YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERLE DİFERANSİYEL PROBLEMLERE YAKLAŞIMLAR

Tuba HAŞLAMAN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Bornova-İZMİR
2015

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. F.Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Şahlar MEHERREM

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü Müdürü

ABSTRACT

ON THE APPROXIMATION PROPERTY OF DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

HAŞLAMAN, Tuba
MSc in Mathematics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ahmet YANTIR

July 2015, 45 pages

In this thesis, we investigate the convergence of time scales and we apply this result for an approximation property of dynamic equations. Our results allow us to approximate the set of solutions for some differential problems by a sequence of dynamic ones.

We indicate a kind of convergence on time scales which can be applied and most useful for continuous dependence of solutions for dynamic equations on time scales. This forms an approximation for the differential equations by dynamic ones and is an essential extension of difference numerical algorithms. As a consequence, we study some Cauchy problem with infinitely many solutions, which is approximated by some dynamic problems.

Keywords: Time scale, Dynamic equation, Approximation of solutions

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERLE DİFERANSİYEL PROBLEMLERE YAKLAŞIMLAR

Tuba HAŞLAMAN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR
Temmuz 2015, 45 sayfa

Bu tezde, zaman skalalarının yakınsaklığını inceledik ve bu sonucu dinamik denklemlerin yaklaşımlar özelliği için kullandık. Bizim elde ettiğimiz sonuçlar bir diferansiyel problemin çözümlerinin kümesine bir dinamik denklemler dizisinin çözümlerinin kümesi ile yaklaşmamızı sağlar.

Zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çözümlerinin sürekli bağımlılığı için çok kullanışlı bir tür yakınsaklık tanımladık. Bu yakınsaklık diferansiyel denklemlere dinamik denklemler ile yaklaşımı sağlar ve fark denklemleri ile kurulan sayısal algoritmalar için önemli bir genişletmedir. Son olarak sonsuz sayıda çözüme sahip Cauchy problemini ele aldık ve dinamik denklemler ile çözümlere yaklaştık.

Anahtar sözcükler: Zaman Skalası, Dinamik denklem, Çözümlere yaklaşım

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR ayrıca bana daima destek olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Tuba HAŞLAMAN
İzmir, 2015

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK DENKLEMLERLE DİFERANSİYEL PROBLEMLERE YAKLAŞIMLAR" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

27/07/15

Tuba HAŞLAMAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$dis(a,B)$	a noktası ile B kümesi arasındaki uzaklık
$e(A,B)$	A ve B kümelerinin excessi
$h(A,B)$	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
$Cl(X)$	X kümesinin kapalı alt kümelerinin ailesi
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$\sigma(t)$	ileri şıçrama operatörü
$\rho(t)$	geri sıçrama operatörü
$\mu(t)$	tanecik fonksiyonu
$f^{\Delta}(t)$	f fonksiyonunun $\boldsymbol{\Delta}$-türevi
A^{-}	hit topoloji
A^{+}	miss topoloji
LsA_n	üst limit (Limit superior)
LiA_n	alt limit (Limit inferior)
K	Cantor kümesi

1 GİRİŞ

1988 yılında Stefan Hilger doktora tezinde zaman skalası (ölçüm zinciri) kavramını tanıttığında [45], danışmanı Bernd Aulbach (1947-2005) bu yeni kavramın 3 ana amacını şu şekilde ortaya koymuştur.

1) Sürekli ve ayrık analizin tek çatı altında toplanması ki bu birleştirme özelliği diferansiyel ve fark denklemlerinin dinamik denklemler adı altında toplanmasını sağlamıştır.

2) Kq ve Cantor Kümesi gibi sabit sıçramalı olmayan zaman skalaları üzerinde diferansiyel teorinin genişlemesi.

3) Sürekli problemlerin ayrıklaştırılması.

1990'lı yıllarda ve 2000'li yılların başlarında ilk iki amaca yönelik çok sayıda bilimsel çalışma yapılmıştır. Özellikle 1. amaca yönelik yapılan çalışmalar literatürde geniş yer tutmaktadır. Bu amaçla öncelikle sürekli ve ayrı analiz birleştirilerek zaman skalası analizi oluşturulmuştur [44, 45, 46]. Sonrasında yapılan çalışmalarla teori hızla büyümüş ve genişlemiştir. Diferansiyel denklemler teorisini hemen her alanında yapılmış olan çalışmalar zaman skalası üzerine taşımıştır [2, 6, 8, 16, 22, 28, 31, 34, 42, 47, 50, 52, 55]. Bunun yansıra çok değişkenli analiz de zaman skalası üzerinde oluşturulmuş ve bu alanda çalışmalar yapmıştır [7, 39, 40, 68].

Zaman skalasında dinamik denklemlerin finanstan, kimyaya, fizikten mühendisliğe kadar birçok uygulaması mevcuttur [8, 14, 17, 63].

2. amaca yönelik çalışmalar içerisinde başlıcaları q- fark denklemler üzerine yapılmıştır.

İlk iki amaca yönelik çalışmalar literatürde sıkça görülürken zaman skalasının "diskretizasyon" özelliği garip bir şekilde literatürde çok az yer bulmuştur. Biz bu tezde bunun üzerinde duracağız.

Diferansiyel problemlere ilişkin birçok sonuç kolaylıkla fark denklemlerine ilişkin sonuçlara dönüştürülebilir. Ancak tersi “süreklilik” kavramından ötürü aynı kolaylıkta değildir.

Dinamik denklemler teorisi bu zorlukların aşılmasında veya hem sürekli hem ayrık durumlar için iki ayrı incelemeden kaçınılmasında çok önemli rol oynar. Fakat bazı durumlarda “sürekli” diferansiyel problemler diskritize edilmiş hali yani fark veya dinamik denklem şekli orijinal problemin yaklaşımı olarak ele alınmalıdır.

Bu gerçek zaman skalası kavramının ortaya atılmasından beri biliniyor olmasına rağmen bu konudaki çalışmalar şaşırtıcı bir şekilde çok yoğun değildir. Genellikle diferansiyel probleme yaklaşım olarak fark denklemleri kullanılmıştır. Fakat dinamik denklemler daha genel olmasına rağmen diskritizasyon amacı olarak yaygın olarak kullanılmamıştır.

Burada izlenecek yöntem şu şekildedir:

Eğer bir T zaman skalası reel sayılar kümesi IR’ye (veya başka bir zaman skalası S’ye) “ belli manada” yakın ise, bu durumda T üzerindeki dinamik denklemin çözümünün de IR’deki diferansiyel denklemin çözümüne yakın olması beklenir. Burada çözümlerin var olduğu kabul edilmiştir. Yani gerçekte zaman skalaları dizisinin IR’ ye yakınsak olması durumunda çözümlerin de gerçek çözüme yakınsak olmasını bekleriz.

Burada hedef zaman skalası için ortak noktalar yerine zaman skalalarının yakınsaklığının ele alındığını belirtelim. Yani yaklaşılan zaman skalası ile kurulan zaman skalası dizisinin boştan farklı kesişimi olduğunu kabul etmek zorunda değiliz.

Bu tezde asıl amacımız dinamik denklemler için en uygun yakınsaklığı tanımlamaktır. Zaman skalası üzerinde bu yönde sonuçlar olmadığından önerdiğimiz algoritmayı var olan fark denklemleri algoritmalarıyla karşılaştırarak, daha önce tanıtılmış olan yakınsaklık türlerini birleştireceğiz. Böylece çözümü tek olmayan problemler için yani fark denklemleri ile ele alınamayan problemler için bile zaman skalası ile önerilen yani yakınsaklık metodunu kullanacağız.

Daha öncede belirtildiği gibi 3 numaralı amaca yönelik literatürde çok fazla çalışma yoktur. Adamec [1], Duke, Hall ve Oberste-Vorth [30], Esty ve Hilger [35], Garay, Hilger ve Kloeden [38], Kloeden [56, 57], Oberste-Vorth [66, 67] çalışmalarında zaman skalalarının yakınsaklığı üzerine bazı sonuçlar elde etmişler. Ancak hemen hemen tüm sonuçlar kompakt zaman skalaları için verilmiş ve Hausdorff yakınsaklıklığı ele alınmıştır. Bu kuvvetli bir gerekliliktir ve keyfi zaman skalasına genişletemez. Duke, Hall ve Oberste-Vorth [30] Hausdorff yakınsaklığından farklı türde yakınsaklık ele alınmıştır. Bu çalışmada kendileri de bu türde verilen yakınsaklığı en iyi seçenek olmadığı belirtmişlerdir. Bu yakınsaklık tanımı ile yapılacak olan yaklaşımların sağlıklı olmadığı ispatlanacaktır.

Ayrıca Fell topoloji Esty, Hilger [35], R.Oberste-Vorth [66, 67] tarafından ele alınmıştır. Fakat şaşırtıcı olan şudur ki bu sonuçlar çok değerli analizde var olan yakınsaklık sonuçlarıyla aynıdır.

Bu tezde IR'nin kapalı alt kümelerinin aileleri üzerindeki topolojilerde yakınsaklıklar karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak da Kuratowski yakınsaklığın zaman skalalarının yakınsaklığı için en uygun seçim olduğu görülmüştür. Bu topolojileri karşılaştıran birçok açıklayıcı örnek sunulmuştur. Özellikle Euler fark denklemleri $z_{n+1} = z_n + h_n f(z_n)$ için çok faydalı olan zaman skalaları üzerinde durulmuştur. Son olarak verdiğimiz sonuçları açıklayan bir örnek sunulmuştur. Tek çözümü olmayan bu tarzda problemlerin uygulaması olarak Cauchy problemi çözülmüştür.

2 ZAMAN SKALASI KAVRAMI

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1. Reel sayıların boştan farklı kapalı herhangi bir alt kümesine "zaman skalası" denir ve T ile gösterilir. Dolayısıyla reel sayılar kümesi IR, tamsayılar kümesi Z, doğal sayılar kümesi

$$IN,\ T_1 = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in IN} \cup \{0\},\ [a,b],\ T_2 = [0,1] \cup \{2\} \cup [6,7]$$

kümeleri ve Cantor kümesi örnek olarak verilebilir.

Tanım 2.2. T bir zaman skalası ve $t \in T$ olsun. T üzerinde ileri sıçrama operatörü;

$$\sigma(t) = inf\{s \in T : s > t, \quad t \neq maxT, \quad t \in T\}$$

ve geri sıçrama operatörü;

$$\rho(t) = sup\{s \epsilon T : s < t, \quad t \neq minT, \quad t \in T\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.3. $t \in T$ noktası için $\sigma(t) > t$ ise t'ye "sağ yayılmış nokta", $\sigma(t) = t$ ise t'ye "sağ yoğun nokta" denir.

