YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BOOLE CEBİRLERİ VE REGÜLER AÇIK KÜMELER

Shahram SARAEI POUR

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2015

İÇİNDEKİLER

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Boole Cebirleri ve Regüler Açık Kümeler” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

09/07/2015

Shahram SARAEI POUR

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince gerekli verilerin sağlanmasında kolaylık gösteren, özellikle kıymetli görüşlerinden yararlandığım, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet TERZİLER'e teşekkürü bir borç bilirim.

KABUL VE ONAY SAYFASI

Shahram SARAEI POUR tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "Boole Cebirleri ve Regüler Açık Kümeler" başlıklı bu çalışma Y.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi"nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 09.07.2015 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

<u>Jüri Üyeleri</u>:	**<u>İmza</u>**
Jüri Başkanı : Prof. Dr. Mehmet TERZİLER	M.Terziler
Raportör Üye : Doç. Dr. Adem ÇELİK	Adem Çelik
Üye : Yrd. Doç . Dr. Şule Ayar ÖZBAL	Şule

ÖZET

Bu tez esas olarak iki bölümden oluşuyor.

Birinci bölümde; Boole halkaları ve Boole cebirleri üzerine genel bilgiler verildikten sonra, aralarındaki karşılıklı geçişler inceleniyor. Konuların anlaşılmasını pekiştirmek için temel örnekler veriliyor.

İkinci bölüm; Boole cebirlerine verilebilecek en ilginç örneklerden birini içeriyor. Bir topolojik uzayın tüm regüler açık kümelerinin koleksiyonunun belirli işlemler altında bir Boole cebiri oluşturduğu kanıtlanıyor.

ABSTRACT

This thesis consists mainly of two chapters.

In the first chapter, general informations on Boolean rings and Boolean algebra are given, and then reciprocal transitions between them are investigated. In order to reinforce the understanding of concepts, some basic examples are given.

Second chapter contains one of the most interesting examples that one can give on Boolean algebras. One prove that the collection of the regular open sets of a topological space is a Boolean algebra under certain operations to be defined.

GİRİŞ

Boole cebiri; önerme bağlaçları altında iki değerli mantığın cebiri ya da birleşim ve tümleyen işlemleri altında kümelerin cebiridir. Matematiksel grup kavramı gibi, Boole cebiri kavramının köklerini ve uygulamalarını matematiksel lojik, kümeler kuramı (küme cisimleri), topoloji (tamamen bağlantısız kompakt Hausdorff uzayları), kümeler kuramının temelleri (Boole değerli modeller) ve fonksiyonel analiz ve de halka kuramının (Boole halkaları) da bulabiliriz. Matematiksel yapıların çalışmasında en başta gelen cebir örneğini Boole cebirleri sağlar.

Bu tezde; Boole halkaları ve Boole cebirleri hakkında temel kavramlar verilmiş, bol örneklere ve bazı sorulara yer verilmiştir. Tezin ikinci bölümünde topoloji ile olan bağlantısı regüler açık kümelerin koleksiyonunun belirlenen işlemlere göre bir Boole cebiri oluşturduğu ayrıntılı olarak kanıtlanmıştır. Son olarak regüler açık kümeler üzerine bazı sorular çözülmüştür.

BÖLÜM 1

BOOLE HALKALARI VE BOOLE CEBİRLERİ

Bu bölümde Boole halkaları ve Boole cebirleri ele alınıyor. Tanım, özellik ve örnekler konu ile ilgili kitaplarda, örneğin [1],[4],[9] da bulunabilir. Burada yer alan bilgiler genellikle [3] den esinlenilmiştir. Bazı sorular [3] den alınmış ve çözümleri ayrıntılı olarak verilmiştir.

1.1 Boole Halkaları

Bir Boole halkası, klasik halka kavramının özel bir türüdür ve göreceğimiz üzere, eşgüçlü, birimli bir halka olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.1 R boştan farklı bir küme ve + , · ve (negatifleri oluşturmak için) -, R üzerinde sırasıyla ikili, ikili ve birli işlemler ve 0,1 R nin seçkin elemanları olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $< R,+,\cdot\,, 0\,, 1 >$ yapısına bir birimli halka denir.

Her $a,b,c \in R$ için

R1. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (+ işleminin birleşmeliliği)

R2. $a+b=b+a$ (+ işleminin değişmeliliği)

R3. $a+0=a$ (0 , + işleminin sıfırı)

R4. $a+(-a)=0$ ($< R,+,0 >$ değişmeli bir gruptur.)

R5. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ (· işleminin birleşmeliliği)

R6. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (· işlemi + işlemi üzerine

R7. $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ dağılmalıdır)

R8. $a\cdot 1=a$ (1, · işleminin birimi)

Açıklama 1.1.2 Bir halkada · çarpma işlemi değişmeli olmayabilir ve de birim elemana, 1, sahip olmayabilir. Eğer bu iki özelliği taşıyorsa, halkaya değişmeli, birimli denir.

Örnek 1.1.3 Sadece {0} dan oluşan halkaya yozlaşmış (dejenere) cebir denir ve ilginçliği yoktur. En basit ama temel, birimli halka sıfır ve bir elemanlarından oluşan halkadır.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

çizelgelerinden bu halkanın iki önemli özelliği ortaya çıkar :

(i) Her eleman kendisinin toplamsal tersidir.

$$a + a = 0$$

(ii) Her eleman kendisinin karesine eşittir.

$$a \cdot a = a$$

Bu gözlemlerden ilki değilleme işleminin (-) gereksizliğini gösteriyor. Öte yandan (ii) özelliğini sağlayan elemanlara eşgüçlü adı verilir. Buradan bir Boole halkasının tanımını yapabiliriz.

Tanım 1.1.4 Bir Boole halkası birimli eşgüçlü bir halkadır.

Eşgüçlülük koşulu böyle halkaların yapısı üzerinde çok güçlü bir etkiye sahiptir. (i) özelliğini sağlayan bir halkaya 2 karakteristikli denir.

Önerme 1.1.5

(1) Bir Boole halkası 2 karakteristiğine sahiptir.
(2) Bir Boole halkası her zaman değişmelidir.

Kanıt : (1) Bundan sonra $a \cdot b$ yerine ab yazabileceğiz.

Boole halkası tanımına göre, $a^2 = a$, $b^2 = b$ ve $(a+b)^2 = a+b$ dir.

Öte yandan

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b = a + b$$

ve sadeleşmeden sonra $ab + ba = 0$ bulunur. a ve b halkanın keyfi elemanları olduğu için $b = 1$ alabiliriz; o zaman $a \cdot 1 + 1 \cdot a = 0$, yani $a + a = 0$ elde edilir.

(2) (1) e göre ab, ab nin toplamsal tersidir, ama (1) de $ab + ba = 0$, ab nin ba nın da toplamsal tersi olduğu görülür. O halde $ab = ba$ sonucu çıkar. ■

İki elemanlı Boole halkasını bundan sonra 2 = {0,1} ile göstereceğiz.

Örnek 1.1.6

$2 \times 2 \equiv 2^2$ ={(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)}

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bd)$$

İşlemleri altında bir Boole halkasıdır; bu halkada (0,0) sıfır ve (1,1) birim elemandır.

$n > 2$ için bu örnek 2^n ye genelleştirilebilir. Elemanları $(a_1, ..., a_n)$ n-terimli diziler ise sıfır ve birim (0,…,0) ve (1,...,1) dizileridir. Ancak bu halkayı daha ileri genelleştirebiliriz.

Örnek 1.1.7 2^n yi tanım kümesi {0,1,…,n-1} ve değer kümesi {0,1} olan tüm fonksiyonların kümesi olarak ele alabiliriz.

X boştan farklı bir küme olmak üzere

2^X : = {f | f : X $\rightarrow$ {0,1} } tanımını yapalım. 2^X in elemanlarına X üzerinde 2-değerli fonksiyonlar denir. Şimdi f,g $\in 2^X$ için (f+g)(x) = f(x) + g(x) ve (f · g)(x) = f(x) · g(x) tanımlarını yapalım. 0 ve 1, her x ∈ X için 0(x) = 0 ve 1(x) = 1 sabit fonksiyonlarıdır.

Bu durumda $< R,+,\cdot$,0 , 1$>$ in bir Boole halkası oluşturduğunu göstermek, notasyon dışında 2^2 nin bir Boole halkası olduğunu gerçeklemekle aynıdır. Örneğin; · işleminin birleşmeli olduğunu gösterelim.

