşır. "^{n}E" ifadesindeki *n* o E' ye kaç F' den gelinebileceğinin sayısıdır.

Yukarıdan aşağı için:

A	K	D	E	N	İ	Z
K	T	^{1}F	^{1}F	^{1}F	^{1}F	T
D	^{1}E	A	^{3}E	^{3}E	A	^{1}E
E	^{1}R	^{4}R	M	M	^{4}R	^{1}R
N	^{5}M	^{5}M	R	R	^{5}M	^{5}M
İ	^{10}A	E	^{5}A	^{5}A	E	^{10}A
Z	F	^{15}T	^{10}T	^{10}T	^{15}T	F

Son satırdaki T' lere bakıldığında her T' nin sol üst köşesinde o T' ye kadar kaç farklı şekilde FERMAT oluşabileceği yazmaktadır. Bunlar toplandığında yukardan aşağıya 50 tane FERMAT oluşturulabileceği görülür.

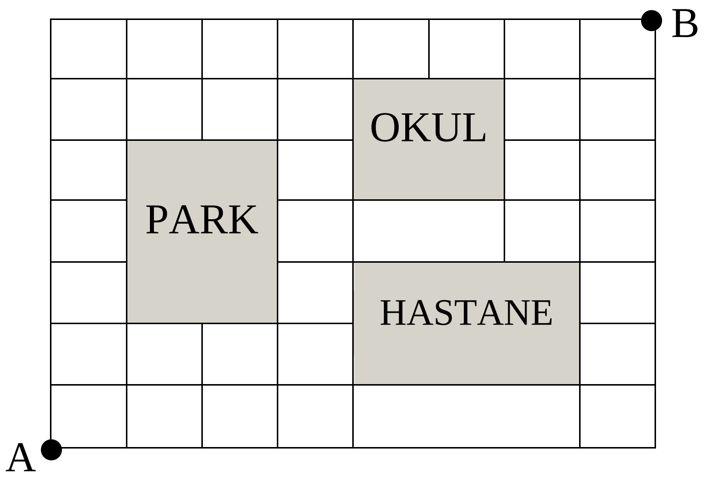
Aşağıdan yukarı için:

A	K	D	E	N	İ	Z
K	^{2}T	F	F	F	F	^{2}T
D	E	^{2}A	E	E	^{2}A	E
E	R	R	^{2}M	^{2}M	R	R
N	M	M	^{1}R	^{1}R	M	M
İ	A	^{1}E	A	A	^{1}E	A
Z	^{1}F	T	T	T	T	^{1}F

İkinci satırdaki T' lere bakılacak olursa aşağıdan yukarı doğru 4 farklı FERMAT oluşturulabileceği sonucuna varılır. Bu durumda toplam 54 tane FERMAT oluşturulabilir.

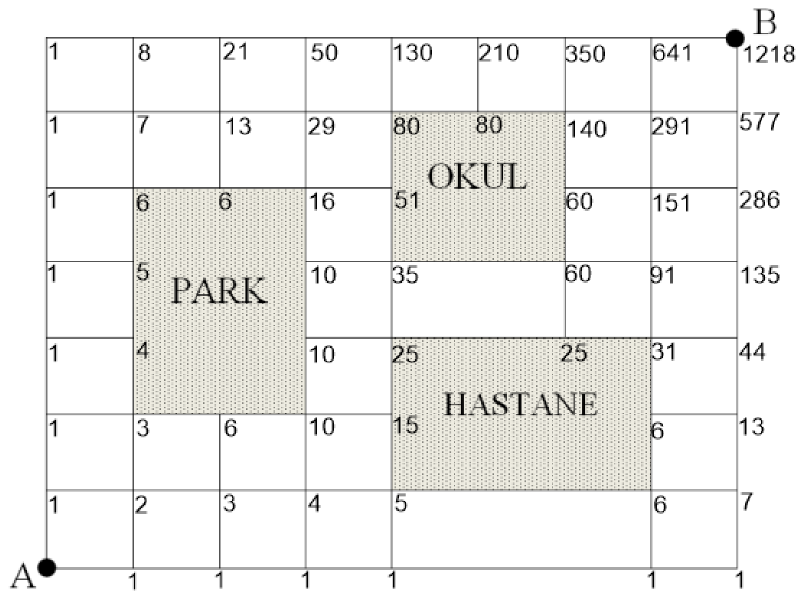
SORU.13

Aşağıdaki krokide A noktasından B noktasına sadece çizgileri yol olarak kullanmak koşuluyla en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebilir?