Tanım 2.4. $t \in T$ noktası hem sağ hem sol yoğun ise t'ye "yoğun nokta", hem sağ hem sol yayılmış ise t'ye "ayrık nokta" denir.

Örnek 2.5. $T = IR$ için $\forall t \in IR$ için $\sigma(t) = t = \rho(t)$ olduğundan her nokta hem sağ hem de sol yoğun nokta olacaktır. Böyle noktalara "yoğun nokta" denir.

Örnek 2.6. $T = Z$ için $\forall t \in Z$ için

$$\sigma(t) = inf\{s : s > t, \quad s,t \in T\} = inf\{t+1, t+2, \dots\} = t+1$$

ve

$$\rho(t) = sup\{s: s < t, \quad s,t \in T\} = sup\{t-1, t-2, ...\} = t-1$$

olduğundan $\rho(t) < t < \sigma(t)$'dir. t noktası hem sol hem de sağ yayılmıştır. Böyle noktalara ayrık nokta adı verilir.

Örnek 2.7. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in IN} \cup \{0\}$ kümesinde;

$t = 0$ için $\sigma(0) = inf\{s: s > 0, \ s \in T\} = 0$ ve $\sigma(1)=1$ olduğu açıktır. $t = \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda $n = \frac{1}{t}$ olur. O halde;

$$n - 1 = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$$

ve

$$\frac{1}{n-1} = \frac{t}{1-t}$$

elde edilir. Yani;

$\sigma(t) = \frac{t}{1-t}$' dir.

Örneğin; $\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$, $\quad \sigma\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

Örnek 2.8. $t = \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda $n = \frac{1}{t}$ olur. O halde;

$$n + 1 = \frac{1}{t} + 1 = \frac{1+t}{t}$$

ve

$$\frac{1}{n+1} = \frac{t}{1+t}$$

elde edilir. Yani;

$$\Rightarrow \quad \rho(t) = \frac{t}{t+1} \text{ ‘dir.}$$

Örneğin; $\rho(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Tanım 2.9. Pozitif tanımlı $\mu: T \rightarrow [0, \infty)$ tanecik fonksiyonu $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlanır.

Örnek 2.10. $T = IR$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$

$T = Z$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$

$T = \left\{\frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = \frac{t}{1-t} - t = \frac{t^2}{1-t} \quad (t \neq 1)$

2.2 Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.11. $f: T \rightarrow IR$ fonksiyonu ve $t \in T^K$ noktası verilsin. Eğer sonlu bir δ sayısı için $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde t noktasının;

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - \delta(\sigma(t) - s)\right| \leq \boldsymbol{\varepsilon}|\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in N_{\boldsymbol{t}}$$

olacak şekilde N_t komşuluğu bulunabiliyorsa, “f fonksiyonu t noktasında $\Delta -$türevlenebilirdir” denir. $\delta \in IR$ sayısına, f fonsiyonunun t noktasındaki $\Delta -$türevi denir ve $\delta = f^{\Delta}(t)$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile;

$$f^{\Delta}(t) \coloneqq \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.12. $T = IR$ ise $f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(S)}{t - s} = f'(t)$ olur.

$T = Z$ ise $f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1-s} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1}$

$$= f(t+1) - f(t)$$

$$= \Delta f(t)$$

Örnek 2.13. $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\Delta -$türevini hesaplayalım.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{\big(\sigma(t)\big)^2 - s^2}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \to t} \frac{(\sigma(t)-s)(\sigma(t)+s)}{\sigma(t)-s}$$

$$= \lim_{s \to t} \sigma(t) + s$$

$$= \sigma(t) + t$$

Örneğin; $T = IR$ için $f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = t + t = 2t = (t^2)'$ olur.

$T = Z$ için $f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = t + 1 + t = 2t + 1 = (t+1)^2 - t^2$

$$= \Delta(t^2)$$

$T = IKq = \{q^n : n \in Z\} \cup \{0\}; q > 1$ olsun.

$t \in IKq$ ise $\exists\, n_0 \in Z$ vardır ki $t = q^{n_0}$. Bu durumda

$$\sigma(t) = q^{n_0+1} = q^{n_0}.q = tq$$

elde edilir. O halde;

$$f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = tq + t = t(q+1)$$

$T = hZ = \{hn : n \in Z\}$ olsun. $\sigma(t) = inf\{s : s > t,\ s,t \in T\}$

$t \in hZ$ ise $\exists\, n_0$ $t = hn_0$. Bu durumda $\sigma(t) = h(n_0 + 1) = hn_0 + h = t + h$

elde edilir. O halde $f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = t + h + t = 2t + h$ olarak bulunur.

$T = \left\{\frac{1}{n} : n \in IN^{+}\right\} \cup \{0\}$ olsun. $\sigma(t) = inf\{s : s > t,\ s, t \in T\}$ olduğundan

$\sigma(t) = \frac{t}{1-t}$'dir. O halde;

$$f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t = \frac{t}{1-t} + t = \frac{t + t - t^2}{1-t} = \frac{2t - t^2}{1-t}$$

olur.

Örnek 2.14. $f(t) = \sqrt{t}$ fonsiyonunun $\Delta -$türevini hesaplayalım.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s\to t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{(\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s})(\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{s})}$$

$$= \lim_{s\to t} \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{s}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{t}}$$

Örneğin; $T = IR$ için $f^{\Delta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} = (\sqrt{t})'$

$T = Z$ için $f^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$

$T = \left\{\frac{1}{n} : n \in IN^{+}\right\} \cup \{0\}\ için\ f^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{1-t}} + \sqrt{t}}$

$T = IKq\ \ t \in IKq\ \ \ni n_0\ t = q^{n_0}\ \sigma(t) = q^{n_0+1} = q^{n_0}.q = tq$

$$f^{\Delta}(t) = \frac{1}{\sqrt{tq} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{q} + 1)}$$

olur.

Özellikler:

1) $\sigma: T \to T$ fonksiyonu $\forall t \in T$ için türevlenemez.

2) $f: T \to IR$ fonksiyonunun $t \in T^K$ noktalarında türevi varsa tektir.

3) $f: T \to IR$ fonksiyonu sol yayılmış olan $maxT < \infty$ noktasında türevlenemez.

Zaman skalasında analiz ile ilgili detaylı bilgilere Bohner ve Peterson tarafından yazılmış olan kitaplarda [25, 26] ulaşılabilir. Bu tezde zaman skalası kavramlarından sıçrama ve türev operatörleri kullanıldığından giriş kısmı kısa tutulmuştur.

3 ZAMAN SKALASI DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI

Yaklaşımızın ana fikri şu şekildedir; T zaman skalası üzerinde verilen bir problem için T'nin bir yaklaşımı olan T_1 zaman skalasını "seçmek", problemi T_1 üzerinde çözerek bu çözüme orijinal problemin çözümünün yaklaşık çözümü olarak davranmaktır. Bunun için doğal gereklilik sadece T üzerinde çözümlerin varlığıdır. (Teklik gerek şart değildir.) Diğer taraftan bu zaman skalalarının bir dizisini adım adım oluşturmaktır. Bu sebeple zaman skalalarının yakınsaması için istenen topoloji metriklenebilir olmalı veya sadece kümeler dizisini kontrol edebilmemiz gerekmektedir. Bu alanda yapılan daha önceki çalışmalarda az sayıda topoloji ele alınmıştır. Kapalı kümeler üzerinde bir çok topoloji mevcuttur. Bu topolojiler hakkında detaylı bilgi için Beer [21] ve Kuratowski [59] tarafından yazılan kitaplarda bulunabilir.

Biz bu çalışmada zaman skalaları dizisinin dizisel yakınsaklığı üzerinde duracağız.

Öncelikle bu teoride literatürde hangi çalışmalar yapıldığından ve teorinin tarihsel geçmişinden bahsedelim.

3.1 Hausdorff Yaklaşımı

Tartışmanın başlangıç noktası Hausdorff metriği olmalıdır. Literatürde bu metrikle ilgili detaylı çalışmalar bulunabilir (detaylı bilgi için bkz[21]). (X,d) metrik uzayının kapalı alt kümelerinin ailesini $Cl(X)$ ile gösterelim.

Tanım 3.1. (X,d) bir metrik uzay $a \in X$ ve $B \subset X$ olsun. a noktası ile B kümesi arasındaki uzaklık;

$$dist\,(a,B)=inf_{b\in B}\, d(a,b)$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.2. $a = 1$ noktası $B = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$ kümesi arasındaki uzaklığı hesaplayalım.

$$dist(a,B) = \ inf_{b\in B}\ d(a,b)$$

$$= \inf\{d(1,1),\ d\left(1,\tfrac{1}{2}\right), d\left(1,\tfrac{1}{3}\right), \dots\}$$

$$= \inf\{0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \dots\}$$

$$= 0$$

Tanım 3.3. (X,d) bir metrik uzay ve $A,B \in Cl(X)$ olsun. A ve B kümelerinin excess'i (simetrik olmayan uzaklığı) aşağıdaki formül ile tanımlanır.

$$e(A,B) = sup_{a\in A}dist\ (a,B) = sup_{a\in A}inf_{b\in B}\ d(a,b) = \inf\{r > 0 \colon X \subset B(B,r)\}$$

Özel olarak; $\forall B \in Cl(X)$ için $e(\emptyset, B) = 0$ ile tanımlanır.

Örnek 3.4. $T = \{\frac{n}{2} : n\ \in\ N_0\}$ ve IR_+ zaman skalalarının excess'ini hesaplayalım.

$$e(T, IR_+) = sup_{x\in T}\ dist(x, IR_+) = sup_{x\in T}inf_{y\in IR_+}\ d\ (x,y)$$

$$= sup_{n\in N_0}inf_{y\in IR_+}\ d(\tfrac{n}{2}, y)$$

$$= 0$$

$$e(IR_+, T) = sup_{a\in IR_+}inf_{b\in T}\ d(a,b)$$

$$= \infty$$

Tanım 3.5. (X,d) bir metrik uzay olsun. $A,B \in Cl(X)$ için A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık;

$$h(A,B) = \max\{e(A,B)\ , e(B,A)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.6. $T = \{\frac{n}{2} : n \in N_0\}$ ve IR_+ zaman skalaları arasındaki Hausdorff uzaklığı hesaplayalım.

$$h(T, IR_+) = \max\{\, e(T\,, IR_+)\,, e(IR_+, T)\}$$

$$= \max\{0, \infty\}$$

$$= \infty$$

Hausdorff yakınsaklığı kompakt zaman skalaları için ana araçlardan bir tanesidir ve literatürde Ademec [1], Garay, Hilger, Kloeden [38], Kloeden [56, 57] tarafından kullanılmıştır.

