YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

GECİKMELİ DEĞİŞKEN SİSTEMLERİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ

Tekin ÖZBEK

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Shahlar MEHERREM

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2015

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr Şahlar MEHERREM (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü müdürü

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Optimal Kontrol Problemlerine Varyasyon Yaklaşımı" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığının ve yararlandığım eserlerin "Kaynakça" bölümünde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

…./…./2015

Tekin ÖZBEK

ÖZET

GECİKMELİ DEĞİŞKEN SİSTEMLERİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ

ÖZBEK, Tekin

Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. DR. Shahlar MEHERREM

Tezin 1. bölümünde gecikmeli değişken dinamik sistemlerin optimal kontrolünü çözmek için sayısal bir metod kullandık. Bizim yaklaşımımız, gecit anlarını yeni değişkenlerle paremetirize edib, optimal deyerlerı bulmaktır. Daha sonra zamanla geciktirilmiş diferansiyel denklemlerin çözümü yoluyla elde edilmiş maliyet fonksiyonlarının gerekli gradyantını elde ederiz. Daha sonra, elde etdiyimiz optimal kontrol problemi matematiksel programlama problemi olarak çözülebilir.

İkinci bölümde kontrol sistemlerindeki zaman gecikmesi ile farklı zamanlı değişmeli lineer sistemlerin kontrol olunabilirliğini araştırmaktadır. Basit bir değişmeli dizinin olduğu ispat edilmiştir. Ve bu sistemin kontrol edilebilir kümesi, bu sisteme eşittir. Bu gerçeğe dayanarak, bu tür sistemlerin kontrol olunabilirliği için etkili ve gerekli bir geometrik kriter sunulmaktadır.

Anahtar Sözcükler : Değişim Sistemi, Kontrol Edilebilirlik, Optimal Kontrol

ABSTRACT

In this thesis it is investigated switching optimal control with time-delay. In first section it is considered swithcing system with time-delay, evaluate gradient for the minimization functional, and by using numerical approach it is obtained switching points and graph of state and control respect time. In second section it is considered discrete time switching time-delay optimal control problem. By using previous obtained results , it is investigated properties of the switching systems and switching sets.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlarken bana rehberlik eden ve desteğini eksik etmeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Shahlar MEHERREM'e, yüksek lisans eğitimimde ders aldığım Prof. Dr. Mehmet TERZİLER, Prof. Dr. Rafael ALİZADE, Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR, Yrd. Doç. Dr Refet POLAT hocalarıma, hazırlık aşamasında yardımcı olan tüm sevdiklerime ve ingilizce öğretmeni Tuğba GÜVENÇ'e, Deniz HASAN GÜÇOĞLU'na teşekkür ederim.

Tekin ÖZBEK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GIRIŞ

Hibrit sistem hem sürekli hem de ayrık olaylı dinamikleri içeren bir dinamik sistemdir.

Değişken sistemler hibrit sistemlerin belirli bir sınıfına bağlıdır. Ayrık olaylı dinamikler genellikle bir tür diferansiyel denklemler ile tanımlanır.

Hibrit sistem birçok alt sistemlerden ve değişme kuralından oluşur. Değişme kuralı, değişme dizileri ve bir küme değişme zamanları ile belirlenir. Her zaman değişkeninde sadece bir alt sistem aktiftir. Bu form diferansiyel ifade ile açıklanabilir.

$$x(t) \;\; \{f_v(t, x(t), u(t)) \; ; \;\; v\{1, 2, \ldots, M\}\}, \qquad (1.1)$$

Burada, $x(t)\mathbb{R}^n$, $u(t)\mathbb{R}^m$ her bir $v\{1, 2, \ldots, M\}$ için $f_v : \mathbb{R}^{n+m+1}\mathbb{R}^n$ argümenlerine göre, sürekli türevlenebilir.

(1.1) sistemi için ···· değişim kuralı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\cdots = ((\;_0, i_0), (\;_1, i_1), (\;_2, i_2), \ldots, (\;_{N-1}, i_{N-1})), \qquad (1.2)$$

$_0 = 0, \;_N = T, \;_i, \; i = \{1, 2, \ldots, N-1\}$ değişim anlarıdır. Böyle bir sistemin optimal kontrolü optimal kontrol u(t) ve optimal değişim kuralı ···· nun bulunması, verilen fonksiyonların minimumlaştırılması için gereklidir.

Bu problemle ilgili çalışmalar geçmiş birkaç on yılda kapsamlı araştırıldı. Örneğin, dinamik bazlı bir algoritma [1] de açıklanmıştır. [2] de sayısal optimal değişken zamanlarını hesaplamak için bir metod geliştirilmiştir. [3] te değişme dizinin verildiği farz edilen değişken sistemlerin optimal kontrolü için bir metod önerilmiştir. Bu metod [6] daki kontrol parametrize etmeyi geliştirme tekniği baz alınarak yapılmıştır.

Bu çalışmada gecikmeli değişken sistemlerin optimal kontrolünü göz önünde bulunduruyoruz.

Gecikmenin olması, problemi çok daha karmaşık hale getirdiği için bu problem, çok az çalışılmıştır. Dinamik sistemdeki gecikmeden dolayı [6] da kullanılan geliştirme transformasyonu bu problemi çözmek için direkt kullanılmaz.

Sonuç olarak, optimal kontrol yazılımı MISER [8] bu sınıftaki problemi çözmek için direkt kullanılmaz. Ancak [7] de rapor edilen yaklaşım, değişme zamanlarına göre, objektif fonksiyonun gradyant formülünü elde etmek için kullanılır. Böylece problem bir matematiksel programlama problemi gibi çözülebilir.

I. Bölümün kalan kısmı aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. Önce problemi formülüze ediyoruz. Daha sonra, değişmeli zaman sistemini parametrize etmek için bir parametrizasyon metodu sunuyoruz. Daha sonra, maliyet fonksiyonunun istenilen gradyanını gecikmeli fark denklemleri ile çözebiliriz. Bu nedenle, hesaplamalı bir metod elde edilir. Bölümün sonunda metodun etkinliğini örneklemek için sayısal bir örnek veriyoruz.

İ. BÖLÜM

1. GECİKMELİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN GRADYANTININ HESAPLANMASI

1.1 PROBLEM FORMULASYONU

Tek zaman ertelemeli, [0,T] aralığında tanımlı, N – 1 sayda değişme noktaları olan

$$x(t) = f_i\big(t, x(t), x(t-h)\big), t \quad (_{i-1}, \ _i], \ i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (1.3a)$$

değişmeli dinamik sisteme bakalım. Farz edelim ki, bu sistem aşağıdaki başlangıç değer şartlarını sağlıyor

$$x(0) = x_0, \quad x(t) = \phi(t), \quad t \quad [-h, 0], \qquad (1.3b)$$

Burada $x \ \ \mathbb{R}^n$, h- zaman erteleme uzunluğu,

$f_i : \mathbb{R}^{1-n+n}\mathbb{R}^n, \ i = 1, \ldots, N,$ ve $\phi : \mathbb{R}^1\mathbb{R}^n$ verilen fonksiyonlardırlar. Değişmeli dizisinin önceden belirlendiğini kabul edersek, örneğin:

$$0 = \ _0 \ _1 \ldots \ _{N-1} \ _N = T \qquad (1.4)$$

“ $_i$” değişmeli zamanlar olduğunda $i = 1, 2, \ldots, N-1$ karar verici değişkenlerdir.