(f · (g · h))(x) = f(x) · (g · h)(x) (· işleminin tanımı)

= f(x) · (g(x) · h(x)) (· işleminin tanımı)

= (f(x) · g(x)) · h(x)

Çünkü eşitliklerin her birinin sağ tarafı 2 nin bir elemanıdır ve 2 de

· işleminde birleşmelidir;

= (f · g)(x) · h(x) (· işleminin tanımı)

= ((f · g) · h)(x) (· işleminin tanımı)

dir.

Bu eşitlik her x ∈ X için geçerli olduğundan

f · (g · h) = (f · g) · h

yani · işleminin birleşmeli olduğu gösterilmiş olur.

Bu kesimin son örneği olarak [3] deki (sayfa 6, soru 7) ilgili bir soruyu çözeceğiz.

Soru 1.1.8 Birimli değişmeli bir R halkasındaki tüm eşgüçlü elemanların kümesi A olsun. A üzerinde ⊕ toplama işlemini her $a,b \in A$ için $a \oplus b = a + b - 2ab$ olarak tanımlayalım. (eşitliğin sağındaki terim R ye aittir ve ab, $a \cdot b$ yi gösterir.) A nın sıfır ve birim elemanları R dekilerle aynıdır ve ayrıca A üzerindeki çarpma işleminin R deki çarpma işleminin A ya kısıtlanışıdır. Buna göre A nın bir Boole halkası olduğunu kanıtlayın.

Kanıt : A üzerindeki çarpma işlemini, $\oplus$ ile uyumlu olsun diye $\odot$ ile gösterelim. O halde $< A, \oplus, \odot, 0, 1 >$ in bir Boole halkası olduğunu kanıtlayacağız. Aşağıda yapılan kanıtlarda R nin kullanılan aksiyomlarını açık açık belirtmek çok yer kaplayacağı için bu kullanımlar kapalı geçiştirilecektir.

Önce $0 \cdot 0 = 0$ ve $1 \cdot 1 = 1$ olduğu için eşgüçlü elemanlardır ve A ya aittirler.

A kümesinin $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine kapalı olduğunu gösterelim. Her $a, b \in A$ için

$$
\begin{aligned}
(a \oplus b)(a \oplus b) &= (a + b - 2ab)(a + b - 2ab) \\
&= aa + ab - 2aab + ba + bb - 2abb - 2aab + 2abb + 4abab \\
&= a + ab - 2ab + ba + b - 2ab - 2ab - 2ab + 4ab \\
&= a + b - 2ab \\
&= a \oplus b
\end{aligned}
$$

dir ve

$(a \odot b)(a \odot b) = (ab)(ab) = aabb = ab = a \odot b$ dir.

Şimdi Boole halkası aksiyomlarının A da geçerli olduğunu gösterelim.

R1.
$$
\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= a \oplus (b + c - 2bc) \\
&= a + b + c - 2bc - 2a(b + c - 2bc) \\
&= a + b + c - 2bc - 2ab - 2ac + 4abc \\
&= a + b + c - 2ab - 2ac - 2bc + 4abc
\end{aligned}
$$

dir. Benzer bir hesaplama

$$(a \oplus b) \oplus c = a + b + c - 2ab - 2ac - 2bc + 4abc$$

aynı sonucu verir. O halde $\oplus$ işlemi birleşmelidir.

R2. $a \oplus b = a + b - 2ab$

$= b + a - 2ba$

$= b \oplus a$

dir, dolayısıyla $\oplus$ işlemi değişmelidir.

R3. $a \oplus 0 = 0$ aksiyomunu gerçeklemek için bir sonuca gereksinim vardır.

Lemma 1.1.9 Keyfi bir halkada her a elemanı için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ dır.

Kanıt : $a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ ve $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$, $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ ı gerektirir. O halde $a \cdot 0 = 0$ dır. ■

Bu sonuç kullanılarak aşağıdakiler yazılabilir:

$$a \oplus 0 = a + 0 - 2a \cdot 0 = a + 0 + 0 = a$$

R4. $a \oplus (-a) = 0$

Bunun kanıtı için de bir sonuca ihtiyaç vardır.

Lemma 1.1.10 Keyfi bir halkada her a, b elemanları için $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(ab)$ dir.

Kanıt : Lemma 1.1.9 dan $0 = a \cdot 0$ dır. Şimdi , $0 = a \cdot 0 = a \cdot (b + (-b)) = ab + a(-b)$ $a(-b)$ nin ab nin bir toplamsal tersi olduğunu gösterir. Oysa bir halkada toplam ters eleman biriciktir. Dolayısıyla $a(-b) = -(ab)$ dir. ■

Bu lemma kullanılarak R4 ispatlanır:

$$\begin{aligned} a \oplus (-a) &= a + (-a) - 2a(-a) \\ &= a + (-a) + 2aa \\ &= a + (-a) + 2a \\ &= a + (-a) + a + a \\ &= a + a \\ &= 0 \end{aligned}$$

R5. $$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (bc) \\ &= a(bc) \\ &= (ab)c \\ &= (a \odot b) \odot c \end{aligned}$$

olduğu için $\odot$ işlemi birleşmelidir.

R6. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ olduğunu görmek için işlemler yapıldıktan sonra her iki tarafın aynı sonucu verdiğini görmek yeterlidir.

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= a \odot (b + c - 2bc) \\ &= a(b + c - 2bc) \\ &= ab + ac - 2abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \odot b) \oplus (a \odot c) &= (ab) \oplus (ac) \\ &= ab + ac - 2aabc \\ &= ab + ac - 2abc \end{aligned}$$

O halde R6 gerçeklenmiş olur. R7, R6 gibi gerçeklenir. R8, $1 \in A$ olduğu için açıktır. R değişmeli olduğu için A değişmelidir. Böylece A değişmeli birimli bir halkadır; geriye A nın 2 karakteristikli olduğunu göstermek kalıyor:

$$a \oplus a = a + a - 2aa = a + a - 2a = 2a - 2a = 0. \blacksquare$$

1.2 Boole Cebirleri

X boştan farklı bir küme ve P(X), X in kuvvet kümesi olsun. $\cup, \cap, {}^{c}$ işlemleri P(X) üzerinde sırasıyla küme birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri olmak üzere $< P(X), \cup, \cap, {}^{c}, \varnothing, X >$ kuvvet kümesi cebirini göz önünde bulunduralım. Bu cebirin aritmetiği Boole halkalarının aritmetiği ile çarpıcı benzerlik taşır. Kümeler kavramından aşağıdaki elemanter eşitlikler iyi bilinmektedir.

$A, B, C \in P(\mathrm{X})$ için,

(1) $\varnothing^c = X$, $\quad X^c = \varnothing$

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\quad A \cup X = X$

(3) $A \cap X = A$, $\quad A \cup \varnothing = A$

(4) $A \cap A^c = \varnothing$, $\quad A \cup A^c = X$

(5) $\left(A^c\right)^c = A$

(6) $A \cap A = A$, $\quad A \cup A = A$

(7) $\left(A \cap B\right)^c = A^c \cup B^c$, $\quad \left(A \cup B\right)^c = A^c \cap B^c$

(8) $A \cap B = B \cap A$, $\quad A \cup B = B \cup A$

(9) $A \cap \left(B \cap C\right) = \left(A \cap B\right) \cap C$, $\quad A \cup \left(B \cup C\right) = \left(A \cup B\right) \cup C$

(10) $A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right)$, $\quad A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right)$

Uyarılar 1.2.1 Bu denklemlerin tamamı Boole halkaları aksiyomlarına çok benzerlik gösterse de önemli farklılıklar vardır. Boole halkalarında toplama işlemi eşgüçlü değilken, birleşme işlemi eşgüçlüdür. Toplama işlemi Boole halkalarında çarpma işlemi üzerine dağılmalı değilken, birleşim kesişim üzerine dağılmalıdır. Boole halkaları 2 halkasının bir soyutlamasıdır. $P(\mathrm{X})$ in karşılık gelen soyutlamasına bir Boole cebiri denir. Formel bir tanım şudur:

Tanım 1.2.2 B boştan farklı bir küme; $\vee, \wedge,\ '$, B üzerinde sırasıyla ikili, ikili ve birli işlemler ve 0,1, B nin seçkin elemanları olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $< 2, 2, 1, 0, 0 >$ tipli $< B, \vee, \wedge, ', 0, 1 >$ yapısına bir Boole cebiri denir. Her $a, b, c \in B$ için

B1. $0' = 1$, $\quad 1' = 0$

B2. $a \wedge 0 = 0$, $\quad a \vee 1 = 1$

B3. $a \wedge 1 = a$, $\quad a \vee 0 = a$

B4. $a \wedge a' = 0$, $\quad a \vee a' = 1$

B5. $\left(a'\right)' = a$

B6. $a \wedge a = a$, $\quad a \vee a = a$

B7. $\left(a\wedge b\right)'=a'\vee \mathrm{b}'$, $\left(a\vee b\right)'=a'\wedge b'$

B8. $a\wedge b=b\wedge a$, $a\vee b=b\vee a$

B9. $a\wedge\left(b\wedge c\right)=\left(a\wedge b\right)\wedge c$, $a\vee\left(b\vee c\right)=\left(a\vee b\right)\vee c$

B10. $a\wedge\left(b\vee c\right)=\left(a\wedge b\right)\vee\left(a\wedge c\right)$, $a\vee\left(b\wedge c\right)=\left(a\vee b\right)\wedge\left(a\vee c\right)$

Düalite İlkesi 1.2.3 $\wedge,\vee,\,',0,1$ sembollerinden oluşan bir formül φ olsun. φ formüllerinde $\vee,\wedge$ geçtikleri her yerde ve 0 ve 1 geçtikleri her yerde aralarında değiştirilsin ve sonuçlanan formül φ^d ile gösterilsin. O zaman φ doğru ise φ^d de doğrudur ve tersi de geçerlidir. φ ve φ^d formüllerine düal formüller denir.