Maalesef , X'in sınırlı olmayan kapalı alt kümeleri için Hausdorff uzaklığı sonlu olmayabilir. Örneğin herhangi bir $n \geq 1$ için $h([-n, n], IR) = +\infty$ 'dur. Gerçekten;

$$h([-n, n], IR) = \max\{\, e([-n, n], IR),\;\; e(IR, [-n, n])\}$$

$$e([-n, n], IR) = sup_{x\in[-n,n]}\, dist(x, IR)$$

$$= sup_{x\in[-n,n]} inf_{y\in IR}\, d(x, y)$$

$$= 0$$

$$e(IR, [-n, n]) = sup_{a\in IR} inf_{b\in[-n,n]}\, d(a, b)$$

$$= \infty$$

bulunur. O halde $h([-n, n], IR) = \max\{\, e([-n, n], IR),\;\; e(IR, [-n, n])\} = \infty$'dur.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi Hausdorff yakınsaklık çok kısıtlayıcıdır. Esty, Hilger [35] sınırlı olmayan zaman skalaları için Hausdorff yakınsaklığın uygun olmadığını göstermiştir. (bkz [35. Bölüm 3])

Uyarı 3.7. Yine de Hausdorff yakınsaklık ile elde edilen sonuçlar konusunda dikkatli olunmalıdır. Çünkü denk metrikler bile kapalı kümelerin farklı hiper-uzayları verebilir. Dolayısıyla Hausdorff yakınsaklık ile elde edilen sonuçlar kesinlikle ele alınan metriğe bağlıdır. Bu Oberste-Vorth [66] tarafından örneklendirilmiştir.

Örnek 3.8. $d(x,y) = \min\{\, 1, |x-y|\}$ metriğini ele alalım. $n \geq 0$ olmak üzere;

$$e([0,n], IR_+) = sup_{x\in[0,n]} inf_{y\in IR_+}\, d(x,y)$$

$$= sup_{x\in[0,n]} inf_{y\in IR_+} \min\{1, \ |x-y|\}$$

$$=0$$

$$e(IR_+, [0,n]) = sup_{a\in IR_+} inf_{b\in[0,n]}\, d(a,b)$$

$$= sup_{a\in IR_+} inf_{b\in[0,n]} \min\{1, \ |a-b|\}$$

$$=1$$

Dolayısıyla;

$$h([0,n], IR_+) = \max\{e([0,n], IR_+), e(IR_+, [0,n])\} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla $\{[0,n]\}_{n\in IN}$ Hausdorff topolojisine göre IR_+'ye yakınsamaz.

3.2 Duke, Hall, Oberste-Vorth Yaklaşımı

Diğer bir yakınsaklık çeşidi Duke, Hall ve Oberste-Vorth tarafından önerilmiştir. ([30, Tanım 22])

Tanım 3.9. ([30]) T bir zaman skalası olsun. Eğer;

1. $T_n \subset T$; $\quad \forall n \in IN$
2. $T_1 \subset T_2 \subset \cdots$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T$

koşulları sağlanıyorsa $\{T_n\}$ dizisi T 'ye yakınsar denir ve $T_n \nearrow T$ ile gösterilir.

Bu tarzda bir yakınsaklığın en doğru seçim olmadığı yazarlar tarafından bile kabul edilmiştir. Yukarıdaki tanım Kuratowski limitine benzer şekilde verilmiştir. Fakat doğru formda değildir. $T_{n=}[-n,n]$ için ($\cup_{n=1}^{\infty} T_n \neq IR$ olduğundan 3.şart sağlanmaz.) veya $T_n = [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ zaman skalası dizisi için $\cup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] = (0,1)$ olduğundan limit kapalı küme değildir, dolayısıyla zaman skalası değildir. Dolayısıyla bu yaklaşım Kuratowski limitin yanlış bir formudur. O halde ele alınan yakınsaklıklardan çıkarılabilir.

3.3 Vietoris Topoloji Yaklaşımı

Bir diğer yaklaşım Vietoris topolojidir.

Tanım 3.10. X bir topolojik uzay olsun. $U_1, \dots, U_k \subseteq X$ için;

$$O < U_1, \dots, U_k \geq \left\{F: F \in Cl(X), F \subseteq \cup_i^k U_i, F \cap U_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap U_k \neq \emptyset\right\}$$

ile tanımlansın. Burada iki özel durum şu şekilde tanımlanır.

$$U \subseteq X \text{ için } O < U >= \{F: F \in Cl(X), F \subseteq U\}$$

ve

$$O < U, X >= \{F: F \in Cl(X), F \cap U \neq \emptyset\}.$$

O halde;

$$O < U_1, \dots, U_k >= O < \cup_i^k U_i > \cap_{i=1}^k O < U_i, X >$$

eşitliği elde edilir. $Cl(X)$ kümesi üzerinde $O < U >$ ve $O < U, X >$ formundaki tüm kümelerin açık olduğu en küçük topolojiye Vietoris topoloji denir.

Vietoris topolojisine göre yakınsaklık Esty, Hilger [35] , Oberste-Vorth [66, 67] tarafından incelenmiş. Fakat aşağıda verilmiş olan uyarı sebebiyle çalışmalar Fell topolojisine kaydırılmıştır.

Uyarı 3.11. ([21]) Vietoris topoloji X kümesinin kapalı alt kümeleri ailesi üzerinde $\forall x \in X$ için $A \to dist(x, A)$ fonksiyonunun sürekli olduğu en zayıf topolojidir.

Uyarı 3.12. Kompakt uzaylar üzerinde (sınırlı zaman skalaları için) Vietoris topoloji ve Fell topoloji denktir.

Daha sonra da belirtileceği üzere Vietoris topoloji kompakt uzaylar için Kuratowski topolojiye de denk olur.

Yukarıdaki uyarılar neticesinde Vietoris topoloji yerine Fell topoloji ele alınabilir.

3.4 Fell Topoloji Yaklaşımı

Son olarak; Esty ve Hilger [35] tarafından Fell topoloji incelenmiştir. Verilen bir X topolojik uzayı için $Cl(X)$ üzerinde Fell topolojiyi ele alalım. Bu topoloji aşağıdaki iki kümeler ailesi tarafından doğrulur ve hit&miss topoloji olarak da adlandırılır.

$A^- = \{B \in 2^x : B \cap A \neq \emptyset\}$ (Hit topoloji)

ve

$A^+ = \{B \in 2^x : B \subset A\}$ (Miss topoloji)

Tanım 3.13. $W \subset X$ açık alt küme olmak üzere, W^- açık alt baz tarafından üretilen topolojiye 2^x üzerindeki alt Fell topoloji denir.

Tanım 3.14. $C \subset X$'in kompakt tümleyeni olmak üzere, C^+ açık alt bazı tarafından üretilen topolojiye 2^x üzerindeki üst Fell topoloji denir.

Tanım 3.15. X bir topolojik uzay ve A bir sıralı küme olsun. A'dan tanımlı her fonksiyona net denir. Kaba haliyle net bir dizinin genel halidir.

Netler iki farklı limite yakınsayabildiğinden Fell topolojisi, yerel kompakt uzaylar dışında yararlı değildir. Tüm zaman skalaları yerel kompakt olduğundan zaman skalası üzerinde Fell topoloji doğru seçim olabilir.

Ancak, yukarıda verilen tanım, kümelerin yakınsaklığı için kullanışlı değildir. Fakat Beer [21, Sonuç 5.1.7] ve Esty, Hilger [35, Teorem 5.3] aşağıdaki karakterizasyon ile Fell topolojiyi daha kullanışlı hale getirmişlerdir.

Aşağıdaki önerme Fell topolojideki yakınsaklığı kümelerin excess'i cinsinden hesaplamamızı sağlar.

Önerme 3.16. IR'nin kapalı alt kümelerinin dizisi A_n Fell topolojiye göre A kümesine yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall K \subset IR$ için;

$$\lim_{n\to\infty} e(K \cap A, A_n) = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} e(K \cap A_n, A) = 0$$

olmasıdır.

$A = IR$ durumunda 2.şart her zaman sağlanır.

[1, 30, 35, 58, 66, 67] tarafından ele alınan problemler için Fell topolojinin en uygun seçim olduğu önerilmiştir. Fakat biz Kuratowski yakınsaklığın daha doğru seçim olduğunu, bu prosedürü basitleştirerek ispatlayacağız.

Yakınsak zaman skalalarının bazı özellikleri ve bunlarla ilgili örnekler literatürde birçok yazar tarafından ele alınmıştır [1, 35, 66, 67].

3.5 Kuratowski Topoloji Yaklaşımı

Kuratowski-Painleve yaklaşımında yakınsaklığı bir yönde ele almak gerekli görülür. Bu tarz yakınsaklık çok değerli analizdeki, çok değerli fonksiyonların alt ve üst yarı-süreklilik özelliklerine bağlıdır. Çözüm kümeleri çok değerli fonksiyon oluşturduğundan bu doğal bir yaklaşım olarak görülebilir. Örneğin; Fang, Li ve Teo [36] varyasyonel eşitsizlikleri bu metotla işlemişlerdir. Zaman skalası kavramında atraktörlerin zaman skalasındaki Hausdorff uzaklığa göre yakınsadığına benzer fikir Kloeden [56, 57] tarafından ele alınmıştır.

Kuratowski yakınsaklığı kısaca özetleyelim;

Tanım 3.17. X bir küme, (A_n) ise X'in alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$Ls\ A_n = lim\ sup\ A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$Li\ A_n = lim\ inf\ A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n$$

kümelerine sırasıyla $(\boldsymbol{A_n})$ dizisinin üst limiti ve alt limiti denir.

Örnek 3.18. $\boldsymbol{A_n} = \{1,2,3, \dots, n\}$ kümesinin Kuratowski anlamında yakınsaklığını inceleyelim.

$$lim\ sup\ A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} \{1,2,3, \dots, n\}$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} \{\{1,2, \dots, m\} \cup \{1,2, \dots, m+1\} \cup \{1,2, \dots, m+2\} \cup \dots\}$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} IN$$

$$= IN$$

$$lim\ inf\ A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{n} A_n$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} \{1,2, \dots, n\}$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty} [\{1,2, \dots, m\} \cap \{1,2, \dots, m+1\} \cap \{1,2, \dots, m+2\} \cap \dots]$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty} \{1,2, \dots, m\}$$

$$= IN$$

$$lim\ sup\ A_n = lim\ inf\ A_n = IN$$

Örnek 3.19. $A_{\boldsymbol{n}} = \{n, n+1, \dots\}$ kümesinin Kuratowski anlamında yakınsaklığını inceleyelim.

$$lim\ sup\ A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} \{n, n+1, \dots\}$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} [\{m, m+1, \dots\} \cup \{m+1, m+2, \dots\} \cup \{m+2, m+3, \dots\} \cup \dots\}$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} \{m, m+1, \dots\}$$

$$= \{1,2,3, \dots\} \cap \{2,3,4, \dots\} \cap \dots$$
$$= \emptyset$$

$$lim\ inf\ A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty} [\{m, m+1, \dots\} \cap \{m+1, m+2, \dots\} \cap \{m+2, m+3, \dots\} \cap \dots$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty} \emptyset$$

$$= \emptyset$$

$$lim\ sup\ A_n = lim\ inf\ A_n = \emptyset$$

Tanım 3.20. Eğer $LiA_n = LsA_n = A$ olacak şekilde bir A kümesi varsa A_n dizisi A kümesine Kuratowski anlamında yakınsaktır denir ve $Lim\ A_n = A$ şeklinde yazılır.

