YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ VE UYGULAMALARI

SALİH KOCAKAYA

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2015

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Rafail ALİZADE (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü müdürü

ABSTRACT

THE PIGEONHOLE PRINCIPLE AND APPLICATIONS

KOCAKAYA, Salih

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

May 2015, 40 pages

In this thesis we show how to apply the pigeonhole principle for solving various mathematical olympiad problems. Furthermore we give the solution of the problems on pigeonhole principle submitted in the first round of the TUBİTAK mathematical olympiads. We hope that this thesis will be helpfull for high school students that take part in the mathematical olympiads.

ÖZET

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ VE UYGULAMALARI

KOCAKAYA, Salih

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Mayıs- 2015, 40 sayfa

Bu çalışmada; güvercin yuvası ilkesinin değişik matematik olimpiyat sorularının çözümünde nasıl uygulanabileceğini gösterdik. Ayrıca TUBİTAK matematik olimpiyatları birinci aşamasında güvercin yuvası ilkesi ile ilgili çıkmış soruların çözümünü verdik.

Tezin matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrenciler ve bunları çalıştıracak öğretmenler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca ufkumu genişleterek sürekli gelişmemi sağlayan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Rafail ALİZADE' ye ve yine çalışmalarım boyunca sabır gösterip beni destekleyen eşim Fatma KOCAKAYA ve kızlarımız Selen ve Sultan KOCAKAYA ‘ya teşekkür ederim.

Salih KOCAKAYA

İzmir, 2015

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Güverci yuvası ilkesi ve Uygulamaları" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığımı ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

27.05.2015

Salih KOCAKAYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ:

Bu çalışmanın; 1. bölümünde güvercin yuvası ilkesi ve tanımları, bu ilke ile ilgili hikâyeler anlatıldı.

2. bölümünde güvercin yuvası ilkesi ile çözülebilen çok geniş kapsamlı çözümlü örnekler verilmiştir. Bu örnekler verilirken basitten zora doğru ilköğretimden ortaokula, liseden üniversiteye, matematik olimpiyatlarına hazırlananlardan yüksek lisans öğrencilerine herkesin karşılaşabileceği örneklere yer verilmiştir.

3. bölümde ise son 10 yılda ulusal matematik olimpiyatlarında çıkmış sorular ve çözümlerine yer verilmiştir.

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ

Güvercin yuvası ilkesi, Dirichlet prensibi veya çekmece prensibi olarak da bilinir. Çok basit bir ilke olmasına karşın çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu ilkeyi kullanarak ispatlanabilecek ilişkiler çok ilginç olabilmektedir. Beklenmedik ve kolay kolay görülemeyen uygulamaları bulunduğu için özellikle matematik olimpiyatlarında kullanılmaktadır.

Güvercin yuvası cinsinden tanım:

n güvercin m yuvaya dağıtıldığında $n > m$ ise, en az bir yuvada birden fazla sayıda güvercin bulunur. Başka bir değişle m yuvaya bir yuvaya bir güvercin düşecek şekilde en fazla m güvercin yerleştirilebilir, bir tane daha yerleştirilmesi bir yuvanın tekrar kullanılması ile olur. Bu durumda bir yuvada birden fazla güvercin bulunur.

Genelleştirilmiş güvercin yuvası ilkesi:

k pozitif bir tam sayı olmak üzere n güvercin yuvası $k \,.\, n + 1$ güvercin tarafından işgal edilirse en az bir güvercin yuvası k+1 güvercin yada daha fazla güvercin tarafından işgal edilir.

Çekmece cinsinden tanım:

Elimizde bulunan nesnelerin sayısı, bunları yerleştirmeyi düşündüğümüz çekmecelerin sayısından fazla ise, çekmecelerden en az birine iki veya daha fazla nesne yerleştirmek zorunda kalırız.

Fonksiyonlar cinsinden tanım:

X ve Y sonlu kümeler ve $|X| > |Y|$ ise, bu kümeler arasında tanımlı herhangi bir $f : X$ Y fonksiyonu 1-1olamaz. Yani, $f(x_1)$ Ť $f(x_2)$ olacak şekilde en az iki farklı x_1, x_2 X bulunur.

BİR HİKÂYE GÜVERCİN YUVASI İLKESİ

Ünlü Alman Matematikçi Gauss bir gün babasıyla ormanda gezerken şöyle bir soru sorar:" Bu ormanda yaprak sayısı aynı olan iki ağacın olması için bir koşul söyleyebilir misin?" Baba bu ilginç soru karşısında düşünmeye başlarken küçük Gauss sorunun yanıtını kendi verir: "Eğer ormandaki yapraklı ağaç sayısı bu ormanın en çok yaprağı olan ağacın yaprak sayısından daha fazlaysa en az iki ağacın yaprak sayıları aynıdır. Küçük Gauss'un karmaşık görünen yanıtının basit bir açıklaması;

Güvercin beslediğinizi düşünün. Bunlar da yuvalarına girmiş olsunlar. Eğer güvercin sayısı, yuva sayısından fazlaysa mesela dört yuva ve beş güvercin varsa en az bir yuvada birden fazla güvercin olacaktır. Bu sebeple bu ilkeye güvercin yuvası ilkesi adı verilmiştir. Yada güvercin kutsal bir hayvan olduğunda güvercin yuvası ilkesi de denilmiş olabilir.

DİNLERE GÖRE GÜVERCİN

İslam İnancında güvercin günahsızlık, sevgi ve barış simgesidir. Hz. Muhammed Mekke'den Medine'ye Hicret ederken kendisini öldürmek için izleyen müşriklerden kurtulmak için Sevr Dağındaki bir mağaraya sığındığında mağaranın girişindeki ağacın üzerine bir çift güvercin yuva yapar, yuvadaki güvercin yumurtalarını gören müşrikler mağaraya kimsenin girmiş olamayacağını düşünerek giderler. Güvercinlerin saygılarından ötürü KABE' ye konmadıklarını hatta üstünden uçmadıklarına inanılır. Bu nedenle İslam ülkelerinde Cami, kule ve sur yapılarının içine güvercinlerin barınması için yuvalar yapılır

Tevrat’ ta yaradılış bölümünde anlatıldığına göre Nuh Peygamber yeryüzünün kuruyup kurumadığını öğrenerek kendisine haber getirmesi için gemiden dışarı 3 kez güvercin salar. Güvercin ilk uçuşunda konacak hiç bir yer bulamayarak geri döner. 7 gün sonra ikinci uçuşunda gagasında bir zeytin dalı ile döner. Daha sonra son kez uçar ve geri dönmez. Böylece Nuh Peygamber yeryüzünün kuruduğunu anlar ve canlılarla birlikte karaya çıkar.

Hıristiyanlar güvercini Ruhul Kudüs’ün simgesi olarak gördüklerinden çoğu Zaman teslisin üçüncü üyesi olarak yer alır. Güvercinler Ruhul Kudüs’ü betimler, On iki güvercin on iki havariyi simgeler.

GÜVERCİN (DESTANI) HİKAYESİ

Bir gün bir güvercin kendisini kovalayan doğandan kurtulması için Hz. Muhammed’e sığınır. Doğan yavrularını beslemek için Hz. Muhammed ’ten güvercini ister. Hz. Muhammed güvercini saklar. Hz. Peygamber güvercin yerine doğana koyun vermeyi önerir. Buna razı olmayan güvercine bu kez kendi etinden kesip vereceğini söyler. Tam etini keserken, doğan Cebrail’ e güvercin de Mikail’e dönüşür. Kendilerinin ALLAH tarafından gönderildiğini söylerler.

BİR GÜVERCİN ÖYKÜSÜ

Tanrı bir gün Peygamberin birine bir sandık hediye eder ve der ki; Bu sandığı sana emanet ediyorum ama sakın ola ki içini açıp bakmayasın…
Tamam der Peygamber… Aradan zaman geçer ve Peygamberi bir merak sarar acaba sandıkta ne vardır? Günden güne merakı artar. Sonunda dayanamaz ve sandığı azıcık aralayıp içine göz atar ama sandığı aralar aralamaz içinden bir sarı güvercin ve bir mavi güvercin uçuverir. Peygamber son hamleyle sandığı kapatır ve içinde tek bir beyaz güvercin kalır…
Ve Tanrı yanına gelir, Peygamber işlediği günahın farkındadır, mahcuptur.
Tanrı şöyle seslenir.
Kaçırdığın o sarı güvercin insanoğlu için sonsuza dek yaşamdı
yani ‘ÖLÜMSÜZLÜK’ tü.
Kaçırdığın o mavi güvercin sonsuza dek mutluluk yani ‛BARIŞ′ tı.

Peki der Peygamber içinde kalan beyaz olanı nedir? Tanrı cevap verir…
O da sonsuza dek ‛UMUT′ tur.

UMUTLARINIZIN UÇUP GİTMEMESİ DİLEĞİYLE

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ İLE ÇÖZÜLEBİLEN SORULAR

S.1) Bir ailede doğum günü haftanın aynı günü olan iki kişinin bulunduğu bilindiğine göre bu aile en az kaç kişidir?

ÇÖZÜM: cevap 8

Bir hafta yedi gündür. 7 kişi olsalar her biri haftanın bir günü doğmuş olabilir.

S.2) Bir sınıfta aynı ayda doğan üç kişinin olduğundan emin olabilmek için bu sınıftaki minimum öğrenci sayısının ne olması gerekir?

ÇÖZÜM: cevap 25

Bir yıl 12 aydır. Her bir ayda iki kişi doğmuş olsa 24 kişi olurdu. Güvercin yuvası ilkesine göre bir ayda üç kişinin doğmasından emin olmak için en az 25 kişi olması gerekir.

S.3) Bir kutuda 10 siyah 10 mavi çorap olduğunu ve aynı renkten bir çift çoraba ihtiyaç duyulduğunu varsayalım. Her seferinde yalnızca bir tane ve bakmadan çoraplar alınıyorsa, kaç çorap kutudan alınmalıdır?

ÇÖZÜM: cevap 3

İki çorap alırsak farklı renklerde olabilirler. 3 çorap alırsak bir renkten mutlaka iki tane almış oluruz

S.4) Bir kutuda her renkten yeterli sayıda siyah, mavi ve beyaz çorap vardır. Bu kutudan rengine bakılmaksızın aynı renkten iki çift çorap almak için en az kaç çorap alınmalıdır?

ÇÖZÜM: cevap 6

5 çorap alırsak; Siyah 3, mavi 1, beyaz 1 olabilir. 6. çorabı aldığımızda rengi ne olursa olsun bir renkten iki çift çorap almış oluruz.

S.5) Bir okulda en az iki öğretmenin aynı ayda doğmuş olabilmeleri için o okulda en az kaç öğretmen bulunmalıdır

ÇÖZÜM: cevap 13
Bir yıl 12 aydır. Her bir ayda bir kişi doğmuş olsa 12 kişi olurdu. 13 T̀ 21.1 Ǵ1

S.6) 1 den 5 e kadar notların verildiği bir okulda yapılan bir sınav sonucunda 8 kişi aynı notu aldıysa(8 kişinin aynı notu alması garanti ediliyor.) bu sınıfta en az kaç öğrenci vardır?

ÇÖZÜM: Cevap 36

7kişi 1, 7kişi 2, 7kişi 3, 7kişi 4, 7kişi 5, almış olsun. 35 kişi eder. 8 kişinin aynı notu alması için en az bir kişi daha olması gerekir. Cevap 36

S.7) 34 ceviz 3 çocuk arasında dağıtıldı. En fazla ceviz alan çocuk en az kaç ceviz almış olabilir?

ÇÖZÜM: 12

34 = 3.11+1 Cevap: 12

S.8) Bir okulda 12 sınıf ve 298 öğrenci vardır. En fazla öğrencisi olan sınıfın sınıf mevcudu en az kaç olabilir?

