YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

INCLINE CEBİRLERİNDE TÜREVLER

Halit TAŞ

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2015

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr.Esra Dalan YILDIRIM

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof.Dr.Alev FIRAT

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü Müdürü

ÖZET

INCLINE CEBİRLERİNDE TÜREVLER

TAŞ, Halit

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Haziran 2015, 23 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış ve ikinci bölümde tezi anlamada kolaylık sağlayacak olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. Ayrıca incline cebirlerinde türev çeşitlerinin tanımları verilerek günümüze kadar bu konularda yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde incline cebirlerinde bugüne kadar yapılmış olan türev, *f*-türev, simetrik ikili türev, genelleştirilmiş türev konularıyla ilgili çalışmaların özeti verilmiştir. Dördüncü bölümde simetrik ikili türev tanımından esinlenerek incline cebirlerinde simetrik ikili *f*-türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri incline ve integral incline cebirlerinde incelenmiştir. Beşinci bölümde incline cebirlerinde genelleştirilmiş *f*-türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri incline ve integral incline cebirlerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: (alt)incline, integral incline, ideal, türev, *f*-türev, simetrik ikili *f*-türev, genelleştirilmiş *f*-türev.

ABSTRACT

ON DERIVATIONS OF INCLINE ALGEBRAS

TAŞ, Halit

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asist.Prof.Dr. Şule AYAR ÖZBAL

June 2015, 23 pages

This thesis consist of exactly five parts. In the first part subject of the thesis is introduced and i-the second part some basic definitions and properties are mentioned to make it easy to understand the thesis. Besides, a brief summary of the studies for those subject is given with some definitions of derivations on incline algebras. In the third part, the studies up to day for derivations, f-derivations, symmetric bi derivations and generalized derivations are mentioned. In the fourth part the definitions of symmetric f-bi-derivation on incline algebra is given on considering the definition of symmetric f-bi-derivation and related properties are studied on an incline and integral incline algebra. In the fifth part the notion of generalized f-derivation on an inçline algebra is given and related properties are researched on an incline and integral incline algebras.

Keywords: (sub)incline, integral incline, ideal, derivation, *f* derivation, symmetric bi-derivations, generalized *f* derivation.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, konuyla ilgili gerekli kaynakları sağlayan, çalışmalarım boyunca ufkumu genişleterek sürekli gelişmemi sağlayan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL' a ve yine çalışmalarım boyunca sabırla beni destekleyen eşim Cennet TAŞ'a ve biricik oğlumuz Ömer Mustafa TAŞ' a teşekkür ederim.

Halit TAŞ
İzmir, 2015

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Incline Cebirlerinde Türevler” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Halit TAŞ

15.06.2015

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Incline cebirleri Boole ve fuzzy cebirlerinin bir genellemesi, yarı halkaların ise özel bir çeşididir. Incline cebiri tanımı ilk olarak Z. Q. Cao, K. H. Kim ve F. W. Rush (Cao, Z. Q., 1984) yaptıkları çalışmalarında vermiştir. Incline cebiri ve uygulamaları Ahn, S. S., Jun, Y. B., Kim, H.S., Han, S. C. gibi pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Incline cebirlerinde türev tanımı ilk olarak N.O. Alsehri tarafından (N.O. Alshehri, 2010) verilmiştir. N.O. Alsehri bu çalışmasında incline ve integral incline cebirlerinde türev üzerine çalışmış ve integral incline cebirinin sıfırdan farklı bir türevi varsa o zaman bu türevin integral incline cebirinin sıfırdan farklı herhangi bir idealinde de sıfırdan farklı olduğunu ispatlamıştır.

Bu tezde, önce geçmişte tanımlanan incline cebirleri, incline cebirlerinde türev, f-türev, simetrik ikili türev, genelleştirilmiş türevler üzerine bilgiler verilmiştir. Sonra incline cebirlerindeki simetrik ikili türev ve genelleştirilmiş türev için yapılan çalışmalardaki açıkların kapatılması amaçlanmıştır.

2.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile yapılacak kanıtlarda çok sık kullanılacak olan incline cebirlerinin bazı özellikleri başvuru kolaylığı sağlamak amacıyla alındıkları kaynaklarla birlikte verilmiştir.

2.1 Incline Cebirlerinde Temel Tanımlar

Tanım 2.1 R, üzerinde $+$ ve $*$ ikili işlem tanımlanan boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y, z \in R$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında $(R, +, *)$ üçlüsüne bir **incline cebiri** denir.

(R1) $x + y = y + x$,

(R2) $x + (y + z) = (x + y) + (x + z)$

(R3) $x * (y * z) = (x * y) * z$,

(R4) $x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$, (R5) $(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$,

(R6) $x + x = x$,

(R7) $x + (x * y) = x$,

(R8) $y + (x * y) = y$.(CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Tanım 2.2 Bir R incline cebirinde her $x, y \in R$ için $x * y = y * x$ oluyorsa R ye **değişmeli incline cebiri** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Kolaylık sağlamak adına $+$ toplama ve $*$ çarpma olarak adlandırılır. Her dağılmalı kafes bir incline cebiridir. Bir incline cebirinin dağılmalı kafes olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in R$ için $x * x = x$ olmasıdır.(VUKMAN, J.,1989)

Tanım 2.3 R incline cebirinin boştan farklı bir M alt kümesi toplama ve çarpma işlemine göre kapalı olduğunda M ye R incline cebirinin bir **alt incline cebiri** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Tanım 2.4 R incline cebirinin bir alt incline cebiri M, $x \in M$ ve $y \leq x$ ise $y \in M$ koşulunu sağladığında M ye R incline cebirinin bir **ideali** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Tanım 2.5 R incline cebirinde herhangi bir $x \in R$ için $x + 0 = x = 0 + x$ ve $x * 0 = 0 * x = 0$ olduğunda 0 a R incline cebirinin bir **sıfır elemanı** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Tanım 2.6 R incline cebirinde herhangi bir $x \in R$ için $x * 1 = x = 1 * x$ olduğunda 1 ($\neq$ sıfır eleman) e R incline cebirinin bir **çarpımsal birim elemanı** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Tanım 2.7 R incline cebirinde sıfırdan farklı bir a elemanı için $a * b= 0$ ($b*a$=0) olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ elamanı varsa a ya bir **sol sıfır bölen (sağ sıfır bölen)** denir. R incline cebirinin hem sol sıfır bölen hem de sağ sıfır bölen elemanına bir **sıfır bölen** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Tanım 2.8 Çarpımsal birim eleman 1 ve sıfır eleman 0 a sahip bir R incline cebirine sıfır bölensiz olduğunda **integral (tam) incline** denir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