Yukarıda X uzayı keyfi bir topolojik uzay olarak ele alınmıştır. Eğer X bir normlu uzay ise; L_sA_n ve L_iA_n için aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 3.21. X bir normlu uzay ve M_n X uzayında bir dizi olsun. (M_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti sırasıyla

$$LsM_n = lim\ sup\ M_n = inf_{m\geq 1} sup_{n\geq m} M_n = inf_m\ sup\{M_m, M_{m+1}, \dots\}$$

ve

$$LiM_n = lim\ sup\ M_n = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m} M_n = sup_m\ inf\{M_m, M_{m+1}, \dots\}$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.22. $M_n = (-1)^n$ olsun. LsM_nve LiM_n'ni yukarıdaki formüller yardımıyla hesaplayalım.

$$LsM_n = lim\ sup(-1)^n = inf_{m\geq 1} sup_{n\geq m}(-1)^n$$

$$= inf_m sup\{(-1)^m, (-1)^{m+1}, \dots\}$$

$$= inf_m sup\{-1,1\}$$

$$= inf\ 1$$

$$= 1$$

$$LiM_n = lim\ inf\ (-1)^n = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m}(-1)^n$$

$$= sup_m inf\{(-1)^m, (-1)^{m+1}, \dots\}$$

$$= sup_m inf\{-1,1\}$$

$$= sup(-1)$$

$$= -1$$

Örnek 3.23. $M_n = \frac{n}{n+1}$ olsun. LsM_nve LiM_n'ni yukarıdaki formüller yardımıyla hesaplayalım.

$$LsM_n = lim\ sup\frac{n}{n+1} = inf_{m\geq 1} sup_{n\geq m}\frac{n}{n+1}$$

$$= inf_m sup\{\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m+2}, \dots\}$$

$$= inf_m 1$$

$$= 1$$

$$LsM_n = lim\ inf \frac{n}{n+1} = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m} \frac{n}{n+1}$$

$$= sup_m inf\{\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m+2}, \ldots\}$$

$$= sup_m \frac{m}{m+1}$$

$$= sup\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$$

$$= 1$$

Örnek 3.24. $M_n = n$ olsun. LsM_nve LiM_n'ni yukarıdaki formüller yardımıyla hesaplayalım.

$$LsM_n = lim\ supn = inf_{m\geq 1} sup_{n\geq m} n$$

$$= inf_m sup\{m, m+1, m+2, \ldots\}$$

$$= inf_m \infty$$

$$= \infty$$

$$LiM_n = lim\ inf\ n = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m} n$$

$$= sup_m inf\{m, m+1, m+2, \ldots\}$$

$$= sup_m (m)$$

$$= \infty$$

Yukarıdaki ilk tanım keyfi topolojik uzaylar içindir. Literatürde çoğu makalede metrik uzaylar için yukarıdaki ikinci tanım Kuratowski yakınsaklık olarak ele alınmıştır.

Genel olarak Kuratowski yakınsaklık topolojik bir yakınsaklık değildir. (Mrowka Teoremi)

Teorem 3.25. Eğer X bir T_2 uzay ise Kuratowski yakınsaklık topolojik yakınsaklıktır [62].

Tanım 3.26. Bir X topolojik uzayı eğer sayılabilirliğin 2.aksiyomunu sağlıyorsa yani X'in X'e ait herhangi bir açık alt kümesi, $U = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ açık kümeler ailesinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, ikinci sayılabilirdir.

Tanım 3.27. X bir topolojik uzayı olsun. Eğer X' in her noktasının kompakt komşuluğu varsa X'e yerel kompakt denir.

Tanım 3.28. X üzerindeki topoloji τ bir metrik tarafından üretiliyorsa X'e metriklenebilir topolojik uzay denir.

$X = IR$ Hausdorff ve yerel kompakt uzay olduğundan bu türde yakınsaklık ile donatılmış bir topoloji vardır (cf [20] ve [61, sonuç 2.5].

Teorem 3.29. [21] X uzayının kapalı alt kümeleri ailesi üzerindeki Fell topolojisinin metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart X uzayının yerel kompakt ve ikinci sayılabilir olması gerekir.

Dolayısıyla zaman skalaları netleri yerine zaman skalaları dizileri ele almak yararlı olacaktır. Bu yaklaşım, bilinen bir yaklaşımdır [30, 35, 66].

Teorem 3.30. $Cl(IR)$ uzayında T_n dizisinin Fell topolojisine göre S'ye yakınsaması için gerek ve yeter şart her $K \subset IR$ kompakt kümesi için;

1) $\lim_{n\to\infty} e(K \cap S, T_n) = 0$

2) $\lim_{n\to\infty} e(K \cap T_n, S) = 0$

şartlarının sağlanmasıdır.

Aynı zamanda yukarıdaki teorem Esty ve Hilger'in [35] neden netler yerine dizileri kullandığını açıklar.

Teorem 3.30'un diziler yerine netleri kullanan versiyonu için Beer [21] tarafından verilmiştir.

Teorem 3.31. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset Cl(X)$ olsun ve (A_λ) $Cl(X)$ de bir net olsun. Bu durumda $A = \lim_{\tau_F} A_\lambda$ olması için gerek ve şart her X'in her kompakt K alt kümesi için;

$\lim_{\lambda} e_d(A \cap K,\ A_\lambda) = 0$ ve $\lim_{\lambda} e_d(A_\lambda \cap K, A) = 0$ olmasıdır.

Kuratowski yakınsaklık için dizilerin bazı özelliklerini verelim. Bu özellikler netler içinde tanımlanabilir ancak bizim problemimizde netler için olan sonuçlar gerekli değildir.

Zaman skalaları dizilerinde yaklaşım özellikleri için hem Fell topoloji hem de Kuratowski topoloji uygundur. Fakat Kuratowski topoloji daha kolay ve kullanışlı olduğundan bu tezde Kuratowski topolojiyi kullandık.

τ_F ile X üzerindeki Fell topoloji ve τ_K ile de X üzerindeki Kuratowski topolojiyi gösterelim.

Lemma 3.32. ([65]) Herhangi bir X topolojik uzayı için $\tau_F \subset \tau_K$ 'dir.

Bizim problemimiz için Fell ve Kuratowski topolojilerinin denkliği Beer [21] ve Lucchetti [61] tarafından verilmiştir.

Önerme 3.33. Herhangi bir X yerel kompakt topolojik uzayı için kapalı alt kümelerin dizisinin Fell topolojiye göre yakınsak olması için gerek ve yeter şart Kuratowski topolojiye göre yakınsak olmasıdır. Bu durumda limitler çakışıktır.

Aşağıda Beer [21, Prop. 5.2.5] tarafından verilmiş olan önermenin özel hali verilmiştir. Bu önerme Esty ve Hilger [35] sonuçları ile bizim elde ettiğimiz sonuçları karşılaştırmak için önem arz etmektedir. Bu önerme ayrıca Hilger'in bahsedilen sonuçlarındaki kompakt kümelerin önemini ortaya koyar.

Önerme 3.34. (A_n), X yerel kompakt metrik uzayının kapalı kümeler dizisi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

$[K_1]$: $A \subset LiA_n$ ve X'in (her kompakt K alt kümesi) için $Ls(K \cap A_n) \subset A$'dir.

$[K_2]$: A_n Fell topolojiye göre A kümesine yakınsar.

Uyarı 3.35. Kompakt kümeler için Fell topoloji ile Hausdorff topoloji denktir. [21, Sonuç 5.1.11]

Yukarıdaki uyarı diğer sonlu zaman skalaları için neden Hausdorff topolojinin kullanıldığını açıklar.

Adamec [1] , Garay, Hilger ve Kloeden [38] ve Kloeden [56] tarafından verilen sonuçlar Hausdorff topolojiye göre kapalı zaman skalaları için ispatlanmıştır.

Yukarıdaki uyarı gereği bahsedilen sonuçlar bizim problemimizin özel durumları olarak düşünülebilir.

Kuratowski yakınsaklığa dizisel denk topolojilerle ilgili sonuçlar Beer ve Lopez [18, 19] tarafından verilmiştir. Kapalı kümeler aileleri üzerindeki topolojiler ile ilgili genel bilgiler ise Beer [21] ve Lucetti Torre [61] tarafından sunulmuştur.

Bu noktada varlık problemi yani sabit bir zaman skalasına Kuratowski anlamında yakınsak bir zaman skalası dizisi olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Bunun için Beer'ın aşağıdaki sonucu kullanabiliriz.

Önerme 3.36. [21, Teorem 5.2.12] X ikinci sayılabilir Hausdorff uzayı ve A_n'de $Cl(X)$ içerisinde bir dizi olsun. Bu durumda A_n'ın Kuratowski anlamında yakınsak bir alt dizisi vardır.

Reel sayılar kümesi IR yukarıdaki önermenin koşullarını sağlar. Yani ikinci sayılabilir Hausdorf uzayıdır. Dolayısıyla zaman skalaları da kapalı olduğundan $T_n \subseteq Cl(IR)$ dizisinin Kuratowski anlamında yakınsak bir alt dizisi vardır. Özel durumlar için ele alınan problemi T_n üzerinde kolaylıkla çözebileceğimiz T_n zaman skalaları dizisi oluşturmalıyız. Bu tarzda sonuçlar orijinal problemin yakınsaklık çözümleri olacaktır.

Özel Durum:

Bu bölümde zaman skalalarının farklı türden yakınsaklıklarını karşılaştıralım. Karşılaştırmalarımızı $T_n = h_n.Z_+$ (Euler zaman skalası üzerinde yapalım.) $h_n \to 1$ durumunda $T_n \to Z_+$ (Fell topolojide) sonucu Hilger [35] tarafından ispatlanmıştır. Biz bu tezde çok daha ilginç olan gerçekten $h_n \to 0$ durumundan eğer $T_n = h_n Z \to IR$ yakınsaması gerçekleşirse diferansiyel problemleri fark denklemleri yerine dinamik denklemler yardımıyla diskretize edebiliriz.