ÇÖZÜM: 25

298 = 24.12 + 10 cevap: 25

S.9) 30 kişinin bulunduğu bir sınıfta en az kaç kişinin doğum günü haftanın aynı gününe rastlar?

ÇÖZÜM:
Bir hafta 7 gündür. 30 = 7.4 + 2 Cevap: 5

S.10) Bir kutuda 10 sarı, 12 kırmızı ve 7 mavi bilye bulunmaktadır. Kutudan rengine bakmadan bilyeler alıyoruz. En az kaç bilye alınmalı ki:

a) Her renkte en az bir bilye bulunsun?

b) Aynı renkte en az 3 bilye bulunsun?

c) En az 5 tane kırmızı bilye bulunsun?

ÇÖZÜM:

a) Kötü durum 22 bilye çekersek 12 kırmızı 10 sarı olabilir. Bir bilye daha çekersek mavi olmak zorundadır

12 + 10 + 1 = 23 bilye almalıyız.

b) Kötü durum 6 bilye çekersek 2 sarı, 2kırmızı, 2 mavi olabilir. 1 bilye daha çekersek bir renkten 3 bilye çekmiş oluruz. Yani 2 + 2 + 2 + 1 = 7 bilye almalıyız.

c) Kötü durum 17 bilye çekersek 10 u sarı 7 si mavi olabilir. 5 kırmızı bilyede çekilirse, yani
10 + 7 + 5 = 22 bilye almalıyız.

S.11) Bir okuldaki 15 sınıftan toplam 100 kişi seçildi. En az iki sınıftan aynı sayıda öğrenci alınmış olduğunu gösteriniz? (her sınıftan en az bir kişi seçilmiş)

ÇÖZÜM:

Her sınıftan farklı sayıda öğrenci seçilirse en az 1 +2 + 3 + . . . + 15 =120 öğrenci seçmeliyiz. Oysa 100 öğrenci seçtiğimize göre farklı sayıda öğrenci seçmemiz mümkün değildir. Yani en az iki sınıftan aynı sayıda öğrenci seçmişizdir.

S.12) 7 kişilik bir halk oyunları grubu, 2 sene boyunca her gün halka şeklinde halay oyunu sergilemişlerdir. Her gün bir başka biçimde dizilmiş olmaları mümkün müdür? Neden?

ÇÖZÜM: mümkündür.

2 yıl =365 + 366 = 731 gün

(7-1)! = 6! = 720 mümkündür. Çünkü gün sayısı diziliş sayısından fazladır.

S.13) Bir kutuda mavi ve kırmızı olmak üzere 30 tane bilye bulunuyor. Herhangi 12 bilyeden en az biri mavidir, Herhangi 20 bilyeden en az biri kırmızıdır. Kutudaki mavi ve kırmızı bilyelerin sayısını bulunuz. (Matematik Dünyası)

ÇÖZÜM:

12 bilyeden en az biri mavi ise en fazla 11 i kırmızıdır. 20 bilyeden en az biri kırmızı ise en fazla 19 u mavidir. Yani 11kırmızı 19 mavi bilye vardır.

S.14) 1 den 100 e kadar 1, 2, 3,..., 99,100 sayılarından en az 2 tanesinin ortak

böleninin 1 den büyük olması için en az kaç sayı seçmeliyiz?

ÇÖZÜM:

1 ile 100 arasında 25 tane asal sayı vardır. Bu asal sayıların yanında 26. sayı olarak 1 i seçtiğimizde yine herhangi iki sayının ortak böleni 1 olacaktır. Fakat 27. sayı için bu 27 sayı arasında ortak böleni 1 den büyük olan en az iki sayı bulunur.

S.15) Bir takvim yılında en fazla kaç tane ay’ın 13’ü Cuma günü olur?

ÇÖZÜM:

Bir hafta 7 gün olduğundan mod7 ye göre işlem yapılacaktır. Şubat ayının 13 ü Cuma ve şubat ayının 28 gün olduğu yılları düşünürsek 28 gün sonra 13 Mart Cuma ve 273 gün sonra 13 Kasım Cuma gününe denk gelir. 2015 yılı bu iddiayı doğrular.
O halde Cevabımız en çok 3 olur
13 Mayıs Cuma günü olan yıllar ise en az olur. Cevabımız en az da 1 dir.

S.16) Bir torbada 35 kımızı, 21, yeşil, 16 mavi, 12 sarı, 9 beyaz ve 9 siyah top vardır. Çekilen topların en az 14 tanesinin aynı renkte olmasını garanti etmek için torbadan en az kaç tane top çekilmelidir

ÇÖZÜM: cevap: 70

14 tanesinin aynı renkte olması için;

Kötü durum; 9 siyah, 9 beyaz, 12 sarı, 13 mavi, 13 yeşil, 13 kırmızı bilye çekildikten sorma bir bilye daha çekmeliyiz. Yani; 9 + 9 + 12 + 13 + 13 + 13 + 1 =70 bilye çekmeliyiz.

S.17) 30 kişilik bir grup 15 evli çiftten oluşuyor. Bu grup içinden en az kaç kişi seçmeliyiz ki seçilenlerden en az ikisi evli bir çift olsun?

ÇÖZÜM: cevap 16

15 çiftten birer kişi seçildikten sonra bir kişi daha seçilmelidir. 15 + 1 = 16

S.18) bir torbada 28 kırmızı, 20 yeşil, 12 mavi, 20 sarı, 10 beyaz ve 10 siyah top vardır. Çekilen topların en az 15 tanesinin aynı renkte olmasını garanti etmek için torbadan en az kaç tane top çekilmelidir? (UİMO-1997)

ÇÖZÜM: cevap75

15 tanesinin aynı renkte olması için;

Kötü durum; 10 siyah, 10 beyaz, 12 mavi, 14 sarı, 14 yeşil, 14 kırmızı bilye çekildikten sorma bir bilye daha çekmeliyiz. Yani;
10 + 10 + 12 + 14+ 14 + 14 + 1 =75 bilye çekmeliyiz.

S.19) İki basamaklı 11 sayı arasında birler basamağı aynı olan iki sayı bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

İki basamaklı bir sayının birler basamağındaki rakamlar 0,1,,2,3,4,5,6,7,8,9 olabilir. Bunların sayısı 10 olduğundan 11 sayıdan en az birinin ikisinin birler basamağı aynı olacaktır.

S.20) Bir toplantıya katılan herkes, daha önce gelmiş olanların bir kısmı ile el sıkışıyor. Toplantı sonunda herkes el sıkışmış olduğu kişilerin sayısını bir kâğıda yazıyor. Kâğıtta yazılı olan sayılardan en az ikisinin eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Toplantıya n kişinin katıldığını varsayalım. Kâğıda yazılmış olan sayılar 0 ile n- 1 arasındaki tamsayılardır. Kâğıtta yazılı n sayıdan her birisi n farklı değere sahip olabileceğinden güvercin yuvası ilkesini doğrudan uygulayamayız.

Dikkat edilirse herhangi bir kâğıtta n-1 sayısı yazılı ise, herkesle el sıkışmış en az bir kişi vardır. Bu durumda kimseyle el sıkışmamış birisi olamayacağından hiçbir kâğıtta 0 yazılı değildir. O halde hiçbir kâğıtta n-1 yazılı değilse sayılar 0 ile n-2 arasındaki n-1 değere, aksi halde 1 ile n-1 arasında değere sahip olabilirler. Her iki durumda da güvercin yuvası ilkesine göre kâğıtta yazılı sayılardan en az ikisi aynıdır.

S.21) Herhangi altı tam sayı verildiğinde, bu altı sayı arasında farkı 5 ile bölünebilen iki sayı vardır.

ÇÖZÜM:

Bir sayının 5 ile bölümünden kalanlar 0,1,2,3,4 şeklinde beş farklı değer alabilir. O halde 6 sayı alındığında bunlardan 5 e bölümünden aynı kalanı veren en az iki sayı bulunur. Buda, 6 sayı arasında farkı 5 ile bölünebilen 2 sayı vardır demektir.

S.22) 10 kişilik bir öğrenci grubu matematik sınavına giriyorlar. Sınavda her bir sorunun tam olarak 7 öğrenci tarafından doğru olarak çözüldüğü görülüyor. İlk 9 öğrencinin tam olarak 4 soruyu doğru çözdüğü bilindiğine göre, 10. öğrenci kaç soru doğru çözmüştür?

ÇÖZÜM:

Sınavda n soru sorulmuş olsun. Her bir soru tam olarak 7 öğrenci tarafından doğru olarak çözüldüğüne göre, doğru cevaplanan soru sayısı toplamda $7n$ dir. ilk 9 öğrencinin tam olarak 4 soruyu doğru çözdüğü bilindiğine göre, ilk 9 öğrencinin doğru cevapladığı soru sayısı 36 dır. Buna göre 10. öğrenci $7n - 36$ soruyu doğru cevaplamıştır. Bu ise $7n - 36 \quad 0$ demektir. O halde $n \quad 6$ dır. Ayrıca 10. öğrencinin doğru cevapladığı soru sayısı n den büyük olamaz. Yani $7n - 36 \quad n$ olup $n \quad 6$ dır. O halde sınavda 6 soru sorulmuş ve 10. öğrenci 6 soruyu da cevaplamıştır.

S.23) A={1,2,3,4,5,6,7,8,9} kümesinden oluşturulacak bir alt kümenin toplamı 10 olacak şekilde iki eleman içermesi için bu alt kümenin eleman sayısı minimum ne olmalıdır?

ÇÖZÜM:

Seçilecek eleman sayısı en az 6 olmalıdır. Çünkü bu sorunun cevabında her zaman toplamı 10 olan en az bir ikili alınması gerektiğini göstermemiz gerekmektedir. Öncelikle A kümesinde toplamları 10 olan ikili grupları sıralayalım: (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6) ve geriye yalnızca **"5"** sayısı kalmaktadır. Sonuç olarak 10 toplamasını sağlayan 4 ikili ve ayrı kalan **"5"** ile 5 grup oluşur.

YUVA: sayıların seçilebileceği grup sayısı burada 5'tir.
GÜVERCİN: seçilecek eleman sayısı burada 6'dır.

S.24) Bilyeler üzerindeki sayı adedince numaralanarak 1 numaralı bilyeden 1 tane, iki numaralı bilyeden 2 tane , … , 40 numaralı bilyeden 40 tane bir torbaya konuyor. Torbadan rastgele çekilen bilye yerine konmamak şartıyla en az kaç bilye çekilmelidir ki aynı numaralı bilyeden 10 tane çekilmesi garanti edilsin?

ÇÖZÜM:

En kötü durum, 1.bilyeden 1, 2. bilyeden 2 tane, 3. bilyeden 3 tane , … , 9. bilyeden 9 tane ve geriye kalan diğer bilyelerden 9 tane çekilirse yani

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+9+9+\ldots+9 = 324$$

tane bilye çekilse yetmez. Güvercin yuvası ilkesine göre 1 bilye daha çekilmelidir. Cevap 325dir.

S.25) 24 kişilik bir sınıfta yapılan bir test sınavında Salih 11 soruyu yanlış cevaplamıştır. Diğer öğrencilerin yanlış sayısı daha azdır. Aynı sayıda soruyu yanlış cevaplayan en fazla öğrenci sayısı *n* olsun *n* en az kaçtır?

ÇÖZÜM:

Salih hariç 23 öğrenci var. Bunların yanlış sayısı 11 den az olduğu için 11 farklı durum var. Bu öğrencilerin her birinin yaptığı yanlış sayısı 0.1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 sayılarından biridir.