O halde B1-B10 aksiyomlarının her biri düal ikili olarak veriliyor. Kanıtlarda bu ikililerden birini kullanmak yeterlidir.

Boole cebirini tanımlayan aksiyom sayısı biraz kabarıktır; onların hepsi birbirinden bağımsız değildir. Huntington [6] ve [7] de Boole cebirini B3, B4, B8 ve B10 aksiyomları ile tanımlanmış ve bu aksiyomların aralarında bağımsız olduğunun bir kanıtını vermiştir. Bununla ilgili olarak [11] e bakılabilir.

Örnek 1.2.4 En basit Boole cebiri iki elemanlı $\{0,1\}$ kümesidir. $\wedge$ ve $\vee$ işlemlerinin bilinen doğruluk çizelgeleri yanında $0'=1$ ve $1'=0$ dır. Örnek 1.1.3 ile karşılaştırın.

Örnek 1.2.5 $A,B\in P(\mathrm{X})$ için $P(\mathrm{X})$ üzerinde Δ simetrik fark işlemi

$$A\Delta B=\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)=\left(A\cap B^c\right)\cup\left(A^c\cap B\right)$$
$$=\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)$$

olarak tanımlanır. O zaman $<P(\mathrm{X}),\,\Delta,\,\cap,\,\varnothing,\,\mathrm{X}>$ bir Boole cebiridir.

Çözüm : Önce $<P(\mathrm{X}),\,\Delta,\,\varnothing>$ nin bir değişmeli grup olduğunu gösterelim.

- Bunun için Δ işleminin özellikle birleşmeli olduğunu kolayca göstermek için Δ nın tanımını mantıksal bağlaç $\not\Leftrightarrow$, $\equiv$, ~ , ($\Leftrightarrow$) aracılığıyla vereceğiz. A ve B iki formül olmak üzere $A\Leftrightarrow B$ eğer A ve B aynı doğruluk değerlerini alıyorsa doğrudur. $A\not\Leftrightarrow B$ ise

A ve Bnin farklı doğrulur değerleri aldığını ifade eder. Şimdi $x \in A \,\Delta\, B$ ancak ve ancak $x \in A$ ve $x \in B$ önermelerinden biri doğru ise gerçeklenir. Bundan dolayı $x \in A \,\Delta\, B$ ancak ve ancak $x \in A \not\Leftrightarrow x \in B$ dir :

$$A \,\Delta\, B = \{\, x \in X \;:\quad x \in A \not\Leftrightarrow x \in B \,\}.$$

Öte yandan önermeler mantığından A $\Leftrightarrow$ (B $\Leftrightarrow$ C) $\equiv$ (A $\Leftrightarrow$ B) $\Leftrightarrow$ C olduğunu biliyoruz. Buradan A $\not\Leftrightarrow$ (B $\not\Leftrightarrow$ C) $\equiv$ (A $\not\Leftrightarrow$ B) $\not\Leftrightarrow$ C elde edilir. O halde Δ işlemi birleşmelidir : A Δ (B Δ C) = (A Δ B) Δ C.

- Her $A \in P(\mathrm{X})$ için $A\Delta\varnothing = A$ olduğu iki türlü gösterilebilir :

$$A\Delta\varnothing = \left(A \setminus \varnothing\right) \cup \left(\varnothing \setminus A\right) = A$$

ya da

$$A\Delta\varnothing = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} :\quad \mathrm{x} \in A \not\Leftrightarrow \mathrm{x} \in \varnothing\} = A$$

dır. Böylece $\varnothing, \Delta$ işleminin sıfırıdır.

- $A \,\Delta\, A = \varnothing$ olduğu yine iki türlü gösterilebilir.

$$A \,\Delta\, A = \left(A \setminus A\right) \cup \left(A \setminus A\right) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

ya da

$$A \,\Delta\, A = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} :\quad \mathrm{x} \in A \not\Leftrightarrow \mathrm{x} \in A\} = \varnothing$$

dır, çünkü bir eleman aynı anda A ya ve A nın değiline ait olamaz. Böylece her eleman kendisinin simetrik fark tersidir.

- $A\Delta B = B\Delta A$ olduğu da iki türlü gösterilebilir.

$$A\Delta B = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} :\quad \mathrm{x} \in A \not\Leftrightarrow \mathrm{x} \in B\}$$

$$= \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} :\quad \mathrm{x} \in B \not\Leftrightarrow \mathrm{x} \in A\} = B\Delta A$$

ya da

$$A \,\Delta\, B = \left(A \setminus B\right) \cup \left(B \setminus A\right) = \left(B \setminus A\right) \cup \left(A \setminus B\right) = B\Delta A$$

O halde Δ işlemi değişmelidir. Neticede $< P(\mathrm{X}), \Delta, \varnothing >$ nin bir Abel grubu olduğunu gösterdik.

- Küme kesişim işlemi $\cap$ değişmeli, birleşmelidir ve X kümesini birim eleman kabul eder.
- $\cap$ nin Δ üzerine dağılmalı olduğunu gösterirken $\wedge$ (ve) bağlacının değişmeli, birleşmeli ve $\not\Leftrightarrow$ bağlacı üzerine dağılmalı olduğu özelliklerinden yararlanacağız.

$$
\begin{aligned}
A\cap\left(B\Delta C\right) &= \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}: \quad \mathrm{x} \in A \wedge (\mathrm{x} \in B \not\Leftrightarrow \mathrm{x} \in C)\} \\
&= \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}: \quad (\mathrm{x} \in A \wedge \mathrm{x} \in B) \not\Leftrightarrow (\mathrm{x} \in A \wedge \mathrm{x} \in C)\} \\
&= \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}: \quad \mathrm{x} \in A \wedge \mathrm{x} \in B\} \not\Leftrightarrow \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}: \quad \mathrm{x} \in A \wedge \mathrm{x} \in C\} \\
&= \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}: \quad \mathrm{x} \in A\cap B\} \not\Leftrightarrow \{\mathrm{x} \in \mathrm{X}: \quad \mathrm{x} \in A\cap C\} \\
&= \left(A\cap B\right)\Delta\left(A\cap C\right)
\end{aligned}
$$

dir. Şu ana kadar $< P(\mathrm{X}), \Delta, \cap >$ nin değişmeli birimli bir halka olduğunu gösterdik. Her $A \in P(\mathrm{X})$ için $A\cap A = A$ olduğundan halka bir Boole halkasıdır. Aslında Δ ve $\cap$ işlemleri B1-B10 aksiyomlarının tamamını sağlar; yani $< P(\mathrm{X}), \Delta, \cap, \varnothing, \mathrm{X} >$ bir Boole cebiridir. ■

1.3 Boole Cebirleri ve Boole Halkaları

Boole cebirleri ve Boole halkalarının teorileri çok yakından bağlantılıdır; aslında bu kuramlar aynı konuya farklı yollardan yaklaşırlar. Daha açık biçimde ifade etmek gerekirse, her Boole cebiri uygun toplama ve çarpma işlemleri tanımlanarak bir Boole halkasına ve tersine, her Boole halkası uygun $\vee, \wedge, '$ işlemleri tanımlanarak bir Boole cebirine dönüştürülebilir. Bunu gerçeklemenin en kesin yolu P(X) Boole cebiri ile 2^X Boole halkasını karşılaştırmaktan geçer.

