GERİYE DOĞRU STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN VARLIK VE TEKLİK ŞARTLARININ İNCELENMESİ VE OPTİMAL KONTROLE UYGULANMASI

Vildan TÜRKSEVEN

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Matematik Anabilim Dalı

Bornova-İZMİR

2015

T.C.

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GERİYE DOĞRU STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN VARLIK VE TEKLİK ŞARTLARININ İNCELENMESİ VE OPTİMAL KONTROLE UYGULANMASI

Vildan TÜRKSEVEN

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Matematik Anabilim Dalı

Bornova-İZMİR

2015

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZLİ YÜKSEK LİSANS TEZ JÜRİ SINAV TUTANAĞI

ÖĞRENCİNİN	
Adı, Soyadı	: Yıldız TÜRKSEVEN
Öğrenci No	: 13900001013
Anabilim Dalı	: Matematik
Programı	: Matematik Yüksek Lisans
Tez Sınav Tarihi	: 5../.01/2015. Sınav Saati : 14:00
Tezin Başlığı:	

Adayın kişisel çalışmasına dayanan tezini 45..... dakikalık süre içinde savunmasından sonra jüri üyelerince gerek çalışma konusu gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin,

- ☒ BAŞARILI olduğuna (S)
- 1 ☐ EKSİK sayılması gerektiğine (I)
- 2 ☐ BAŞARISIZ sayılmasına (F)

☒ OY BİRLİĞİ
☐ OY ÇOKLUĞU

ile karar verilmiştir.

3 ☐ Jüri toplanamadığı için sınav yapılamamıştır.
4 ☐ Öğrenci sınava gelmemiştir.

☒ Başarılı (S)	☒ Başarılı (S)	☒ Başarılı (S)
☐ Eksik (I)	☐ Eksik (I)	☐ Eksik (I)
☐ Başarısız (F)	☐ Başarısız (F)	☐ Başarısız (F)
Üye : Doç. Dr. Sahlar Meherrem	Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Yantır	Üye : Yrd. Doç. Dr. Zehra Pınar
İmza :	İmza :	İmza :

1 *Bu halde adaya 3 ay süre verilir.*
2 *Bu halde öğrencinin kaydı silinir.*
3 *Bu halde sınav için yeni bir tarih belirlenir.*
4 *Bu halde varsa öğrencinin mazeret belgesi Enstitü Yönetim Kurulunda görüşülür. Öğrencinin geçerli mazeretinin olmaması halinde Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla ilişiği kesilir. Mazereti geçerli sayıldığında yeni bir sınav tarihi belirlenir.*

ÖZET

GERİYE DOĞRU STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN VARLIK VE TEKLİK ŞARTLARININ İNCELENMESİ VE OPTİMAL KONTROLE UYGULANMASI

Vildan TÜRKSEVEN

Matematik Bölümü Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Mayıs 2015, 39 sayfa

Aşağıda belirtilen

$x(t)+\int_t^T f(x(s),y(s),s)ds+\int_t^T y(s)dW(s)=X$ geriye doğru stokastik diferansiyel denklemin çözümünün varlığını ve tekliğini araştırılmaktadır. Burada $f(.,.,.)$ fonksiyonu $(x(t),y(t))$ değişkenlerine göre yerel Lipschitz şartını sağlamakta, (Ω, F, P, W(*), F_τ)'nın her $(x(t),y(t))$ değeri için Wiener süreci olup, $f(x(t),y(t),.)$ bir F_τ uyumlu süreç ve X, F_τ ye göre ölçülebilirdir. Problem, yukarıdaki eşitliği çözen, uyarlanmış (adapte) bir $(x(t),y(t))$ çiftini bulmak ve stokastik maksimum prensibi elde etmektir.

Anahtar Kelimeler: Geriye doğru stokastik diferansiyel denklemler kontrol yayılma süreçleri, stokastik maksimum prensibi, matris rastgele değerli Riccati denklemleri

ABSTRACT

ANALYSIS OF EXSITENCE AND UNIQUENESS CONDITIONS OF THE BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATION TO OPTIMAL CONTROL

Vildan TÜRKSEVEN

Master Thesis in Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Şahlar MEHERREM

May 2015, 39 pages

In this thesis it is investigated existence and uniqueness conditions for the stochastic equation which has the form $x(t)+\int_t^T f(x(s),y(s),s)ds+\int_t^T y(s)dW(s)=X$ by using local Lipschitz condition, considering $(\Omega,F,P,W(*),F_\tau)$ is Wiener process and F_τ as adapted process, it is obtained existence and uniqueness theorems for the backward stochastic differential equation. It is also obtained stochastic maximum principle for the stochastic optimal control problem.