23 = 11.2 +1 Güvecin yuvası ilkesine göre yuvalardan birinde en az 3 öğrenci (güvercin) var

Yanlış sayısı: yuva
Öğrenciler: güvercin

S.26) 1'le 50 arasından herhangi on sayı seçildiğinde bu on sayı arasından, toplamları birbirine eşit olan iki tane beş sayılık küme bulunduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:

Diyelim ki ,{2, 5, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 42, 50} sayılarını seçtiniz. Aşağıdaki beş öğeli altkümelere bakalım:{2, 24, 27, 33, 42} ve {5, 26, 30, 33, 34}. Bu iki kümenin sayılarının toplamları birbirine eşittir.

Şimdi böyle iki kümenin daima bulunacağını kanıtlayalım. A, on sayılık kümemiz olsun. A'nın kaç tane beş elemanlı altkümesi vardır?

$\binom{10}{5}$=252 tane vardır. Bu sayıyı aklımızda tutalım, birazdan gerekecek. Her beş

elemanlı altkümenin sayılarının toplamı

en az 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 olabilir,

en çok da 46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 240

toplamların 15'le 240 arasında değiştiğini bulduk.

15'le 240 arasında 240 – 15 + 1 = 226 sayı vardır.

Bu sayı da önemli olacak, aklımızda tutalım. Demek ki, 252 tane beş öğelik altkümenin sayılarının toplamı (15'le 240 arasındaki) 226 sayıdan biri olmalı. 252, 226'dan daha büyük olduğundan, güvercin yuvası ilkesine göre, bu 252 altkümeden en az ikisi aynı toplamı vermeli. İddiamız kanıtlanmıştır

S.27) 25takımın katıldığı bir turnuvada her an aynı sayıda maç yapmış iki takım bulunacağını kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:

Yuva: maç sayısı

Güvercin: takım

Takımların yaptığı maç sayısı 0, 1, 2, 3, . . . , 24 bir takım en fazla 24 maç yapabilir.

A takımı diyor hiç maç yapmadım.

B takımı diyor 24 maç yaptım.

Bu iki takımın söyledikleri aynı anda doğru olamaz. Yani bir takım yalan söylüyor. O halde güvercin yuvası ilkesine göre en az iki takımın yaptığı maç sayısı aynıdır.

S.28) Bir toplulukta en az 3 kişinin yılın aynı ayı, haftanın aynı günü doğduğu kesin bilindiğine göre bu topluluk en az kaç kişiden oluşmaktadır?

ÇÖZÜM:

Bir yılda 12 ay ve bir haftada 7 gün olduğundan 7.12=84 (ay, gün) ikilisi vardır. En az 3 kişi yılın aynı ayı ve haftanın aynı günü doğduğu bilindiğine göre, en kötü durum 2.84=168 kişi kesinlikle bulunmaktadır. Bu durumda aynı ay ve aynı gün doğan 2 şer kişi olmuş olur. En az 3 kişinin yılın aynı ayı ve haftanın aynı günü doğduğunu garanti etmek için 1 kişi daha eklemek yeter.

Yani cevap: 168+1= 169

S.29) {1, 2, 3,..., 49, 50} sayılarından en az kaç sayı seçilmelidir ki, en az ikisinin ortak böleni olmasın?

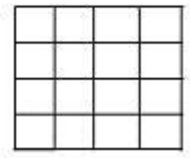
ÇÖZÜM: Verilen sayılardan {1, 2} {3, 4} {5, 6} ,...{49, 50}

Şeklinde 25 tane ikili küme yazalım. Bunların her birinden çift sayıları alırsak en kötü durumu elde etmiş oluruz.

Yani, 25 tane sayı var ve ortak böleni olmayan iki sayı yok. Buna göre en az iki tane ortak böleni olmayan sayıyı garantilemek için, 1 sayı daha seçmeliyiz. Yani 26 sayı seçersek, en az iki tane ortak böleni olmayan sayı garantidir.

S.30) 4x4 metre boyutunda bir halının üzerinde 15 delik oluşmuştur. Bu halıdan 1x1 metre boyutunda delik içermeyen bir parça kesilebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM:



15 delik 16 kare var.
Güvercin: delik
Yuva: 1x1 metre boyutundaki kareler
Güvercin yuvası ilkesine göre bir yuva boş kalır. Bu da iddiamızı doğrular.

S.31) Düzlemde 50 nokta verilmiştir ve herhangi üçü aynı doğru üzerinde bulunmamaktadır. Düzlemdeki her nokta,4 renkten biriyle boyanmıştır. En az 130 çeşitkenar üçgenin köşelerinin aynı renk olduğunu ispatlayınız. JBMO-2007

ÇÖZÜM:

Lemma: Herhangi üçü doğrusal olmayacak şekilde n noktayı düzleme yerleştirirsek, en az $\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ çeşitkenar üçgen elde ederiz.

İspat: n noktayı yerleştirilmiş olalım ve ikizkenar üçgen sayısına x diyelim. Bu üçgenlerin taban sayısı da y olsun. (eşkenar üçgenlerin taban sayısını üç, eşkenar olmayan ikizkenar üçgenlerinkini bir sayarız). Açık olarak y x . Bu noktalardan oluşan her doğru parçası en fazla iki üçgenin tabanı olabilir, eğer olmazsa üç nokta dik kenarortayların üzerinde bulunur. Böylece en fazla $2\binom{n}{2}$ tane üçgen vardır.

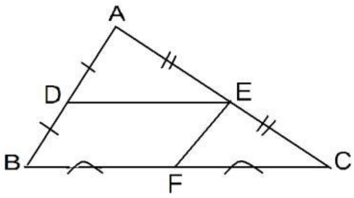
Sonuç olarak en az ; $\binom{n}{3} - 2\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ tane çeşitkenar üçgen vardır.

Güvercin yuvası prensibine göre, en az 13 noktanın aynı renk ile boyandığını buluruz.

En az ; $\frac{13.12.5}{6}$ =130 çeşitkenar üçgenin köşelerinin aynı renk olduğu gösterilmiş oluruz.

S.32) ABC üçgenin içinde herhangi üçü doğrusal olmayan 7 nokta veriliyor. Bu 7 nokta arasında öyle üç nokta vardır ki, oluşturduğu üçgenin alanı $\frac{1}{4}A(ABC)$ den küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:



ABC üçgenini şekildeki gibi alanları eş iki üçgen ve bir paralelkenara ayıralım.

Güvercin yuvası ilkesinden aynı şekil içinde en az $\left\lfloor \frac{7-1}{3} \right\rfloor+1=3$ nokta vardır. Bu üç noktanın oluşturacağı üçgenin alanı $\frac{1}{4}A(ABC)$ den küçük veya eşittir.

S.33) Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan 13 nokta veriliyor. Bu 13 nokta sarı, kırmızı, mavi veya yeşil renkten birine boyanıyor. Boyanan bu noktaları köşe kabul eden ve tüm köşeleri aynı renkte tane olan üçgen sayısı en az kaçtır?

ÇÖZÜM:

Renkler yaklaşık eşit dağıtılırsa, yani örneğin 3 sarı, 3 kımızı, 3 mavi, 4 yeşil renkte olursa köşeleri aynı renkte olan üçgen sayısı

$$\binom{3}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{3}+\binom{4}{3}=7 \text{ olur.}$$

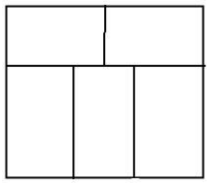
Renkler başka şekilde dağıtılırsa en az 5 nokta aynı renkte olur. Dolayısıyla köşeleri aynı renkte olan üçgen sayısı en az

$$\binom{5}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{3}=12 \text{ olur.}$$

O halde cevap 7 dir.

S.34) Kenar uzunluğu 3 birim olan bir karenin iç bölgesinde 6 farklı nokta alınıyor. Bu altı nokta arasındaki uzaklığın ikiden küçük olduğu iki noktanın bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:



Şekilde görüldüğü gibi kareyi 5 dikdörtgene ayıralım. Alt kısımdaki

Üç eş dikdörtgenin boyutları 1 x $\sqrt{3}$ olsun. Buna göre, bu dikdörtgenlerin

Köşegen uzunlukları 2 olur. Üstte bulunan iki dikdörtgenin boyutları ise

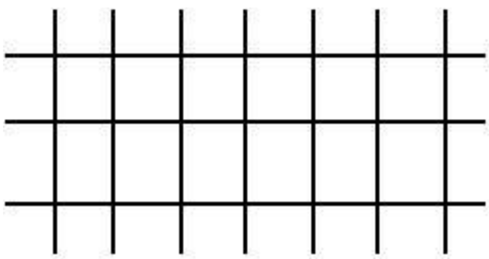
$\frac{3}{2} x \left(3-\sqrt{3}\right) <$ 4 tür. O halde bu iki dikdörtgenin köşegen uzunlukları

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\sqrt{3}\right)^2 <$ 4 tür.

O halde bu iki dikdörtgenin köşegen uzunlukları 2 den küçüktür. Güvercin yuvası ilkesine göre, verilen 6 noktadan öyle iki nokta vardır ki, bu ikisi elde edilen beş dikdörtgenin içinde veya üzerindedir. Buna göre bu iki nokta arasındaki uzaklık en fazla 2 olur. Buda bu iki noktanın altta bulunan üç dikdörtgenden birinin karşılıklı iki köşesi üzerinde olması halinde geçerlidir. Buda noktalardan birinin karenin üzerinde olması demektir. Bu durum, altı noktanın karenin iç bölgesinde olması durumu ile çelişir. O halde aranan şartı sağlayan iki nokta vardır.

S.35) *Bir düzlemin bütün noktaları iki renkle boyanırsa, dört köşesi de aynı renkte olan bir dikdörtgen vardır.*

Çözüm:



Şekildeki gibi 21 nokta alalım. Her sütunda en az iki nokta aynı renkte olacak. Bu iki noktayı $\binom{3}{2} = 3$ yolla rengi 2 yolla seçebiliriz. Böylece 6 değişik durum olabilir.

7 > 6 olduğunda iki farkı sütunda aynı renk ve aynı satırda iki çift nokta bulunur. Bu dört nokta bir dikdörtgenin köşeleridir.

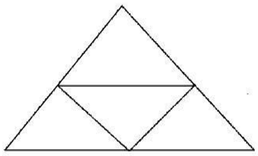
Not: 3 x 6 şeklinde 18 nokta seçmemiz ispat için yeterli değildir.

S	B	B	B	S	S
B	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	S

Görüldüğü gibi köşeleri bu 18 noktadan oluşan bir dikdörtgen yoktur. O halde bir sütun daha eklemeliyiz. Cevap 21

S.36) *Kenar uzunluğu 2 olan bir eşkenar üçgenin içinde alınan beş noktadan en az ikisi arasındaki uzaklığın 1'den küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.*

Çözüm:



Üçgenin üç kenarının orta noktalarını birleştirelim. Böylece üçgeni kenar uzunlukları 1 olan dört eşkenar üçgene ayırmış oluruz. Bu üçgenin içinde beş nokta alırsak en az ikisini aynı küçük üçgenden almak zorunda kalırız. Ve kanıtımız tamamlanmış olur.

S.37) Herhangi üç tamsayıdan $a^3b - ab^3$ sayısı 10' a bölünebilecek şekilde iki tane a ve b sayısı seçilebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$a^3b - ab^3$ = ab(a-b) (a+b) sayısı daima çift sayı olduğu açıktır.

A veya b sayılarından biri, $5k$ formunda ise sorun yok yani sayı 10'a bölünür.

Eğer $5k$ formunda değilse üç sayı $5k\pm1$ ya da $5k\pm2$ formunda olacaktır. Güvercin yuvası ilkesine göre, sayılardan ikisi bu iki formdan birine ait olmalıdır. Dolayısıyla, toplamları ya da farkları 5 ' in katı olmalıdır.