Tanım 1.3.1 X bir küme ve A, X in bir alt kümesi olsun. A nın karakteristik fonksiyonu

$$a(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & x \in A \quad \text{ise} \\ 0 & x \notin A \quad \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Karakteristik fonksiyonu göstermek için yaygın semboller $X_A, 1_A$ dır; biz 1_A yı kullanacağız.

1.3.1 Boole Cebirinden Boole Halkasına Geçiş

$P(\mathrm{X})$de toplama ve çarpma işlemleri, sıfır ve birim elemanı nasıl tanımlanmalıdır ki $P(\mathrm{X})$ Boole cebiri bir Boole halkası olsun? Bu soruyu yanıtlamak için 2^X deki halka işlemlerinin tanımlarını yakından incelemek ve $P(\mathrm{X})$ ile 2^X arasındaki bire-bir eşlemeyi göz önünde bulundurmak yardımcı olacaktır.

$A, B \in P(\mathrm{X})$ ve $1_A, 1_B$ karakteristik fonksiyonları olsun. $P(\mathrm{X})$de toplama ve çarpmayı tanımlamak istiyoruz. Her x ∈ X için

$$\left(1_A + 1_B\right)(\mathrm{x}) = 1_A(\mathrm{x}) + 1_B(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & 1_A(\mathrm{x}) \neq 1_B(\mathrm{x}) \quad \text{ise} \\ 0 & 1_A(\mathrm{x}) = 1_B(\mathrm{x}) \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$\left(1_A \cdot 1_B\right)(\mathrm{x}) = 1_A(\mathrm{x}) \cdot 1_B(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1 & 1_A(\mathrm{x}) = 1_B(\mathrm{x}) \quad \text{ise} \\ 0 & 1_A(\mathrm{x}) = 1_B(\mathrm{x}) \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir. Buna göre $P(\mathrm{X})$ de halka toplam ve çarpım

$$A + B = \left(A \cap B^c\right) \cup \left(A^c \cap B\right) \text{ ve } A \cdot B = A \cap B$$

olarak yazılır. $A + B$ nin $A \,\Delta\, B$ ile aynı olduğuna dikkat edelim. Ayrıca $1_\varnothing(\mathrm{x}) = 0$ ve $1_X(\mathrm{x}) = 1$ dir. Bu işlemler altında ve 0,1 elemanlarıyla $P(\mathrm{X})$ in bir Boole halkasına dönüştüğü açıktır.

1.3.2 Boole Halkasından Boole Cebirine Geçiş

2^X halkası da bir Boole cebirine benzer yaklaşımla dönüştürülebilir. $A, B \in P(\mathrm{X})$ ve $1_A(\mathrm{x}), 1_B(\mathrm{x})$ A ve B nin karakteristik fonksiyonları olsun.

$$x \in A \cup B \iff x \in A \quad \text{ya da} \quad x \in B$$

$$\iff 1_A(\mathrm{x}) = 1 \quad \text{veya} \quad 1_B(\mathrm{x}) = 1$$

$$\iff 1_A(\mathrm{x}) \neq 1_B(\mathrm{x}) \quad \text{ya da} \quad 1_A(\mathrm{x}) = 1_B(\mathrm{x})$$

$$\iff 1_A(\mathrm{x}) + 1_B(\mathrm{x}) + 1_A(\mathrm{x}) \cdot 1_B(\mathrm{x}) = 1$$

$$\iff \left(1_A + 1_B + 1_A \cdot 1_B\right)(\mathrm{x}) = 1$$

ve

$$x \in A^c \iff x \notin A$$

$$\iff 1_A(\mathrm{x}) \neq 1$$

$$\iff 1_A(\mathrm{x}) \neq 1_1(\mathrm{x})$$

$$\iff 1_A(\mathrm{x}) + 1_1(\mathrm{x}) = 1$$

$$\iff \left(1_A + 1_1\right)(\mathrm{x}) = 1$$

dir. Bu gözlemler 2^X de $\vee$ ve $'$ işlemlerinin

$$a \vee b = a + b + ab \quad \text{ve} \quad a' = a + 1$$

olarak tanımlanmasını önerir.

Öte yandan

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \\
&\Leftrightarrow 1_A(\mathrm{x}) = 1 \text{ ve } 1_B(\mathrm{x}) = 1 \\
&\Leftrightarrow 1_A(\mathrm{x}) \cdot 1_B(\mathrm{x}) = 1 \\
&\Leftrightarrow (1_A \cdot 1_B)(\mathrm{x}) = 1
\end{aligned}
$$

olması nedeniyle de $a \wedge b = ab$ şeklinde tanımlanır. Sıfır ve birim elemanlarının her iki cebirde çalıştığı görülür. Böylece bu işlemler altında ve sıfır, birim elemanlarıyla 2^X in bir Boole cebiri olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 1.3.2.1 B_1 ve B_2 iki Boole cebiri ve $f : B_1 \to B_2$ bir dönüşüm olsun. Eğer f işlemleri ve seçkin elemanları koruyorsa, f ye bir (Boole) izomorfizması denir. Daha açık olarak

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b), \qquad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$

$$f(a') = f(a)', \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1$$

ise f ye B_1 den B_2 ye bir (Boole) izomorfizması denir.

Bu bölümü [3] den alınan iki soruyu çözerek sonlandırıyoruz.

Soru 1.3.2.2 ([3], Soru 1, sayfa 18)

$P(\mathrm{X})$ ve 2^X Boole cebirlerinin X in her bir alt kümesini karakteristik fonksiyonuna götüren dönüşüm aracılığıyla izomorf olduklarını kanıtlayın.

Kanıt : $\varphi : P(\mathrm{X}) \to 2^X$ dönüşümünün bir (Boole) izomorfizması olduğunu göstereceğiz. Bu dönüşüm herbir $A \in P(\mathrm{X})$ elemanını A nın 1_A karakteristik fonksiyonuna götürsün; 2^X in elemanlarının X üzerinde 2 değerli; yani 0 ya da 1 değerini alan, fonksiyonlar olduğunu anımsayalım.

F = {x ∈ X : $f(\mathrm{x})=1$ } kümesine f nin destek kümesi diyelim ve f fonksiyonunun F kümesini ve de F kümesinin f fonksiyonunu tam olarak belirlediğini kaydedelim. Başka bir deyişle f, F kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

- φ dönüşümü bire-birdir. Gerçekten $A, \mathrm{B} \in \mathrm{P(X)}$ için $\varphi(A)=\varphi(B)$, yani $1_A = 1_B$ varsayalım. O zaman A ve B, 2^X de aynı elemanın destek kümeleridir, dolayısıyla A ve B eşit olmak zorundadır.
- φ dönüşümü örtendir. Bunun için her $f \in 2^X$ için $\varphi(A)=f$ olacak şekilde en az bir $A \in P(\mathrm{X})$ olması gerekir. Oysa 2^X deki her eleman destek kümesinin görüntüsüdür, o nedenle $\varphi(A)=f$ tam buna karşılık gelir.
- $\varphi(\varnothing)=1_{\varnothing}=0$ ve $\varphi(X)=1_X=1$ olduğundan φ, $P(\mathrm{X})$ deki $\varnothing$ sıfırını 2^X deki 0 sabit fonksiyonuna ve X birimini 2^X deki 1 sabit fonksiyonuna götürür; başka bir ifade ile φ seçkin elemanları korur.
- φ işlemleri korur. $A, B \in P(\mathrm{X})$ olsun.
  - Önce $\varphi(A \cup B)=\varphi(A) \vee \varphi(B)$ yi gösterelim.

2^X deki $1_A \vee 1_B$ her $x \in X$ için

$$(1_A \vee 1_B)(\mathrm{x}) = 1_A(\mathrm{x}) \vee 1_B(\mathrm{x})$$

olarak tanımlanır. Şimdi

$$\begin{aligned} 1_A(\mathrm{x}) \vee 1_B(\mathrm{x}) = 1 &\Leftrightarrow 1_A(\mathrm{x}) = 1 \text{ ya da } 1_B(\mathrm{x}) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ya da } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

olduğu için

$$\left(1_A \vee 1_B\right)(\mathrm{x})=1 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$$

sonuçlandırılır. Başka bir ifadeyle 1_A ve 1_B , $A \cup B$ birleşiminin karakteristik fonksiyonudur ve φ dönüşümünün verilişinden

$$\varphi\left(1_A\right) \vee \varphi\left(1_B\right)=1_A \vee 1_B=\varphi(A \cup B)$$

elde edilir.