Önerme 2.1 R bir incline cebiri olsun. Her $x, y \in R$ için $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul $x+y=y$ olmasıdır. $\leq$, R üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır ve her $x,y \in R$ için $x+y$, $\{x, y\}$ nin en küçük üst sınırıdır. $\leq$, $+$ işlemi ile üretilmiştir. Bu durumda

(1) Her $x, y \in R$ için $x * y \leq y$ ve $y * x \leq x$ dir,

(2) Her $x, y, z \in R$ için $y \leq z$ ise $x * y \leq x * z$ ve $y * x \leq z * x$ dir,

(3) $x \leq y$, $a \leq b$ ise $x + a \leq y + b$, $x * a \leq y * b$ dir. (CAO, Z. Q. , KIM, K. H. ve ROUSH, F. W.,1984)

3. INCLINE CEBİRLERİNDE TÜREV, *f*-TÜREV, SİMETRİK İKİLİ TÜREV VE GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV

Bu bölümde incline cebirlerinde türevle ilgili bugüne kadar yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiş ve ilgili özellikleri integral incline cebiri ve incline cebirlerinde incelenmiştir. Ayrıca incline cebirlerinde türevin bazı özellikleri incline cebirinin idealine genişletilmiştir.

3.1 Incline Cebirlerinde Türevler

Tanım 3.1.1 R bir incline cebiri ve $d : R \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in R$ için

$$d(x * y) = (d(x) * y) + (x * d(y))$$

koşulu sağlandığında d ye bir **türev** denir. (N.O. Alshehri, 2010)

Önerme 3.1.1 R bir incline cebiri ve d, R nin bir türevi olsun. O zaman her $x, y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $d(x * y) \leq d(x) + d(y)$,

(ii) $x \leq y$ ise $d(x * y) \leq y$ dir,

(iii) R dağılmalı bir kafes ise $d(x) \leq x$ dir. (N.O. Alshehri, 2010)

Önerme 3.1.2 R **,** sıfır elemanlı bir incline cebiri ve d, R nin bir türevi olsun. O zaman $d(0) = 0$ dır. (N.O. Alshehri, 2010)

Önerme 3.1.3 R**,** çarpımsal birimli bir incline cebiri ve d , R nin bir türevi olsun. O zaman her her $x \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $x * d(1) \leq d(x)$,

(ii) $d(1) = 1$ ise $x \leq d(x)$ dir,

(iii) R dağılmalı bir kafes ise $d(1) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul d nin birim türev olmasıdır. (N.O. Alshehri, 2010)

Önerme 3.1.4 d, integral incline cebiri R nin bir türevi ve $a \in R$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

(i) Her $x \in R$ için $a * d(x) = 0$ ise $a = 0$ veya d sıfırdır.

(ii) Her $x \in R$ için $d(x) * a = 0$ ise $a = 0$ veya d sıfırdır. (N.O. Alshehri, 2010)

Tanım 3.1.2 d, R incline cebrinin bir türevi olsun. Her $x, y \in R$ için $x \leq y$ ise $d(x) \leq d(y)$ olduğunda d ye **sıra koruyan türev** denir. (N.O. Alshehri, 2010)

Önerme 3.1.5 R bir incline cebri ve d, R nin bir türevi olsun. Her $x,y \in R$ için $d(x+y)=d(x)+d(y)$ ise aşağıdakiler her $x,y \in R$ için sağlanır:

(i) $d(x * y) \leq d(x)$,

(ii) $d(x * y) \leq d(y)$,

(iii) d bir sıra koruyan türevdir. (N.O. Alshehri, 2010)

Önerme 3.1.6 R bir incline cebri ve d, R nin bir türevi olsun. $d^{-1}(0)$, $\{x \in R \mid d(x)=0\}$ şeklinde gösterilsin. Her $x,y \in R$ için $d(x+y) = d(x)+d(y)$ ise $d^{-1}(0)$, R nin bir idealidir. (N.O. Alshehri, 2010)

Teorem 3.1.1 d, R incline cebrinin bir türevi olsun. Her $x \in R$ için $d^2(x) = d(d(x))$ olarak tanımlansın. $d^2 = 0$ ise d sıfırdır. (N.O. Alshehri, 2010)

Teorem 3.1.2 R bir incline cebri ve d_1, d_2 R nin türevleri olsun. Her $x \in R$ için $(d_1 d_2)(x) = d_1(d_2(x))$ olarak tanımlansın. $d_1 d_2 = 0$ ise $d_2 d_1$, R nin bir türevidir. (N.O. Alshehri, 2010)

Teorem 3.1.3 M **,** R incline cebrinin sıfırdan farklı bir ideali olsun. d , R nin sıfırdan farklı bir türevi ise d, M üzerinde sıfırdan farklıdır. (N.O. Alshehri,2010)

3.2 Incline Cebirlerinde Türevlere Ait Bazı Özellikler

Teorem 3.2.1 d sıfırdan farklı bir türev ve $M \neq 0$ olmak üzere R integral incline cebrinin bir ideali olsun. O zaman $d^2(M) \neq 0$ dır. (Özbal, Ş. A.,2011).

Teorem 3.2.2 d , R integral incline cebrinin sıfırdan farklı bir türevi olsun. M , R nin sıfırdan farklı bir ideali olduğunda $a * d(M) = 0$ olacak şekilde $a \in R$ varsa o zaman $a = 0$ dır. (Özbal, Ş. A.,2011).