S.38) f(x), katsayıları tamsayı olan bir polinom olsun. Eğer f(x) = 2 eşitliğini sağlayan üç tamsayı varsa, f(x) = 3 eşitliğini sağlayan bir tamsayı olmadığını kanıtlayın.

Çözüm:

Önce p ve q sayıları ne olursa olsun, p − q sayısının f(p) − f(q)'yü böldüğünü gösterelim. Şimdi f(a) = f(b) = f(c) = 2 ve f(d) = 3 olsun. Bu durumda,

$(d - a) \mid (f(d) - f(a)) = 3 - 2 = 1$

$(d - b) \mid (f(d) - f(b)) = 3 - 2 = 1$

$(d - c) \mid (f(d) - f(c)) = 3 - 2 = 1$

Olduğundan, $d - a$, $d - b$ ve $d - c$ sayıları ya 1'e ya da −1'e eşit olmalıdır. Güvercin yuvası ilkesine göre bu üç sayıdan en az ikisi birbirine eşit olmalı. Bundan da a, b ve c sayılarından en az ikisinin eşit olması gerektiği çıkar. Böylece kanıtımız tamamlanmıştır.

S.39) 17 tane pozitif tamsayıdan oluşan bir kümenin bazı 5 elemanlı alt kümelerinin elemanlarının toplamının 5 in katı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Bir tamsayının 5 ile böümünden elde edilebilecek kalanlar 0,1,2,3,4 olmak üzere beş tanedir. 17 sayı içinde elde edilebilecek kalan sayısı 5 tanedir. Eğer seçilen beş elemanlı alt kümedeki sayıların beş ile bölümünden elde edilen kalanlar farklı ise 0+1+2+3+4 = 10 , dolayısıyla 5'in katıdır.

En kötü durumu düşünelim. 17 sayıdan elde edilen kalanlar sadece 4 tane ise ve herbirinden 4 tane sayı varsa kalan son sayı bu dört kalandan biri ile aynı olacağından bu beş sayının toplamı gene 5'in katı olur

S.40) 1 den 30'a kadar numaralandırılmış 30 adet topun bulunduğu A torbasından rasgele toplar seçilip boş bir B torbasına atılacaktır. B torbasında, birinin numarası diğerinin üç katı olacak şekilde iki topun bulunmasını garantilemek için A torbasından en az kaç top seçilmesi gerekir?

ÇÖZÜM:

30 un üçte birinden büyük bütün numaralar bu şartı sağlar. 30, 29, 28,...12,11 Bunların dışında kalan 3, 2 numaralarda sağlar. Yani 22 elemanlı 30, 29, 28,...12,11, 3, 2 kümesindeki numaralı topları çekersek bu kötü durumdur. Güvercin yuvası ilkesine göre 1 top daha çekersek, birinin üzerindeki numara diğerinin 3 katı olur.

S.41) 99 tane kartın bir yüzüne 1, 2, 3,..., 99 sayıları yazılmıştır. Kartlar karıştırılır ve öteki yüzlerine yeniden 1, 2, 3,..., 99 sayıları yazılır. Her kartın iki yüzündeki sayıların toplamı alınır. Bu 99 toplamın çarpımının çift sayı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

1, 2, 3,..., 99 sayıları arasında tek sayılar çift sayılardan bir fazla olduğundan güvercin yuvası ilkesine göre en az iki kartın her iki yüzünde tek sayı yazılmış olacak. Bu kartın iki yüzündeki sayıların toplamı çift olacak. Dolayısıyla kartların üzerinde yazılı olan sayıların toplamlarının çarpımı da çift sayı olacaktır.

S.42) Bir toplantıya katılan 100 kişiden her biri geriye kalan 99 kişiden en az 66 ‘sı ile tanışıyor. Herhangi 4 kişi alındığında bunlardan bir biriyle tanışmayan ikisi bulunur. Böyle bir durum olabilir mi?

ÇÖZÜM:

Olabilir. 100 kişi her biri A , B kümelerine ve 34 kişilik C kümesine ayıralım. Her kümedeki tüm kişiler diğer iki kümedeki tüm kişilerle tanışsın, fakat kendi aralarında tanışmasın. O halde herhangi 4 kişi aldığımızda güvercin yuvası ilkesine göre bu kişilerden en az ikisi aynı kümeden seçilecektir. Dolayısıyla birbiriyle tanışmayacaktır.

S.43) 1, 2, 3, … , 99, 100 sayıları arasından 11 tane sayı seçiliyor. Buna göre, bu 11 sayının altkümelerinden en az iki tanesinin elemanları toplamının aynı olacağını kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:

11 elemanlı bir kümenin eleman sayısı 11’den az olan ve boş kümeden farklı $2^{11} - 2 = 2046$ tane altkümesi vardır. bu alt kümelerden herhangi birinin elemanları toplamı en fazla

$$91 + 92 + 93 + \dots + 99 + 100 = 955$$

olacaktır. Buna göre, güvercin yuvası ilkesi uyarınca, elemanları toplamı birbirine eşit olan iki tane alt küme bulunacaktır. Eğer bu kümelerin ortak elemanları varsa, bu elemanı iki kümeden de çıkararak kesişimleri boş küme olan ve elemanları toplamları aynı olan iki alt küme elde edebiliriz.

S.44) 1, 2, 3,..., 99,100 sayıları arasından 51 tane sayı seçiliyor. Buna göre, bu 51 sayı arasında ki sayılardan birinin, bir diğer sayıyı bölebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM:

50 tek sayıyı, 1, 3, 5,..., 99 sayılarını alalım. Her biri için bir kutu düşünelim. Bu kutular hem sayının kendisini hem de sayı ile 2’nin kuvvetinin çarpımını içersin. Buna göre ilk kutu 1, 2, 4,8,16,..., ikinci kutu 3, 6,12, 24, 48,... olarak gidecektir. Eğer 51

sayı seçersek güvercin yuvası ilkesine göre bu iki sayı mecburen aynı kutudan seçilecektir. Yani sayılardan biri $2^n k$ iken diğeri $2^m k$ olacak ve aynı k çarpanına sahip olacaktır. Dolayısıyla sayılardan biri diğerini bölecektir.

S.45) 1, 2, 3,...,12 sayılarını, iki komşu sayı arasındaki fark 3, 4 veya 5 olacak şekilde, çember üzerinde yazmak mümkün müdür?

ÇÖZÜM:

Sayıların koşullara uygun şekilde yerleştirildiğini varsayalım. O halde 1, 2, 3, 10, 11, 12 sayıları yan yana gelmediği için geriye kalan 6 sayıdan birer tane bu sayıların aralarına yerleştirilmiştir. Diğer taraftan 4 sayısı bu sayılardan sadece 1 ile komşu olabilir. Bu bir çelişkidir. Bu çelişki böyle bir yerleşmenin mümkün olmadığını kanıtlar.

S.46) $2007^n - 1$ sayısının son 2007 rakamı sıfır olacak şekilde bir pozitif tam sayının var olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Güvercin yuvası ilkesine göre 2007^k sayısının son 2007 rakamı ile aynı olacak şekilde $m > k$ için bir 2007^n sayısı vardır. Çünkü , 2007^k sayısı ve 2007^n sayısının 10^{2007} ye bölümünden en fazla 10^{2007} farklı yani sonlu sayıda kalan elde edilebilir. Bu durumda , 2007^k sayısı ile 2007^n sayısının son 20007 rakamı birbirini aynı olacak şekilde, k ve m pozitif tamsayıları bulmak her zaman mümkündür. Buna göre,

$$2007^m - 2007^k = 2007^k\left(2007^{m-k} - 1\right) = M.10^{2007}$$

Yazılabilir. 2007 sayısı 2 ve 5’e bölünmediğinden , $2007^{m-k} - 1 = a.10^{2007}$ olacak şekilde bir sayı olmalıdır

S.47) Asal çarpanları sadece 5, 7, ve 11 asal sayılardan oluşan 9 tane sayı içinde çarpımları tam kare olan iki sayı bulunduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM:

9 sayı, $5^{x}\,7^{y}11^{z}$ şeklindedir. Bir sayının tam kare olabilmesi için, tüm asal çarpanların kuvvetleri çift olmalıdır. (x, y , z) üçlüsünde x, y , z tek ve çift olma durumuna göre,
(T,T,T), T,T,Ç), T,Ç,T), (Ç,T,T), (Ç,Ç,T), (Ç,T, Ç), (T,Ç, Ç),ve (Ç,T, Ç) olabilir. Yani 8 durum vardır. O halde güvercin yuvası ilkesine göre, 9 sayı içindeki sayılardan en az ikisinin üsleri tek, çift olma durumuna sahiptir. Bu iki sayı birbiriyle çarpılırsa üsler (Ç,Ç, Ç) olur. Buna göre, 9 sayı içinde çarpımları tam kare olan iki sayı vardır.

S.48) ilk dört ve son dört 2009 olan ve 2007'ye bölünen bir sayının bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$A = 2009\underbrace{007...}_{B}2009$ sayısını göz önüne alalım.

$$A = 2009\underbrace{007...}_{B}2009 = 2009007.10^{k} + B.10^{4} + 2009$$

$$= 2007000.10^{k} + 2007.10^{k} + 2007 + B.10^{4} + 2$$

Olduğundan, A sayısının 2007'ye bölünmesi için, $B.10^{4} + 2$ sayısını 2007'ye bölünecek şekilde seçmemiz gerekir.

$B.10^{4} + 2$ sayısı 2007'ye bölünecek şekilde bir B sayısının olduğunu ispatlayalım.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Bu şekilde bir B sayısının olmadığını kabul edelim. Yani,

$n = 0,1, 2, 3,..., 2006$ için, $B.10^{4} + 2$ sayısı 2007'ye bölünmesin. Bu durumda güvercin yuvası ilkesine göre, $B.10^{4} + 2$, sayısı en az iki B_1, B_2 sayısı için, 2007'ye bölümünden aynı kalanı verir ve bu iki sayının farkı 2007'ye bölünür ki bu bir çelişkidir. O halde
$B.10^{4} + 2$ sayısı 2007'ye bölünecek şekilde bir B sayısı daima vardır.

S.49) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayıları veriliyor.

$a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_s$ Toplamına bölünebilecek şekilde, $0 \le r < s \le n$ koşulunu sağlayan r ve s sayılarının olduğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM:

$S_0 = 0$ ve $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ için, $S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ olsun. Bu şekilde n+1 tane toplam elde edilir. Güvercin yuvası ilkesine göre, bu n+1 toplamdan en az iki tanesi n'ye bölündüğünden aynı kalanı vermelidir. Aynı kalanı veren toplamlar S_r ve S_S olsun.

Bu durumda $S_S - S_r = a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_s$, farkı n'ye bölünür.

S.50) $B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ olmak üzere; B nin herhangi iki elemanının toplamı 125 değilse B kümesi en fazla kaç elemanlıdır?

ÇÖZÜM:

Toplamları 125 olan sayı ikilileri

(25, 100) , (26, 99) , (27 , 98) , …, (62 , 63)

Olmak üzere 38 tanedir. B kümesine bu ikililerden sadece 1 tanesi dâhil edebiliriz. $\{1, 2, 3, \ldots, 24\}$ Kümesinin herhangi bir kombinasyonu da istenen şartı sağlar. Dolayısıyla bu sayıların her biri kümeye ilave edilirse B kümesinin elemanlarının en büyük değeri, 38+24=62 elde edilir.

S.51) 63 ten küçük 6 farklı pozitif tam sayı içinden , $b < a \le 2b$ olacak şekilde a ve b sayılarının bulunabileceğini gösteriniz.