- 2^X de $1_A \wedge 1_B$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$\left(1_A \wedge 1_B\right)(\mathrm{x})=1_A(\mathrm{x}) \wedge 1_B(\mathrm{x})$$

olarak tanımlanır. Şimdi

$$\begin{aligned} 1_A(\mathrm{x}) \wedge 1_B(\mathrm{x})=1 & \Leftrightarrow 1_A(\mathrm{x})=1 \text{ ve } 1_B(\mathrm{x})=1 \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \\ & \Leftrightarrow x \in A \cap B \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(1_A \wedge 1_B\right)(\mathrm{x})=1 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in A \cap B$$

sonucu çıkar ve buradan

$$\varphi(A) \wedge \varphi(B)=1_A \wedge 1_B=\varphi(A \cap B)$$

gerçeklenmiş olur.

- Son olarak $\varphi(A)'=1_A'=\varphi\left(A^c\right)$ olduğundan φ nin bir (Boole) izomorfizması olduğunun kanıtı tamamlanmış olur. ■

Bu bölümü [3] deki bir diğer ilginç soruyu çözerek sonlandırıyoruz.

Soru 1.3.2.3 ([3], Soru 3, Sayfa 19)

m pozitif bir tamsayı ve A, m nin tüm pozitif bölenlerinin kümesi olsun. A nın Boole yapısını

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \\ 1 &= m \\ p \wedge q &= ebob\{p,q\} \\ p \vee q &= ekok\{p,q\} \\ p' &= m/p \end{aligned}$$

denklemleri ile tanımlayalım. Kanıtlayın : A bir Boole cebiri oluşturur ancak ve ancak m kare-bağımsız (yani, m asalın karesine bölünmez) dır.

Kanıt : Bu soruyu kanıtlayabilmek için A da her bir Boole aksiyomunun gerçeklenmesini, $P(\mathrm{X})$ Boole cebirindeki küme kuramsal eşitliklerin gerçeklemesine dönüştürmek akılcı olacaktır; o nedenle bazı aksiyomlar kullanacağız. $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$ pozitif tamsayıların kümesini göstersin. $P = \{p \mid m : \ p \text{ asal } \} \subseteq A$, yani P , m nin asal bölenlerinden oluşsun. Eğer F, $\mathbb{N}$ nin sonlu bir alt kümesi ise F nin elemanlarının çarpımını f ile gösterelim : $f = \prod F$. Bir uzlaşma olarak $1 = \prod \varnothing$ dır. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için $n \mid m \Leftrightarrow n = \prod N$ olacak şekilde bir $N \subseteq P$ kümesi vardır; aslında böyle bir n için karşılık gelen N kümesi n nin tam olarak asal bölenlerini içerir. Bu gözlem sonunda A nın elemanları $Q \subseteq P$ olmak üzere $q = \prod Q$ tamsayılarından ibarettir.

Şimdi Q ve R , P nin alt kümeleri ve $q = \prod Q$ ve $r = \prod R$ ise o zaman A üzerinde verilen $\vee, \wedge, '$ işlemleri kümesel olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$1 = \prod \varnothing$$

$$m = \prod P$$

$$q \wedge r = ebob\{q,r\} = \prod (Q \cap R)$$

$$q \vee r = ekok\{q, r\} = \sqcap(Q \cup R)$$

$$q' = m / q = \sqcap Q'$$

burada $Q' = P \setminus Q$ küme kuramsal tümleyendir. Artık bundan sonra B1-B10 aksiyomlarını gerçeklemek kolaydır. Bazılarını gösterelim :

B3. $q \wedge 1 = ebob\{q, 1\} = \sqcap(Q \cap P) = \sqcap Q = q$

B7. $(q \wedge r)' = \sqcap((Q \cap R)') = \sqcap((Q' \cup R')) = q' \vee r'$

B10. $q \vee (r \wedge s) = \sqcap(Q \cup (R \cap S))$

$$= \sqcap((Q \cup R) \cap (Q \cup S)) = (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

Böylece m kare-bağımsız ise A bir Boole cebiri oluşturur.

Koşul Gerektir : Karşıt ters kanıt verelim : m kare-bağımsız değilse A bir Boole cebiri değildir. Bu durumda $p \in P$ için p^2, m yi böler. Şimdi $p,$ hem p yi hem de m / p yi böldüğü için $p,$ $ebob\{p, m / p\}$ yi de böler. Bunun bir sonucu olarak $ebob\{p, m / p\} \neq 1$ elde edilir. Oysa $1 = \sqcap \varnothing$ ve $p \wedge q = ebob\{p, q\}$ ve tümleyen tanımlarından $ebob\{p, m / p\} \neq 1,$ $p \wedge p' \neq 0$ anlamına gelir ki bu bir çelişkidir; burada $0, A$ nın sıfır elemanıdır, bir tamsayı değildir. ■

1.4. Topolojik Kavramlar

Bu kesimde, Bölüm 2 de vereceğimiz topolojiksel Boole cebiri örneği için gerekli tanım ve örnekleri vereceğiz. Boole cebirlerinin önemli örnekleri topolojik uzaylar kullanılarak oluşturulabilir. Bunların arasında Regüler Açık Kümelerin tanımladığı Boole Cebiridir.

Tanım 1.4.1 X boştan farklı bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa (X, τ) ya bir topolojik uzay ve τ ya X in ya da uzayın topolojisi denir.

T1. $\varnothing \in \tau$ ve $x \in \tau$

T2. $A, B \in \tau$ ise $A \cap B \in \tau$ dir ; yani τ sonlu kesişime kapalıdır.

T3. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ τ nin elemanlarının bir ailesi ise $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \in \tau$ dir; yani τ keyfi birleşime kapalıdır.

X in elemanlarına noktalar ve τ nun elemanlarına açık kümeler denir. Bir $x \in X$ noktasını içeren bir açık kümeye x in komşuluğu denir.

Örnekler 1.4.2 Keyfi X kümeleri üzerinde bazı topoloji türleri tanımlanabilir.

(a) $\tau = P(\mathrm{X})$ ise (X, τ) uzayına ayrık uzay denir; bu uzayda her alt küme açıktır.

(b) $\tau = \{\varnothing, X\}$ ise (X, τ) uzayına ayrık olmayan ya da kaba topolojik uzay denir.

(c) $(X, \tau) = \{A \subseteq X :\ A^c \text{ sonlu}\} \cup \{\varnothing\}$ ise (X, τ) uzayına tümleyeni sonlu (cofinite) topolojik uzay denir.

X sonlu bir kümse ise (a) ve (c) uzaylarının çakıştığını ancak X sonsuz ise tamamen farklı olduklarını belirtelim.

(d) (X, τ) bir topolojik uzay ve Y, X in bir alt kümesi olsun.

$\tau_Y = \{\mathrm{O} \cap Y : \mathrm{O} \in \tau\}$ diyelim. O zaman (Y, τ_Y) nin T1-T3 koşullarını sağladığı açıktır. Bunun üzerine (Y, τ_Y) uzayına (X, τ) nun bir topolojik alt uzayı denir.

Örneğin, $X = \mathbb{R}$ alınırsa, τ topolojisi açık aralıkları açık küme kabul eder. $Y = [0,1] \subset X$ göz önünde bulundurulursa τ_Y nin açık kümeleri , $0 \le a \le b \le 1$ olmak üzere, $[0, a)$,(a, b) ,$(a,1]$ ve $[0,1]$ alt aralıklarıdır. $[0, a)$ ve $(a,1]$ türü kümelerin τ ya ait olmadıklarını kaydedelim.

Bir X kümesi üzerinde bir topoloji kapalı kümeler aracılığıyla da tanımlanabilir. X de bir açık kümenin tümleyenine bir kapalı küme denir ve T1-T3 koşullarının düalleri alınarak X üzerinde bir topoloji tanımlanır.

Tanım 1.4.3 X bir topolojik uzay ve P, X in bir alt kümesi olsun.

(i) P nin kapsadığı açık kümelerin birleşimine P nin içi denir ve P^o ya da $Int(P)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle P^o, P nin kapsadığı en büyük açık kümedir.

(ii) P yi kapsayan kapalı kümelerin kesişimine P nin kapanışı denir ve P^- ya da $Cl(P)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle P^-, P yi kapsayan en küçük kümedir.

Lemma 1.4.4 (X, τ) bir topolojik uzay ve P, X in bir alt kümesi olsun. O zaman $P^- = \{x \in X : \quad Q \cap P \neq \emptyset,\ Q, x$ in keyfi bir komşuluğudur$\}$; yani

$x \in P^- \Leftrightarrow \forall Q(x)$ komşuluğu için $Q(x) \cap P \neq \emptyset$ dir.