3.3.Incline Cebirlerinde *f*-Türevler

Tanım 3.3.1 R bir incline cebri olsun. Her $x, y \in R$ için

$d(x * y) = (d(x) * f(y)) + (f(x) * d(y))$ olacak şekilde bir $f : R \to R$ fonksiyonu varsa $d : R \to R$ fonksiyonuna R üzerinde bir ***f*-türev** denir.(Özbal ve Fırat 2011-a).

Örnek 3.3.1 $R = \{0,a,b,c,d,1\}$ bir incline cebri olsun ve $+$, $*$ işlemleri R üzerinde aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın. O zaman (R, $+$, $*$) üçlüsü bir incline cebiridir ama dağılmalı bir kafes değildir. (A.R, Meebakshi, 2010).

$+$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	1	1	1	1
b	b	1	b	1	b	1
c	c	1	1	c	1	1
d	d	1	b	c	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	d	d	d	d
c	0	0	d	d	d	d
d	0	0	d	d	d	d
1	0	0	d	d	d	d

Şekil 1 Incline cebiri

Her $x \in R$ için $d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, a \\ d, & aksi\ halde \end{cases}$ olacak şekilde $d : R \to R$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman d , R üzerinde bir türevdir. Her $x \in R$ için $f(x) = 0$ olacak şekilde bir $f : R \to R$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman $d(b * 1) = d(b) = d \neq (d(b) * f(1)) + (f(b) * d(1))$=0

olduğundan d, R üzerinde bir f-türev değildir. $f : R \to R$ fonksiyonu birim fonksiyon olacak şekilde tanımlanırsa o zaman d, tanım 3.2.1 deki özdeşliği sağlar, yani d , R üzerinde f–türevdir.

Uyarı 3.3.1 R üzerinde tanımlanan bir türev, R üzerinde tanımlanan birim fonksiyon ile bir f-türev olur. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Örnek 3.3.2 R incline cebri Örnek 3.2.1 deki gibi verilsin. Her $x \in R$ için

$d(x) = \begin{cases} d, & x = 0, b, d \\ b, & x = a, c, 1 \end{cases}$ olacak şekilde $d : R \to R$ fonksiyonu tanımlansın. O

Zaman $d(0 * 0) = d(0) = d \neq (d(0) * 0) + (0 * d(0))$=0 olduğundan d , R üzerinde bir türev değildir.

Her $x \in R$ için $f(x) = \begin{cases} d, & x = 0, a, c, d, 1 \\ b, & aksi\ halde \end{cases}$ olacak şekilde bir $f : R \to R$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman d nin R üzerinde bir f -türev olduğu elde edilir. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Önerme 3.3.1 R bir incline cebri ve d, R nin bir f-türevi olsun. O zaman her $x, y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $d(x * y) \le d(x) + d(y)$,

(ii) $x \le y$, f sıra koruyan bir fonksiyon ise $d(x * y) \le f(x)$ dir,

(iii) R dağılmalı bir kafes ise $d(x) \le f(x)$ dir. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Önerme 3.3.2 R, sıfır elemanlı bir incline cebri ve d, R nin bir f-türevi olsun. $f(0)=0$ ise $d(0)=0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Önerme 3.3.3 R, çarpımsal birimli bir incline cebri, d, R nin bir f -türevi olsun ve $f : R \to R$ fonksiyonu $f(1) = 1$ i sağlasın. O zaman her $x \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $f(x) * d(1) \le d(x)$,

(ii) $d(1) = 1 \Longrightarrow f(x) \le d(x)$,

(ii) R, dağılmalı bir kafes ise $d(1) = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $d = f$ olmasıdır. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Önerme 3.3.4 R, bir integral incline cebri, d, R nin bir f-türevi, $a \in R$ olsun ve $f : R \to R$ fonksiyonu $f(1) = 1$ i sağlasın. O zaman her $x \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $a * d(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(ii) $d(x) * a = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011).

Teorem 3.3.1 M**,** R integral incline cebrinin sıfırdan farklı bir ideali olsun. d, R üzerinde sıfırdan farklı bir f -türev ve f**,** M üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyon ise d, f-türevi M üzerinde sıfırdan farklıdır. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Teorem 3.3.2 d, R integral incline üzerinde sıfırdan farklı bir f-türev ve f, M üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun. M, R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in M$ için $a * d(M)=0$ ise $a=0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011-a).

Önerme 3.3.5 d, R incline cebrinin bir f-türevi olsun. Her $x,y \in R$ için $d(x+y)=d(x)+d(y)$ ise her $x,y \in R$ aşağıdakiler sağlanır:

(i) $d(x * y) \leq d(x)$,

(ii) $d(x * y) \leq d(y)$,

(iii) d sıra koruyan bir türevdir. (Özbal ve Fırat 2011-a).

3.4. Incline Cebirlerinde Simetrik İkili Türevler

Tanım 3.4.1 R bir incline cebri olsun. Her $x,y \in R$ için $D(x,y)= D(y,x)$ oluyorsa $D(.,.):R \times R \to R$ dönüşümüne **simetriktir** denir.

Tanım 3.4.2 R bir incline cebri olsun. $D(.,.):R \times R \to R$ simetrik dönüşümü için $d(x)=D(x,x)$ şeklinde tanımlanan $d:R \to R$ dönüşümüne $D(.,.)$ nin **izi** denir.

Tanım 3.4.3 R bir incline cebiri ve $D(.,.):R \times R \to R$ bir simetrik dönüşüm olsun. Her $x,y,z \in R$ için $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) + (x * D(y, z))$ koşulu sağlanıyorsa D ye R üzerinde bir **simetrik ikili türev** denir. (Özbal ve Fırat 2011-b).

R üzerinde simetrik ikili türevin her $x,y,z \in R$ için $D(x,y*z)=(D(x,y)*z)+(y*D(x,z))$ bağıntısını da sağladığı açıktır.