Amacımız durumuna uygun (1.3a)-(1.3b) denklemlerini sağlayan öyle bir değişmeli vektörler $= (\ _1, \ _2, \ \ldots \ _{N-1})$ bulmaktır ki, (1.4) fonksiyonu minimum değerini alsın.

Minimalleşen fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazarsak,

$$J(\ ) = \Phi(x(T \mid \ )) \qquad (1.5)$$

Burada $x(T| \ )$ (1.3a)-(1.3b) sisteminin t= T *anında* $= (\ _1, \ \ _2, \ \ldots \ _{N-1})$

Vektörüne uygun çözümüdür. Kısalık sağlanması için bu problemi problem (P) olarak alalım.

Not 1.1.

Performans kriter fonksiyonu aşağıdaki gibi verilirse

$$J(\ ) = \Phi(x(T| \ )) + \int_0^t \mathcal{L}(t, x(t \mid \ ), x(t - h \mid \ ))\, dt, \qquad (1.6)$$

dinamikle ek bir durum sağlayarak (1.5) formunda bir objektif fonksiyona çevirebiliriz.

$$(t) = \mathcal{L}\big(t, x(t \mid \ ), x(t-h \mid \ )\big)$$

$$(0) = 0$$

(1.6) ün objektif fonksiyonu olarak yazılır.

$J(\ ) = \Phi(\hat{x}(T|\ ))$ olduğunda

$\hat{x}(T|\ ) = [x(T|\ )^T, x_{n+1}(T|\ )]^T$ ve

$\hat{\Phi}(\hat{x}(T|\ )) = \Phi(x(T|\ )) + x_{n+1}(T|\ )$

Daha ileri gitmek için aşağıdaki durumların yerine getirildiğini kabul ediyoruz.

1) Tüm değişme süreleri erteleme zamanından daha büyüktür.

$$_{i} - _{i-1} h, \; \forall i = 1, 2, \ldots, N; \tag{1.7}$$

2) $f_i(t, x(t), x(t-h)), i = 1, 2, \ldots N$, *ve* $\Phi(x(T))$ *fonksiyonları tüm değişkenlerine göre sürekli diferensiyelendirirler.*

1.2. Maliyet Fonksiyonunun basit forma getirilmesi

Problem (P) nin terminal cost fonksiyonu değişim vektörüne bağlıdır. Problem P yi çözmek için değişim vektörü yi göz önüne alarak terminal deyerin değişim formülüne ihtiyacımız var. Bu [7] de geliştirilen parametrizasyon metodu ile yapılır.

Her bir $i = 1, \ldots, N$ için

$$\spadesuit_i = \ _i - \ _{i-1}, \; i = 1, \ldots, N \tag{1.8}$$

$_{i-n}$ ve $_i$ değişim zamanları arasındaki süre olarak kabul edilir.

$$_i = \sum_{j=1}^{i} \spadesuit_j, \; i = 1, 2, \ldots, N \tag{1.9}$$

$\spadesuit = (\spadesuit_1, \spadesuit_2, \ldots, \spadesuit_N) \in \mathbb{R}^N$ süre faktörü açıkça görülebilir.

$$\sum_{i=1}^{N} \spadesuit_i \leq T, \ _i \tag{1.10}$$

Bu işaret sistemi ile, değişim vektörünün saptanması ile süre vektörünün eşit olduğunu gördük.

Sonuç olarak:

$\{\ _i ;\ _i\ t, i = 1, \ldots, N\}$, değişim oranlarına bağlı olan $x(t)$ zaman vektöründe bağımsız olarak görülebilir.

$$x\,(t) = x\,(t\,;\ \spadesuit_1,\ \spadesuit_2,\ \ldots,\ \spadesuit_{i-1}),$$

$t \in (\tau_{i-1}, \tau_i],\ i = 1, \ldots, N$

Bu taransformasyon ile x durumunun sadece t nin değil $\spadesuit$ inde fonksiyonu olduğunu görürüz. Bu durumda (1.3a), (1.3b) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{x}(t;\spadesuit_{i-1},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1) = f_i\big(t,\ x(t;\spadesuit_{i-1},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1),\ x(t-h;\spadesuit_{i-1},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1)\big) \quad (1.11a)$$

$t \in (\tau_{i-1}, \tau_i],\ i = 1, 2, \ldots, N,$

orta seviyedeki durumlarda (1.11b)

$$x(t;\spadesuit_{i-1},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1)\big|_{t=\tau_{i-1}} = x(t;\spadesuit_{i-2},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1)\big|_{t=\tau_{i-1}} \quad (1.11c)$$

$$x(t-h;\spadesuit_{i-1},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1) = x(\tau_{i-1}+t-h;\spadesuit_{i-2},\spadesuit_{i-2},\ldots,\spadesuit_1)$$

için:

$t \in (\tau_{i-1}, \tau_{i-1} + h],\ i = 2, \ldots, N$ (daha önceki durumlar) $x(t)$ (1.11d)

$|_{t=0} = x_0,$ (1.11e)

$x(t) = \varphi(t),\ t \in [-h, 0).$

$$J(\spadesuit) = \Phi(x(T|\spadesuit)), \quad (1.12)$$

Bu parametreye dayanarak (1.11a)-(1.11e) çözümünün $x(T|\spadesuit)$ olduğunda problem (P) aşağıdaki gibi yeniden formüle edilebilir.

(1.11a)-(1.11e) dinamik sistemi verildiğinde, (1.9) ve (1.11) gerçekleştiren bir vektör $\spadesuit \in \mathbb{R}^N$ bulunur.

Bu problemi (RP) ile adlandıralım.

(RP) problemini çözmek için gradyantın kısmi türevini karmaşık fonksyon gibi alalım,

$$\frac{\partial J(\spadesuit)}{\partial \spadesuit_i} = \frac{\partial \Phi(x(T|\spadesuit))}{\partial x}\frac{\partial x(T|\spadesuit)}{\partial \spadesuit_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (1.13)$$

Bu yüzden.

$$\frac{\partial x((T|\spadesuit))}{\partial \spadesuit_1}, \frac{\partial x((T|\spadesuit))}{\partial \spadesuit_2}, \ldots, \frac{\partial x((T|\spadesuit))}{\partial \spadesuit_N}, \quad (1.14)$$

Kısmı türevlerini hesaplamak gerekecektir. Bir sonraki adımda bu kısmı türevleri bulmaya çalışacağız.

1.3. Gradyantın hesaplanması

Gecikmeli optimal kontrol sisteminde gradiyentin hesaplanması için aşağıdaki teoremi ıspat edelim.

Teorem 1.1.