Kanıt : $x \in P^-$ olsun ve x in bir Q komşuluğu için $P \cap Q = \emptyset$ varsayalım. O zaman Q^c kapalı bir kümedir ve P yi kapsar, dolayısıyla kesişimi P^- olan kapalı kümelerin koleksiyonuna aittir. $x \notin Q^c$ nedeniyle $x \notin P^-$ elde edilir, çelişki. O halde $x \in P^- \Rightarrow Q \cap P \neq \emptyset$, Q x nin açık komşuluğudur. Şimdi x in her komşuluğunun P ile boştan farklı bir arakesite sahip olduğunu varsayalım ve $x \in P^-$ olduğunu gösterelim. Eğer, Q, P yi kapsayan bir kapalı küme ise o zaman $Q^c \cap P = \emptyset$ dır ve $x \notin Q^c$ sonuçlanır. O halde x, Q ya aittir. Bu ise x in P yi kapsayan her kapalı kümeye, dolayısıyla P^- ye ait olması gerektiğini ifade eder. ■

Lemma 1.4.5 (X, τ) bir topolojik uzay ve $P \subseteq X$ olsun. O zaman

$P^- = P^{coc}$ dir.

Kanıt : $P^{co} \subseteq P^{c}$ açık küme tanımından dolayı doğrudur. Tümleyene geçersek, $P^{cc} \subseteq P^{coc}$ sonuçlanır; yani $P \subseteq P^{coc}$ dir. Şimdi P^{coc} kapalı bir küme ve P^{-}, P yi kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $P^{-} \subseteq P^{coc}$ elde edilir. $P^{coc} \subseteq P^{-}$ kapsamını göstermek için P yi kapsayan herhangi bir Q kapalı kümesini göz önünde bulunduralım : $P \subseteq Q$. Buradan $Q^{c} \subseteq P^{c}$ olur ve Q^{c} bir açık kümedir. P^{co}, P^{c} nin kapsadığı en büyük açık küme olduğu için $Q^{c} \leq P^{co}$ dir. Her iki tarafın tümleyenini alırsak $P^{coc} \subseteq Q^{cc} = Q$ elde edilir. Bu P yi kapsayan her kapalı kümenin P^{coc} yi de kapsadığını gösterir ; P^{coc} özellikle P^{-} yi kapsar : $P^{-} \subseteq P^{coc}$. Böylece $P^{-} = P^{coc}$ olduğu kanıtlanmış olur. ■

Sonuç Teorem 1.4.6 $P^{o} = P^{c-c}$ dir.

Kanıt : Lemma 1.4.5 deki eşitlikte P yi P^{c} ile değiştirelim ve her iki tarafın tümleyenini alalım :

$$P^{c-} = P^{ccoc}$$
$$P^{c-} = P^{oc}$$
$$\left(P^{c-}\right)^{c} = \left(P^{oc}\right)^{c}$$
$$P^{c-c} = P^{occ}$$
$$P^{c-c} = P^{o} \quad ■$$

Aşağıdaki Lemma ilgili tanımlar kullanılarak kanıtlabilir.

Lemma 1.4.7 (X, τ) bir topolojik uzay ve $P, Q \subseteq X$ olsun. O zaman

(a) $P \subseteq Q$ ise $P^{o} \subseteq Q^{o}$

(b) $\left(P \cap Q\right)^{o} = P^{o} \cap Q^{o}$

(c) $P \subseteq Q$ ise $P^{-} \subseteq Q^{-}$

(d) $\left(P \cup Q\right)^{-} = P^{-} \cup Q^{-}$

(e) $P \cap Q^{-} \subseteq \left(P \cap Q\right)^{-}$, P açık

(f) $P \cap Q^- = (P \cap Q)^-$, P açık ve kapalı

(g) $(P \cap Q)^- = P^- \cap Q^-$, P ve Q açık ■

Tanım 1.4.8 (X, τ) bir topolojik uzay ve $P, Q \subseteq X$ olsun.

(i) $P^- = X$ ise P kümesine yoğun denir.

(ii) $Q \subseteq P^-$ ise P bir Q açık kümesinde yoğundur denir.

(iii) Herhangi boştan farklı bir açık kümede yoğun olmayan bir kümeye hiçbir yerde yoğun değildir denir. P hiçbir yerde yoğun değildir eğer ve yalnız eğer P^{-c} yoğundur.

(iv) Hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir bir birleşimi olan bir kümeye zayıf küme denir.

(v) $x \in X$ in her komşuluğu P nin noktalarını ve P^c nin noktalarını içeriyorsa x noktasına P kümesinin bir sınır noktası denir. Başka bir ifadeyle hem P nin hem de P^c nin kapanışına ait bir x noktasına P nin bir sınır noktası denir. P nin tüm sınır noktalarının kümesi $P^- \cap P^{c-}$ dir ve ∂P ya da $bd(P)$ veya $Fr(P)$ ile gösterilir. ∂P nin her zaman kapalı bir küme olduğunu belirtelim.

(vi) Kapanışının içi ile çakışan bir açık kümeye regüler denir; yani P regülerdir eğer ve yalnız eğer $P = P^{-o}$, ya da sonuç teoremi 1.4.6 gereği, $P = P^{-c-c}$ dir. Sadelik açısından $P^{\perp} = P^{-c}$ yazıldığında, P regülerdir eğer ve yalnız eğer $P = P^{\perp\perp}$ dir.

Örnekler 1.4.9

(a) Rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ de yoğundur. $\mathbb{R}^2$ de rasyonel koordinatlı noktaların kümesi $\mathbb{R}^2$ de yoğundur fakat pozitif rasyonel koordinatlı noktaların kümesi $\mathbb{R}^2$ nin birinci dörtlüğünde yoğun iken $\mathbb{R}^2$ de yoğun değildir.

(b) Tamsayıların kümesi $\mathbb{R}$ de hiçbir yerde yoğun değildir. Bir ayrık uzayda sadece boş küme hiçbir yerde yoğun değildir. Tümleyeni sonlu bir sonsuz topolojik uzayda bir küme sonlu ise hiçbir yerde yoğun değildir.

(c) Bir ayrık uzayda sadece boş küme zayıftır. Tümleyeni sonlu sonsuz bir topolojik uzayda bir küme ancak sayılabilir ise zayıftır.

(d) Bir ayrık uzayda noktaların her kümesi bir regüler açık kümedir. Tümleyeni sonlu sonsuz bir topolojik uzayda sadece boş küme ve uzayın tamamı regüler açık kümelerdir.

BÖLÜM 2

REGÜLER AÇIK KÜMELER VE BOOLE CEBİRLERİ

Boole cebirlerine verilebilecek en ilginç örneklerden biri, elemanları bir kümenin alt kümeleri olan fakat $P(X)$ Boole cebirinin işlemlerinden farklı işlemlere sahip, bir topolojik uzayın regüler açık kümelerinin oluşturduğu Boole cebiridir. Bu bölümde bir (X,τ) bir topolojik uzayının tüm regüler açık kümelerinin koleksiyonunun bir Boole cebiri oluşturduğu ayrıntılarıyla gösterildikten sonra birkaç özel topolojik uzayın regüler açık alt kümelerinin Boole cebirleri ilgili [3] de yer alan sorular çözülüyor.

2.1 Tam Boole Cebiri Örneği

Tanım 2.1.1 Her alt kümesi supremum ve infimuma sahip bir Boole cebirine tam Boole cebiri denir.

Teorem 2.1.2 $(X,\ \tau)$ bir topolojik uzay olsun. X in tüm regüler açık kümelerinin koleksiyonu aşağıdaki Boole seçkini elemanları ve işlemlerine göre bir Boole cebiridir : P,Q regüler açık kümeleri için

(1) $0=\varnothing$

(2) $1=X$

(3) $P\wedge Q=P\cap Q$

(4) $P\vee Q=\left(P\cup Q\right)^{\perp\perp}$

(5) $P'=P^{\perp}$

Regüler açık kümelerin her hangi bir $\{P_i\}$ ailesinin supremumu ve infimumu mevcuttur ve sırasıyla $\left(\bigcup_i P_i\right)^{\perp\perp}$ ve $\left(\bigcap_i P_i\right)^{\perp\perp}$ dir. Başka bir deyişle, Boole cebiri tamdır.

Kanıt : Teoremin ifadesinde tanımlanan (1) - (5) eşitliklerinin anlamlı olabilmesi için her şeyden önce bu eşitliklerin sağ taraflarının regüler açık kümeler olduğu gösterilmelidir. Tanım 1.4.8 (vi) dan $P^{\perp} = P^{-c}$ ve $P = P^{\perp\perp}$ regüler açık küme tanımını anımsayalım.

(1) $\varnothing = \varnothing^{\perp\perp}$ ve (2) $X = X^{\perp\perp}$ aşikar olduğu için $\varnothing$ ve X regüler açık kümelerdir.