Örnek 3.4.1 R, değişmeli bir incline cebri olsun. Her $x,y \in R$ için $D(x,y)= x*y$ şeklinde tanımlanan D dönüşümü R üzerinde simetrik ikili türevdir. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Örnek 3.4.2 R, değişmeli bir incline cebri ve $a \in R$ olsun. Her $x,y \in R$ için $D(x,y)=(x*y)*a$ şeklinde tanımlanan D dönüşümü R üzerinde simetrik ikili türevdir. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Önerme 3.4.1 R, değişmeli bir incline cebri ve D, R üzerinde simetrik ikili türev olsun. O zaman her $x,y,z \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$,

2) $x \leq y$ ise $D(x * y, z) \leq y$ dir,

3) R, dağılmalı bir kafes ise $D(x, y) \leq x$ ve $D(x, y) \leq y$ dir. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Önerme 3.4.2 R, sıfır elemanlı değişmeli bir incline cebri ve d, R nin D simetrik ikili türevinin izi olsun. O zaman $d(0) = 0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Önerme 3.4.3 R, çarpımsal birim elemanlı değişmeli bir incline cebri ve d, R nin D simetrik ikili türevinin izi olsun. O zaman her $x, y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $x * D(1, y) \leq D(x, y)$,

2) $d(1) = 1 \Longrightarrow x \leq D(x, 1)$. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Önerme 3.4.4 R, değişmeli bir integral incline cebri, D, R üzerinde simetrik ikili türev ve $a \in R$ olsun. O zaman her $x,y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $a * D(x, y) = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ dır,

2) $D(x, y) * a = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Tanım 3.4.4 R , değişmeli bir incline cebri ve $D(.,.) : R \times R \rightarrow R$ bir simetrik dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in R$ için $D(x + y, z) = D(x, z) + D(y, z)$ koşulu sağlanıyorsa D ye bir **birleştirme (joinitive) dönüşümü** denir.

Önerme 3.4.5 R, değişmeli bir integral incline cebri ve d, R nin D birleştirme (joinitive) simetrik ikili türevinin izi olsun. O zaman her $x,y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $d(x+y)=d(x)+d(y)+D(x,y)$ ve $d(x)+d(y)\leq d(x+y)$,

2) $D(x*y,x)\leq d(x)$,

3) D, R nin sıra koruyan bir simetrik ikili dönüşümüdür. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Önerme 3.4.6 d_1, d_2**,** R değişmeli bir integral incline cebrinin sırası ile D_1,D_2 birleştirme (joinitive) simetrik ikili türevlerinin izleri olsun. Her $x\in R$ için $D_1(d_2(x),x)=0$ ise $d_1=0$ veya $d_2=0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011-b).

Sonuç 3.4.1 R, değişmeli bir integral incline cebri ve d, R nin D birleştirme (joinitive) simetrik ikili türevinin izi olsun. Her $x\in R$ için $D(d(x),x)=0$ ise $d=0$ dır. (Özbal ve Fırat 2011-b).

3.5. Incline Cebirlerinde Genelleştirilmiş Türevler

Tanım 3.5.1 R bir incline cebri olsun. Her $x,y\in R$ için

$$D(x*y)=(D(x)*y)+(x*d(y))$$

olacak şekilde bir $d:R\to R$ türevi varsa $D:R\to R$ fonksiyonuna R üzerinde bir **genelleştirilmiş türev** denir. (Özbal ve Fırat 2014).

Örnek 3.5.1 R incline cebri Örnek 3.2.1 deki gibi verilsin. Her $x\in R$ için

$$D(x)=\begin{cases}0, & x=0,c,1\\ a, & x=a\\ d, & x=b,d\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan $D:R\to R$ fonksiyonu R üzerinde bir türev değildir. Her $x\in R$ için $d(x)=\begin{cases}0, & x=0,a\\ d, & aksi\ halde\end{cases}$ olacak şekilde $d:R\to R$ türevi tanımlansın. O zaman $D:R\to R$ fonksiyonu Tanım 3.4.1 de verilen eşitliği sağlar, yani $D:R\to R$ fonksiyonu R üzerinde bir genelleştirilmiş türevdir.(Özbal ve Fırat 2014).

Önerme 3.5.1 R bir incline cebri, d, R üzerinde bir türev ve D, R üzerinde bir genelleştirilmiş türev olsun. O zaman her $x,y\in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $D(x * y) \leq D(x) + d(y)$,

2) $x \leq y \Longrightarrow D(x * y) \leq y$,

3) R incline cebiri sıfır elemanlı ise $D(0) = 0$ dır.(Özbal ve Fırat 2014).

Önerme 3.5.2 R, çarpımsal birimli bir incline cebri ve d ve D, R nin sırası ile türevi ve genelleştirilmiş türevi olsun. O zaman her $x \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

i) $x * d(1) \leq D(x)$,

ii) $d(1) = 1$ ise $x \leq D(x)$ dir. (Özbal ve Fırat 2014).

Önerme 3.5.3 R bir integral incline cebri, d ve D, R nin sırası ile türevi ve genelleştirilmiş türevi ve $a \in R$ olsun. O zaman her $x \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $a * D(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(ii) $D(x) * a = 0$ ve $d(x) * a = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ dır. (Özbal ve Fırat 2014).

Teorem 3.5.1 d ve D, R integral incline cebrinin sırası ile türevi ve genelleştirilmiş türevi ve M**,** R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. D ve d, R üzerinde sıfırdan farklı ise D, M üzerinde sıfırdan farklıdır. (Özbal ve Fırat 2014).

4. INCLINE CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ *f*-TÜREVLER

Bu bölümde, incline cebirlerinde simetrik ikili *f*-türev tanımı verilmiş ve ilgili bazı özellikleri incline ve integral incline cebirlerinde incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde elde edilenler Symmetric bi-f-Derivations of Incline Algebras adlı makalede Kim, K. H. And Park, S. Y.(2015) tarafından yayınlanmıştır.

Tanım 4.1 R bir incline cebri olsun. Her $x,y \in R$ için $D(x, y) = D(y, x)$ oluyorsa $D(.,.):R \times R \rightarrow R$ dönüşümüne **simetriktir** denir.