Farz edelim ki, $y^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$ fonksiyonları aşağıdaki zaman ertelemeli diferansiyel denklemleri

$$\frac{dy^{(i)}(t)}{dt} = \frac{\partial f_{i+1}\left(t, y^{(i)}(t), \tilde{y}^{(i)}(t)\right)}{\partial y^{(i)}} y^{(i)}(t) + \frac{\partial f_{i+1}\left(t, y^{(i)}(t), \tilde{y}^{(i)}(t)\right)}{\partial \tilde{y}^{(i)}} \tilde{y}^{(i)}(t), \quad t \in [\theta_i, \theta_{i+1}],$$

$$\frac{dy^{(i)}(t)}{dt} = \frac{\partial f_{i+2}\left(t, y^{(i)}(t), \tilde{y}^{(i)}(t)\right)}{\partial y^{(i)}} y^{(i)}(t) + \frac{\partial f_{i+2}\left(t, y^{(i)}(t), \tilde{y}^{(i)}(t)\right)}{\partial \tilde{y}^{(i)}} \tilde{y}^{(i)}(t), \quad t \in [\theta_{i+1}, \theta_{i+2}], \tag{1.15}$$

…,

$$\frac{dy^{(i)}}{dt} = \frac{\partial f_N\left(t, y^{(i)}(t), \tilde{y}^{(i)}(t)\right)}{\partial y^{(i)}} y^{(i)}(t) + \frac{\partial f_N\left(t, y^{(i)}(t), \tilde{y}^{(i)}(t)\right)}{\partial y^{(i)}} \tilde{y}^{(i)}(t), \quad t \in [\theta_{N-1}, \theta_N],$$

ve başlangıç koşulları

$$y^{(i)}(t)\Big|_{t=\theta_i} = f_i\left(t, y^{(i)}(t), y^{(i)}(t)\right)\Big|_{t=\theta_i} \tag{1.16a}$$

$$y^{(i)}(t-h)\,| = 0, \qquad t \in (\theta_i, \theta_i + h], \tag{1.16b}$$

sağlıyorlar, neredeki $\tilde{y}^{(i)}(t) = y^{(i)}(t-h)$.

O zaman ,

$$\frac{\partial x((T|\tau))}{\partial \tau_1} = y^{(1)}(T),\quad \frac{\partial x((T|\tau))}{\partial \tau_2} = y^{(2)}(T),\ \ldots,\ \frac{\partial x((T|\tau))}{\partial \tau_{N-1}} = y^{(N-1)}(T)$$

$$\frac{\partial x((T|\tau))}{\partial \tau_N} = f_N\left(T, x\left(T; \tau_{N-1}, \tau_{N-2}, \ldots, \tau_1\right), x\left(T-h; \tau_{N-1}, \tau_{N-2}, \ldots, \tau_1\right)\right) \tag{1.17}$$

neredeki , $x(t; \tau_{N-1}, \tau_{N-2}, \ldots, \tau_1)$ vektör τ in süresine dayanarak (1.11a)-(1.11e) sisteminin çözümü olur.

Ispatı: Varsayalım ki, $f_i(t, x(t), x(t-h)),\ i = 1, 2, \ldots, N$ fonksiyonları tüm değişkenlerine göre sürekli diferensiellenendirler..

Buna göre , τ_i ye dayanarak (1.11a) nın her iki tarafının kısmı diferensialını ele alırsak, aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\frac{\partial^2 x(t; \tau_{i-1}, \tau_{i-2}, \ldots, \tau_1)}{\partial \tau_i \partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\left(t, x(t; \tau_{i-1}, \ldots, \tau_1), \tilde{x}(t; \tau_{i-1}, \ldots, \tau_1)\right)\frac{\partial x}{\partial \tau_i}(t; \tau_{i-1}, \tau_{i-2}, \ldots, \tau_1)$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{x}}\left(t, x(t; \tau_{i-1}, \ldots, \tau_1), \tilde{x}(t; \tau_{i-1}, \ldots, \tau_1)\right)\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tau_i}(t; \tau_{i-1}, \tau_{i-2}, \ldots, \tau_1)$$

$\tilde{x}(t) = x(t-h)$ verildiğinde $x(t)$ sadece τ_i ye bağlı olduğu için, örneğin; $\sum_{j=1}^{i} \tau_j \le t$, aşağıdaki gibi devam eder.

$$\frac{\partial x}{\partial \tau_i}(t; \tau_j, \tau_{j-1}, \ldots, \tau_1) = 0, \quad \text{if } t \le \sum_{k=1}^{j} \tau_k,\ i \neq k$$

$y^{(i)}(t; \tau_k, \tau_{k-1}, \ldots, \tau_1) = \frac{\partial x}{\partial \tau_i}(t; \tau_k, \tau_{k-1}, \ldots, \tau_1),\ k = 1, 2, \ldots, N-1$ teoremin sonucu açıktır.

Teorem (1.8) e dayanarak, problem (RP) yi çözmek için aşağıdaki gibi bir algaritma gösteririz.

1.4. Algoritmanın Verilmesi ve Grafiğin Çizilmesi.

Basamak 0 (1.9) ve (1.10) yerine getirmek için $\spadesuit = (\spadesuit_1, \spadesuit_2, \ldots, \spadesuit_N)$ olarak seçelim.

Basamak 1 x $(t; \spadesuit_{i-1}, \ldots, \spadesuit_1)$ ve $t\ (\ _{i-2}, \ _i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$ elde etmek için (1.11a)-(1.11e) zaman ertelemeli, değişmeli dinamik sistem çözülür.

Basamak 2 $\frac{x((T \mid \spadesuit))}{\spadesuit_1}, \frac{x((T \mid \spadesuit))}{\spadesuit_2}, \ldots, \frac{x((T \mid \spadesuit))}{\spadesuit_{N Ḿ1}}$ elde etmek için, (1.15) ve (1.16a)-(1.16b) ertelemeli diferansiyel denklemleri çözülür.

Aynı zamanda, (1.17) ve basamak 1 ile $\frac{x((T \mid \spadesuit))}{\spadesuit_N}$ hesaplarız.

Basamak 3 (1.13) nin etkisi ile terminal costtan değişimi ile $\spadesuit_i = 1, 2, \ldots, N$ $\frac{J(\spadesuit)}{\spadesuit_i}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ hesaplanır.

Basamak 4 Problem (RP) yi matematiksel programlı bir problem olarak çözülür.

Örnek Bu bölümde geliştirdiğimiz metodun ekişini göstermek için sayısal bir örnek vereceğiz.

İki anahtarlı, iki boyutlu ertelenmiş dinamik bir sistem düşünelim.