İspat: $\{1, 2, 3, \ldots, 126\}$ sayılarını $b < a \le 2b$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde 5 kümeye ayıralım. Bu kümeler,

$\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, \ldots, 14\}$, $\{15, 16, \ldots, 30\}$, $\{31, 32, \ldots, 62\}$

Şeklinde olacaktır. Güvercin yuvası ilkesine göre 6 sayı içerisinde en az ikisi bu 5 küme gurubundan birinde olmalıdır. O halde $b < a \le 2b$ olacak şekilde a ve b sayıları vardır.

S.52) $\{1, 2, 3,...,105\}$ Kümesinin elemanlarından 56 tanesi seçildiğinde farkı 10 olan iki elemanın varlığını gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Bu kümenin elemanlarını $\{1,11\}$ $\{2,12\}$ $\{3,13\}$… $\{10, 20\}$ $\{11, 21\}$ $\{12, 22\}$ … $\{30, 40\}$ $\{31, 41\}$ … $\{90,100\}$ 50 tane iki elemanlı ve elemanlarının farkı 10 olan küme ile $\{101\}$ $\{102\}$ $\{103\}$ $\{104\}$ $\{105\}$ 5 tanede bir elemanlı olmak üzere 55 kümeye ayırdık. Bu 55 kümenin her birinden bir eleman seçersek farkı 10 olan herhangi iki eleman seçmiş olamayız. Bir eleman daha seçersek iki elemanlı kümelerden birini seçmiş oluruz. Güvercin yuvası prensibince farkı 10 olan iki sayı bulunacaktır.

S.53) $\{1, 4, 7,10...,100\}$ kümesinin elemanlarından seçilen herhangi yirmi sayıdan oluşan küme A olsun. A kümesinde toplamları 104 olan iki sayının olduğunu gösteriniz. (Putman 1978)

ÇÖZÜM:

1, 4, 7, ... , 100 dizisinde $\frac{100-1}{3} + 1 = 34$ tane terim vardır. Bu diziyi $\{1\}$ $\{52\}$ $\{4,100\}$ $\{7, 97\}$ $\{10, 94\}$ … $\{49, 55\}$

Şeklinde 18 tane gruba ayırdığımızda 1, 53, 4, 7, 10, … 49 u seçelim. Bunların toplamı 104 etmez. Fakat 20 tane sayı seçtiğimizde Güverci yuvası ilkesine göre yukarıdaki ikililerin 104 ü tamamlayanlarından ikisi kesin seçilmiş olacaktır.

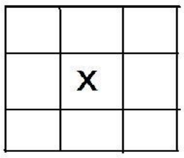
S.54) 1,2,3, … ,99,100 sayıları arasından 51 sayı seçiliyor. Buna göre bu 51 sayıdan iki tanesinin aralarında asal olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:

Varsayılan bu 100 sayı arasından (1, 2), (3, 4), (5, 6), … ,(99, 100) şeklinde ikililer oluşturalım. 51 sayı seçeceğimiz için güvercin yuvası ilkesi gereğince bu sayılar arasında (k, k+1) ikilisi bulunacaktır. Buna göre k+1 ve k sayılarını bölen p asal sayısı varsa, bu asal sayı (k + 1 - k) =1 sayısını da bölecektir ki bu durum çelişki olur. Demek ki (k, k+1) sayılarının asal olan ortak böleni yoktur.

S.55) 3x3 lük bir tablonun her bir karesine 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sayılarından birini, ortak kenara sahip iki karedeki sayıların toplamı asal sayı olacak şekilde yazmak mümkün müdür?

ÇÖZÜM:

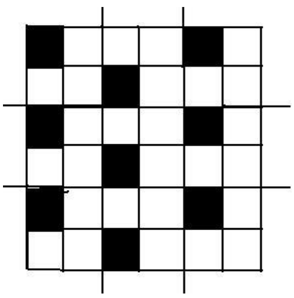


3x3 lük bir tablonun merkezindeki kareye yazılan sayı x olsun x çift sayı olduğunda, x in komşusu olan karelerdeki dört sayı, toplamının asal sayı olması için tek sayı olmalıdır. Bu durumda güvercin yuvası ilkesine göre beş adet tek sayı olduğundan iki tek sayı ortak kenara sahip iki karede olacak ve toplamları ikiden büyük çift sayı olacağından asal sayı olamayacaktır.

x tek sayı olduğunda, x'in komşusu olan karelerdeki dört sayı mod3 te *x*+2, *x*+4, *x*+6, *x*+8 olacaktır. Bu sayılardan birisi 3 ten büyük ve üçün katı olacağından asal sayı olamaz.
Cevap: mümkün değil

S.56) 6x6 boyutlu bir tablo karelerin hiçbir ortak kenarı veya köşesi bulunmayacak şekilde en fazla kaç karesi boyanabilir?

ÇÖZÜM:



2x2 lik karelerin içinde bir tane boyanmış kare olabilir. Buna göre boyanan karelerin hiçbir ortak kenarı veya köşesi bulunmayacak şekilde en fazla 9 $\frac{6x6}{2x2}$ kare boyanabilir. 9 için örnek yukarıdaki şekildeki gibidir.

S.57) Bir yarışmada tüm soruları çözen yarışmacı yoktur. Her bir soru tam olarak üç öğrenci tarafından çözülüyor ve her bir soru ikilisini çözen de bir öğrenci vardır. Buna göre yarışmada sorulan soru sayısı en fazla kaç olur?

ÇÖZÜM:

Yarışmada 1,2,3,…,*n* soru sorulsun. 1. soruyu A, B, C adlı yarışmacılar çözmüş olsunlar. Sorulardan her biri tam olarak bir öğrenci tarafından çözülmüş olduğundan, diğer her bir soru, A, B veya C tarafından çözülmüş olacaktır. Buna göre soru sayısı en az 8 olsun. Güvercin yuvası ilkesine göre diğer 7 sorunun en az üçü A, B veya C den biri tarafından çözülmüş olacaktır. Diğer 7 sorunun en az üçünü çözen A olsun. Bu üç soruda 2, 3, 4 numaralı sorular olsun.1, 2, 3, 4 sorularından en az ikisini çözen tek kişi A dır. Tüm soruları çözen öğrenci olmadığından A nın çözemediği soru 5 numaralı soru olsun. Hem 5. soruyu hem de ilk soruyu çözen bir kişi vardır ve bu kişi A değildir. 2, 3, 4 soruları için bu geçerli olduğundan 5. soruyu 4 kişi olmalıdır. Çelişki. Demek ki en fazla 7 soru olabilir.

Öğrenciler	Çözdüğü problemler
A	1, 2, 3
B	1, 4, 5
C	1, 6, 7
D	2, 4, 6
E	2, 5, 7
F	3, 4, 7
G	3, 5, 6

S.58) Bir okulda 300 erkek ve 300 kız öğrenci bulunmaktadır. Bu öğrenciler eşit sayıda beş sınıfa konuyor. Her bir sınıfta en az 33 erkek ve 33 kız öğrenci bulunduğu biliniyor. Aynı sınıftan bir erkek ile bir kız öğrenci bir grup oluşturarak yarışmaya katılabiliyor. Grubu olan bir öğrenci başka gruba katılamıyor. Buna göre kesin oluşturulabilecek grupların sayısı en çok kaç olur?

ÇÖZÜM:

Okulda 600 öğrenci beş sınıfa eşit olarak dağıtılırsa, her sınıfa 120 öğrenci düşer. Her sınıfta en az 33 erkek, 33 kız öğrenci olduğu biliniyorsa, her sınıfta en fazla 54 kişilik boş yer var demektir. Sınıfları A, B, C, D, E şeklinde adlandıralım. Kız öğrencilerden sınıflara yerleştirmediğimiz 300-5x33= 135 öğrenci var demektir. Güvercin yuvası ilkesine göre 135-54x2=27 öğrenci (kız ve erkek) aynı sınıfta olmak zorundadırlar. Kesin oluşturulabilecek grupların sayısı, 33x5 + 27 =192 dir.

S.59) Küçük bir kasabada 20 çocuk bulunmaktadır. Bu çocuklardan herhangi ikisi ortak büyük babaya (dedeye) sahiptir. Her çocuğun farklı iki dedesi vardır. En az 14 çocuğun orta dedesinin aynı kişi olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM :

Tüm çocukların ortak dedesi yoksa dedeleri A ile B ve A ile C olan iki çocuk alalım. A tüm çocukların ortak dedesi olmadığından bir çocuğun dedesi değildir. O halde bir çocuğun dedeleri B ve C olmak zorundadır. Bu durumda herhangi bir çocuğun da dedeleri ya A ile B , ya A ile C , ya da B ile C olmak zorundadır. Dolayısıyla bu 20 çocuğun dedeleri sadece A, B ve C den oluşmaktadır. Yirmi çocuğun 40 dedesi olacağından, 40 çocuğun 3 dedeye dağılımında, güvercin yuvası ilkesine göre kutulardan birinde 13 ten fazla yani 14 top bulunacaktır. (40=3.13+1) O halde bu 20 çocuktan en az 14 ü ortak dedeye (büyükbabaya) sahiptir.

S.60) n tane üç basamaklı sayı nasıl seçilirse seçilsin bunların arasında 7 modunda birbirine denk olan en az beş tanesi ve 9 modunda birbirine denk olan en az dört tanesi bulunursa n en az kaçtır?

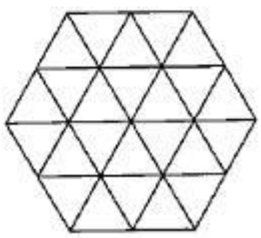
ÇÖZÜM: cevap 29

Bir sayı mod 7 de 7 farklı değer alabilir. n tane üç basamaklı sayı nasıl seçilirse seçilsin bunların arasında 7 modunda birbirine denk olan en az beş tanesinin olması için Güvercin yuvası ilkesinden, 4x7 + 1= 29 bulunur.

29 sayı içerisinden de 3x9 + 1= 28 olduğundan 9 modunda birbirine denk olan Güvercin yuvası ilkesine göre, en az dört tanesinin bulunması kesindir.

S.61) Kenar uzunluğu 2 birim olan bir düzgün altıgenin iç bölgesinde 25 nokta alınmıştır. Bu noktalar arasındaki uzaklık en fazla 1 birim olan ikisinin seçilebileceğini gösteriniz.

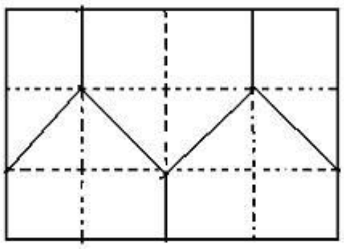
ÇÖZÜM:



Şekilde görüldüğü gibi, kenar uzunluğu 1 birim olan 24 tane eşkenar üçgen vardır. Güvercin yuvası ilkesine göre bu 25 noktadan en az iki tanesi bir eşkenar üçgenin içinde olup bu iki nokta arasındaki uzaklıkta en fazla 1 birimdir.

S.62) 3 x 4 boyutlu dikdörtgenin içinde 6 nokta alınıyor. Bu noktalardan aralarındaki uzaklık $\sqrt{5}$ ten büyük olmayan ikisinin bulunduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:



Dikdörtgeni şekildeki gibi 5 parçaya ayıralım. 6 noktadan en az ikisi bu parçalardan birinin içinde bulunacaktır. Bu parçalardan her birinde iki nokta arasındaki uzaklık en fazla $\sqrt{5}$ birim olduğu kolaylıkla hesaplanır. Güvercin yuvası ilkesine göre 6 seçmiş olursak en az iki nokta bir parçanın içerisinde kalacaktır. Bu iki parça arasındaki uzaklık da $\sqrt{5}$ birimden az olacaktır. Bu da iddiamızı kanıtlar.