Sezgisel olarak $h_n \to 0$ durumunda bu dizinin IR_+'ya gitmesi beklenir [30]. Burada farklı topolojiler için bu sonucu gösterelim ve ele alınan topolojiler için yakınsaklıkları karşılaştıralım. Yapacağımız bu karşılaştırma bu tezde neden Kuratowski topolojinin ele alındığını açıklayacaktır. Kolaylık için $h_n = \frac{1}{10^n}$ seçelim, böylelikle $T_n = \frac{1}{10^n}\,.Z_+$ olacaktır ve $T = IR_+ = [0, +\infty)$ olsun.

- **[H] Hausdorf Topoloji**
  $h(T_n, T) = +\infty$ olduğundan T_n dizisi Hausdorff topolojiye göre T'ye yakınsamaz.
- **[DHOV] Duke, Hall, Oberste-Vorth Topolojisi**

Duke, Hall, Oberste-Vorth tarafından verilen tanım (Tanım 3.9) ile ele alındığında yakınsaklık söz konusu değildir. T_n dizisi artan bir dizidir. (Fakat $h_n = \frac{1}{\pi^n}$ seçimi durumunda T_n artan olmayacaktır.) Ancak tanımın 3. koşulu sağlanmamaktadır. Yani;

$$\cup_{n=1}^{\infty} T_n = \cup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} Z_+ \neq IR_+\text{'dır.}$$

Bu tanım teorik olarak da bir hata içermektedir. Kapalı kümelerin sonsuz birleşimi kapalı olmak zorunda değildir. Dolayısıyla (3) koşulunun sağlanmasının garantisi yoktur.

- **[F] Fell topoloji**

Burada direk tanımı kullanmak yerine Önerme 3.16'yı kullanmak ispatı daha basitleştirecektir. Bu aynı zamanda bu tezin ana amaçlarından biri olan Kuratowski ve Fell topolojilerinin denklik şartlarını ortaya koymamızı sağlayacaktır. $K \subset IR_+$ olacak şekilde keyfi kompakt K kümesini ele alalım. Bu durumda

$$K \cap T = K \cap IR_+ = K$$

olacaktır. Excess tanımından;

$$e(K \cap T, T_n) = \frac{1}{10^n}$$

bulunur.

Bu durumda ilk koşul sağlanmış olur. Şimdi 2. koşulun sağlandığını gösterelim. Keyfi A, B kümeleri için;

"$e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$'dir. " gerçeğinden hareketle $K \cap T_n \subset T$ olduğundan herhangi bir n tam sayısı için $e(K \cap T_n, T) = 0$'dır. O halde Önerme 3.16 gereği

$$T_n = \frac{1}{10^n} . Z_+ \to IR_+$$

elde edilir.

Bu noktada Esty ve Hilger'in [35] ve bizim ana sonucumuzun avantajı ortaya koymak adına verilen dizinin Fell topolojiye göre yakınsaklığını direk tanım yardımıyla gösterelim. Bu tarzda sonuçlar, yani tanım yardımıyla verilen sonuçlar Esty ve Hilger [35] tarafından sunulmuştur.

$V = IR_+ \in V^+$ alalım. O halde herhangi bir $n \in IN$ için $T_n \subset IR^+ \subset V$'dir. Bu ise tüm T_n zaman skalalarının V^+'ya ait olduğuna, yani $T_n = \frac{1}{10^n} . Z_+$ zaman skalaları dizisinin üst Fell topolojiye göre IR_+'ya yakınsadığını gösterir.

Şimdi ise alt Fell topolojiye göre yakınsaklığı inceleyelim. k sonlu olmak üzere $U_1, U_2, \dots, U_k$ açık kümeleri için $IR_+ \in U_1^- \cap U_2^- \cap \dots \cap U_k^-$. Her $i = 1,2, \dots, k$ için $u_i \in U_i$ olacak şekilde keyfi u_i noktaları seçelim. U_i'ler açık olduğundan bu noktaları u_i merkezli, δ_i yarıçaplı açık yuvarlar U_i'lerin alt kümesi olacak şekilde

$\delta_i > 0$ sayıları seçerek ayırabiliriz. $\delta = min_{i=1,2,\dots,k}\delta_i$ seçelim. $\frac{1}{10^n}$ sıfıra yakınsak olduğundan $\forall n \in N$ için $\frac{1}{10^N} < \delta$ olacak şekilde $N \in IN$ sayısı vardır. O halde $\forall n > N$ ve keyfi $i = 1,2,\dots,k$ için $u_i + \frac{1}{10^n} \leq u_i + \delta \in U_i$'dır. Son olarak bu tarzdaki tüm n indisleri için;

$T_n = \frac{1}{10^n} Z_+ \in U_1^- \cap U_2^- \cap \dots \cap U_k^-$ ve (T_n) dizisinin IR_+'ya alt Fell topolojiye göre IR_+'ya yakınsaktır. O halde ispat biter.

- **$[K_1]$** Şimdi ise Kuratowski topolojiye göre yakınsaklığı gösterelim. Keyfi $x \in IR_+$ seçelim. int(x) ile x sayısını tamsayı kısmını gösterelim. O halde $int(x) \leq x \leq int(x) + 1$ ve böylece herhangi bir n tamsayısı için;

$$\frac{int(10^n x)}{10^n} \leq x \leq \frac{int(10^n x) + 1}{10^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

$int(10^n x)$, $int(10^n x) + 1 \in IN$ olduğundan;

$$\frac{int(10^n x)}{10^n} \ , \ \frac{int(10^n x)+1}{10^n} \in T_n$$

olacaktır. Açıkça görülebilir ki bu iki dizide x'e yakınsar. (x'in ondalık yaklaşımlarıdır.) O halde $x \in Lim\, T_n$ ve sonuç olarak $T = IR_+ = Lim\, T_n$'dir.

- **$[K_2]$** Kuratowski yakınsaklığı Lemma 3.16 yerine tanım yardımıyla göstermekte zor değildir.

$T_n = \frac{1}{10^n} . Z^+$ için $T_n \subset T_{n+1} \subset IR_+$'dır. İspatı basitleştirmek için artan dizilerin;

$$Lim\, T_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n}$$

özelliğini kullanalım. Burada limit Kuratowski anlamında limittir. Burada kapanış metrik topolojisine göre alındığından aynı zamanda dizisel kapanıştır. Bu durumda göstermemiz gereken son kümenin IR_+'ya eşit olmasıdır. Gerçekten keyfi $x \in IR_+$ aldığımızda, yukarıda oluşturulan dizi x'e yakınsar. O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$'nin dizisel kapanışı IR_+ eşittir.

3.6 Bazı Yakınsak Zaman Skalaları Dizileri

Bu bölümde Kuratowski yakınsaklık için birçok örnek sunulacaktır. İlk olarak bu tezin ana sonucunun motivasyonunu açıklayan ve ana örneğimizde kullanılan Lemmayı ifade edelim. Daha sonra daha genel bir sonuç ispatlayacağız.

Lemma 3.37. Sıfıra yakınsayan herhangi bir pozitif (h_n) dizisi için $T_n = h_n . Z_+$

formundaki zaman skalaları dizisi Fell (Kurotowski) topolojiye göre IR_+ yakınsar.

İspat: $n \to \infty$ için $h_n \to 0$ olacak şekildeki keyfi diziler ve yeterince büyük n sayısı için $\frac{1}{10^N} \leq h_n \leq \frac{1}{10^{N-1}}$ olacak şekilde $N \in IN$ sayısı vardır. Bu durumda yukarıda uyguladığımız ispatı tekrarlandığında ispat biter.

Bu noktada Kuratowski yakınsaklığın diğer tüm topolojilerdeki yakınsamalardan çok daha uygulanabilir olduğunu gösterelim. Bu amaçla zaman skalaları dizileri ele alalım. Bazıları Esty-Hilger [35] ispatlanmıştır. Bu ispatlar ile aşağıda vereceğimiz Kuratowski yakınsaklıklarının ispatları karşılaştırıldığında şu ana kadar en optimal seçenek olan Fell topolojisindeki yakınsaklığı bile Kuratowski yakınsaklıktan daha karmaşık olduğu görebilir.

Lemma 3.38. [35, Lemma 4.1] $T_n = [-n, n] \xrightarrow{(F)} IR$.

İspat: İlk olarak üst Fell topolojiye göre yakınsaklığı inceleyelim. $IR \in V^+$ olsun. Bu durumda $IR \subset V$'dir. O halde $V = IR$'dir ve böylece her $n \in IN$ için $T_n \subset V$ ve $T_n \in V^+$ elde edilir.

Şimdi ise alt Fell topolojiye göre yakınsaklığa bakalım. $IR \in U_1^- \cap U_2^- \cap ... \cap U_k^-$ olsun. Her $i = 1,2, ... , k$ için $x_i \in U_i$ seçelim. $N > \max\{|x_i|\}$ olsun. Bu durumda $n \geq IN$ ise $x_i \in [-n, n]$ ve böylece $T_n = U_i^-$ elde edilir. O halde alt Fell topolojiye göre de yakınsaklık mevcuttur.

Lemma 3.39. $T_n = [-n, n] \xrightarrow{(K)} IR$'dır.

İspat: Gerçekten bu artan bir kümeler dizisidir ve $Lim\, T_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k} = IR$'dir.

Lemma 3.40. [35, Lemma 4.3] $t \in [0,1]$ olmak üzere $f(t) = tZ = \{tz: z \in Z\}$ olsun. Bu durumda $t \to 1$ için $f(t) \to Z$'dır.

İspat: [35](Fell anlamında yakınsaklık)

Özel durum: $t = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ alınırsa $T_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) Z \to Z$. Aynı yakınsaklık Kuratowski yakınsaklık ile çok daha kolay elde edebiliriz .

Lemma 3.41. $T_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) Z \xrightarrow{(K)} Z$.

İspat: Açıkça görülebilir ki T_n artan bir dizi değildir. Ancak

$$LsT_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} T_n = \cap_{m=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) Z \cup \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) Z \cup \dots \right)$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{m-1}{m}\right) Z \cup \left(\frac{m}{m+1}\right) Z \cup \dots \right)$$

$$= \left(\emptyset \cup \frac{1}{2} Z \cup \frac{2}{3} Z \cup \frac{3}{4} Z \cup \dots \right) \cap \left(\frac{1}{2} Z \cup \frac{2}{3} Z \cup \frac{3}{4} Z \cup \dots \right) \cap$$

...

$$= Z$$

ve

$$LiT_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} T_n = \cup_{m=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{m}\right) Z \cap \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) Z \cap \dots \right)$$

$$= \cup_{m=1}^{\infty} \left(\left(\frac{m-1}{m}\right) Z \cap \left(\frac{m}{m+1}\right) Z \cap \dots \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} Z \cap \frac{2}{3} Z \cap \frac{3}{4} Z \cap \dots \right) \cup \left(\frac{2}{3} Z \cap \frac{3}{4} Z \cap \dots \right) \cup \dots$$
$$= Z$$

olduğundan $Lim\, T_n = Z$'dir.