$x_1(t) = 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t - 0.1),$ if $0 \le t_1,$

$x_2(t) = 3x_1(t) + 4x_2(t - 0.1),$

$x_1(t) = 2x_1(t)x_2(t) + \sin(x_2(t - 0.1)),$ if $_1 \le t_2,$ (1.18)

$x_2(t) = x_1(t)x_2(t) + x_1(t - 0.1), x_2(t - 0,1),$

$x_1(t) = t^2 - 2x_1(t)x_2(t - 0.1) + 3,$ if $_1 \le t \quad 1,$

$x_2(t) = -x_2(t) + x_1(t - 0.1)x_2(t - 0.1),$

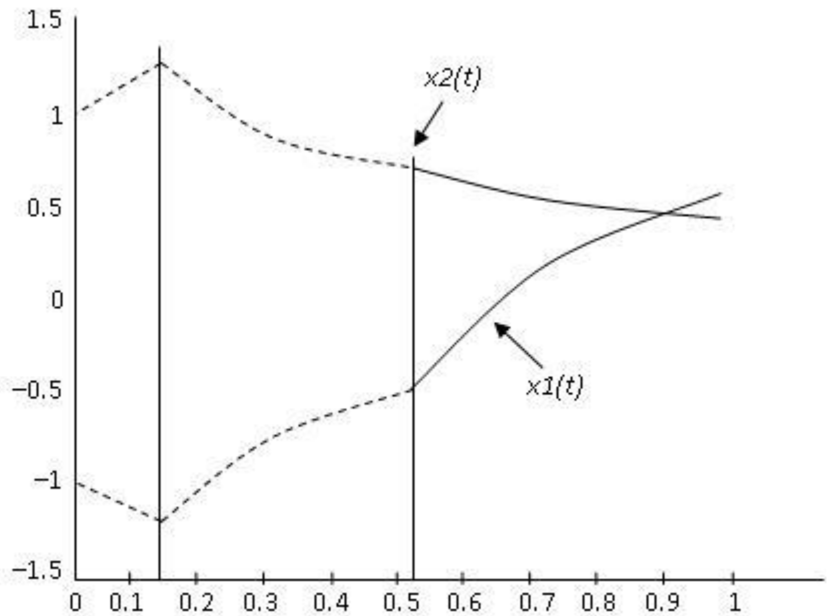
Başlangıç değeri

$x_1(t) = t - 1, \qquad x_2(t) = t^2 + 1, \qquad -0.1 \quad t \quad 0$ (1.19)

Terminal maliyet fonksiyonu

$J(\,_1,\ _2) = (x_1(1) - 1/2)^2 + (x_2(1) - 1/4)^2$ (1.20)

Elde edilen sonuçlar $_1 = 0.1500$ ve $_2 = 0.5211$ optimal terminal değeri 0,0128 durum Fig.1 de tanımlanmıştır.



2. BÖLÜM

ZAMAN GECİKMELİ DEĞİŞİMLİ SİSTEMLERİN OPTİMAL KONTROLÜ

2.1. Ayrık Optimal Kontrol Sistemlerinin Matematiksel Formülasyonu ve Önsel Değerlendirmeler

Değişmeli sistemleri, üretim, iletişim ağları, otomatik pist tasarımı, otomotiv motor kontrolü, bilgisayar senkronizasyonu, trafik kontrol sistemleri, kimyasal işlemler gibi çeşitli alanlarda karşımıza çıkmaktadır. Bu değişim sistemi, alt sistemler ve alt sistemler arasındaki bağlantıyı kuran değişme kuralını içeren özel bir hibrit dinamik sistem çeşididir. Bu değişmeli sistemi, genel bir hibrit sisteminden ayıran bir özellik, sürekli durumun, değişme anında görülmemesidir. Son yıllarda, hem teori ve hem de uygulama öneminden dolayı değişmeli sistemlerin kontrolüne ilgi artmıştır. Liberzon ve Morze değişmeli sistemleri çalışmasında bu problemi tartıştılar. [9] Değişmeli sistemlerin analiz ve dizaynında birçok referansda [11] kontrol edilebilirlik ve erişebilirlik iki önemli konu olarak belirtilmiştir. İlk periyodik tip değişmeli sistemleri için tek zamanlı kontrol edilebilirliği ve gözlemlenebilirliği üzerine çalışmalar yapmıştır. Ve bazı önemli ve yeterli durumlar ispatlanmıştır. [10] Daha sonra çok zamanlı kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik kavramları sunulmuş ve bazı gerekli ve yeterli kriterler elde edilmiştir. Aynı zamanda, kontrol edilebilirliğin en az “n” zamanda (“n”in durum boyutu olduğunda) gerçekleştiğini belirtmişlerdir. [15] de genel değişmeli lineer sistemler için gerek ve yeter şart sağlanmaktadır. Ve gerek şart sadece 3 boyutlu iki alt sistem için yeterlidir. Bu çalışmaya dayanarak, [21] keyfi sayıda üç boyutlu alt sistemlerin sonuçlarını açıklamıştır. [14] Genel değişmeli sistemlerin kontrol edilebilirliği ve gözlenebilirliği için gerekli ve yeterli geometrik tip kriter oluşturmuştur. Daha sonra [12] ve [13] sonuçları ayrık – zamanlı durumlara genişletilmiştir. Aynı zamanda [8] ve [9] kontrol edilebilirliğin tek değişmeli dizisi tarafından tanımlanabileceği kanıtlanmıştır. [14] tarafından verilen direk sonuç kriteridir. Farklı zamanlı sistemler için denk bir sonuç [18] da kanıtlanmıştır.

Daha sonra, [19] sonuçlarını, kontroldeki çok zamanlı gecikmelerle, periyodik olarak ya da rastgele değişmeli sistemlere genişletmiştir. [8] Doğrusal hibrit sistemlerin, hibrit kontrol edilebilirliğini araştırmıştır.

Birçok pratik sistem, zaman gecikmesi olayını kapsadığı için [24,25] zaman gecikmesi sisteminin kontrol edilebilirliğine çalıştı. Bu çalışmada (kontrol edilebilirlik için) lineer ayrık zaman sistemleri, kontrolde zaman gecikmeli, değişmeli sistemleri araştırıldı ve formüle edildi.

Önce basit bir ve gecikmesiz optimal control problemi için kontrol edilebilirlik hakkında bilgi verelim.

$\dot{x}(t) = a\,(x(t), u(t), t)$ sistemi, $t \quad t_0$ için $x(t_0) = x_0$ başlangıç konumu ile verilsin.

x_0 konum değişkenini, t_1 zamanında orjine transfer eden sonlu bir zaman $t_1 \quad t_0$ ve kontrol $u(t),\ t \quad [t_0,\ t_1]$ bulunursa, x_0'a t_0 zamanında kontrol edilebilir ise sistem tamamen kontrol edilebilir ya da basit anlamıyla kontrol edilebilirdir.

Göz önünde bulunduracağımız problemlerde, amaç sistemi keyfi başlangıç konumundan orjine performans ölçümü ile minimize ederek transfer etmek olduğu için, kontrol edilebilirlik çok önemlidir. Bu yüzden, sistemin kontrol edilebilirliği çözümün varlığı için gereklilik koşuludur.

Kalman, lineer ve zaman-invaryant sistemin kontrol edilebilir olduğunu ancak ve ancak aşağıdaki eşitlikteki $n \quad mn$ matrisinin rankının n olduğunda sağlandığını göstermiştir.

$$E = \left[B \mid AB \mid A^2 B \mid \ldots \mid A^{n-1} B \right]$$

Eğer tek bir kontrol girişi (m=1) varsa, kontrol edilebilirlik için gereklilik ve yeterlilik koşulu n n matris boyutlarındaki E nin tekil olmamasıdır.