S.63) 30 kişilik bir satranç turnuvasında, şampiyon "3 kez yenilen elenir" kuralıyla belirlenecektir. Buna göre en az kaç maç yapılmalıdır.**(UAMO-2005)**

ÇÖZÜM:

En az maç yapılması için, şampiyon olacak kişi hiç yenilmemelidir. Şampiyon olacak kişi A, ikinci B ve üçüncü de C olsun. A herkesi; B, A dışında herkesi ve C de, A ile B dışında herkesi yensin. Bu durum da 29+28+27=84 maç yapılmış olur ve böylece A, B, C dışındaki tüm yarışmacılar elenir. C iki kez ve B de bir kez yenildiğinden, her ikisinin de elenmesi için 3 maç yeterlidir. Dolayısıyla 84+3=87 maç yapılmalıdır.

S.64) Bir kasanın beş kilidine ait anahtarlar çoğaltılarak sekiz kişiye, bu sekiz kişiden herhangi beşinin birlikte kasayı açmalarını olanaklı kılacak biçimde dağıtılacaktır. Anahtarların toplam sayısı en az ne olmalıdır. **(UMO-2002)**

ÇÖZÜM:

Anahtarların sayısı 20 den az olursa, kilitlerden birine ait anahtarların sayısı 4'ten az olacak. Anahtarlar dağıtıldığında bu kilide ait anahtarlar en fazla 3 kişiye verilebilecek. Geriye kalan 5 kişi birlikte bu kilidi açamayacaklar. Diğer taraftan, 4 kişi alınıp, bunların her birine kilitlerin her birinin anahtarı (toplam 4.5 = 20 anahtar) verilirse, herhangi 5 kişi alındığında Güverci yuvası ilkesine göre anahtar verilmiş 4 kişiden en az biri bu 5 kişinin arasında olacak ve tüm kilitleri açabilecek. Cevap: 20

S.65) Doğru yada yanlış seçenekli 10 sorudan oluşan bir test sınavında öğrenci sorulardan herhangi 5 tanesini doğru kalan 5 tanesini de yanlış işaretlediğinde en az 40 puan almasını istiyorsak, bu sınavın cevap anahtarlarını kaç farklı şekilde hazırlayabiliriz. (Her doğru cevap 10 puan)

ÇÖZÜM:

Cevapların tamamı doğru olduğunda öğrenci en az 50 almayı garanti eder. Bu durum doğru cevapların tamamının yanlış olarak ayarlanması durumunda da geçerlidir. Doğru cevaplar 9 doğru 1 yanlış olarak ayarlandığında da öğrenci en az 40 puan alır. Bu durum doğru cevapların 9 yanlış 1 doğru olarak ayarlanmasında da geçerli olur. Doğru cevaplar 8 doğru 2 yanlışta öğrencinin en az 40 puan alamayacağını gösterelim.

D D D D D D D D Y Y cevap anahtarı

Y Y Y Y Y D D D D D öğrencinin cevap anahtarı

O halde, soruda verilen şartların sağlanması için;

10 sorunu doğru cevaplarının tamamı doğru veya yanlış olmalı yada 9 u doğru 1 yanlış veya 9 u yanlış 1 i doğru olmalı. Bunların farklı sıralanışları sayısı ise,

$1+1+\binom{10}{1}+\binom{10}{1}=22$ bulunur.

S.66) 1, 2, 3, . . . , 2016 sayılarından en fazla kaç tane sayı öyle seçilebilir ki, seçilmiş sayılardan alınmış hiçbir ikisinin toplamı bunların farkına bölünmesin?

ÇÖZÜM:

Bu sayılardan $n \equiv 1 \pmod 3$ koşulunu sağlayan 672 tane sayıyı, yani 1, 4, 7, 10, … , 2014 sayılarını alalım. Bunlardan n ve m gibi herhangi ikisini aldığımızda $(n \equiv m \equiv 1 \pmod 3)$ ve $(n + m \equiv 1 \pmod 3)$ olduğunda $n+m$ toplam n-m farkına bölünmez. Diğer taraftan 672 den fazla sayı alındığında güvercin yuvasıilkesinden $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, ..., \{2014, 2015, 2016\}$ kümelerinden birinden en az iki eleman alınmış olacak. Bu iki elemanın farkı ya 1 ya da 2 olacak. Her iki durumda bunların toplamı farklarına bölünecek (çünkü her iki sayının farkı çiftse, toplamı da çifttir).

S.67) Bir kongreye 7 değişik ülkeden 281 kişi katıldı. Bu kişilerden herhangi 6'sı seçildiğinde bunlardan en az iki kişinin aynı yaştan olduğu biliniyor. Katılanlar arasından aynı ülkeden, aynı cinsten ve aynı yaştan olan 5 kişinin seçilebileceğini kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:

Güvercin yuvası ilkesinden (281 = 7 x 40 + 1) ülkelerin birinden en az 41 kişinin katıldığı ve bunlardan en az 21'nin aynı cinsten olduğu elde edilir. Bu 21 kişi arasından her yaş grubundan en fazla dördünün bulunduğunu varsayalım. O halde bu kişilerin yaş grubu sayısı en az 6 dır. Her yaş grubundan birer kişi alarak çelişki elde ederiz. Dolayısıyla bu 21 kişi arasında aynı yaş grubundan olan en az beş kişi bulunur.

S.68) *n* tane 1997 sayısının yan yana yazılmasıyla elde edilen, 4*n* basamaklı 199719971997…1997 sayısı 1999'a tam bölünecek şekilde bir *n* sayısının bulunabileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM:

$$1997, 19971997, 199719971997, ..., \underbrace{199719971997...1997}_{2000 \tan e1997}$$

sayılarını göz önüne alalım. Bu sayılardan biri 1999'a bölünüyor ise, ispat biter. Eğer bölünmüyor ise, güvercin yuvası ilkesine göre bu 2000 tane sayı içinde 1999'a bölündüğünde aynı kalanı veren iki sayı mutlaka vardır. Bu durumda bu sayıların farkı 1999'a bölünür ve bu iki sayının farkının sonundaki sıfırlar atıldığında elde edilen sayı yine 199719971997…1997 formundadır. Yani öyle bir 199719971997…1997 sayısı vardır ki 1999'a bölünür.

S.69) bir şatonun mahzeninde her birinde 3 kilit bulunan 10 kapının arkasındaki hazineyi koruyan 7 cüce vardır. Kilitlerin anahtarları birbirinde farklıdır ve her cücede bazı kilitlerin anahtarları vardır. Cücelerden herhangi dördü bir araya geldiğinde bütün kilitler açılıp hazineye ulaşılabiliyor. Buna göre, tüm kapıları açarak hazineye ulaşılabilmeyi mümkün kılan üç cücenin varlığını gösteriniz.

ÇÖZÜM:

Şimdi bu durumun aksini varsayalım. Yani tüm kapıları açarak hazineye ulaşılabilmeyi mümkün kılan üç cüce olmasın. Yedi cüce arasından üç tanesini seçerek oluşturulabilecek üçlülerin sayısı $\binom{7}{3} = 35$ tir. 35 farklı üçlü ve 30 farklı anahtar var. Yani en az iki üçlünün eksik anahtarı aynıdır. Bu iki üçlünün birleşimi en az dört kişiden oluşur. Bu durumda aynı anahtarı eksik dört kişi bulunabilir. Bu da cücelerden herhangi dördü bir araya geldiğinde bütün kilitler açılıp hazineye ulaşılabiliyor durumu ile çelişir. O halde tüm kapıları açarak hazineye ulaşılabilmeyi mümkün kılan üç cüce vardır.

S.70) 2015'den küçük ve 1'den büyük olup ikişer ikişer aralarında asal olan her 15 pozitif tam sayıdan en az birinin asal olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜM:

Tersini varsayalım. Yani hiç biri asal olmayan ve kendi aralarında asal olan 2015 ten küçük 15 sayının bulunduğunu varsayalım. Bunlar $a_1, a_2, a_3, ..., a_{15}$ olsun. Bu sayıların her birinin en küçük asal çarpanları $p_1, p_2, p_3, .. p_{15}$ olsun,. $2015 < 45^2$ olduğundan karesi 2015 ten küçük asal sayılar kümesi $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$ dir. Bu kümenin 14 tane elemanı vardır. p_i lerin her biri $\sqrt{2015}$ ten büyüktür. Örneğin $p_n > \sqrt{2015}$ a_n $p_n^2 > 2015$ olur. Çelişki. Yani p_i lerden biri asal olmak zorundadır.

MATEMATİK OLİMPİYATLARI SINAVLARINDA ÇIKMIŞ VE GÜVERCİN YUVASI İLKESİYLE ÇÖZÜLEBİLEN SORULAR:

1.) k 3 olmak üzere, k değişik tam sayıdan herhangi üçünün toplamı bir asal sayı ise, k en çok kaç olabilir? (**UİMO 2005)**

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap A

Sayılardan biri çift ise en fazla 3 sayı olabilir. İkisi çift, biri tek; aksi taktirde toplamı 2'den büyük bir çift sayı olan bir üçlü bulunur. Sayıların hepsi tek olsun. k 5 ise mod3'e göre ya birbirine denk ya da mod3'e göre birbirinden farklı 3 sayı bulunur. Her iki durumda bu 3 sayının toplamı 3'e bölünecek ve sayılar birbirinden farklı olduğundan 3'ten büyük olacaktır. O halde k 4 tür. 1, 3, 7, 9 sayıları koşulu sağladığından k 'nın en büyük değeri 4'tür.

2.) Bir çember üstünde, aralarındaki uzunluklarının aldığı farklı değerlerinin sayısı 100 den çok olmayacak biçimde n nokta alınıyor. n en çok kaç olabilir? **(UİMO 2005)**

a) 100 b) 101 c) 102 d) 200 e) 201

ÇÖZÜM: cevap A

Nokta sayısı 201'den büyükse, noktaların birinden (bu noktayı A ile gösterelim) geçen çapla çemberi iki ayrı çembere ayıralım. Bu yarı çemberlerin birinin üzerinde en az 102 nokta (A ile birlikte) bulunacak. A'dan bu noktalara kadar olan uzaklıklar birbirinden farklı olduğundan en az 101 farklı uzaklık olacak. O halde n 201'dır. Öte yandan köşeleri çember üzerinde bulunan düzgün 201-genin köşeleri arasındaki farklı uzaklıkların sayısı tam 100'dür.

3.) {1, 2, 3,..., 9} kümesinin 5 elemanlı hangi 6 altkümesini alırsak alalım

bunlardan en az bir ortak elemana sahip k tanesi bulunur " önermesinin doğru olmasını sağlayan en büyük k tam sayısı nedir**? (UMO 2006**)

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

ÇÖZÜM: cevap D

Her biri 5 elemanlı 6 kümeyi oluşturmak için 6.5 = 30 eleman kullanılacak. 30 > 9.3 olduğundan, 1, 2, 3, … , 9 sayılarında x_1 , x_2 X bulunur n en az 4 kez kullanılan biri vardır. Dolayısıyla k = 4 önermeyi sağlar. Öte yandan

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$,
$D = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{1, 6, 7, 8, 9\}$, $F = \{1, 2, 7, 8, 9\}$,
Kümelerinden en fazla 4 tanesi aynı sayıyı içeriyor.