Key Words: Backward stochastic differential equations controlled diffusion processes, Stochastic maximum principle, Matrix-valued random Riccati equations

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlarken bana rehberlik eden ve desteğini eksik etmeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM'e hazırlık aşamasındaki katkılarından dolayı ve her zaman yanımda olan tüm sevdiklerime teşekkür ederim.

Vildan TÜRKSEVEN

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tez olarak sunduğum “Geriye Doğru Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Varlık ve Teklik Şartlarının İncelenmesi ve Optimal Kontrole Uygulanması” adlı çalışmanın tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

18/05/2015

Vildan TÜRKSEVEN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM 1

1. GİRİŞ

Sistem analizinde matematiksel modeller aşağıdaki gibi sınıflandırılır;

*Lineer ve lineer olmayan modeller

*Sürekli-zaman (diferansiyel denklem,..) ve Kesikli-zaman (fark denklemi,..) modeller

* Dinamik (parametreleri zaman içinde değişen) ve statik modeller

*Stokastik (rastgele değişken içeren) ve deterministik (rastgele değişken içermeyen) matematiksel modeller

Belirsizlik ortamındaki çalışmalarda kullanılabilecek en temel matematiksel yöntem olasılık teorisidir.

Olasılık Uzayı : P; aşağıdaki koşulları sağlıyorsa olasılık ölçüsüdür;

1) $P(\Omega)=1$

2) $P(\mathrm{A}^c)=1-P(\mathrm{A})$

3) $P(\cup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i)=\sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A}_i)$

Bu koşullara Kolmogorov Aksiyomları denir.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ üçlüsüne; (Ω örnek uzay; Ω'nın alt kümelerinden oluşanher$\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ iken $\mathcal{A}$; $\sigma_al$gebrave P olasılık ölçüsü olmak üzere) Olasılık Uzayı denir.

Rastgele Değişken: Örnek uzaydan reel sayılara bir fonksiyondur. Bir deney ya da gözlemin şansa bağlı sonucu bir değişkenin aldığı değer olarak düşünülürse olasılık ve istatistikte bu değişkene rastgele (rassal) değişken denir.

* Genel anlamda bir rastgele değişken sayılabilir değerler alıyorsa; kesikli rastgele değişken denir.

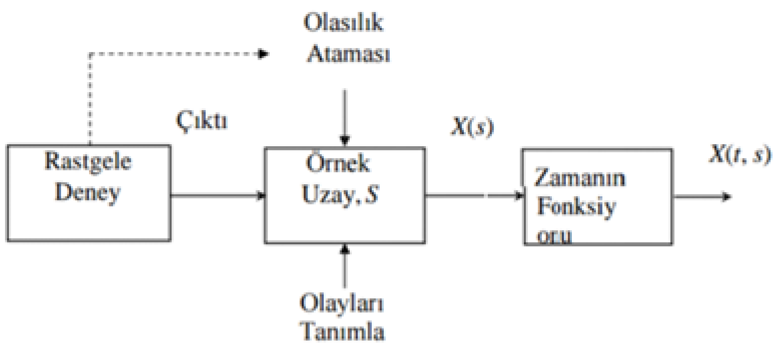
* Sayımla elde edilemeyen rastgele değişkene sürekli rastgele değişken denir. Sürekli rastgele değişkenin alacağı değerler için bir tanım aralığı ifade edilir.

Beklenen Değer: Bir şans değişkenin herhangi bir olasılık fonksiyonunda almış olduğu tüm değerlerin ortalaması o şans değişkeninin beklenen değeridir. Beklenen değer, o şans değişkeninin ortalamasına eşittir.