Tanım 4.2 R bir incline cebri olsun. $D(.,.) : R \times R \rightarrow R$ simetrik dönüşümü için $d(x) = D(x, x)$ şeklinde tanımlanan $d : R \rightarrow R$ dönüşümüne $D(.,.)$ nin **izi** denir.

Tanım 4.3 R bir incline cebri ve $D(.,.) : R \times R \to R$ bir simetrik dönüşüm olsun. Her $x,\ y,\ z\ \in R$ için $D(x * y, z) = \big(D(x,z) * f(y)\big) + \big(f(x) * D(y,z)\big)$ olacak şekilde bir $f : R \to R$ fonksiyonu varsa $D : R \to R$ fonksiyonuna R üzerinde bir **simetrik ikili *f*-türev** denir. R üzerinde simetrik ikili *f*-türevin her $x,y,z \in R$ için $D(x, y * z) = \big(D(x,y) * f(z)\big) + \big(f(y) * D(x,z)\big)$ bağıntısını da sağladığı açıktır.

Örnek 4.1 R, değişmeli bir incline cebri olsun. Her $x,y \in R$ için $f(x * y) = f(x) * f(y)$ olmak üzere $D(x,y) = f(x) * f(y)$ şeklinde tanımlanan D dönüşümü R üzerinde simetrik ikili *f*-türevdir.

Örnek 4.2 $R = \{0,a,b,c,d,1\}$ bir incline cebri olsun ve $+$, $*$ işlemleri R üzerinde aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın.

$+$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	1	1	1	1
b	b	1	b	1	b	1
c	c	1	1	c	1	1
d	d	1	b	c	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	d	d	d	d
c	0	0	d	d	d	d
d	0	0	d	d	d	d
1	0	0	d	d	d	d

Şekil 2 İncline cebiri

$(R, +, *)$ incline cebiridir fakat dağılmalı kafes değildir.

Her $x \in R$ için $f(x) = \begin{cases} d, & x = 0, a \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$ olacak şekilde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonu ve her $x, y \in R$ için $D(x,y) = d$ olacak şekilde tanımlanan $D: R \times R \to R$ fonksiyonunun R üzerinde bir simetrik ikili *f*-türev olduğu kolaylıkla görülebilir.

Önerme 4.1 R, değişmeli bir incline cebri ve f, R üzerinde sıra koruyan bir dönüşüm olmak üzere D, R üzerinde simetrik ikili *f*-türev olsun. O zaman her $x,y,z \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$,

2) $x \leq y$ ise $D(x * y, z) \leq f(y)$ dir,

3) R, dağılmalı bir kafes ise $D(x, y) \leq f(x)$ ve $D(x, y) \leq f(y)$ dir.

Kanıt: 1) $x,y,z \in R$ olsun. Önerme 2.1.1 (1) den $D(x,z) * f(y) \leq D(x,z)$ ve $f(y) * D(y,z) \leq D(y,z)$ dir. Önerme 2.1.1 (3) kullanılarak $(D(x,z) * f(y)) + (f(x) * D(y,z)) \leq D(x,z) + D(y, z)$ elde edilir, yani $D(x * y, z) \leq D(x, z) + D(y, z)$ dir.

2) $x \leq y$ ve f fonksiyonu R üzerinde sıra koruyan dönüşüm olduğu için $f(x) \leq f(y)$ dir. Önerme 2.1.1 (3) ve (1) den $x * D(y, z) \leq f(y) * D(y, z) \leq f(y)$ dir. Önerme 2.1.1 (1) kullanılarak $D(x, z) * f(y) \leq f(y)$ elde edilir. Buradan

$D(x * y, z) = (D(x, z) * f(y)) + (f(x) * D(y, z)) \leq f(y) + f(y)$ elde edilir, yani $D(x * y, z) \leq f(y)$ dir.

3) R, dağılmalı bir kafes olsun. O zaman $D(x, y) = D(x * x, y) = (D(x, y) * f(x)) + (f(x) * D(x,y))$ ve $D(x,y) + f(x) = \big(D(x,y) * f(x)\big) + (f(x) * D(x,y))) + f(x) = (D(x,y) * f(x)) + (D(x,y) * f(x)) + f(x) = (D(x,y) * f(x)) + f(x)$

dir. Tanım 2.1.1 (R8) kullanılarak $D(x,y) + f(x) = f(x)$ elde edilir, yani $D(x,y) \leq f(x)$ dir. Benzer şekilde $D(x,y) \leq f(y)$ elde edilir.

Önerme 4.2 R, sıfır elemanlı değişmeli bir incline cebri, f, R üzerinde bir fonksiyon ve d, R nin D simetrik ikili f-türevinin izi olsun. Eğer $f(0) = 0$ ise $d(0) = 0$ dır.

Kanıt: $x \in R$ ve $f(0) = 0$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
d(0) = D(0,0) = D(x * 0,0) &= \big(D(x,0) * f(0)\big) + \big(f(x) * D(0,0)\big) \\
&= f(0) + \big(f(x) * D(0,0)\big) = f(x) * D(0,0)
\end{aligned}
$$

yazılır. Eşitlikte x=0 alınırsa d(0) = 0 elde edilir.

Önerme 4.3 R, çarpımsal birim elemanlı değişmeli bir incline cebri, f, R üzerinde bir fonksiyon ve d, R nin D simetrik ikili f-türevinin izi ve $f(1)$=1 olsun. O zaman her $x, y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $f(x) * D(1, y) \leq D(x, y)$,

2) $d(1) = 1 \Longrightarrow f(x) \leq D(x, 1)$.

Kanıt: 1) $x \in R$ ve $f(1)$=1olsun. Buradan

$D(x,y) = D(x * 1, y) = \big(D(x,y) * f(1)\big) + \big(f(x) * D(1,y)\big) = D(x,y) + \big(f(x) * D(1,y)\big)$ olduğundan $f(x) * D(1,y) \leq D(x,y)$ elde edilir.

2) 1) deki gibi gösterilir.