Lemma 3.41. h_n keyfi artan bir dizi $f(h) = T_n = \cup_{z \in Z_+} [z, z + h_n]$ olsun.

1. $h_n \to 0$ ise $T_n \to Z$'dir.
2. $h_n \to 1$ ise $T_n \to IR$'dir.

Esty ve Hilger [35] yukarıdaki Lemmayı ispatsız olarak vermişlerdir. Bu Lemmadaki yakınsaklıklar Kuratowski anlamında aşağıdaki şekilde ispatlanabilir.

İspat: 1. Aşikardır.

2.(h_n), 1'e yakınsayan pozitif sayıların bir dizisi olsun.

$$T_n = \bigcup_{z \in Z_+} [z, z + h_n]$$

ele alalım. Bu durumda T_n artan bir kümeler dizisidir ve böylece;

$$Lim T_n = \overline{\cup_{k=1}^{\infty} T_k} = IR_+$$

olacaktır.

Kuratowski yakınsaklığın zaman skalalarındaki yakınsaklık için en uygun yakınsaklık olduğunu gerçekleyen bir diğer örnek de Cantor kümesidir. Cantor kümesi K'nın oluşturulmasını hatırlayalım. K'nın C_n zaman skalalarının Kuratowski limiti olduğunu gösterelim. K kümesi kapalı, kompakt, (mükemmel) ve sayılamazdır. Cantor kümesi K;

$$\mathrm{K} := \cap_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{C_k} = \mathrm{C_0} \backslash \cup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{R_n}$$

ile tanımlanır.

Burada $\mathrm{R_n}$ ve $\mathrm{C_n}$ yinelemeli olarak aşağıdaki gibi tanımlanır. Burada $\mathrm{R_1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ açık aralığı olsun.

$$\mathrm{C_1} := \mathrm{C_0} \backslash \mathrm{R_1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ile tanımlanır. Benzer şekilde bu işlemleri devam ettirerek;

$$\mathrm{R}_2 := \left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$$

açık kümesini C_1'den çıkararak;

$$\mathrm{C}_2 := \mathrm{C}_1 \backslash \mathrm{R}_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]$$

kümesi elde edilir.

Bu süreç devam ettirilerek $\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \ldots$ kümeleri bulunur. C_k kümesinin 2^k parçadan oluştuğu açıktır.

(C_n) dizisi azalan bir dizi olduğundan Kuratowski limit özellikleri gereği Lim $\mathrm{C}_\mathrm{k} = \cap_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{C}_\mathrm{k} =: \mathrm{K}$ elde edilir.

Sonuç olarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Lemma 3.42. Cantor kümesi yukarıdaki şekilde tanımlanan C_k zaman skalalarının Kuratowski limitidir.

4 ANA SONUÇLAR

3. bölümde ele aldığımız karşılaştırmaların sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz. Bu teorem zaman skalalarının yakınsaklığı için temel bir sonuçtur.

$\mathrm{T} = \mathrm{IR}$ durumu için fikir Esty ve Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Daha önce de sunmuş olduğumuz üzere Kuratowski yakınsaklık Esty-Hilger [35] tarafından önerilmiş olan Fell yakınsaklıktan çok daha kullanışlıdır. Yukarıda örnekler ile sunulan sonuçlar bu bölümde teori olarak verilecektir. Zaman skalalarının yakınsaklığını araştırabilmek için denk koşullar aşağıdaki şekilde formülize edilebilir.

Teorem 4.1. $\mathrm{T_n}$, T zaman skalalarının bir dizisi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

[F] (Fell): $\mathrm{T_n}$ Fell topolojiye göre T'ye yakınsar.

[E] (Excess): IR'nin herhangi bir kompakt kümesi K için;

$$lim_{n\to\infty}\, \mathrm{e}(\mathrm{K} \cap \mathrm{T_n}) = 0 \text{ ve } \quad lim_{n\to\infty}\, \mathrm{e}(\mathrm{K} \cap \mathrm{T}, \mathrm{T_n}) = 0\text{'dır.}$$

[K] (Kuratowski): $\mathrm{T_n}$ Kuratowski topolojiye göre T'ye yakınsar.

[D] (Uzaklık): Herhangi bir K kompakt kümesi için;

$$\{\mathrm{x} \;:\; \liminf_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{dist}(\mathrm{x}, \mathrm{K} \cap \mathrm{T_n}) = 0\} \subset \mathrm{T}$$

ve

$$\mathrm{T} \subset \{\mathrm{x} \;:\; \limsup_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{dist}\,(\mathrm{x}, \mathrm{T_n}) = 0\}\textit{'dır.}$$

İspat: (F)⇔(E) ispatı Esty ve Hilger tarafından verilmiştir [35, Teorem 4.6]

(F)⇔(K) denkliği 3. Bölümde verilmiştir. Burada T zaman skalasının yerel kompakt olduğu unutulmamalıdır.

(K)⇔ (D) denkliği ise Kuratowski yakınsaklık tanımı ve 3. Bölümde verdiğimiz şu denkliklerden

(A_n), X yerel kompakt metrik uzayının kapalı kümeler dizisi olsun.

$[K_1]$: $A \subset LiA_n$ ve X'in (her kompakt K alt kümesi) için $Ls(K \cap A_n) \subset A$'dir.

$[K_2]$: A_n Fell topolojiye göre A kümesine yakınsar.

elde edilir.

$\mathrm{T} = \mathrm{IR}$ olması durumunda yukarıdaki teoremin koşulları basitleştirilebilir. [9, Bölüm 5.2] Kompakt zaman skalalarında yakınsaklıkları ifade etmek için Hausdorff uzaklık kullanılır [1, 38, 56].

Teorem 4.1'de kompakt kümelerin rolünün önemini şu şekilde özetleyebiliriz. $\mathrm{T_n} = \{0, \mathrm{n}\}$ olsun. Bu durumda tüm limit ve yığılma noktalarının kümesi $\{0\}$'dır. O halde $\mathrm{T_n}$ zaman skalaları kümesi $\mathrm{T} = \{0\}$ kümesine Kuratowski anlamında yakınsar. Fakat $\mathrm{e}(\mathrm{T_n}, \mathrm{T}) = \mathrm{dist}(\mathrm{n}, \{0\}) = \mathrm{n}$ dır. Dolayısıyla 0'a yakınsamaz. Ancak herhangi bir K kompakt kümesi için $\mathrm{K} \subset [-\mathrm{N}, \mathrm{N}]$ olacağından her $\mathrm{n} > \mathrm{N}$ için $\mathrm{K} \cap \mathrm{T_n} = \{0\}$ olur. O halde $\mathrm{e}\big((\mathrm{K} \cap \mathrm{T_n}), \mathrm{T}\big) = \mathrm{dist}(0, \{0\}) = 0$ yani excess koşulu sağlanır.

Tanecik fonksiyonu ve ileri sıçrama fonksiyonlarının yakınsaklığı için bazı parametreler kullanabiliriz. Ancak bir sonraki örnekte ifade edileceği gibi bu noktada çok dikkatli olunmalıdır. Zaman skalalarının ve zaman skalasındaki noktaların özellikleri ile ilgili bazı şartlara dikkat çekelim. Esty ve Hilger [35] aşağıdaki parametreyi tanımlamışlardır.

Tanım 4.2. [35] $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{IR}$ olsun. Eğer $\inf \mathrm{T} \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b} \leq \sup \mathrm{T}$ ise

$$\overline{\mu_{\mathrm{a,b}}(\mathrm{T})} = \max\{\mu(\mathrm{t}) : [\mathrm{t}, \sigma(\mathrm{t})] \cap [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \neq \emptyset\}$$

ile tanımlanır.

Eğer $[\mathrm{t}, \sigma(\mathrm{t})] \cap [\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \emptyset$ ise $\overline{\mu_{\mathrm{a,b}}(\mathrm{T})} = \infty$ ile verilir.

Bu noktada hemen hemen düzgün yakınsaklık kavramını zaman skalasına adapte edelim. $\mathrm{K} \subset \mathrm{IR}$ kompakt kümesi için $\mathrm{T_K} = \mathrm{T} \cap \mathrm{K}$ kapalıdır ve dolayısıyla zaman skalasıdır. Bu zaman skalası üzerindeki tanecik fonksiyonunu μ^K ile gösterelim.

Tanım 4.3. T_n ve T zaman skalaları dizisi ve μ_n, μ sırasıyla T_n ve T üzerindeki tanecik fonksiyonları olsunlar. Eğer her kompakt K⊂ IR için μ_n^K μ^K'ya düzgün yakınsar ise yani $\sup_{t\in T_n \cap K}\mu_n^K$ yakınsak ise (μ_n) μ^K'ya hemen hemen düzgün yakınsar denir.

Yukarıdaki verdiğimiz tanım bazı problemli noktalar saf dışı bırakılarak ele alınmasını engeller.

Örnek 4.4. $T_n = \{-n, 0,2\}$ olsun. $a = -\frac{1}{2}$ ve $b = 1$ alalım. Bu durumda $\inf T_n \leq a \leq b \leq \sup T_n$ olduğu aşikardır. Bu durumda;

$$S_n := \{t \in T_n : [t, \sigma(t)] \cap [a, b] \neq \emptyset\} = \{-n, 0\}$$

bulunur. Bu ise $\sup_{t\in S_n} \mu(t) = n$ demektir.

T_n dizisinin Kuratowski(Fell) anlamında $T = \{0,2\}$ zaman skalasına yakınsadığı açıktır. Fakat $\sup_{t\in T}\mu(t) = 2$'dir. $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in S_n} \mu(t)$ limitinin $\sup_{t\in T}\mu(t)$ ile tahmin edilmesi uygun değildir. Burada problem *(-n)* dizisinin ıraksak olmasından kaynaklıdır.

Şimdi ise hemen hemen düzgün yakınsaklığı kontrol edelim. Herhangi bir *K* kompakt kümesi için $T_n \cap K = \{0,2\}$ olacak şekilde n ∈ IN vardır. Böylece $\mu_n^K(0) = 2 = \mu(0)$ ve $\mu_n^K(2) = 0 = \mu(2)$ elde edilir. Bu ise herhangi bir kompakt küme için (μ_n^K)'nın μ'ye düzgün yakınsaması demektir.

Örnek 4.5. $T_n = (-\infty, -\frac{1}{n}] \cup \{n\}$ zaman skalası dizisinin Fell topolojiye göre yakınsak olduğu Hilger [38] tarafından verilmiştir. Bu doğrudur fakat bu örnek T_n üzerindeki μ_n tanecik fonksiyonu ile kompakt *K* kümesi için μ_n^K tanecik fonksiyonunun farkını belirtmek adına da güzel bir örnektir.

$$\sup_{t\in T_n} \mu_n(t) = n + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

ıraksak olduğunu açıktır. Ancak bu dizi μ tanecik fonksiyonuna hemen hemen düzgün yakınsar. Gerçekten herhangi bir kompakt K kümesi için $T_n \cap K$ üzerinde;

$$\sigma\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$$

olduğundan $\mu_n^K(t) = 0 \quad \forall t \in T_n$ bulunur.