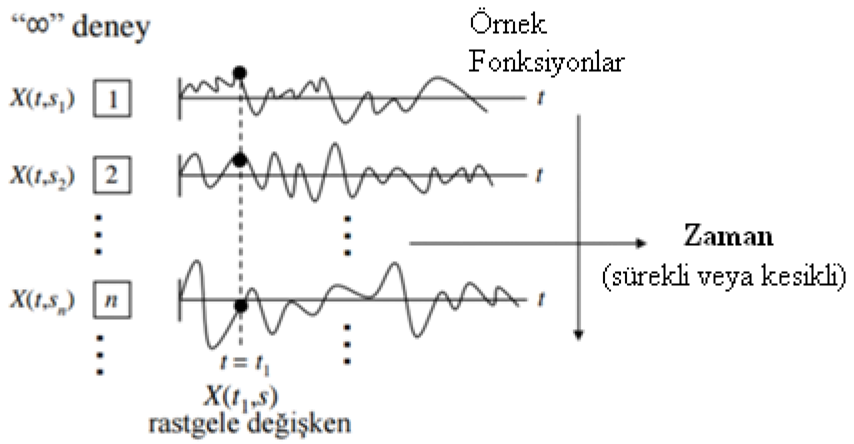
* Kesikli rassal değişken için beklenen değer (ortalama); $E(X) = \sum x_{\boldsymbol{i}}.P(x_{\boldsymbol{i}}) = \mu^2$

*Sürekli rastgele değişken için beklenen değer (ortalama) ; $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ (sonsuz örnek uzay için)

Rastgele Süreçler:



Rastgele süreç konsepti



Markov Süreci (Markov zinciri): Bir deneyin tekrarlanan denemelerinin bir dizisinde herhangi bir adımdaki sonuç en fazla bir önceki adımda bulunan sonuca bağlı olup daha önceki herhangi bir sonuca bağlı değildir. Böyle bir diziye Markov zinciri ya da Markov süreci denir.

Bir Markov stokastik süreç $N(\mu, \sigma)$ biçiminde gösterilen ortalaması μ,standart sapmasıσolan normal dağılıma sahiptir. Markov özelliği taşıyan ve (0,1) dağılımına sahip olan bir değişken, Wiener süreci izler.Wiener süreci;

Markov stokastik sürecin özel bir durumudur. Wiener süreci fizik'te çok sayıda moleküler şoklara maruz kalan parçacıkların hareketlerini açıklamada kullanılır. (İngiliz botanist Robert Brown 1827 yılında su üstünde asılı kalan polen taneciklerinin tesadüfi olarak hareket ettiklerini gözlemlemiş ve tesadüfi hareketleri Brownian Hareketi olarak açıklamıştır.)Ayrık değerli Markov süreci,Markov zinciri adını alır.

Stokastik Süreç: Herhangi bir değişkenin değer değişimleri zaman içerisinde belirsiz bir davranış sergiliyor ise bu değişkenin bir stokastik süreç izlediği söylenir. Stokastik süreç; sürekli değişken ya da kesikli değişken stokastik süreç olarak sınıflandırılır. İncelemeye konu olan değişken; sürekli değişken stokastik süreçte belirli bir aralıkta herhangi bir değer alabilirken, kesikli değişken stokastik süreçte ayrık değerler almaktadır. Bir değişkenin sadece bugünkü değerinin geleceği tahmin etmede yeterli olması, stokastik sürecin Markov özelliğini ifade eder. Yani; stokastik sürecin Markov özelliği değişkenin bugünkü değerinin;değişkenin geçmiş davranışlarından tamamen bağımsız olduğu anlamına gelir.

Hisse senedi piyasalarının genellikle Markov süreci takip ettikleri kabul edilir. Bu nedenle hisse senedi fiyatının bugünkü değeri gelecekle ilgili tahminlerde kullanılabilecek tek geçerli bilgidir.

Geleceği kesin olarak tahmin etmek zordur ve tahminler olasılık dağılımlarıyla ifade edilmelidir. Stokastik süreçler ise;olasılık teorisinin dinamik kısmı olarak düşünülebilir.

$(\Omega,\mathcal{A}, P)$ Olasılık uzayında tanımlı $\{ X(t),\ t \in \tau \}$rastgele (rassal) değişkenlerinin bir ailesine stokastik süreç denir. τ =[0,T] aralığında her anlık değeri için tanımlıysa sürekli stokastik süreç adını alır. $\tau = (t_0, t_1, \ldots)$ şeklinde ayrık zamanlardan oluşan τ kümesi için örnek uzay Ω'da tanımlı rastgele değişkenler $X(t_0), X(t_1), X(t_2), \ldots$ şeklindedir. Bu durumda tanımlanan ayrık (kesikli) stokastik süreçtir.