4.) Ahmet tahtaya, herhangi ikisinin farkı iki eşit rakamdan oluşan bir sayı olmayacak şekilde, en fazla kaç iki basamaklı sayı yazabilir? **2008(UİMO)**

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap A

Sayıların farkının iki eşit rakamdan oluşması bu farkın 11'e bölünmesi demektir. O halde sayıların 11'e bölümünden elde edilen kalanlar birbirinden farklı olmalı, dolayısıyla 11'den fazla sayı alınamaz. Öte yandan 11, 12, 13, …21 sayıları koşulu sağlar. Cevap:11

5.) 50 kişilik bir sınıfta yapılan 4 soruluk bir sınavda, herhangi 40 kişiden en az 1 kişi tam olarak 3 soruyu, en az 2 kişi tam olarak 2 soruyu, en az 3 kişi tam olarak 1 soruyu doğru, en az 4 kişi ise bütün soruları yanlış çözmüştür. Tek sayıda soru çözen öğrencilerin sayısı en az kaçtır? **(UMO 2008)**

a) 18 b) 24 c) 26 d) 28 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap B

Tam üç soru çözenlerin sayısı 11'den az olursa, geriye kalanlardan 40 kişi seçebiliriz. Bu grupta tam 3 soru çözen kimse bulunmaz. Dolayısıyla tam 3 soruyu çözenlerin sayısı en az 11'dir. Benzer şekilde tam iki soru çözenlerin sayısı en az 12, tam bir soru çözenlerin sayısı en az 13 ve tüm soruları yanlış çözenlerin sayısı da en az 14'tür. 11+12+13+14 = 50 olduğundan yukarıdaki "en az" ların yerine "tam" söylememiz gerekir. O halde tek sayıda soru çözen öğrenci sayısı 11+13 = 24'tür. Cevap:24

6. Üst üste dizilmiş 2008 madeni paranın bulunduğu bir beyaz masa ve iki boş siyah masadan başlayarak, her hamlede herhangi bir masadaki en üst pozisyondaki parayı alıp herhangi bir boş masaya veya herhangi bir masadaki en üst pozisyona yerleştirerek, en az kaç hamlede tüm paralar beyaz masaya ters sırada yerleştirilebilir? **(UMO-2008)**

a) 6016 b) 6017 c) 6022 d) 6023 e) 6024

ÇÖZÜM: cevap C

Masalar B, S_1 ve S_2 olsun. İlk parayı S_1 'e diğerlerini S_2 'ye, sonra ilk parayı B'ye, S_2 'deki paraları sonuncu dışında S_1 'e, daha sonra S_2 'deki tek parayı B'ye ve S_1 'deki paraları B'ye yerleştirirsek tüm paralar beyaz masada ters sırada yerleşmiş olacak. Toplam hamle sayısı 1 + 2007 + 1 + 2006 + 1 + 2006 = 6022 'dir. Daha az, yani en fazla 6021 = 3.2008-3 hamlede yapılabileceğini varsayalım. En alttaki para yerinde kalmayacağı için her para üzerinde en az bir işlem yapılmıştır. Paralar en son beyaz masaya döneceğinden her para üzerinde en az 2işlem yapılmıştır. O halde üzerinde sadece 2 işlem yapılmış olan en az 3 para vardır. Bunlar S_1 ve S_2 masasına gidip geri dönmüşler. Bunlardan en az ikisi aynı masaya gidip döndüğü için sıraları değişmemiştir. Çelişki! Cevap: 6022

7. Biri 5, diğeri 7 ile bölünebilen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklide yazılamayan en büyük tam sayı kaçtır? (**UMO 2009)**

a) 82 b) 47 c) 45 d) 42 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap B

$$n = (n - 14) + 14 = (n - 21) + 21 = (n - 28) + 28 = (n - 35) + 35 = (n - 42) + 42$$

şeklinde gösterilebilir. (n-14), (n-21), (n-28), (n-35) ve (n-42) sayıları 5 modunda farklı değerler aldığından bunlardan biri 5'e bölünecek. $n \geq 47$ ise bu sayı, $k \geq 1$ olmak üzere 5k şeklinde gösterilebildiği için bileşiktir. Dolayısıyla bu durumda n sayısı, birincisi 5'e ikincisi 7'ye bölünen iki bileşik pozitif tam sayının toplamı şeklinde gösterilebilir. Öte yanda $n = 47$ için

47 = 7 + 40 = 14 + 33 = 21 + 26 = 28+19 = 35+12 = 42+5 gösterimlerinin hiçbiri koşulları sağlamıyor. Cevap:47

8. Bir saatte en fazla 3 km yüzebilen bir balık 15 km’ lik bir mesafeyi ***t*** saate yüzdüyse,4, $\frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{23}{5}, \frac{19}{4}$, 5 değerlerinden kaçı ***t*** tarafından alınabilir? **(UİMO 2010)**

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

ÇÖZÜM:

Balık 1 saatte en fazla 3 km yüzdüğü için, 4 saatte de en fazla 12 km yüzer. Yani t = 4 olamaz. Öte yandan 0 ť s 60 olmak üzere her s için balık her saat başında başlayarak s dakika boyunca sabit hızla 3 km yüzüp bir sonraki saat başına kadar durursa (s=60 durumunda hiç durmayacak), her bir saatlik dilim boyunca tam 3 km ve 4 saat s dakikada da 15 km yüzmüş olacak. O halde

$\frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{23}{5}, \frac{19}{4}$ ve 5 değerlerinin her biri t tarafından alınabilir.

9. 1001 kişilik bir okulda herhangi üç öğrenciden en az ikisi arkadaştır. Bu okulda en çok arkadaşa sahip olan öğrencilerden birinin arkadaş sayısı, 334, 412, 450, 499 değerlerden kaçını alabilir? **(UMO-2010)**

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap E

Bir *K* kişinin arkadaş sayısını ᔐ Ƒ*K* ƒ ile gösterelim. En çok arkadaşa sahip olan öğrencinin arkadaş sayısı *m* olsun. Herkes birbiriyle arkadaşsa *m*=100 olur. Birbiriyle arkadaş olmayan iki A ve B öğrencileri bulunsun. Bunların dışında herhangi C öğrencisi alındığında *A, B, C* üçlüsünden ikisi arkadaştır. A ile B arkadaş olmadığından C ile A veya C ile B arkadaş olmak zorundadır. O halde ᔐ Ƒ *A* ƒ Ǵ ᔐ Ƒ*B*ƒ 999 dır. Bu durumda ᔐ Ƒ*A*ƒ 500 veya ᔐ Ƒ*B*ƒ 500 , dolayısıyla *m* 500 , yani *m* bu dört sayıdan hiçbirine eşit olamaz.

10. 7 günlük bir yaz kampına katılan 100 öğrencinin her birine dolaşın diye her gün bir bisiklet veriliyor. Her bisiklet kamp boyunca en çok 6 gün kullanılabiliyorsa, bu kampta en az kaç bisiklet bulunması gerekir? **(UİMO-2010)**

a) 117 b) 115 c) 112 d) 109 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap A

İlk gün kullanılan 100 bisikletin her biri sonraki 6 günün içinde 100 > 16**.**6 olduğundan sonraki 6 günün birinde ilk günkü 100 bisikletten en az 17’si kullanılmayacak, yerine bu 100 bisikletten farklı bisikletler kullanılacak. O halde kampta bulunan bisiklet sayısı 117 den az değildir. 117 bisikletin nasıl kullanılabileceğini göstermek için bisikletlere 1,2,3,4,…,117 şeklinde numara verelim.ilk gün 1,2,3,4,…,100 bisikletleri kullanılsın.ikinci gün 1,2,3,…17 yerine 101,102,103,…,117 numaralı bisikletleri kullanalım. Üçüncü gün 1,2,3,…,17,101,102,103,…117,35,36,…,99,100 numaralı bisikletleri v.s. yedinci gün 1,2,3,…,85, 101,102,…115 numaralı bisikletleri kullanalım. Cevap: 117

11. Pozitif tam sayılardan oluşan n elemanlı her kümenin toplamları 6 ile bölünen altı elemanı bulunabiliyorsa, *n* en az kaç olabilir? (**UMO 2011)**

a) 13 b) 12 c) 11 d) 10 e) 9

ÇÖZÜM: cevap C

n= 10 için 6,6,6,6,6,1,1,1,1,1 sayılarında toplamları 6'ya bölünen altılı seçilemez. daha küçük n'ler için de bu sayılardan bir kısmı alınabilir. Dolayısıyla koşulu sağlayan n sayısı 11'den küçük değildir. n=11'in koşulu sağladığını gösterelim. verilen 11 sayıdan a_1 Ì $b_1 + c_1$ toplamı çift sayı olacak şekilde b_1 , c_1 sayılarını, geriye kalan 9 sayıdan a_2 Ì $b_2 + c_2$ toplamı çift olacak şekilde b_2 , c_2 sayılarını v.s. son 3 sayıdan a_5 Ì $b_5 + c_5$ toplamı çift olacak şekilde b_5 , c_5 sayılarını seçelim (güvercin yuvası ilkesinden dolayı bunu yapabiliriz) . a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 sayılarından mod 3'te 0, 1, 2'ye denk üçü varsa bunların toplamı 3'e bölünür. Bu 5 sayı mod 3'te 0, 1, 2 sayılarından sadece ikisine (veya birine) denkse bunlardan birinden en az 3 tane var (güvecin yuvası ilkesi). Örneğin a_1 a_2 a_3 2(mod 3) ise, yine bu üç sayının toplamı 3'e bölünür:

$$0 \quad 3.2 \quad (a_1 + a_2 + a_3) \quad (b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + b_3 + c_3)(\text{mod } 3)$$

Öte yandan $a_1 + a_2 + a_3$ çift sayı olduğundan

$6 | (b_1 + c_1 + b_2 + c_2 + b_3 + c_3)$ dır.

12. Bir okuldaki 100 öğrenciden her biri aynı okuldaki istediği 50 öğrenciye mesaj yollamıştır. Karşılıklı olarak mesajlaşmış öğrenci çiftlerinin sayısı en az kaç olabilir?(**UMO 2011)**

a) 100 b) 75 c) 50 d) 25 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap C

Mesaj sayısı 100 . 50 = 5000, ikili sayısı $\binom{100}{2}$ Ť 4950 ve her ikiliye en fazla iki mesaj denk geldiğinden en az 50 ikiliye 2 mesaj denk geliyor, yani en az 50 ikili karşılıklı mesajlaşmıştır. Öte yandan 1'den 100'e kadar tamsayılarla sıralarsak ve her k = 1, 2, …, 100 için k. Öğrenci 100 modunda (k+1), (k+2), …, (k+50) . Öğrenciye mesaj yollarsa, (k+50). Öğrenci k. ya mesaj yollamış olacak ve sadece k. ve (k+50). Öğrenciler karşılıklı mesajlaşmış olacak. Bu ikililerin sayısı ise 50 dir.

13. 100 öğrencinin girdiği bir sınavda 5 soru sorulmuş ve her soruyu tam olarak 50 öğrenci çözmüştür. Çözdüğü soru sayısı ikiyi aşmayan öğrencilerin sayısı en az kaç olabilir? (**UMO 2011)**

a) 21 b) 18 c) 17 d) 16 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap C

Çözdüğü soru sayısı ikiyi aşan öğrenci sayısı a olsun. Toplam çözülmüş soru sayısı 50 **.** 5 = 250 olduğundan 3a 250 , buradan da a 83 elde edilir. a = 83

için örnek sırasıyla 16, 17, 16, 17, 17 öğrenciden oluşan

kümelerini alalım. Her k = 0 1, 2, 3, 4, 5 için k. soruyu

(indisler mod 5'te hesaplanacak) kümelerindeki öğrenciler çözmüş olsun. Kümelerde bulunan 83 öğrenci 3'er soru çözerek toplam 249 soru çözmüş olacak. 5. soru dışında her soruyu 50'şer kişi çözmüş olacak. Geriye kalan 1 tane (beşinci) soruyu da kümeler dışında biri çözsün. Cevap 100-83 = 17

14. 100 öğrenci, öğleden önce 50 tane ikili grup halinde ve öğleden sonra da, yine 50 tane ikili grup halinde ders çalışıyorlar. Öğleden önceki ve sonraki gruplar oluşturulursa oluşturulsun, herhangi ikisi gün boyunca hiç birlikte çalışmamış n öğrenci bulunabiliyorsa, n sayısı en çok kaç olabilir? **(UMO-2013)**

a) 42 b) 38 c) 34 d) 25 e) Hiçbiri

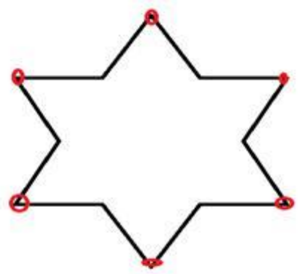
ÇÖZÜM: cevap E

Soruda verilen şartlar doğrultusunda n ť 51 olduğunu gösterelim.