Gecikme girdisi ile verilen, değişimli lineer ayrık-zaman kontrollü sistemi, aşağıdaki şekilde göz önünde tutalım:

$$x(k+1) = A_{r(k)}\, x(k) + B_{r(k)}\, u(k) + D_{r(k)}\ u(k-h) \tag{2.1}$$

$x(k) \quad \mathbb{R}^n$ nin durumu $u\,(k) \quad \mathbb{R}^p$ girdi,

sabit skaler fonksiyonunun $r(k) = \{0, 1, \ldots\}\ \{1, 2, \ldots, N\}$ olduğu durumda değişim yolu olarak oluşturulabilir.

Ayrıca, $r(k) = i\ (A_i, B_i, D_i)$ alt sisteminin aktif olduğunu gösterir. Pozitif tam sayı “h” kontrolde gecikme adımıdır.

Bu çalışmada biz sistem (1) terslenir olduğunu var sayıyoruz.

$\forall i = 1, 2, \ldots, N$, A_i , tekil olmayan bir alt sistemdir.

Açıklamak gerekirse, herhangi bir tamsayı için

$M \geq 0$ küme: $M = \{0, 1, 2, \ldots, M-1\}$

Tanım 2.1 (Kontrol Edilebilirlik)

Sistem (2.1) o zaman tamamen kontrol edilebilir ki, eğer herhangi bir başlangıç durumu x_0 ve başlangıç girdisi $u(-h), \ldots, u(-1)$ ve herhangi bir x_f son durumu için öyle bir pozitif tamsayı $M \geq 0$ ve bir değişim kuralı $r(m) : \underline{M}\ \{1, \ldots, N\}$ ve $u(m)$; M $\mathbb{R}^p$ olsun verilen

sistem $x(0) = x_0$ ve $x(m) = x_f$ sartı sağlanabilsin

2.2 MATEMATİKSEL ÖNSEL DEĞERLENDİRMELER

Şimdi çalışmanın geri kalanını tartışmak için bazı matematiksel önsel değerlendirmeleri, basit bir araç olarak sunuyoruz.

Tanım 2.2 ([14 – 15]) Matris B verilirse

$B = [b_1, \ldots, b_p] \quad \mathbb{R}^{n \times p}$

$R(B)$ şu şekilde tanımlanır.

$$R(B) \overset{\text{tanım}}{=} \text{Span}\{b_1, b_2, \ldots, b_p\} \tag{2.2}$$

Tanım 2.3 (Değişmeyen alt uzayın minimizasyonu [14, 15])

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matris ve lineer alt uzay $W \quad \mathbb{R}^n$ olarak verildiğinde minimal sabit alt uzay (A | W) şeklinde tanımlanır.

$$A|W \overset{\text{tanım}}{=} \sum_{i=1}^{n} A^{i-1} W \tag{2.3}$$

sembolleri basitleştirirsek, o zaman

$(A \mid B) = (A \mid R\,(B))$ olur.

A $\quad \mathbb{R}^{n \quad n}$ ve $B = \mathbb{R}^{n \quad p}$

Lemma 2.1: Verilen A $\quad \mathbb{R}^{n \quad n}$ ve $B = \mathbb{R}^{n \quad p}$ matrisler ve tersinir matris $P \quad \mathbb{R}^{p\,x\,p}$

İçin aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(A \mid BP) = (A \mid B) \tag{2.4}$$

İspat: $P \quad \mathbb{R}^{p \quad p}$ olmak üzere, A herhangi bir tersinir matris için

$R(BP) = \{BPy \mid y \quad \mathbb{R}^{p}\} = \{Bz \mid z = Py, y \quad \mathbb{R}^{p}\}$

$R(BP) \quad R(B)$ ifadelerini yazabiliriz.

Diğer yandan,

$R(B) = R\grave{3}(BP)P^{-1}] \quad R(BP)$ olduğunu yazabiliriz.

Bu ifade, $R(BP) = R(B)$ eşitliğini gösterir. Böylelikle;

$\{A \mid BP\} = R(BP) + AR(BP) + \ldots + A^{-1}\, R(BP)$

$\qquad = R(B) + AR(B) + \ldots + An^{-1}\, R(B)$

$\qquad = \{A \mid B\}$ eşitliğine ulaşılır.

Lemma 2.2: Verilen $A_1, A_2 \quad \mathbb{R}^{n \quad n}$, $B_1, B_2 \quad \mathbb{R}^{n \quad p}$

Matrisleri için

nǴ1
R(A1^m B1 Ǵ A2^m B2) Ǵ (A2 | B2) Ť (A1 | B1) Ǵ (A2 | B2) (2.5)
mŤ0

Formülleri doğrudur.

Lemma 2.3: Herhangi bir matris $A \quad \mathbb{R}^{n \quad n}$ için öyle bir $T > 0$ var ki, istenilen bir lineer alt uzay $W \quad R^{n}$ için aşağıdaki denklemi sağlar.

$$(A \mid W) = (e^{(-AT)} \mid W) = exp(-AT) \mid W) \tag{2.6}$$

Ispatı açıktır. (bkz. [8])

Lemma 2.4: Tekil olmayan matris A $\mathbb{R}^{n \quad n}$ verildiğinde herhangi bir alt uzay için W $\mathbb{R}^{n}$ için ve yeterince büyük her pozitif k tamsayısı için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(A^{k} \mid W) = (A \mid W) \tag{2.7}$$

İspat: A matrisinin tersi olmadığından x $\mathbb{R}^{n}$ olmak üzere $exp(x) = A$ olmalıdır. Bunun aşağıdaki ifadeyi sağladığını göstermek kolaydır.

$$\{A \mid W\} \quad \{x \mid W\} \tag{2.8}$$

Lemma 3 te x için yeteri kadar büyük pozitif k tamsayısı için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\{exp(x_k) \mid W\} = \{x \mid W\} \tag{2.9}$$

$$\{A^{k} \mid W\} = \{x \mid W\} \tag{2.10}$$

Böylece:

$$\{A^{k} \mid W\} = \{A \mid W\} \quad \text{olmak üzere} \tag{2.11}$$

diğer bir taraftan açıkça görülür ki

$$\{A^{k} \mid W\} \quad \{A \mid W\} \quad \text{olduğundan} \tag{2.12}$$

$$\{A^{k} \mid W\} = \{A \mid W\} \quad \text{eşitliği sağlanır.} \tag{2.13}$$

2.3. Kontrol Edilebilirlik

Bu alt bölümdeki amacımız, verilen değişim dizisi için kontrol edilebilir küme kavramını tanıtmak ve karakteristiğini ortaya çıkartmaktır. Sistem 1 için bir değişim dizisi her bir zaman anında, hangi sistemin ne zaman çevrileceğini belirtmek içindir.