Stokastik Sürecin İntegral Formu ve Stokastik Diferansiyel Denklem:

$$I(f) = I(f)(\omega) = \int_a^b f(s,\omega)dW(s,\omega) \text{ ve } I(f)(t,\omega) = \int_a^t f(s,\omega)dW(s,\omega)\,,\ a \le t \le b$$

aralığında $(\Omega, \mathcal{A}, P)$'de tanımlı stokastik sürecin integral formudur. Bu integraller Hilbert uzayında $\mathrm{H}_{SP} \to \mathrm{H}_{RV}$ yada $\mathrm{H}_{SP} \to \mathrm{H}_{SP}$ tanımlanır. $f \in \mathrm{H}_{SP}$ için birinci integral H_{RV}'de rastgele değişken iken ikinci integral H_{SP}'de bir stokastik süreçtir.

$f \in \mathrm{H}_{SP}$'de f stokastik süreci aşağıda belirtilen üç koşulu da sağlar.

$(C1): f(a) \in \mathrm{H}_{RV}$ iken $\| f(a) \|_{RV}^2 = E\left| f(a) \right|^2 \le k_1 (k_1$ pozitif sabit)

$(C2): \| f(t_2) - f(t_1) \|_{RV}^2 = E\left| f(t_2) - f(t_1) \right|^2 \le k_2 \left| t_1 - t_2 \right|$

$(C3): f, [a,b]$' da anticipating (tahmin edilemeyen)

$f_m(t,\omega) = \sum_{i=1}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) \mathrm{I}_i(t),\ S_{SP}$'nin bir elemanıdır ve $\int_a^b f_m(s)ds$ integrali $J(f_m)$ olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$J(f_m) = \int_a^b f_m(s)ds = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(t_{i+1} - t_i)$$

$J(f_m) \in \mathrm{H}_{RV}$'de Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} \| J(f_m) \|_{RV}^2 &= E\left| \int_a^b f_m(s)ds \right|^2 \le \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) E \sum_{i=1}^{m-1} \left| f_i^{(m)} \right|^2 .(t_{i+1} - t_i) \\ &= (b-a) E \int_a^b \left| f_m(s) \right|^2 ds = (b-a) \| f_m \|_{sp}^2 \end{aligned}$$

$f \in \mathrm{H}_{sp}$ ve $\{ f_m \}_{m=1}^{\infty}$ dizisi S_{SP}'de tanımlı olmak üzere;

$m \to \infty$ için $\| f - f_m \|_{SP} \to 0$ 'dır. $\int_a^b f(s)ds$ integrali $J(f)$ olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$J(f) = \int_a^b f(s)ds = \lim_{x\to\infty} \int_a^b f_m(s)ds = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f^m{}_i (t_{i+1} - t_i)$$

Tanımlanan: eğer $\| f - f_m \|_{SP} \to 0$ ise;

$\int_a^b f(s)ds = \lim_{x\to\infty}\int_a^b f_m(s)ds$ ’dir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden:

$$E(\int_a^b f_m(s)ds)^2 \le \mathrm{T}\int_a^b E\left|f_m(s)\right|^2 ds \qquad (f \in \mathrm{H}_{SP})$$

Wiener sürecinin integral fonksiyonu örneği aşağıda verilmiştir.

W_t , [0,T] aralığında bir Wiener süreci olarak;

$J(e^{-W}) = \int_0^{\mathrm{T}} \exp(-W(t))$ şeklinde olsun. Bu durumda;

$$E(J(eW)) = E\int_0^{\mathrm{T}} \exp(-W(t))dt = E\int_0^{\mathrm{T}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-W(t))^k}{k!}dt$$

$$= \int_0^{\mathrm{T}} E\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-W(t))^k}{k!}dt = \int_0^{\mathrm{T}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(t/2\right)^j}{j!}dt = \int_0^{T} e^{t/2}dt = 2(e^{\mathrm{T}/2}-1)$$

Adım fonksiyonları Ito stokastik integrali için aşağıda belirtildiği gibi tanımlanır.

f_m nonanticipanting, $f_m \in S_{SP}$; her i ve m için;

$f_i^{(m)} \in \mathrm{H}_{RV}$ olmak üzere;

$f_m(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)\mathrm{I}_I(t)$ ’dir. Bu durumda; $\Delta W_i = W_{(t_i+1)} - W_{t_i}$ için;

$\int_a^b f_m(s)dW(s) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}\Delta W_i$ ’dir.