Yukarıda sunulan tanımlar yardımıyla yakınsaklık için yeter koşullar aşağıdaki teoremle özetlenebilir:

Teorem 4.6. $t \in T_n \cap T$ için;

(M) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(t) = \mu(t)$ ve yakınsak T üzerinde hemen hemen düzgün yakınsak,

(M_2) $a < t < b$ için $lim_{n\to\infty} \overline{\mu_{a,b}}\,(T_n) = \overline{\mu_{a,b}}(T)$,

(M_3) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(t) = \mu(t)$,

(S) $\forall t \neq \sup(T)$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(t) = \sigma(t)$ koşullarını ele alalım. Bu durumda;

$(M_2) \Rightarrow (M) \Rightarrow (S)$ ve $(M_2) \Rightarrow (M) \Rightarrow (M_3)$ dir.

Eğer $\forall n$ ve her kompakt $K \subset IR$ için $T_n \subset T$ ve $\sup_{t\in K\cap T_n} \mu_n^K(t) \to 0$ ise $(M) \Rightarrow (E)$.

İspat: Herhangi $K \subset IR$ kompakt kümesi için $K \subset [a,b]$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığı bulunur. Bu durumda;

$0 \leq \sup_{t\in K\cap T_n} \mu_n^K(t) \leq \sup_{t\in[a,b]} \mu_n(t) \leq \overline{\mu_{a,b}}(T_n)$.

(M_2) koşulu uygulandığında;

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in K\cap T_n} \mu_n^K(t) \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \mu_n(t) \leq \lim_{n\to\infty} \overline{\mu_{a,b}}(T_n) = \overline{\mu_{a,b}}(T)$$

$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \mu_n(t) \leq \max\{\mu(t): [t, \sigma(t)] \cap [a, b] \neq \emptyset\}$ olduğundan;

$\lim_{n\to\infty} \mu_n(t) = \mu(t)$ olur. Yani (M) elde edilir.

Tek noktadan oluşan kümeler kompakt olduğundan hemen hemen düzgün yakınsaklık tanımı gereği $\lim_{n\to\infty} \mu_n(t) = \mu(t)$ düzgün yakınsaktır. Yani (M_3) elde edilir. $(\mathrm{M}) \Rightarrow (\mathrm{S})$

$\mu_n(t) = \sigma_n(t) - t$ olduğundan (M) koşulu gereği

$\mu_n(t) \xrightarrow{\text{H.D.Y}} \mu(t) \Rightarrow \sigma_n(t) - t \xrightarrow{\text{H.D.Y}} \sigma(t) - t \Rightarrow \sigma_n(t) \xrightarrow{\text{H.D.Y}} \sigma(t) \Rightarrow (\mathrm{S}).$
$(\mathrm{M}) \Rightarrow (\mathrm{E})$

Her n için ve $K \subset I$ kompakt kümesi için $T_n \subset T$ ve $\sup_{t\in K\cap T_n} \mu_n^K(t) \to 0$ olduğunu kabul edelim.

$$K \cap T_n \subseteq T_n \subseteq T \Rightarrow e(K \cap T, T_n) = 0$$

Şimdi ise $\lim_{n\to\infty} e(K \cap T_n, T) = 0$ olduğunu gösterelim. $x \in K$ keyfi olsun.

$$L = \{t \in T_n : t \leq x\}$$

$$R = \{t \in T_n : x \leq t\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bu durumda *L* kümesinin en büyük elemanı veya *R* kümesinin en küçük elemanı mevcuttur.

$L \neq \emptyset$ *ve L*'nin maksimum elemanı τ olduğunu kabul edelim. $\Rightarrow \sigma_n(\tau) \in T_n$ olur ve

$\sigma_n(\tau) \geq x \Rightarrow \tau \leq x \leq \sigma_n(\tau)$.

$a = \sigma_n(\tau) - x$ ve $b = x - \tau$ olsun. $min(a, b) \leq \frac{a+b}{2}$ olduğundan

$$\min(a, b) \leq \frac{(\sigma(\tau) - x) + (x - \tau)}{2} = \frac{\sigma_n(\tau) - \tau}{2} = \frac{\mu_n(\tau)}{2}$$

elde edilir.

Eğer $\tau = \sup(T_n \cap K) \Rightarrow \tau = x\ \ ve\ \mu_n(\tau) = 0$ bulunur. Diğer durumda;

$\mu_n(\tau) \leq \sup_{t \in K \cap T_n} \mu_n^K(\tau)$: μ_n^K tanımlayalım. Bu durumda τ ve $\sigma_n(\tau)$ noktalarından en az biri $B\left(x, \frac{\sigma_n^K}{2}\right)$ açık yuvarının içindedir.

O halde $T_n \cap B\left(x, \frac{\sigma_n^K}{2}\right) \neq \emptyset$. *x, K'*nın keyfi bir elemanı olduğundan

$$e(K \cap T, T_n) \leq \frac{\sigma_n^K}{2}$$

$(M) \Rightarrow \sigma_n^K \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow e(K \cap T, T_n) = 0 \Rightarrow (E)$.

Örnek 4.7. $T = hZ_+ = \{0, h, 2h, \ldots\}$ zaman skalası üzerinde

$$x^\Delta = 2\sqrt{x(\sigma(t))}; \quad x(0) = 0$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Tamamen ayrık bir zaman skalası olduğundan çözümü iterasyon ile yapabiliriz.

$t = 0$için $\frac{x(h) - x(0)}{h} = 2\sqrt{x(h)} \quad \Longrightarrow x(h) = 0$ veya $x(h) = 4h^2$ bulunur. $x(h) = 0$ seçimi aşikar çözümü üretir. Dolayısıyla $x(h) = 4h^2$ alabiliriz.

$t = h$ için $\frac{x(2h) - x(h)}{h} = \frac{x(2h) - 4h^2}{h} = 2\sqrt{x(2h)}$ elde edilir. Buradan da

$x(2h) = 2h\sqrt{x(2h)} + (2h)^2$ elde edilir. $k = \sqrt{x(2h)}$ veya $k^2 = x(2h)$ dönüşümü ile $k^2 - 2hk - 4h^2 = 0$ kuadritik deklemi bulunur. Denklemin kökleri

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2h \pm 2h\sqrt{5}}{2} = h(1 \pm \sqrt{5})$$

Buradan *k* değeri pozitif olacağından

$$x(2h) = \left[h\left(1 + \sqrt{5}\right)\right]^2$$

olarak bulunur. Bunu genellersek

$$x(\sigma(t)) = h + \sqrt{h^2 + x(t)}$$

elde edilir. $t = kh$ olduğundan

$$x_{k+1} = h + \sqrt{h^2 + x_k}$$

fark denklemi elde edilmiş olur.

Örnek 4.8. $T = hZ_+ = \{0, h, 2h, \ldots\}$ zaman skalası üzerinde

$$x^\Delta = 3\sqrt[3]{X^2(t)}\ ;\ x(0) = 0$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Tamamen ayrık bir zaman skalası olduğundan çözümü iterasyon ile yapabiliriz.

$\mathrm{t} = 0$ için $\frac{x(\mathrm{h}) - x(0)}{\mathrm{h}} = 3\sqrt[3]{[x(h)]^2}\ ;\ \ x(\mathrm{h}) = 3h\sqrt[3]{[x(h)]^2}$

$(x(h))^3 - 27h^3\left(x(h)\right)^2 = 0 \implies x(h) = 0$ veya $x(h) = 27h^3$ bulunur. $x(h) = 0$ alınır, tekrar yerine yazılırsa aşikar çözüm üretilir. Bu nedenle $x(h) = 27h^3$ alalım.

$t = h$ için $\frac{x(2h) - x(h)}{h} = \frac{x(2h) - 27\mathrm{h}^3}{h} = 3\sqrt[3]{[x(2h)]^2}$ elde edilir. Buradan da

$x(2h) - (3\mathrm{h})^3 = 3h\sqrt[3]{[x(2h)]^2}$ elde edilir. $k = \sqrt[3]{[x(2h)]}$, $k^3 = x(2h)$ veya $k^2 = \sqrt[3]{[x(2h)]^2}$ dönüşümü ile $k^3 - 3hk - (3h)^3 = 0$ deklemi bulunur. Denklemin kökleri;

$$x(2h) = \frac{\sqrt[3]{3\sqrt{93}h^3 + 29h^3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}h^3}{\sqrt[3]{3\sqrt{93}h^3 + 29h^3}} + h$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3^2(3^4+12)h^6} + (27+2)h^3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}h^3}{\sqrt[3]{\sqrt{3^2(3^4+12)h^6} + (27+2)h^3}} + h$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{3^6h^6+3^2 12h^6}+27h^3+2h^3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}h^3}{\sqrt[3]{\sqrt{3^6h^6+3^2 12h^6}+27h^3+2h^3}} + h$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{(27h^3)^2+27h^3 4h^3}+27h^3+2h^3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}h^3}{\sqrt[3]{\sqrt{(27h^3)^2+27h^3 4h^3}+27h^3+2h^3}} + h$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{(X(h))^2+X(h)4h^3}+X(h)+2h^3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}h^3}{\sqrt[3]{\sqrt{(X(h))^2+X(h)4h^3}+X(h)+2h^3}} + h$$

Bu şekilde devam edilirse $x(t) = x_k$ olmak üzere;

$$x_{k+1} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x_k^2 + 4x_k h^3} + x_k + 2h^3}}{\sqrt[3]{2}} + \frac{\sqrt[3]{2}h^3}{\sqrt[3]{\sqrt{x_k^2 + 4x_k h^3} + x_k + 2h^3}} + h$$

fark denklemi elde edilir.

REFERANSLAR

[1] **L. Adamec**, *A note continuous dependence of solutions of dynamic equations on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications, **17** (2011), 647-656.

[2] **R. Agarwal, M. Bohner, and A. Peterson**, *Inequalities on time scales: A survey*, Mathematical Inequalities and Application, **4** (2001), 535-557.

[3] **R. Agarwal and M. Bohner**, *Basic calculus on time scales and some of its applications*, Results Math, **35** (1-2) (1999), 3-22.

[4] **R. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan, and A. Peterson**, *Dynamic equations on time scales: A survey*, J. Comput. Appl. Math. 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R.P Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[5] **R.P. Agarwal and D. O'Regan**, *Nonlinear boundary value problems on time scales*, Nonlinear Anal, **44** (2001), 527-535.

[6] **R.P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan**, *Time scale systems on infinite intervals*, Nonlinear Anal, 2001. To appear.