Önerme 4.4 R, değişmeli bir integral incline cebri, f, R üzerinde bir fonksiyon D, R üzerinde simetrik ikili f-türev ve $a \in R$ ve $f(1)$ =1 olsun. O zaman her $x, y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $a * D(x,y) = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ dır.

2) $D(x,y) * a = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ dır.

Kanıt: 1) Her x, $y \in R$ için $a * D(x,y) = 0$ olsun. x yerine $z \in R$ için $x * z$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 = a * D(x * z, y) &= a * (\big(D(x,y) * f(z)\big) + \big(f(x) * D(z,y)\big) \\ &= a * \big(D(x,y) * f(z)\big) + a * \big(f(x) * D(z,y)\big) \\ &= a * \big(f(x) * D(z,y)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x = 1$ yazılırsa $a * D(z,y) = 0$ elde edilir. R değişmeli bir integral incline cebri olduğundan sıfır böleni yoktur. Böylece $a = 0$ veya her z, $y \in R$ için $D(z, y) = 0$ elde edilir, yani $a = 0$ veya $D = 0$ dır.

2) $D(x,y) * a = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ olduğu 1) deki gibi elde edilir.

Tanım 4.4 R, değişmeli bir incline cebri ve $D(.,.) : R \times R \to R$ bir simetrik dönüşüm olsun. Her x, y, $z \in R$ için $D(x + y, z) = D(x, z) + D(y, z)$ koşulu sağlanıyorsa D ye **birleştirme (joinitive) dönüşümü** denir.

Önerme 4.5 R, değişmeli bir integral incline cebri f, R üzerinde bir fonksiyon ve d , R nin D birleştirme (joinitive) simetrik ikili f-türevinin izi olsun. O zaman her x, $y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $d(x + y) = d(x) + d(y) + D(x, y)$ ve $d(x) + d(y) \leq d(x + y)$,

2) $D(x * y, x) \leq d(x)$,

3) D, R nin sıra koruyan bir simetrik ikili f dönüşümüdür.

Kanıt: 1) $x, y \in R$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} d(x+y) = D(x+y, x+y) &= D(x, x+y) + D(y, x+y) \\ &= D(x,x) + D(x,y) + D(y,x) + D(y,y) \\ &= D(x,x) + D(y,y) + D(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir, yani $d(x + y) = d(x) + d(y) + D(x, y)$ ve $d(x) + d(y) \leq d(x + y)$ dir.

2) $x, y \in R$ olsun. Tanım 2.1.1 (R7) kullanılarak $d(x, x) = D(x, x) = D(x + (x * y), x) = D(x, x) + D(x * y, x)$ elde edilir, yani $D(x * y, x) \leq d(x)$ dir.

3) $x, y, z, t \in R$ için $(x, y) \leq (z, t)$ olsun. O zaman $x + z = z$, $y + t = t$ ve $(x, y) + (z, t) = (z, t)$ dir. Buradan $D(z, t) = D((x, y) + (z, t)) = D(x, y) + D(z, t)$ elde edilir, yani $D(x, y) \leq D(z, t)$ dir.

Önerme 4.6 d_1, d_2**,** R değişmeli bir integral incline cebrinin sırası ile D_1,D_2 birleştirme (joinitive) simetrik ikili f-türevlerinin izleri ve f, R üzerinde bir fonksiyon olsun. Her $x \in R$ için $D_1(d_2(x), x) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Kanıt: d_1, d_2**,** R değişmeli bir integral incline cebrinin sırası ile D_1,D_2 birleştirme (joinitive) simetrik ikili f-türevlerinin izleri ve $D_1(d_2(x), x) = 0$ olsun. Tanım 2.1.1 (R7) kullanılarak

$$D_1(d_2(x) + (d_2(x) * x), x) = D_1(d_2(x), x\ ) + D_1(d_2(x) * x, x)$$

$$= D_1(d_2(x), x) * f(x) + d_2(x) * D_1(x, x) = d_2(x) * d_1(x)$$

elde edilir. R, değişmeli bir integral incline cebiri olduğundan $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Sonuç 4.1 R, değişmeli bir integral incline cebri, f, R üzerinde bir fonksiyon ve d, R nin D birleştirme (joinitive) simetrik ikili f-türevinin izi olsun. Her $x \in R$ için $D(d(x), x) = 0$ ise $d = 0$ dır.

5. INCLINE CEBİRLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ *f*-TÜREVLER

Bu bölümde incline cebirlerinde genelleştirilmiş f -türev tanımı verilmiş ve ilgili bazı özellikleri incline ve integral incline cebirlerinde incelenmiştir. Bu bölümde elde edilenler On Generalized f – Derivations of Incline Algebras adlı makalede International Mathematical Forum dergisinde yayınlanmıştır.

Tanım 5.1 : R bir incline cebri olsun. Her $x, y \in R$ için

$$D(x * y) = (D(x) * f(y)) + (f(x) * d(y))$$

olacak şekilde bir $d{:}R \to R$ türevi ve $f{:}\ R \to R$ fonksiyonu varsa $D{:}R \to R$ fonksiyonuna R üzerinde bir **genelleştirilmiş *f*-türev** denir.

Örnek 5.1 $R = \{0,a,b,c,d,1\}$ bir incline cebri olsun ve $+$, $*$ işlemleri R üzerinde aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın.

$+$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	1	1	1	1
b	b	1	b	1	b	1
c	c	1	1	c	1	1
d	d	1	b	c	d	1
1	1	1	1	1	1	1

$*$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	d	d	d	d
c	0	0	d	d	d	d
d	0	0	d	d	d	d
1	0	0	d	d	d	d

Her $x \in R$ için $d(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0\,, a \\ d\,, & aksi\ halde \end{cases}$ olacak şekilde $d : R \to R$ fonksiyonu tanımlansın. O zaman d, R üzerinde türevdir.