Tanım 2.4 (Değişim dizisi) $\checkmark$ değişim dizisi, aşağıdaki gibi ifade edilen sonlu skaler kümedir

$$\checkmark \overset{tanım}{\check{T}} \{i_0, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}\}$$

Burada m $\checkmark$ nin boyunun(uzunluğu), i_m $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$ *ise m'ci* *sırada*

$$(A_{i_m}, B_{i_m}, D_{i_m}), m\underline{M} \tag{2.14}$$

sisteminin aktif olduğunu bildiriyor.

Verilen değişim dizisi $\sigma = \{i_0, ..., i_{M-1}\}$ olmak üzere, $r(m) : m = \{1, ..., N\}$ ile bağlantılı değişim yolu aşağıdaki şekilde belirlenebilir.

$$r(m) = i_m, m \quad \underline{M} \tag{2.15}$$

Tanım 2.5 (Kontrol edilebilir Küme) Verilen $\sigma = \{i_0, ..., i_{M-1}\}$ değişim dizisinde başlangıç durumu x_0 ve başlangıç girdileri $u_0(k), k = -h, ..., -1$ olmak üzere, x_0 ve u_0 dan başlayan bütün durumlar, değişim dizisi σ nin kontrol edilebilir kümesi için tanımlanabilir.

Verilen x_0 başlangıç durumu ve $u_0(k), k = -h, ..., -1$

Başlangıç kontrol fonksiyonu verildiğinde $\sigma = \{i_0, ..., i_{u-1}\}$ değişim dizisi genişletilerek aşağıdaki gibi gösterilir.

$$x(M) = \prod_{j=M-1}^{0} A_{i_j} x_0 + \sum_{m=0}^{M-2} \prod_{j=M-1}^{m+1} A_{i_j} \left[B_{i_m} u(m) + D_{i_m} u(m-h)\right]$$

$$+ B_{i_{M-1}} u(M-1) + D_{i_{M-1}} u(M-h-1) \qquad M > h \tag{2.16}$$

$$x(M) = \prod_{j=M-1}^{0} A_{i_j} x_0 + \sum_{m=-h}^{-1} \prod_{j=M-1}^{m+h+1} A_{i_j} D_{i_{m+h}} u_0(m)$$

$$+ \sum_{m=0}^{M-h-2} \left(\prod_{j=M-1}^{m+1} A_{i_j} B_{i_j} + \prod_{j=M-1}^{m+h+1} A_{i_j} D_{i_{m+h}} \right) u(m)$$

$$+ \left(\prod_{j=M-1}^{M-h} A_{i_j} B_{i_{M-h-1}} + D_{i_{M-1}} \right) u(M-h-1)$$

$$+ \sum_{m=M-h}^{M-2} \prod_{j=M-1}^{m+1} A_{i_j} B_{i_m} u(m)$$

$$+ B_{i_{M-1}} u(M-1) \tag{2.17}$$

$C(x_0, u_0, \sigma) = In(x_0, u_0, \sigma)$

$$\prod^{1} A_{i_j} B_{i_0} + \prod_{j=M-1}^{h+1} A_{i_j} D_{i_h}, \quad ,$$

j T̀*M* H́*1*

$$\sum_{j Ť M Ĥ 1}^{M Ĥh Ĥ 1} A_i^j B_{i_{M ĤhĤ2}} \; Ĝ \; A_{i_{M Ĥ1}} D_{i_{M Ĥ2}},$$

$$\sum_{j Ť M Ĥ 1}^{M Ĥh} A_i^j B_{i_{M ĤhĤ1}} \; Ĝ \; D_{i_{M Ĥ2}},$$

$$\sum_{j Ť M Ĥ 1}^{M ĤhĜ1} A_i^j B_{i_{M Ĥh}}, \; , A_{i_{M Ĥ1}} B_{i_{M Ĥ2}}, B_{i_{M Ĥ1}} \; őf \qquad (2.18)$$

$$In(x_0, u_0, \checkmark) Ť A_{i_j}^{0} x_0 \quad {}_{j Ť M Ĥ 1}$$

$$In(x_0, u_0, \checkmark) Ť \sum_{j Ť M Ĥ 1}^{0} A_i^j x_0 \; Ĝ \sum_{m Ť Ĥh}^{Ĥ1} \sum_{j Ť M Ĥ 1}^{m ĜhĜ1} A_i^j D_{i_{mĜh}} u_0(m) \qquad (2.19)$$

$x_0 = 0,\ u_0 = 0$ olmak üzere,

$$C(0, 0, \checkmark) Ť R \sum_{j \; Ť M Ĥ 1}^{1} A_j^i B_0^i \; Ĝ \sum_{j Ť M Ĥ 1}^{h Ĝ1} A_j^i D_h^i,$$

$$\sum_{j Ť M Ĥ 1}^{M ĤhĤ1} A_{i_j} B_{i_{M ĤhĤ2}} \; Ĝ A_{i_{M Ĥ1}} D_{i_{M Ĥ2}},$$

$$\sum_{j Ť M Ĥ 1}^{M Ĥh} A_i^j B_{i_{M ĤhĤ1}} \; Ĝ \; A_{i_{M Ĥ1}} D_{i_{M Ĥ1}},$$

$$\sum_{j Ť M Ĥ 1}^{M ĤhĜ1} A_i^j B_{i_{M Ĥh}}, \; , A_{i_{M Ĥ1}} B_{i_{M Ĥ2}}, B_{i_{M Ĥ1}} \qquad (2.20)$$

Açıktır ki $\mathbb{R}^n$ *deki* lineer alt uzay, *C(✓)* olarak gösterilir.

<u>Önerme 2.1</u>

✓ *{i₀, …,1}* değişim dizisi verildiğinde kontrol edilebilir küme *C(✓)* (13) de belirtildiği gibi lineer uzaydır.

Bir sonraki tartışmada gereksiz olumsuzluklardan kaçınmak için *h n* kabul edeceğiz. Bu kabul model zaman yeterince küçük olduğunda uygundur.

<u>Önerme 2.2</u>

$\checkmark \dot{T} \{ i, i, ..., i \}^{(n Ġ h) \, zaman}$ değişim dizisini düşünelim

$$C(\checkmark) = \{A_i \mid [B_i, D_i \tag{2.21}$$

Ispatı: *(2.20)'den yazabiliriz.*

$$C(\checkmark) \dot{T} R([A_i^{Ġh} B_i \; Ġ \; A_i^{n} D_i, ..., A_i^{h} B_i \; Ġ \; D_i, A_i^{hḢ1} B_i, ..., A_i B_i, B_i]\}$$

$$\dot{T} (A_i \mid [D_i \; A_i \; Ġ \; A_i^h B_i]) \; Ġ \; (A_i \mid B_i) \dot{T} (A_i \mid [D_i \; Ġ \; A_i^h B_i]) \; Ġ \; (A_i^h \mid B_i)$$

Lemma 2 de görülür.

$$C(\checkmark) \dot{T} (A_i \mid D_i) \; Ġ \; A_i \mid A_i^h B_i) \dot{T} (A_i \mid D_i) \; Ġ \; (A_i \mid B_i) \dot{T} (A_i \mid [B_i, D_i])$$

Daha sonra değişim kümesi üzerinde iki işlem tanımlayıp kontrol edilebilir kümelerle bağlantısını tartışacağız.