Bununla birlikte (4) ve (5) tanımları sıradışı gibi görünmektedir. ; (3) tanımı doğal gibi karşılansa da iki regüler kümenin kesişiminin bir regüler küme olduğunu göstermek için bazı aşamalardan geçmek gerekecektir.

(4) ve (5) in doğrulanması :

Lemma 2.1.3 $P \subseteq Q$ ise $Q^{\perp} \subseteq P^{\perp}$ dir.

Kanıt : $P \subseteq Q \Rightarrow P^{-} \subseteq Q^{-}$ (Lemma 1.4.7. (c))

$P \subseteq Q \Rightarrow Q^{-c} \subseteq P^{-c}$ (Kümesel Sonuç)

$P \subseteq Q \Rightarrow Q^{\perp} \subseteq P^{\perp}$ ($\perp$ tanımı) ■

Lemma 2.1.4 P açık ise $P \subseteq P^{\perp\perp}$ dir.

Kanıt : $P \subseteq P^{-}$ (Tanım 1.4.3. (ii))

$P^{-c} \subseteq P^{c}$ (Kümesel sonuç)

$P^{\perp} \subseteq P^{c}$ ($\perp$ tanımı)

$P^{\perp -} \subseteq P^{c-}$ (Lemma 1.4.7. (c))

$P^{\perp -} \subseteq P^{c}$ (P^{c} kapalı)

$P^{cc} \subseteq P^{\perp - c}$ (Kümesel sonuç)

$P \subseteq P^{\perp\perp}$ ■

Lemma 2.1.5 P açık ise $P^{\perp} = P^{\perp\perp\perp}$ dir.

Kanıt : $P^{\perp} \subseteq P^{\perp\perp\perp}$ dir :

$P \subseteq P^{\perp\perp}$ (Lemma 2.1.4.)

$P^{\perp} \subseteq P^{\perp\perp\perp}$ (P yerine $P^{\perp}$ alındı)

$P^{\perp\perp\perp} \subseteq P^{\perp}$ dir :

$P \subseteq P^{\perp\perp}$ (Lemma 2.1.4)

$P^{\perp\perp\perp} \subseteq P^{\perp}$ (Lemma 2.1.3)

O halde $P^{\perp} = P^{\perp\perp\perp}$ dir. ■

Şimdi bu son lemmanın bir sonucu olarak şunu söyleyebiliriz : P açık ve $P^{\perp} = \left(P^{\perp}\right)^{\perp\perp}$ olduğundan, $P^{\perp}$ regülerdir. O halde (5) in sağ tarafı doğrulanmış oldu. Ayrıca $\left(P \cup Q\right)^{\perp}$ daima açık olduğu için Lemma 2.1.5. gereği $\left(P \cup Q\right)^{\perp} = \left(P \cup Q\right)^{\perp\perp\perp}$ yazarak (4) ün de anlamlı olduğu elde edilir.

(3) ün doğrulanması

Lemma 2.1.6 P ve Q açık ise $\left(P \cap Q\right)^{\perp\perp} = P^{\perp\perp} \cap Q^{\perp\perp}$ dir.

Kanıt : $P \cap Q \subseteq P$ (Kümesel Sonuç)

$P \cap Q \subseteq Q$ (Kümesel Sonuç)

$P^{\perp} \subseteq \left(P \cap Q\right)^{\perp}$ (Lemma 2.1.3)

$Q^{\perp} \subseteq \left(P \cap Q\right)^{\perp}$ (Lemma 2.1.3)

$\left(P \cap Q\right)^{\perp\perp} \subseteq P^{\perp\perp}$ (Lemma 2.1.3)

$$(P \cap Q)^{\perp\perp} \subseteq Q^{\perp\perp} \qquad \text{(Lemma 2.1.3)}$$

$$(P \cap Q)^{\perp\perp} \subseteq P^{\perp\perp} \cap Q^{\perp\perp} \qquad \text{(Kümesel Sonuç)}$$

$P^{\perp\perp} \cap Q^{\perp\perp} \subseteq (P \cap Q)^{\perp\perp}$ kapsamını göstermek için topolojik bir sonuca gereksinim vardır.

Lemma 2.1.7 P açık ise $P \cap Q^{-} \subseteq (P \cap Q)^{-}$ dir.

Kanıt : $x \in P \cap Q^{-} \Rightarrow x \in P$ ve $x \in Q^{-}$

$\Rightarrow x \in P$ ve (x in her N komşuluğu için $N \cap Q \neq \varnothing$) (Lemma 1.4.4)

$\Rightarrow x \in P$ ve $(N \cap Q \neq \varnothing)$

$\Rightarrow x \in (P \cap N) \cap Q \neq \varnothing$

$\Rightarrow x \in (P \cap Q)^{-}$ ($P \cap N, x$ in komşuluğu)

O halde $P \cap Q^{-} \subseteq (P \cap Q)^{-}$ dir. ■

Şimdi $\subseteq$ kapsamını göstermek için bu lemmadan yararlanacağız.

$$P \cap Q^{-} \subseteq (P \cap Q)^{-} \qquad \text{(Lemma 2.1.7)}$$

$$(P \cap Q)^{-c} \subseteq (P \cap Q^{-})^{c} \qquad \text{(Kümesel Sonuç)}$$

$$(P \cap Q)^{\perp} \subseteq (P \cap Q^{-})^{c} \qquad (\perp \text{ nın tanımı})$$

$$(P \cap Q)^{\perp} \subseteq P^{c} \cup Q^{-c} \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$(P \cap Q)^{\perp} \subseteq P^{c} \cup Q^{\perp} \qquad (\perp \text{ nin tanımı})$$

$$(P \cap Q)^{\perp -} \subseteq (P^{c} \cup Q^{\perp})^{-} \qquad \text{(Lemma 1.4.7.(c))}$$

$$(P^{c} \cup Q^{\perp})^{-c} \subseteq (P \cap Q)^{\perp - c} \qquad \text{(Kümesel sonuç)}$$

$$\left(P^{c}\cup Q^{\perp}\right)^{-c}\subseteq\left(P\cap Q\right)^{\perp\perp}\qquad (\perp \text{ nin tanımı})$$

$$\left(P^{c-}\cup Q^{\perp-}\right)^{c}\subseteq\left(P\cap Q\right)^{\perp\perp}\qquad (\text{Lemma 1.4.7. (d) })$$

P açık, P^{c} kapalı, dolayısıyla $P^{c-}=P^{c}$ olduğuna dikkat çekersek,

$$P^{cc}\cap Q^{\perp-c}\subseteq\left(P\cap Q\right)^{\perp\perp}\qquad (\text{De Morgan})$$

$$P\cap Q^{\perp\perp}\subseteq\left(P\cap Q\right)^{\perp\perp}\qquad (\perp \text{ nin tanımı})$$

Bu son kapsamada P yerine $P^{\perp\perp}$ alalım ve aynı kapsamayı P ve Q nun rollerini değiştirerek, tekrar uygulayarak

$$P^{\perp\perp}\cap Q^{\perp\perp}\subseteq\left(P^{\perp\perp}\cap Q\right)^{\perp\perp}\subseteq\left(P\cap Q\right)^{\perp\perp\perp\perp}$$

sonuçlanır. Artık Lemma 2.1.5 den $P^{\perp\perp}\cap Q^{\perp\perp}\subseteq\left(P\cap Q\right)^{\perp\perp}$ elde edilir. ■

Lemma 1.2.6 iki regüler açık kümenin arakesitinin regüler olduğunu anlatır. Böylece (1) - (5) eşitliklerinin anlamlı olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi B1 - B10 aksiyomlarından bazılarını gerçekleyeceğiz.

B1. $0^{\perp}=\varnothing^{-}{}'$ (Tanım)

$=\varnothing'$ ($\varnothing$ kapalı)

$=X$

$=1$

$1^{\perp}=X^{-}{}'$ (Tanım)

$=X'$ (X kapalı)

$=\varnothing$

$=0$

B2. $P \wedge 0 = P \cap \varnothing = \varnothing = 0$

$P \vee 1 = 1$ olduğunu göstermek için, X kümesinin regüler olduğunu kullanıyoruz.

$P \vee 1 = \left(P \cup X\right)^{\perp\perp}$ (Tanım)

$= X^{\perp\perp}$ ($P \subset X$)

$= X$ (X regüler)

$= 1$

B3. $P \wedge 1 = P \cap X = P$

$P \vee 0 = \left(P \cup \varnothing\right)^{\perp\perp} = P^{\perp\perp} = P$

B5. P regüler olduğu için $P' = P^{\perp}$ tanımından $\left(P'\right)' = \left(P^{\perp}\right)^{\perp} = P^{\perp\perp} = P$ elde edilir.