Ayrıca; $I(f_m) \in \mathrm{H}_{RV}$ ve $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \ (i = 0,1,..,m-1)$

$f_m \in S_{sp}, \left\|I(f_m)\right\|_{RV} = \left\|f_m\right\|_{sp}$ için;

$$\left\| I(f_{(m)}) \right\|_{RV}^{2} = E\left| \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)} \Delta W_i \right|^2 = \sum_{i=0}^{m-1} \left\| f_i^{(m)} \right\|_{RV}^{2} \Delta\, t_i = \int_a^b E\left| f_m(t) \right|^2 dt = \left\| f_m \right\|_{sp}^{2}$$

f , H_{SP} ’de tanımlı ve (C1)-(C3) şartları sağlandığında;

$\int_a^b f(t)dW(t)$ integrali;

$t_i^{(m)} = a + i(\frac{b-a}{m})$ ve f H_{RV} ’de yakınsak olmak üzere;

$$\mathrm{I}(f)_{(t)} = \lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(t)dW(t) = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=0}^{m-1} f(t^{(m)})(W(t_{i+1}{}^{(m)}) - W(t_i{}^{m}))$$ şeklinde

tanımlanır.

Stokastik diferansiyel denklemler ile ilgili bilgi verelim. [0,T] aralığında Ito Stokastik diferansiyel denklem $0 \le t \le \mathrm{T}$ ve $\mathrm{X}(0,.) \in \mathrm{H}_{RV}$ için;

$$\mathrm{X}(t,\omega) = \mathrm{X}(0,\omega) + \int_0^t f(s,\mathrm{X}(s,\omega))ds + \int_0^t g(s,\mathrm{X}(s,\omega))dW(s,\omega)$$ ile

tanımlanır.

Diferansiyel formu ise; $0 \le t \le \mathrm{T}$ ve $\mathrm{X}(0,.) \in \mathrm{H}_{RV}$ için;

$d\mathrm{X}(t,\omega) = f(t,\mathrm{X}(t,\omega))dt + g(t,\mathrm{X}(t,\omega))dW(t,\omega)$ eşitliği ile tanımlanır.

k≥0 sabiti için f ve g nonanticipating ve aşağıda belirtilen;

$(C6): \left| f(t,x) - f(s,y) \right|^2 \le k(\left|t-s\right| + \left|x-y\right|^2)$ $\quad 0 \le s,t \le \mathrm{T}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$(C7): \left| f(t,x) \right|^2 \le k(1+\left|x\right|^2)$ $\quad 0 \le t \le \mathrm{T}$ ve $x \in \mathbb{R}$ koşullarını sağlar.

f ve g; (C6) ve (C7) koşullarını sağladığında;

$\mathrm{X}(t,\omega) = \mathrm{X}(0,\omega) + \int_0^t f(s,\mathrm{X}(s,\omega))ds + \int_0^t g(s,\mathrm{X}(s,\omega))dW(s,\omega)$ ’nın varlık ve teklik ispatı yapılmış olur. Ito stokastik diferansiyel denklem için; çözümün sınırlılığı ve [0,T] aralığında çözümün sürekliliği teoremi ifade edilsin:

Çözümün sınırlılığı:

$\mathrm{X}(t,\omega)=\mathrm{X}(0,\omega)+\int_0^t f(s,\mathrm{X}(s,\omega))ds+\int_0^t g(s,\omega))dW(s,\omega)$ ’nin çözümü f ve g (C6) ve (C7) koşullarını sağlayan ve $\mathrm{X}\in \mathrm{H}_{SP}$ için;

$$\mathrm{E}\left|\mathrm{X}(t)\right|^2 \leq 3(\mathrm{E}\left|\mathrm{X}(0)\right|^2+\mathrm{kT}^2+\mathrm{kT})\exp(3\mathrm{k}(\mathrm{T}+\mathrm{T}^2)) \quad (0\leq t\leq \mathrm{T})$$

[0,T]’de çözümün sürekliliği:

$\mathrm{X}(t,\omega)=\mathrm{X}(0,\omega)+\int_0^t f(s,\mathrm{X}(s,\omega))ds+\int_0^t g(s,\mathrm{X}(s,\omega))dW(s,\omega)$ ’nın çözümü f ve g, (C6) ve (C7) koşullarını sağlayan ve $\mathrm{X}\in \mathrm{H}_{SP}$ için; c≥0 olmak üzere;

$$E\left\|\mathrm{X}(t)-\mathrm{X}(r)\right\|^2\leq c\left|t-r\right| \qquad 0\leq r,t\leq \mathrm{T}$$

$\in>0$, $\delta>0$, $\left|t-r\right|<\delta$ için; $\left\|\mathrm{X}(t)-\mathrm{X}(r)\right\|_{RV}$ ’dir.