Tanım 2.6 (Değişim Dizilerinin Çarpımı) İki değişim dizisi verildiğinde çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\checkmark_1$ ve $\checkmark_2$ çarpımları:

$\checkmark_1 = \{i_0, i_1, ..., i_{M-1}\}$ ve $\checkmark_2 = \{j_0, j_1, ..., j_{L-1}\}$

$$\checkmark_1 \; \checkmark_2 \overset{tanım}{\dot{T}} \{i_0, i_1, ..., i_{M-1}, j_0, j_1, ..., j_{L-1}\} \tag{2.22}$$

$\checkmark_1 \quad \checkmark_2$ nin aşağıdaki eşitliği sağladığını göstermek kolay olduğundan

$(\checkmark_1 \quad \checkmark_2) \quad \checkmark_3 = \checkmark_1 \quad (\checkmark_2 \quad \checkmark_3)$ eşitliğini $\checkmark_1 \quad \checkmark_2 \quad \checkmark_3$ olarak gösterebiliriz.

Tanım 2.7 (Değişmeli Dizilerin Kuvveti) Verilen değişim dizisi $\checkmark$ nin kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\checkmark^n \overset{tanım}{\dot{T}} \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark ... \checkmark, k \quad n + h \tag{2.23}$$

k kere

0 ile ✓1 Ť {i , ..., 1} , neredeki k n + h formasında olan değişim sisstemleri kümesini

işaret edek. Bazı değişim dizileri üzerindeki çarpım ve kuvvet işlemlerinin sonlu kereler uygulanmasıyla üretilen, tüm değişim dizilerinin kümesi, b olarak adlandırılır.

✓ = {i0, …, iM–1} olmak üzere;

0

A✓ Ť Aim şeklinde ifade edilir. (2.24)

mŤM Ħ1

Teorem 2.1

Verilen değişim dizileri ✓1, ✓2b olmak üzere,

C(✓1 ✓2) Ť A✓2 C(✓1) Ġ C(✓2) eşitliği vardır. (2.25)

İspat: ✓1, ✓20 durumunu düşünelim. Benzer şekilde ✓1, ✓2b olsun varsayalım ki,

k1 kere

✓1 Ť { i1 , ..., i1 }

k2 kere

✓2 Ť { i2, ..., i2} olsun,

C(✓1 ✓2)

Ť R A_{ij} B_{i1} Ġ A_{ij} D_{i1} , ...,

j Ťk1 Ġ2 Ħ1 ... h Ġ1 ... j Ťk1 Ġk2 Ħ1

k1 Ġ1 ... h Ġk1 Ġ1

A_{ij} B_{ik1} Ġ A_{ij} D_{i(k1 Ġh)} , ...,

j Ťk1 Ġ2 Ħ1 ... j Ťk1 Ġk2 Ħ1

k1 Ġk2 ĦhĦ1

A_{ij} B_{i(k1 Ġk2 ĦhĦ2)} ĠA_{i(k1 Ġk2 Ħ1)} D_{i(k1 Ġk2 Ħ2)}

jŤk1 Ġ2 Ħ1

k1 Ġk2 Ħh

A_{ij} B_{i(k1 Ġk2 ĦhĦ1)} Ġ D_{i(k1 Ġk2 Ħ1)} ,

j Ťk1 Ġ Ħ1

k1 Ġk2 Ħh Ġ1

$$A_{ij} \; B_{i(k_1 Ǵ k_2 Ḯh)}, \ldots,$$

j Ìk$_1$ Ǵ$_2$ Ḯ1

$$A_{i_{(k_1 - 1)}} B_{i_{(k_2 - 2)}}, B_{i_{(k_1 - 1)}}])$$

$$A^{k_2}$$

$$A_i \quad B_{i_1}, D_{i_1} \; A_{i_2} \quad B_{i_2}, D_{i_2}$$

$$A_{\checkmark_2} \; C(\checkmark_1) \; C(\checkmark_2) \quad (2.26)$$

Teorem 2.2

Verilen bir $\checkmark$ değişim dizisi aşağıdaki eşitliği sağlar. (2.27)

$$C(\checkmark^n) = (A_{\checkmark} \mid C(\checkmark))$$

İspat: $C(\checkmark^n) = A_{\checkmark} C(\checkmark_{(n-1)}) + C(\checkmark) = \ldots = (A_{\checkmark})^{i-1}_{i=1} \; C(\checkmark) = (A_{\checkmark} \mid C(\checkmark))$

Sonuç 2.1) Herhangi bir $\checkmark$ değişim dizisi için aşağıdaki eşitlik sağlanır. (2.28)

$$A^n_{\checkmark} C(\checkmark^n) = C(\checkmark^n)$$

İspat: Teorem 2 yi ve invaryant alt uzayın özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitliklere ulaşılır.

$$A^n_{\checkmark} C(\checkmark^n) = A(\checkmark)^n (A_{\checkmark} \mid C(\checkmark)) \quad (A_{\checkmark} \mid C(\checkmark)) \quad (2.29)$$

$A_{\checkmark}$ tersinir olduğundaki

$$dim((A_{\checkmark})^n (A_{\checkmark} \mid C(\checkmark))) = dim((A_{\checkmark} \mid C(\checkmark))) \quad (2.30)$$

$$A^n_{\checkmark} C(\checkmark^n) = (A_{\checkmark} \mid C(\checkmark)) = C(\checkmark^n) \quad (2.31)$$

2.4. Kontrol Edilebilir Kümenin Özellikleri

Sistem (1) için alt uzay dizisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

N

$$W_1 \grave{T}_{i \grave{T} 1} (A_i \mid [B_i , D_i]),$$

$$W_2 = \sum_{i=1}^{N} (A_i \mid W_1),$$

$$W_n = \sum_{i=1}^{N} (A_i \mid W_{n-1}) \qquad (2.32)$$

Teorem 2.3

Sistem (1) için, temel değişim dizisi σ_b $_b$ olmak üzere, $C(\sigma_b) = W_n$ olacak şekilde bir σ_b vardır.

İspat: Lemma 3 te her bir A_i için $k > n + h$ olacak şekilde herhangi W lineer uzayı $(A_i \mid W) = (A_i^{k_i} \mid W)$ eşitliğiyle verildiğinden (2.26) i aşağıdaki gibi tekrar tanımlayabiliriz.

$$W_1 = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i \mid [B_i, D_i]\right),$$

$$W_2 = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i^{k_i} \mid W_1\right), \qquad (2.33)$$

$$W_n = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i^{k_i} \mid W_{n-1}\right)$$

$dim(W_n) = d$ olduğunu varsayalım. (38) den $V_1, V_2, \ldots, V_d$ alt uzaylarının varlığını biliyoruz.