ÇÖZÜM.

A noktasından hareket eden birisi hangi noktaya gelmiş olursa olsun en kısa yoldan B' ye ulaşmak istediği için bir sonraki hareketi eğer mümkünse yukarı veya sağa doğru olacaktır. Sola ve aşağı hareket etmesi yolu uzatır. Bir noktaya varmanın kendisinden önceki bazı noktalardan geçiyor olması indirgeme kullanma imkanını sağlar. En kısa yol kullanılması gelinmiş olan bir noktaya ya aşağısındaki ya solundaki noktadan gelindiği anlamına gelir. O halde bu noktaya en kısa yoldan kaç noktadan gelinebileceği aşağısındaki ve solundaki noktaya gelinme sayılarının toplamı kadardır. A' dan B' ye her noktaya bu toplamlar yazılarak cevaba ulaşılır.



A' dan B' ye en kısa yol sayısı 1218' dir.

4 SONUÇ

Bilim ve teknolojinin ilerlemesi şüphesiz insanların hayatını birçok alanda kolaylaştırmıştır. Tren ve otomobilin ulaşım problemine çözüm getirmesi daha iyi bir çözüm olan uçağın icadına engel olmamıştır. Belki gelecekte ulaşım problemine uçaktan daha iyi bir çözüm bulunacaktır. Hatta bu çözümler yeni problemler doğurmuş veya doğuracak olabilir.

Bu noktadan hareketle bir kısım insanlarda var olan matematikte yapılacak birçok şey yapıldı yeni şeyler yapılamaz yargısı geçmişte çözülmüş matematiksel problemlere ve ispatlara yeni farklı çözümler getirerek kırılabilir.

İndirgemeli diziler uzun ve zor bir şekilde çözülmüş özellikle sayma problemlerinde kısa ve rahat çözüm bulmaya dair yeni kapılar açabilmektedir. Bu tezde çözülen bazı problemlerde buna değinilmiş ve problemi çözmeye dair çeşitli stratejiler ortaya konmaya çalışılmıştır.

Bu alanda yapılacak çalışmalar problem çözme stratejileri üzerine çalışan matematikçilere, programlama yapan bilgisayar mühendislerine, optimizasyon sağlamaya çalışan endüstri mühendislerine farklı orijinal fikirler verebilir.

KAYNAKÇA

Aliyev, İ., Özdemir, M., Şıhaliyeva, D., 2012, Akdeniz Üniversitesi Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları, Altın Nokta Yayınları, İzmir.

Alizade, R., Ufuktepe, Ü., 2014, Sonlu Matematik Olimpiyatı Soruları ve Çözümleri, Altın Nokta Yayınları, İzmir.

Andreescu, T., Enescu, B., 2010, Mathematical Olympiad Treasures, USA, Birkhauser.

Andreescu, T., Zuming, F., 2004, A Path to Combinatorics for Undergraduates Counting Strategies, Boston , Birkhauser.

Final Round of 53rd Czech and Slovak Mathematical Olympiad**,** 2004, Problems and Solutions Book.

Guichard D., 2001, An Introduction to Combinatorics and Graph Theory, USA, International Editions.

Markuschewitsch, A.I., 1963, İndirgemeli Diziler, Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul.

Olimpiyatlar, Ulusal Bilim Olimpiyatları, Matematik, http://www.tubitak.gov.tr. (2014)

Öztürk, F., 1995, Kombinatorik(Sayma Problemleri), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No: 30

Recurrence Relation, 2009, Chris Tuffley , from http://www.mathsolympiad.org.nz. (2014)

Ruppert, E., 2007, Solving Recurrences, Computer science, York University, Canada.

Wilf, H.S., 1992, Generatingfunctionology, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Isparta' da doğan yazar, Tokat' ta başladığı ilk ve orta öğrenimini Denizli' de, Isparta Gönen' de başladığı lise öğrenimini Manisa' da tamamladı. 1997 yılında Boğaziçi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü' nde yüksek öğrenimine devam etti. 2002 yılında mezun olup çeşitli özel öğretim kurumlarında görev yaptıktan sonra 2004 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmenlik yapmaya başladı. Diyarbakır' ın Lice ve Çınar, Aydın' ın Söke ilçesinin Avşar köyünde görev yaptıktan sonra halen çalışmakta olduğu İzmir Bornova Yunus Emre Anadolu Lisesi' e atandı. Evli ve iki çocuk babasıdır.