Tezimizde stokastik optimal kontrol için gerekli koşul incelenecektir. Matematik programlama ya da optimizasyon; bir gerçel fonksiyonu minimize ya da maksimize etmek amacı ile gerçek veya tamsayı değerlerini tanımlı bir aralıkta seçip fonksiyona yerleştirerek sistematik olarak bir problemi incelemek yada çözmek işlemleridir.

Bu nedenle deterministik halde optimal kontrol için gereklilik şartı verilsin.

$\dot{x}(t)=a(x(t),u(t),t)$, $\mathrm{x}(0)=x_0$ sisteminde öyle bir u^* aranıyor ki bu u^* için bulunan x^* ile oluşan (u^*,x^*) çifti,

$J(u)=h(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} g(x(t),u(t),t)dt$ ’yi, minimize etsin.

Bu sistem için aşağıda verilen Hamiltonion fonksiyonu tanımlansın.

$$\mathrm{H}(x(t),u(t),\rho(t),t)=g(x(t),u(t),t)+\rho^{\mathrm{T}}(t)[a(x(t),u(t),t)]$$

Bu durumda; yukarıda belirtilen optimal kontrol problemi için gerek koşul aşağıdaki gibidir.

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho}(x^*(t), u^*(t), \rho^*(t), t)\\
&\dot{\rho}^*(t) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \rho}(x^*(t), u^*(t), \rho^*(t), t)\\
&0 = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \rho^*(t), t)\\
&t \in [t_0, t_f]
\end{aligned}\right\}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \rho^*(t_f)\right]^{\mathrm{T}} \delta x_f\\
&+\left[H(x^*(t_f), u^*(t_f), \rho^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f)\right]\delta t_f = 0
\end{aligned}$$

Tezde ;

$$x(t) + \int_t^{\mathrm{T}} f(x(s), y(s), s)ds + \int_t^{\mathrm{T}} y(s)dW(s) = X \tag{1.1}$$

geriye doğru stokastik diferansiyel denklemin çözümünün varlığı ve tekliği ele alınmıştır. Çözüm W_t uyumlu ve karesi ile integrallenebilir süreçtir. Bu şekilde bir denklemin lineer versiyonu, stokastik kontrol teorisinde bir eşlenik denklem olarak yer alır. (Bakınız [3],[5],[7],[8] ve [11]) Yakın zamanda Pardoux ve Peng [10] bu denklemin lineer olmayan ve f'in global Lipschitz durumunu sağlayan versiyonu için bir varlık ve teklik sonucu elde etmiştir.

Bu tezde denklem daha sade bir şart içinde incelenmektedir; yalnızca yerel Lipschitz şartının sağlanması durumu. Ayrıca matris değerli geriye doğru stokastik diferansiyel denklem için global varlık ve teklik incelenmektedir. Özel bir matris değerli stokastik diferansiyel denklemler sınıfı için Lipschitz şartlarından ve düzgün büyümeden kaçınılabileceği gösterilmiştir. Sonuç rastgele katsayılı Riccati eşitliğini içerir [4]. Görüldüğü üzere, bir skaler 1x1 matris şeklinde kabul edilebilir, yani bu sonuç skaler değerli geriye doğru stokastik denklemlere kısmen uygulanabilir.

Ayrıca durum değişkenlerinin olağan ve geriye doğru stokastik diferansiyel denklem sistemi tarafından tanımlandığı, stokastik optimum kontrol sistemleri de ele alınmaktadır. Maksimum prensibi için bir yerel yapı türetilmiştir. Bu gözden geçirilmiş versiyonda belirtilmelidir ki;

$$x(t)+\int_t^T f(x(s),y(s))ds+\int_t^T y(s)dW(s)=X$$

türündeki geriye doğru stokastik diferansiyel denklem, matematiksel finans problemlerindeki özyinelemeli (rekürsif) faydanın diferansiyel formulasyonuyla yakından ilgilidir. Bknz. [6] Kabaca [6]'daki rekürsif fayda $y(t)$ ile f 'nın; $f(x,t,\omega)=-f_0(x,c,(t,\omega))$ şeklinde olduğu (1.1)'i çözen skaler değerli süreç $x(t)$ olarak kabul edilebilir.