Böylelikle, $W_n = \sum_{m=1}^{d} V_m$ eşitliği her bir V_m için aşağıda verilen formdaki gibidir.

$$\prod_{m=1}^{M} A_{i_m}^{k_{i_m}} \left(A_j \mid [B_j, D_j]\right) \qquad (2.34)$$

$i_1, \ldots, i_M, j \in \{1, \ldots, N\}, 0 \leq M$

(2.28) deki gibi bir alt uzay için (2.29) deki bir değişim dizisi seçebiliriz.

$$\sigma = \{\underbrace{j, \ldots, j}_{k_j}, \underbrace{i_1, \ldots, i_1}_{k_{i_1}}, \ldots, \underbrace{i_M, \ldots, i_M}_{k_{i_M}}\} \qquad (2.35)$$

$$\prod_{m=1}^{M} A_{i_m}^{k_{i_m}} \left(A_j \mid [B_j, D_j]\right) \subseteq C(\sigma)$$

Bu yüzden $n_1, \ldots, n_d$ olacak şekilde değişim dizileri seçebiliriz. Örneğin;

$V_m \quad C(✓_m),\ m$ Ť $1, ..., d$ olmak üzere,

$$V_m \text{ Ť } \sum_{m Ť 1}^{d} C(✓_m) \tag{2.36}$$

Şimdi değişim dizisi olan $✓_b$ yi aşağıdaki gibi kuralım.

İlk olarak, eğer $C(✓^n) = W_n$ olursa, $✓_b = ✓_1^n$ olarak alabiliriz. Eğer olmazsa $k \quad \{2, ..., d\}$ şeklinde olmalıdır. Geneli bozmadan $k = 2$ olarak:

$C(✓_2) \quad C(✓_1^{\,n})$ yazabiliriz.

$C(✓_2 \ ✓_1^{\,n})$ Ť $A_{✓1\,n}\, C(✓_2)$ Ǵ $C(✓_1^{\,n})$

olduğundan ve sonuç 1 i kullanarak aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$C(✓_2 ✓_1^{\,n})$ Ť $A_{✓_1^{\,n}} (C(✓_2)$ Ǵ $C(✓_1^{\,n}))$

Bu eşitlikten;

$dim(C(✓_2 \ ✓_1^{\,n}))$ Ť $dim(C(✓_2)$ Ǵ $C(✓_1^{\,n}))$

1 Ǵ $dim(C(✓_1^{\,n}))$

$= 2$

olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylelikle; değişim dizisini aşağıdaki gibi kurarız.

$✓_1$ Ť $✓_1,$

$✓_2$ Ť $✓_2 \quad ✓_1^{\,n},$

…,

$\bar{✓}_d$ Ť $\bar{✓}_d (\bar{✓}_{d-1})^n$ ve $✓_b$ Ť $\bar{✓}_d$

$dim(C(✓_b)) \ \ d$ olduğunu kolaylıkla ispat edebiliriz.

Bu yüzden, $C(✓_b) = W_n$

Sonuç . Sistem (2.1) ancak ve ancak aşağıdaki eşitlik sağlanırsa kontrol edilebilir.

$$W_n = \mathbb{R}^n \tag{2.37}$$

KAYNAKÇA

1. X.P. Xu, P.J. Antsaklis, A dynamic programming approaclı for optimal control of switched systems, Proc. IEEE Cunf. Decision Control (2000) 1822-1827.

2. M. Egertedt, Y. Wardi, F. Delmotte, Optimal control of switching times in switched dynamical systems, Proc. IEEE Cunf Decision Control (2003) 2138-2143.

3. X.P Xu, P.J. Anstsaklis, Optimal control of switched system based on parameterization of the switching instants, IEEE Trans. Automat Control 49 (2004) 2-15.

4. S.C. Bengea, A.D. Raymond, Optimal control of switching systems, Automatica 41 (2005) 11-27,

5. C.G. Cassandras, D.L. Pepyne, Y. Wardi, Optimal control of a class of hybrid systems, IEEE Trans. Automat. (Control 46 (2001) 398-415.

6. K.L. Teo, L.S. Jennings, H.W.J. Lee, V. Rehbock, The control parametrization enhancing transform for contstrained optimal control problema, J. Aust. Math. Soc. B 40 (1999) 314-335

7. C.Y. Kaya, J.L. Noakes, Computational method for time-optimal switching control. J. Optim. Theory Appl. 117 (2003) 69-92

8. L.S. Jennings, M.E. Fisher, K.L. Teo, C.J. Goh, MISER 3.3-optimal control software: theory and user manual, Department of Mathematics, The University of Western Australia, Australia, 2004.

9. D. Liberzon and A.S. Morse, “Basic problems in stability and desing of switched systems,” IEEE Control Systems, 19(5), 59-70, 1999

10. Z.Yang, “An algebraic approach towards the control-lability of controlled switching linear hybrid systems,” Automatica, v.38(7), July, 1221-1228, 2002.

11. Ezzine and A. H. Haddad, "Controllability and observability of hybrid systems," Int. J. Control, vol. 49, pp.2045-2055, June, 1989.

12. S.S. Ge, Z. Sun, and T. H. Lee, "Reachability and controllability of swtched linear discrate-time systems." IEEE Transactions on Automatic Control, 46(9), 1437-1441, 2001.

13. S.S. Ge, Z. Sun, and T. H. Lee, "Reachability and Controllability of Swtched Linear Systems," Proceed-ings of the American Control Conference. Arlington, VA June, 1898-1903, 2001.

14. Sun, Z.., Ge, S.S., and Lee, T.H., Controllability and reachability criteria for switched linear systems, Automatica. Vol. 38, no. 5, pp.775-786, 2002.

15. Z. Sun and D. Zheng, "On Reachability and stabilization of switched linear control systems," IEEE Transactions on Automatic Control, 46(2), 291-295, 2001

16. G. Xie and L. Wang, "Necessary and suffcient conditions for controllability of switched linear systems," Proceedings of the American Control Conference. Arlington, VA June, 1897-1902, 2002.

17. G. Xie and L. Wang, "Controllability and stabilizability of switched linear-systems." Systems and Control Lester, 48(2), 135-155, 2003.

18. G. Xie and L. Wang, "Reachability realization and stabilizability of switched linear discrete-time systems." J. Math, Anal. Appl., In Press, 2002.

19. G. Xie and L. Wang, and Y. Wang, "Controllability of Periodically Switched Linear Systems with Delay in Control," Proceedings of the Fifteenth İnternational Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems. University of Notre Dame, In, August, 1-15, 2002.

20. G. Xie and D. Zheng, "Research on Controllability and Reachability of Hybrid Systems," Proceedings of the 19th Chinese Control Conference, Dec., HK, 114-117, 2000.

21. G. Xie, D. Zheng, and L. Wang, "Controllability of Switched linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 47, no. 8, pp.1401-1405, 2002.

22. T. Kaileth, Linear Systems. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hail. 1980.

23. W. M. Wonham, Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. New York: Springer-Verlag, 3rd ed., 1985.

24. D. H. Chyung, “On the controllability of linear systems with delay in control”, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.15(2), pp.255-257, Apr. 1970.

25. Hewer, G. A., “Note on controllability of linear systems with time delay”, IEEE Trans. on Automat. Contr., vol.17(5), pp.733-734, Oct. 1972.

26. Salamon and Dietmar, “On controllability and observability of time delay systems”, IEEE Trans. Automat. Contr., vol.29(5), pp.432-439, May, 1984.