B6. $P \wedge P = P \cap P = P$ ve $P \vee P = \left(P \cup P\right)^{\perp\perp} = P^{\perp\perp} = P$ olduğu açıktır.

B7. $\left(P \vee Q\right)' = P' \wedge Q'$ eşitliğini kanıtlayalım.

$\left(P \vee Q\right)' = \left(P \cup Q\right)^{\perp}$ (Tanım)

$= \left(P \cup Q\right)^{-c}$ ($\perp$ nın tanımı)

$= \left(P^{-} \cup Q^{-}\right)^{c}$ (Lemma 1.4.7 (d))

$= P^{-c} \cap Q^{-c}$ (Kümesel Sonuç)

$= P^{\perp} \cap Q^{\perp}$

$= P' \wedge Q'$

B10. $P \wedge (Q \vee R) = P \cap (Q \cup R)^{\perp\perp} = P^{\perp\perp} \cap (Q \cup R)^{\perp\perp}$

$$= \left(P \cap (Q \cup R)\right)^{\perp\perp}$$

$$= \left((P \cap Q) \cup (P \cap R)\right)^{\perp\perp}$$

$$= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Nihayet $(P \wedge Q)' = P' \cup Q'$, yani $(P \cap Q)^{\perp} = P^{\perp} \cup Q^{\perp}$ olduğunu da kanıtlayalım.

$(P \cap Q)^{\perp} = (P \cap Q)^{-c}$ (Tanım)

$= P$

Böylece regüler açık kümelerin ailesi teoremde tanımlanın seçkin elemanlar ve işlemler altında bir Boole cebiri oluşturur.

Teoremin kanıtını tamamlamak için regüler açık kümelerin herhangi bir ailesinin supremuma ve infimuma sahip olduğunu kanıtlayacağız.

$\{P_i\}$ bir keyfi regüler kümeler ailesi olsun ve $P = \left(\bigcup_i P_i\right)^{\perp\perp}$ diyelim. P nin $\{P_i\}$ için supremum olduğunu göstereceğiz. Her bir i için $P_i \subseteq \bigcup_i P_i$ olduğu açıktır. Lemma 2.1.4 gereği $P_i \subseteq \left(\bigcup_i P_i\right)^{\perp\perp} = P$ dir. Bu P nin $\{P_i\}$ ailesi için $\subseteq$ bağıntısına göre bir üst sınır olduğunu ifade eder. P nin en küçük üst sınır olduğunu göstermemiz gerekiyor. Q, her i için P_i yi kapsayan bir regüler açık küme olsun. Şimdi

$P_i \subseteq Q$ (Hipotez)

$\bigcup_i P_i \subseteq Q$ (Kümesel Sonuç)

$\left(\bigcup_i P_i\right)^{\perp} \supseteq Q^{\perp}$ (Lemma 2.1.3)

$\left(\bigcup_i P_i\right)^{\perp\perp} \subseteq Q^{\perp\perp}$ (Lemma 2.1.3)

$P \subseteq Q$

olduğundan P gerçekten $\{P_i\}$ ailesinin en küçük üst sınırıdır.

$\{P_i\}$ ailesinin en büyük alt sınırının, infimumunun $\left(\bigcap_i P_i\right)^{\perp\perp}$ olduğu Düalite İlkesi 1.2.3 den sonuçlandırılır. ■

2.2 Çözümlü Sorular

Bu kesimde regüler açık kümeler ve Boole cebirleri ile ilgili [3] den bazı sorular çözülüyor.

Soru 2.2.1 ([3], Sayfa 65, Soru 38)

Keyfi bir topolojik uzayda her açık küme regüler açık kümelerin birleşimi olarak yazılabilir mi?

Çözüm : Yanıt olumsuzdur. Bir karşıt örnek olarak tümleyeni sonlu sonsuz bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayını göz önünde bulunduralım. Bu topolojinin tek regüler açık kümeleri $\varnothing$ ve X in kendisidir; oysa her Tümleyeni sonlu küme açıktır. ■

Soru 2.2.2 ([3], Sayfa 65, Soru 39)

Bir topolojik uzayın her alt kümesi P için $P^{\perp}$ nin P ile ayrık en büyük açık küme olduğunu kanıtlayın. P nin ancak ve ancak P ile ayrık en büyük açık küme olduğunda bir regüler açık küme olduğunu sonuçlandırın.

Çözüm : P^{-} kümesi kapalı ve P kümesini içerir; o halde $P^{-c} = P^{\perp}$ açık bir kümedir ve P^{c} yi içerir. $P \subseteq P^{-}$ nedeniyle $P^{-c} = P^{\perp}$ ile P nin arakesiti boştur, yani P ile $P^{\perp}$ ayrıktır. Şimdi Q, P ile ayrık herhangi bir açık küme ise o zaman $P \cap Q = \varnothing$, $P \subseteq Q^{c}$ yi gerektirir. Buradan

$$P^{-} \subseteq Q^{c-}$$

$$Q^{c-c} \subseteq P^{-c} = P^{\perp}$$

bulunur. Q açık idi, o halde $Q = Q^o = Q^{c-c}$ dir. Böylece $Q \subseteq P^\perp$ sonuçlanır. Q keyfi bir açık küme olduğu için $P^\perp$ nin P ile ayrık en büyük açık küme olduğu kanıtlanmış olur.

Bu kanıtın bir sonucu olarak $P^{\perp\perp}$ nin $P^\perp$ ile ayrık en büyük açık küme olduğu sonuçlandırılır. Özel olarak P, P ile ayrık en büyük açık küme ile ayrık en büyük açık kümedir ancak ve ancak $P = P^{\perp\perp}$ dir, yani ancak ve ancak P regülerdir. ■

Soru 2.2.3 ([3], Sayfa 72, Soru 7)

Bir ayrık uzayın regüler açık alt kümelerinin Boole cebirini tanımlayınız.

Çözüm : (X, τ) bir ayrık topolojik uzay ve B regüler açık kümelerin cebiri olsun.

Önce X in her alt kümesinin regüler açık küme olduğunu gösterelim. X ayrık olduğu için P ve P^c kümelerinin ikisi de kapalı kümelerdir. Buradan

$$P^{\perp\perp} = P^{-c-c} = P^{cc} = P \ ,$$

yani P regülerdir. O halde X in her alt kümesi B nın bir elemanıdır. $P, Q \in B$ için

$$P \vee Q = \left(P \cup Q\right)^{\perp\perp} = P \cup Q$$

sırasıyla Teorem 2.1.2.(4) ve $P \cup Q$ nün regüler olmasından sonuçlanır. Sonra $P^\perp = P^{-c} = P^c$, P nin kapalı olduğundan sonuçlanır.

Netice olarak B cebiri X in tüm alt kümelerinin $P\left(X\right)$ cismi ile çakışır.

(Hatırlatma : X bir küme ve $B \subseteq P\left(X\right)$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer B, $\cup$, $\cap$ ve ^{c} işlemlerine kapalı ise B ye bir kümeler cismi denir.)

KAYNAKLAR

[1] Birkhoff, G. Lattice Theory, third edition, Colloquium Publications, vol. 25, AMS, Providence, R.I. 1967

[2] Cori, R. and Lascar, D., Mathematical Logic, Part I, Oxford University Press, 2002

[3] Givant, S. and Halmos, P., Introduction to Boolean algebras, Springer, 2009

[4] Halmos, P., Lectures on Boolean algebras, vol. 25, Springer-Verlas, New York, 1974

[5] Hrbacek, K. and Jech,T., Introduction to Set Theory, Marcel Dekker, 1984

[6] Huntington, E.V., Sets of independent postulates for the algebra of logic, Transactions of AMS, vol. 5, (1904), pp. 288-309

[7] Huntington, E.V., New sets of independent postulates for the algebra of logic with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica, Transactions of AMS, vol. 35 (1933), pp. 274-304. Correction vol. 35 (1933), pp. 557-558

[8] Mostowski, A. and Tarski, A., Boolesche Ringe mit geordneter Basis, Fundamenta Mathematical, vol.32 (1939), pp. 69-86

[9] Sikorski, R., Boolean algebras, vol.25, Springer Verlog, Berlin and New York, 1969

[10] Stone, M., Theory of representations for Boolean algebras, Transactions of AMS, vol. 40 (1936), pp. 37-111

[11] Terziler, M., Öner, T., and Öner, G., Independent sets of axioms for Boolean algebras, submitted at July 2013 to Hacetepe Journal of Mathematics and Statistics.