Burada c(.), F_t uyumlu bir "tüketim süreci"dir. ($F_{;}$ Brownian hareketi w(.) tarafından oluşturulmuş bir filtrelemedir.) Bu durumda f , $y(t)$ 'ye bağlı olmadığından (1),[4]'teki eşitliğe özdeştir.

$$x(t)=E\{\int_t^T f(x(s),s)ds+X\mid F_t\}$$

Bu nedenle formulasyon daha geneldir. Bu belge şu şekilde düzenlenmiştir. Bölüm 2'de bir yerel Lipschitz şartını sağlayan geriye doğru stokastik diferansiyel denklemlerin yerel ve global varlık ve tekliği, Bölüm 3'te genelleştirilmiş bir Riccati eşitliğinin global varlığı araştırılmaktadır. Olağan ve geriye doğru durumlu eşitlikleri içeren optimum kontrol sistemleri için stokastik maximum prensibi bölüm 4'te elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

2. GENEL GERİYE DOĞRU STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1. Önbilgi

$$x(t)+\int_{t}^{\mathrm{T}} f(x(s),y(s),s)ds+\int_{t}^{\mathrm{T}} y(s)dW(s)=X$$

stokastik denklemi için f 'nın düzgün (uniform) bir Lipschitz şartını sağladığı durumda; geriye doğru stokastik diferansiyel denklemin varlık ve teklik sonucuna gözatılsın. (Ω,F,P) olasılık uzayı olarak alınsın. $\{W_t,t\geq 0\}$; bu olasılık uzayı üzerinde tanımlı d boyutlu bir standart Wiener süreci olarak tanımlansın. O halde;

$$F_t=\sigma\{W_s;0\leq s\leq t\}$$

Herhangi bir Öklid uzayı H için; (.,.) bir Öklid uzayının skaler çarpımı ile ifade edilir. Ayrıca $L(\mathbb{R}^n;\mathrm{H})$ uzayının da; tr A yani A matrisinin izi ile ifade edilen;

$(y,z)=tr(y^*z)$ ’nin $\forall y,z\in L(\mathbb{R}^n,\mathrm{H})$ skaler çarpımı dahilindeki bir Öklid uzayı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu uzayın normu |.| ile ifade edilir. $y\in L(\mathbb{R}^n,\mathrm{H})$ $y_i,\ i=1,2,..,n$, $(y_i\in\mathrm{H})$.

Verilen herhangi bir ifade $0\leq a<b\leq\mathrm{T}$ için;

$E\int_a^b |x(t)|^2\,dt<\infty,\quad \forall x\in M^2(a,b;\mathrm{H})$ şeklinde olan H değerli tüm F_t uyumlu (adapte) süreçlerin uzayı $M^2(a,b,\mathrm{H})$ ile ifade edilir.

Görüldüğü üzere; $M^2(a,b,\mathrm{H})$ bir Hilbert uzayıdır. Ayrıca $M^2(\mathrm{H})=M^2(0,\mathrm{T};\mathrm{H})$ ile ifade edilebilir.

Aşağıdaki fonksiyonların verildiğini kabul edilsin.

$$f(x,y,t,\omega):\ \mathbb{R}^m\mathrm{x}L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)\mathrm{x}[0,\mathrm{T}]\mathrm{x}\Omega\to\mathbb{R}^m,\qquad \mathrm{X}(\omega):\Omega\to\mathbb{R}^m$$

Aşağıdaki ifadeler varsayılsın.

$H1)$ $Her(x,y) \in \mathbb{R}^m \mathrm{x} L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$, $\quad f(x,y,.) \in M^2(\mathbb{R}^m)$

$H2)\left| f(x_1,y_1,t,\omega - f(x_2,y_2,t,\omega)\right| \le C(\left|x_1 - x_2\right| + \left|y_1 - y_2\right|)$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \forall y_1, y_2 \in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$

$H3)$ $\mathrm{X}(\omega), F_{\mathrm{T}}$ ölçülebilir ve $E\left|x\right|^2 < \infty$

Aşağıdaki geriye doğru stokastik diferansiyel denklemini ele alınsın.

$$x(t) + \int_t^{\mathrm{T}} f(x(s),y(s),s)ds + \int_t^{\mathrm{T}} y(s)dW(s) = X \tag{2.1}$$

Buradaki problem $(x(t),y(t))$ 'yi çözen uyumlu bir $\mathbb{R}^m \mathrm{x}\, L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ değerli süreç çiftinin bulunmasıdır.