[7] **C. Ahlbrandt and C. Morian**, *Partial differential equations on time scales*, J. Conput. Appl. Math. 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R.P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[8] **C. Ahlbrandt, M. Bohner, and J. Ridenhour,** *Hamitonian systems on time scales*, J. Math. Anal. Appl, **250**: 561-578, 2000.

[9] **E. Akın**, *Boundary value problems for a differential equation on a measure chain*, Panamer. Math. J, **10** (3):17:30, 2000.

[10**] E. Akın, L. Erbe, B. Kaymakçalan, and A. Peterson**, *Oscillation results for a dynmic equation on a time scale*, J. Differ. Equations Appl, 2001. To appear.

[11] **D. Anderson**, *Eingen value intervals for a two-point boundary value problem on a measure chain*, J. Comput. Appl. Math, 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[12] **D. Anderson**, *Positivity of Green's function for an n-point right focal boundary value problem on measure chains*, Math. Comput. Modelling, **31** (6-7):29-50, 2000.

[13] **F. M. Atıcı and G. Sh. Guesinov**, *On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales*, J. Comput. Appl. Math, **141** (2001), 75-99.

.

[14] **F.M. Atıcı Biles D C., Lebedinsky A.,** *An application of time scales to economics,* Math. Cocnput. Modelling **43** (2006), 718-726.

[15] **F. M. Atıcı, G. Sh. Guseinov, and B. Kaymakçalan**, *On Lyapunov inequality in stability theory for Hill's equation on time scales*, J. Inequal. Appl., **5** (2000), 603-620.

[16] **A.Aulbach and S. Hilger**, *Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale*, In Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems Akademie Verlang, Berlin, (1990).

[17] **Z.Bartosiewicz Z, E. Pawhuszewica**, *Lineer control systems on time scales: unification of continious and discrete*, Proc. Of 10th IEEE Inst.Conference MMAR,2004.

[18] **G. Beer, J. Rodriguez-Lopez**, *Topologies sequentially equivalent to Kuratowski Painleve convergence*, in: Applied Topology: Recent pogress for Computer Science, Fuzzy Mathematics and Economics, 2010, pp. 7-13.

[19] **G. Beer, J. Rodriguez-Lopez**, *Topologies associated with Kuratowki-Painleve convergence of closed sets*, J. Couvex Anal 17 (2010), 805-826.

[20] **G. Beer**, *On convergence of closed sets in a metric space and distance functions*, Bull. Austral. Math. Soc **31** (1985), 421-432.

[21] **G. Beer,** *Topologies on Closed Conver Sets*, Mathematics and Its Applications Vol. 268, Springer, 1993**.**

[22] **M. Bohner and A. Peterson**, *Laplace transform and Z-transform: Unification and extension*, 2001. Submitted.

[23] **M. Bohner**, *Calculus of variations on time scales*, Dynamic Systems and Applications **13** (2004), 339-349.

[24] **M. Bohner, A. Peterson**, *Dynamic Equations on Time Scales*, An Introduction with Applications, Birkauser-Boston, 2001.

[25] **Bohner, M. and Peterson, A.,** *Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications,* Birkauser, 2001.

[26] **Bohner, M. and Peterson, A.,** *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkauser, Boston, 2003.

[27] **M. Bohner and B. Kaymakçalan**, *Opial inequalities on time scales*, Ann. Polon. Math., 2001. To appear.

[28] **M.Cichon**, *A note on Peano theorem on time scales,* Applied Matmematics Letters **23** (2010), 1310-1313.

[29] **M. Cichon, A. Peterson,** *Dynamic Equations on Time Scales*, An Introduction With Applications, Birkausser, Boston, 2001.

[30] **E. Duke, K. Hall and R. Oberste-Vorth**, *Changing time scales I: The continuous case as a limit*, Proceedings of the Sixth WSEAS International Conferance on Applied Mathematics, WSEAS, Athens, 2004.

[31] **O. Dosly and R. Hilscher,** *Disconjugacy, transformations and quadractic functionals for symplectic dynamic systems on time scales*, J. Differ. Equations Appl., 2001. To appear.

[32] **O. Dosly and S. Hilger**, *A necessary and sufficent condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales*, J. Comput. Appl. Math., 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[33] **P. Eloe**, *The method of quasilinearization and dynamic equations on compact measure chains*, J. Comput. Appl. Math., 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal. M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[34] **L. Erbe, R. Mathsen and A. Peterson**, *Existence, multiplicity, and nonexistence of positive solutions to a differential equation on a measure chain*, J. Comput. Appl. Math., **113** (12):365,2000.

[35] **N. Esty, S. Hilger,** *Convergence of time scales under the Fell topology*, Journal of Difference Equations and Applications **15** (2009), 1011-1020

[36] **Z.M. Fang, S.J. Li, and K.L. Teo**, *Painleve-Kuratowski convergences for the solution sets of set-valuedd weak vector variational inequalities*, Journal of Inequalities and Applications 2008.1 (2008), Article ID 435719.

[37] **B.M. Garay, J. Vardai**, *Interpolation in dynamic equations on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications **13** (2007), 847-854.

[38] **B.M. Garay, S. Hilger and P.E. Kloeden,** *Continuous dependence in time scale dynamics*, in: **B. Aulbach, S. Elaydi, and G. Ladas** (Eds.) *New Progress in Difference Equations*, London, Taylor and Francis, 2003, pp. 279-288.

[39] **G. Guseinov, M. Bohner,** *Multiple Intepration on tine scales*, Dynamic Systems and Applications, **13** (2004), 351-379.

[40] **B. Jackson**, *Partial dynamic equations on time scales*, J. Comput Appl. Math. **186** (2006), 391-415.

[41] **B.M. Garay, S. Hilger, P.E. Kloeden**, *Continuous dependence in time scale dynamics*, in: **B. Aulbach, S. Elaydi and G. Ladas** (Eds.) *New Progress in Difference Equations*, London, Taylor and Francis, 2003, pp. 279288.

[42] **Sh. Guseinov and B. Kaymakçalan**, *On a disconjugacy criterion for second order dynamic equations on time scales*, J. Comput. Appl. Math., 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[43] **K. Hall, R. Oberste-Vorth**, *Totally discrete and Eulerian time scales*, Difference Equations, Special Functions and Orthogounal Polynoınials (2007), 462-470.

[44] **S. Hilger**, *Analysis on measure chains.-a unifed approach to continuous and discrete calculus*, Results Math., **18** (1990), 18-56.

[45] **S. Hilger**, *Differential and difference calculus – unifed!*, Nonlinear Anal., **30** (1997), 2683-2694.

[46] **S. Hilger**, *Ein Mabkettenkalkül mit Anvendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. PhD thesis*, Universitat Würzburg, 1988.

[47] **S. Hilger,** *Generalized theorem of Hartman-Grobman on measure chains*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **60** (1996), 157-191.

[48] **S. Hilger,** *Special functions, Laplace and Fourier transform on measure chains*, Dyam. Systems Appl., **8** (1999), 471-488.

[49] **R. Hilscher**, *A time scales version of a Wirtinger type inequality and applications*, J. Comput. Appl. Math., 2001. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal. M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

[50] **R. Hilscher,** *Inhomogeneous quadratic functionals on time scales*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 473-481.

[51] **J. Jankowski,** *The Existence and Uniqueness of Solutions of Differential Equations with Advanced Argument*, Ph.D. Thesis, Gdansk, 2010, (in Polish).

[52] **B. Kaymakçalan**, *Eistence and comparison results for dynamic systems on a time scale*, Jour. Math. Anal. Appl. **172** (1993), 243-255.

[53] **B. Kaymakçalan,** *Existence and comparison results for dynamic systems on time scales*, J. Math. Anal. Appl, **172** (1993), 243-255.

[54] **B. Kaymakçalan, S. A. Özgün and A. Zafer,** *Gronwall and Bihari type inequalities on time scales*, In Conference Proceeding of the Second International Conference on Difference Equations (Veszprem, 1995), pp. 481-490, Amsterdam, 1997. Gordon and Breach.

[55] **B. Kaymakçalan, V. Lakshmikantham and S. Sivasundaram**, *Dynamical Systems on Measure Chains*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[56] **P.E. Kloden,** *A Gronwall-like inequality and continuous dependence on time scales*, in: R.P. Agarwal and D. O'Regan (Eds.) Nonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on his 80th Birthday, Kluver, 2004, pp. 645-660.

[57] **P.E Kloeden,** *Upper semicontinuous dependence of pulback attractors on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications **12** (2006), 357-368.

[58] **T.Kulik, Ch.C. Tisdell,** *Volterra integral equations on time scales: Basic qualitative and quandtitative results with applications to initial value problems on unbounded domains*, Int. Jour. Difference Equ. **3** (2008), 103-133.

[59] **K. Kuratowski**, *Topology. Vol. I., Academic Prss*, 1966.

[60] **B. Lawrence, R. Oberste-Vorth,** *Sluotions of dynamic equations with varying time scales*, in: Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials (2007), 452-461.

[61] **R. Lucchetti, A. Torre,** *Classical set convergences and topologies*, Set-Valued Analysis **2** (1994), 219-240.

[62] **Mrowka,** *Comments on the space of subsets*, Lecture notes in Mathematics, **171** (1970), 59-63.

[63] **J.D. Murray,** *Mathematical Biology. Vol. 2*, Springer, 2002.

[64] **M. Morelli and A. Peterson,** *Third-order differential equation on a time scale*, Math. Comput. Modelling, **32** (2000), 565-570.

[65] **T. Nogura, D. Shakhmatov**, *When does the Fell topology on a hyperspace of closed sets coincide with the meet of the upper Kuratowski and the lower Vietoris topologies?*, Topology and its Applications **70** (1996), 213-243.

[66] **R. Oberste-Vorth,** *The Fell topology for dynamic equations on time scales*, Nonlinear Dynamics and Systems Theory **9** (2009), 407-414.

[67] **R. Oberste-Vorth,** *The Fell topology on the space of time scales for dynamic equations*, Adv. Dyn. Syst. Appl **3** (2008), 177-184.

[68] **A. Yantır, D. Soyoğlu**, *Weak Solutions of on Hyperbolictype partial differential equations in Banach spaces,* Hacettepe J. Mathematics and Statistics, **44** (2015), 153-163.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında İzmir'de dünyaya geldim. Misak-ı Milli Ali Şefik İlkokulunda ilk öğrenimimi tamamladıktan sonra, lise eğitimimi Akhisar Anadolu Lisesinde tamamladım. Uşak Üniversitesinden 2011 yılında mezun olduktan sonra 2012 yılında pedogojik formasyon eğitimimimi tamamladım. 2014 yılında Matematik öğretmeni olarak Milli Eğitim Bakanlığında göreve başladım. Şu anda Siirt Şirvan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.