Tersini varsayalım, 51 öğrenci bulunabiliyor olsun. Bu 51 öğrencinin öğleden önce birlikte çalıştıkları öğrencilere bakalım. Bu 51 öğrencinin herhangi ikisi birbirleriyle hiç çalışmadığından ve gruplar iki kişi olduğundan dolayı, bu 51 öğrenciden oluşan ilk grubun dışında 51 öğrenci daha olması gerekir. Ancak, bu da toplamda 100 öğrenci olmasıyla çelişir. Demek ki $n \geq 51$ dir.

İddia: Soruda verilen şartlar doğrultusunda her zaman 50 öğrenciyi seçebiliriz.

Sorunun çözümünü bir çizge (graf) ye dönüştürelim. Öğleden önce birlikte çalışan her öğrenci ikilisinin arasına bir siyah kenar çizelim. Öğleden sonra birlikte çalışan her öğrenci ikilisi için de bu ikilinin arasına beyaz kenar çizelim. Çizgemizde çifte kenarlar (iki köşe arası birden fazla kenar) olabilir. Bu çizge her köşenin derecesi ikidir. Dolayısıyla çizgemiz ayrık döngülerden oluşuyor olmalı. Eğer bu döngülerden birindeki kenar sayısı tek ise, o döngü üzerinde birbirleriyle aynı renkte olan ardışık iki kenar vardır, bu da bir köşeden aynı renkte iki kenar çıkması demek olur. Hâlbuki dönüdeki her köşeden aynı renkte sadece bir kenar çıkmalıydı. Demek ki aynı zamanda döngülerdeki kenar sayısı çifttir. Her çift döngüden, o döngünün kenar sayısının yarısı kadar öğrenci seçebiliriz öyle ki, seçilmiş öğrenciler arası kenar olmasın.



(Şekildeki örnekte de gösterildiği gibi birer köşe atlayarak seçtiğimizde şart sağlanmış olur.) Döngüler ayrık olduğu için bir öğrenciyi iki kere seçme ihtimalimiz veya iki ayrı döngüden seçilmiş öğrenciler arası kenar olma ihtimali de yoktur. Döngülerin uzunlukları toplamı 100 olduğundan dolayı, bu şekilde seçtiğimiz kişilerin sayısı 50 olur ve şartları sağlar.

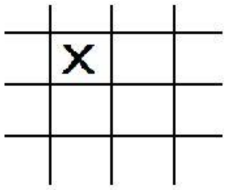
Sonuç: n en çok 50 olabilir.

Not: Her köşenin derecesi çiftse çizge ayrık döngülerden oluştuğunu ispatlamak için köşe sayısı a üzerinden tümevarım yapalım. $a = 2$ için barizdir. $a = 1, 2, 3, \ldots, k$ için doğru olsun, $n = k$ için; Bir köşe seçelim, bu köşeden onun komşu köşelerinden birine geçelim. Sonra her adımda olduğumuz köşenin daha önce bulunmadığımız komşusuna geçelim. Bu şekilde devam ettiğimiz de bir yerden sonra daha önce bulunduğumuz köşelerden birine dönmek zorundayız.(Çünkü sonlu sayıda köşe var.)Bu döndüğümüz köşe de ilk köşe olmalı, çünkü diğer köşelerdeki kenarların ikisini de daha önce kullanmıştık. Dolayısıyla bir döngü elde ettik. Bu döngüyü çıkardığımızda geriye daha az kenar sayılı ver tüm derecelerin iki olduğu bir çizge çıkar. Tümevarım varsayımından dolayı kanıt biter.

15. Her sayının yazılı olduğu birim kareyle ortak bir kenar paylaşan en az iki birim kareye de aynı sayı yazılmak koşuluyla bazı birim karelerine birer sayı yazılan 18x18 bir satranç tahtasına en fazla kaç sayı yazılabilir? **(UİMO-2013)**

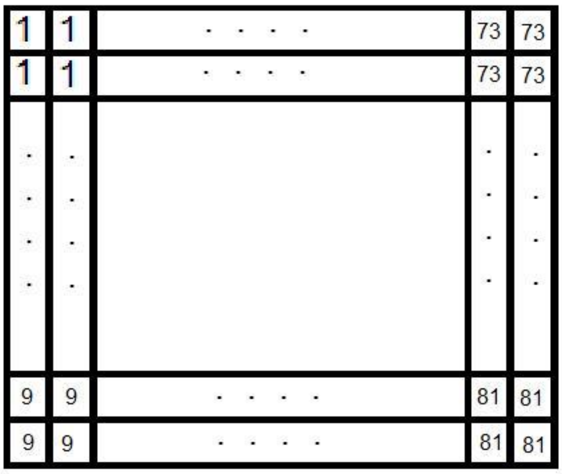
ÇÖZÜM: cevap D

Satranç tahtasının birim karelerinden birinde *x* sayısı yazılmışsa



Bu sayının yazılı olduğu birim kareyle ortak bir kenar paylaşan en az iki birim kareye de aynı sayı yazılmak gerektiğinden en az 3 tane *x* sayısı vardır. Aslında şekilden de görüleceği gibi tahtada 3 tane *x* değil en az 4 tane *x* sayısı vardır. 18x18 lik bir satranç tahtasında 18x18 = 324 tane birim kare vardır. güvercin yuvası prensibinden, her birinde 4 tane olmak üzere 324 birim kareye en çok

$\frac{324}{4} = 81$ farklı sayı yazılabilir. Bu duruma örnek tablo



16. Ağırlıkları 1, 2,..., 77 gram olan 77 taş ağırlıkları birbirinden farklı olan *k* gruba, her grup kendinden daha hafif gruptan daha az taş içerecek biçimde dağıtılabiliyorsa, *k* sayısı $\{9,10,11,12\}$ değerlerinden kaçını alabilir?**(UMO-2013)**

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM: cevap E

Taşların toplam ağırlığı; $1+2+3+...+77=\frac{77.78}{2}=3003$ olup $1+2+3+...+12=\frac{12.13}{2}=78>77$ olduğundan $k=12$ olamaz.

i) $k=11$ olursa, en ağır grubun ağırlığı en az $\frac{3003}{11}=273$ olacak ve bu grup en az 4 taş içerecek. $4+5+6+...+14=99>77$ dir. Yani, $k=11$ olamaz.

ii) $k=10$ olursa, en ağır grubun ağırlığı en az $\frac{3003}{10}=300,3$ olacak ve bu grup en az 4 taş içerecek. $4+5+6+...+13=85>77$ dir. Yani, $k=10$ olamaz.

iii) $k=9$ olursa, en ağır grubun ağırlığı en az $\frac{3003}{9}=333,66$ olacak ve bu grup en az 5 taş içerecek. $5+6+...+13=81>77$ dir. Yani, $k=9$ olamaz.

17. Bir masanın üstünde 300 tane fındıktan oluşan bir öbek vardır. her adımda, Ali seçtiği bir öbekten bir tane fındık yiyip, sonra bu öbekte kalan fındıkları en az birer fındık içeren iki öbeğe ayırıyor. Birkaç hamle sonunda tüm öbeklerde *k* tane fındık varsa, *k* sayısı 3, 4, 5, 6, 7 değerlerinden kaçını alabilir? **(UİMO-2014)**

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

ÇÖZÜM: cevap E

t hamle sonra tüm öbeklerde k adet fındık olsun. *t* hamle sonra t adet fındık yenmiş ve $t+1$ öbek oluşmuştur. Buna göre, $(t+1).k+t=300$ ve $(t+1).k+t+1=301$ buradan da $(t+1).(k+1)=301$ bulunur. Buna göre $k+1 \mid 301$den $k+1=7$ veya $k+1=43$ olabilir. Soruda 3, 4, 5, 6, 7 den kaçını alabilir dendiğine göre, sadece $k=7$ olabilir

18. $\{1, 2, 3, ..., 33\}$ kümesinin k elemanlı her alt kümesinde biri diğerinin iki katı olan iki eleman bulunuyorsa, k en az kaç olabilir? **(UİMO-2014)**

a) 21 b) 22 c) 23 d) 24 e) 25

ÇÖZÜM: cevap C

$\{1, 3, 5, ..., 29, 31, 33\}$ 17 elemanlı tek sayılar kümesi ile bu elemanların iki katı ve birbirinin iki katı olmayan $\{4, 12, 16, 20, 28\}$ kümesindeki çift sayılardan seçersek,

seçtiğimiz elemanlardan biri diğerinin iki katı olmayacaktır. Güvecin yuvası ilkesine göre, bir eleman daha seçersek biri diğerinin iki katı olacaktır. Yani en az $k = 23$ olmalıdır.

KAYNAKÇA

Artur Egel, problem books in Mathematics

Andreescu, T., Enescu, B., 2010, Mathematical Olympiad Treasures, USA, Birkhauser.

Prof. Dr. Refail Alizade, Prof. Dr. Ünal Ufuktepe sonlu matematik altın nokta yayınevi 2012

Prof. Dr. Refail Alizade, doç. Dr. Ünal Ufuktepe sonlu matematik TUBİTAK yayınları bilgi dizisi

Ömer GÖRLÜ, olimpik matematik ilk adım altın nokta yayınevi 2012

Ömer GÖRLÜ, olimpik sonlu matematik altın nokta yayınevi 2015

Yrd. Doç. Dr Mustafa Özdemir matematik olimpiyatlarına hazırlık altın nokta yayınevi 2010

Doç. Dr. Mustafa Özdemir, dahimatik matematik yarışmalarına ilk adım altın nokta yayınevi 2013

Recep Yücesan zambak yayınları 2002

Ertan KAYA Kombinatorik altın nokta yayınevi 2012

İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Dilber Şıhaliyeva Ulusal Antalya matematik olimpiyatları sorular ve çözümler, tubitak yayınları

Mustafa Töngemen TUBİTAK ulusal matematik olimpiyat soru ve çözümleri, Altın nokta yayınevi

Öztürk, F., 1995, Kombinatorik (Sayma Problemleri), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No: 30

Olimpiyatlar, Ulusal Bilim Olimpiyatları, Matematik, http://www.tubitak.gov.tr. (2014)

ÖZGEÇMİŞ

Salih KOCAKAYA 01.02.1961 tarihinde Diyarbakır'da doğdu, ilkokulu Diyarbakır, ortaokulu Malatya'da lise öğrenimini Diyarbakır'da tamamladı. Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 1986 yılında mezun olduktan sonra Milli Eğitim Bakanlığında öğretmenlik yapmaya başladı. Sırasıyla Kütahya Dumlupınar Lisesi, Bingöl Teknik lise, Bingöl Anadolu lisesi, Mersin Silifke Anadolu lisesi, Diyarbakır Nevzat Ayaz Anadolu lisesi, Diyarbakır Rekabet Kurumu Anadolu lisesi, İzmir Karabağlar Nevvar Salih İşgören Anadolu Lisesi'nde görev yaptıktan sonra halen çalışmakta olduğu İzmir Buca Fatma Saygın Anadolu lisesine atandı. Evli ve iki çocuk babasıdır.