Her $x \in R$, $D(x) = \begin{cases} 0\,, & x = 0 \\ d\,, & aksi\ halde \end{cases}$ olacak şekilde tanımlanan D:$R \to R$ fonksiyonu R üzerinde bir genelleştirilmiş türev değildir.

$$D(a * b) \neq (D(a) * b) + (a * d(b))$$

$$D(0) \neq (d * b) + 0$$

$$0 \neq d + 0$$

Her $x \in R$ için, $f(x) = \begin{cases} 0\,, & x = b, c, d, 1 \\ a\,, & aksi\ halde \end{cases}$ olacak şekilde f:$R \to R$ türevi tanımlansın. O zaman D:$R \to R$ fonksiyonu Tanım 5.1 de verilen eşitliği sağlar, yani D:$R \to R$ fonksiyonu R üzerinde bir genelleştirilmiş f-türevdir.

Önerme 5.1 R bir incline cebri, f, R üzerinde bir fonksiyon ve d, R üzerinde bir türev ve D, R üzerinde bir genelleştirilmiş f-türev olsun. O zaman her $x,y \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

1) $D(x * y) \leq D(x) + d(y)$,

2) $x \leq y$ ve f, R üzerinde sıra koruyan bir dönüşüm ise $D(x * y) \leq f(y)$ dir.

Kanıt: 1) Önerme 2.1.1 (1) den $D(x) * f(y) \leq D(x)$ ve $f(x) * d(y) \leq d(y)$ dir. Önerme 2.1.1 (3) kullanılarak $\big(D(x) * f(y)\big) + \big(f(x) * d(y)\big) \leq D(x) + d(y)$ yazılır. Böylece $D(x * y) \leq D(x) + d(y)$ elde edilir.

2) $x \leq y$ ve f, R üzerinde sıra koruyan bir dönüşüm olduğundan $f(x) \leq f(y)$ olur. Önerme 2.1.1 (3) ve (1) kullanılarak $f(x) * d(y) \leq f(y) * d(y) \leq f(y)$ elde edilir. Benzer şekilde $D(x) * f(y) \leq f(y)$ olduğu elde edilir. Buradan $\big(D(x) * f(y)\big) + \big(f(x) * d(y)\big) \leq f(y) + f(y)$ yazılır. Böylece $D(x * y) \leq f(y)$ olduğu elde edilir.

Önerme 5.2 *R* sıfır elemanlı bir incline cebri olmak üzere *d*, *R* üzerinde bir türev, *f*, *R* üzerinde bir fonksiyon ve *D*, *R* üzerinde bir genelleştirilmiş *f* -türev olsun. Eğer *f*(0)=0 ise *D*(0)=0'dır.

Kanıt: *R* sıfır elemanlı değişmeli bir incline cebri olduğundan her $x \in R$ için

$x * 0 = 0 * x = 0$ yazarız. Buradan

$D(0) = D(x * 0) = \big(D(x) * f(0)\big) + \big(f(x) * d(0)\big) = f(x) + d(0)$ dır.

Tanım 2.1.1 (R8) kullanılarak *d*(0)=0 elde edilir. Buradan *D*(0)=0 yazılır.

Önerme 5.3 *R* çarpımsal birim elemanlı bir incline cebri ve *f*, *R* de bir fonksiyon, *d* ve *D*, *R* nin sırası ile türevi ve genelleştirilmiş *f*-türevi olsun. Eğer $f(1) = 1$ ise her $x \in R$ için aşağıdakiler sağlanır:

i)$f(x) * d(1) \leq D(x)$

ii)$d(1) = 1\ ise\ f(x) \leq D(x)$ dir.

Kanıt: i) *R* çarpımsal birim elemanlı bir incline cebri olduğundan her $x \in R$ için $x * 1 = 1 * x = x$ yazarız. Buradan

$$D(x) = D(x * 1) = \big(D(x) * f(1)\big) + \big(f(x) * d(1)\big)$$

yazarız. Bu eşitlikte $f(1) = 1$ alınırsa $D(x) = D(x) + \big(f(x) * d(1)\big)$ yazılır. Buradan $f(x) * d(1) \leq D(x)$ elde edilir.

ii) i'deki gibi gösterilir.

Önerme 5.4 *R* bir integral incline cebri, *f*, *R* üzerinde bir fonksiyon, *d* ve *R* nin bir türevi, *D R* nin genelleştirilmiş *f*-türevi ve $a \in R$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $f(1) = 1$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

(i) $a * D(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dır.

(ii) $D(x) * a = 0$ ve $d(x) * a = 0$ ise $a = 0$ veya $D = 0$ dır.

Kanıt: i) Her $x \in R$ için $a * D(x) = 0$ olsun. x yerine her $y \in R$ için $x * y$ yazılırsa

$$0 = a * D(x) = a * D(x * y) = a * \left[\left(D(x) * f(y)\right) + \left(f(x) * d(y)\right)\right]$$
$$= a * \left(D(x) * f(y)\right) + a * \left(f(x) * d(y)\right) = a * \left(f(x) * d(y)\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x = 1$ alınırsa $a * d(y) = 0$ olur. R bir integral incline cebri olduğundan $a = 0$ veya $d = 0$ elde edilir.

ii) Her $x \in R$ için $D(x) * a = 0$ ve $d(x) * a = 0$ olsun. Eğer $D(x) * a = 0$ eşitliğinde x yerine her $y \in R$ için $x * y$ yazılırsa

$$0 = D(x) * a = D(x * y) * a = \left[\left(D(x) * f(y)\right) + \left(f(x) * d(y)\right)\right] * a$$
$$= \left(D(x) * f(y)\right) * a + \left(f(x) * d(y)\right) * a = \left(D(x) * f(y)\right) * a$$

elde edilir. Bu eşitlikte $y = 1$ alınırsa $D(x) * a = 0$ olur. R bir integral incline cebri olduğundan $a = 0$ veya $D = 0$ elde edilir.

Teorem 5.1 d ve D, R integral incline cebrinin sırası ile türevi ve genelleştirilmiş f –türevi, f, R üzerinde bir fonksiyon ve M**,** R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. D, d ve f, R üzerinde sıfırdan farklı ise D, M üzerinde sıfırdan farklıdır.

Kanıt: D, R üzerinde sıfırdan farklı genelleştirilmiş f –türev, d, R üzerinde sıfırdan farklı türev ve f, R üzerinde sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere D ve d nin M üzerinde sıfırdan farklı olmadığını varsayalım o zaman $x \in M$ için $D(x) = 0$ dır.$y \in R$ için önerme 2.1.1 (1) den $x * y \leq x$ ve M**,** R nin bir ideali olduğundan $x * y \in M$ dir. Buradan $0 = D(x * y) = \left(D(x) * f(y)\right) + \left(f(x) * d(y)\right) = f(x) * d(y)$ elde edilir. R bir integral incline cebri olduğundan her $x \in M$ için $f(x) = 0$ veya her $y \in R$ için $d(y) = 0$ elde edilir; fakat f fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan $y \in R$ için $d(y) = 0$ elde edilir. Bu da hipotez ile çelişir. O halde D, M üzerinde sıfırdan farklıdır.

Teorem 5.2 D, R integral incline cebrinin genelleştirilmiş f –türevi, d ve f, M üzerinde sırası ile sıfırdan farklı türev ve sıfırdan farklı fonksiyon olsun. Eğer M**,** R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in R$ için $a * d(M) = 0$ ise $a = 0$ dır.

Kanıt: Teorem 5.1 den $m \in M$ için $D(m) \neq 0$ dır. M**,** R nin sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in R$ için $a * d(M) = 0$ olsun. Buradan $m, n \in M$ için

$$0 = a * D(m * n) = a * \big(D(m) * f(n) + f(m) * d(n)\big)$$
$$= a * D(m) * f(n) + a * f(m) * d(n) = a * f(m) * d(n)$$

yazarız. R integral incline cebiri ve d ve *f*, *M* üzerinde sırası ile sıfırdan farklı türev ve sıfırdan farklı fonksiyon olduğundan $a = 0$ elde edilir.

Önerme 5.5 *R* çarpımsal birim elemanlı bir integral incline cebri ve *f*, *R* üzerinde bir fonksiyon, d ve *D*, *R* nin sırası ile türevi ve genelleştirilmiş *f*-türevi olsun. O zaman her $x \in R$ için $f(1) = 1$ ise $D(x) = \big(D(1) * f(x)\big) + d(x)$ dir.

Kanıt: *R* çarpımsal birim elemanlı bir incline cebri olduğundan her $x \in R$ için $x * 1 = 1 * x = x$ yazarız. Buradan

$$D(x) = D(1 * x) = \big(D(1) * f(x)\big) + \big(f(1) * d(x)\big)$$

yazarız. Bu eşitlikte $f(1) = 1$ alınırsa $D(x) = \big(D(1) * f(x)\big) + d(x)$ yazılır.

6. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı incline cebirlerinde *f*-türev ve genelleştirilmiş türev için yapılan çalışmalardaki boşlukların kapatılması ve diğer türev tanımları ile incline cebirlerinin yapısının incelenmesidir. Bu tezde önce tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı tanım ve özellikler sunulmuştur. Üçüncü bölümde incline cebirlerinde bugüne kadar yapılmış olan türev, *f*-türev, simetrik ikili türev, genelleştirilmiş türev konularıyla ilgili çalışmaların özeti verilmiştir. Dördüncü bölümde simetrik ikili türev tanımından esinlenerek incline cebirlerinde simetrik ikili *f*-türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri incline ve integral incline cebirlerinde incelenmiştir. Beşinci bölümde incline cebirlerinde genelleştirilmiş *f*-türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri incline ve integral incline cebirlerinde incelenmiştir.

Bundan sonra farklı türev çeşitleri ve bunların özellikleri incline cebirlerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Cao, Z. Q, Kim, K. H. And Roush, F. W., 1984, Incline Algebra and Applications, John Wiley&Sons, New York.

VUKMAN J., 1989, Symmetric bi-derivations On Prime And Semi-Prime Rings, Aequationes Mathematicae 38, 252-254.

Al-Shehri, N. O., 2010, On Derivations of Incline Algebras, Scientia Mathematicae Japonicae, 71 (3):e-2010, 199-205 pp.

Meenakshi, A.R. and Anbalagan, S., 2010, On Regular Elements in an Incline, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2010, Article ID 903063, 12 pages, doi:10.1155/2010/903063.

Özbal, A. Ş. And Fırat, A., 2011-a, On *f*-Derivations of Incline Algebras, International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics, 3 (1),83-90 pp.

Özbal, A. Ş. And Fırat, A., 2011-b, On Symmetric Bi-Derivations of Incline Algebras, International Mathematical Forum, 4 (41), 2031-2036 pp.

Özbal, A. Ş., 2011, Kafeslerde Türev ve Genellemeleri Üzerine Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Özbal, A. Ş. And Fırat, A., 2014, On Generalized Derivations of Incline Algebras, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 43 (4), 553-559.

Kim, K. H. And Park, S. Y., 2015, On Symmetric Bi-Derivations of Incline Algebras, International Mathematical Forum, Vol. 10,2015, no. 1, 35-45

Taş, H. And Özbal, A. Ş., 2015, On Generalized f-Derivations of Incline Algebras, International Mathematical Forum, Vol. 10, 2015, no. 6, 273-282

ÖZGEÇMİŞ

Halit TAŞ 1984 yılında Mersin'in Tarsus ilçesinde doğdu. İlkokulu ve ortaokulu Tarsus'ta bitirdi. Lise öğrenimini Osmaniye'nin Düziçi ilçesinde bulunan Düziçi Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 2002 yılında kazanmış olduğu Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2008 yılında Kara Kuvvetleri Komutanlığı'nın yapmış olduğu Matematik öğretmeni temini sınavını birinci olarak kazandı ve aynı yıl İstanbul Tuzla Piyade Okul Komutanlığı'ndan Teğmen rütbesiyle mezun olarak İzmir Maltepe Askerî Lisesi'ne atandı. 2008 yılından beri İzmir Maltepe Askerî Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.