Tanım:Eğer $(x(t),y(t))$, $M^2(a,\mathrm{T};\mathbb{R}^m)\mathrm{x}\,{}^2(a,\mathrm{T},L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m))$ içinde ve $t \in [a,\mathrm{T}]$ için (2.1) şartını sağlıyorsa; $(x(t),y(t))$ çiftinin (2.1)'i $[a,\mathrm{T}]$ üzerinden çözdüğünü söylenir.

Teorem2.1: (H1) ve (H3)'ü varsayılsın. Öyleyse (2.1)'i çözen bir ve yalnız bir $((x(t),y(t))$ çözümü vardır. Ayrıca $E_{\sup_{t\in[0,\mathrm{T}]}}\left|\mathrm{X}_t\right|^2 < \infty$ şartı da sağlanmaktadır.

2.2. Local Lipschitz Şartı

Geriye stokastik diferansiyel denklem

$x(t) + \int_t^{\mathrm{T}} f(x(s),y(s),s)ds + \int_t^{\mathrm{T}} y(s)dW(s) = X$ 'nın yerel varlığı araştırılmaktadır. $B_m(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^m$ 'nin içinde verilen bir yuvar olsun.

$B_m(R) = \{x \in \mathbb{R}^m ; \left|x\right| \le R\}$ ve ayrıca aşağıdaki fonksiyonlar verilmiş olsun.

$g(x,y,t,\omega) : B_m(R)\ \mathrm{x}\ L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)\ \mathrm{x}\ [0,\mathrm{T}]\ \mathrm{x}\ \Omega \to \mathbb{R}^m$

$g_0(t,\omega) : [0,\mathrm{T}]\ \mathrm{x}\ \Omega \to \mathbb{R}^m$

$X(\omega):\Omega \to \mathbb{R}^m$

C ,C_0 ve k'nın pozitif sabit değerler olduğu aşağıdaki ifadeler varsayılsın.

$(H4)$ $g(x,y,.), g_0(.) \in M^2(\mathbb{R}^m),\ \ X \in L^2(\Omega, F_{\mathrm{T}}, P)$

$$\forall (x,y) \in B_m(R) \text{ x } L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$$

$(H5)$ $\left|g(x_1,y_1 t,\omega) - g(x_2,y_2,t,\omega)\right| \le C(\left|x_1 - x_2\right| + \left|y_1 - y_2\right|)$

$$\forall x_1, x_2 \in B_m(R) \text{ x } L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m) \quad \forall y_{1,} y_2 \in L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$$

$(H6)$ $\left|g(x,y,t)\right| \le C_0(\left|x\right| + \left|y\right|), \quad \forall (x,y) \in B_m(\mathbb{R}) \text{ x } L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$

$(H7)$ $E^{F_{\mathrm{T}}}\{\left|x\right|^2 + \int_t^{\mathrm{T}} \left|g_0(s)\right|^2 ds\} \le k^2$,

Aşağıdaki geriye doğru stokastik diferansiyel denklem ele alınsın;

$$x(t) + \int_t^{\mathrm{T}} (g(x(s),y(s),s) + g_0(s))ds + \int_t^{\mathrm{T}} y(s)dW(s) = X \tag{2.2}$$

Buradaki problem (2.2)'yi çözen uyarlanmış bir çift $\mathbb{R}^m \text{ x } L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ değerli süreç aramaktadır. Aşağıdaki yerel varlık sonucu temel bir role sahiptir.

Teorem 2.2. $(H4)$ ve $(H7)$ 'yi varsayılsın. O halde k<R için (2.2) denklemini sağlayan bir ve yalnız bir $(x(t), y(t))$ çözümü vardır ki, aşağıdaki şartları da sağlamaktadır.

$$\begin{cases} \left|x(t)\right|^2 \le k^2 e^{c_1(\mathrm{T}-t)} \\ E^{F_t} \int_t^{\mathrm{T}} \left|y(s)\right|^2 ds \le 2k^2(1 + C_1 \mathrm{T} e^{C,\mathrm{T}}) \\ t \in [\mathrm{T}_0, \mathrm{T}] \end{cases} \tag{2.3}$$

$$C_1 = 1 + 2C_0 + 2C_0^{\ 2} \tag{2.4}$$

$$T - T_0 = 2C_1^{-1} \log \frac{R}{k}$$

İspat: $$f(x,y,t)=\begin{cases} g(x,y,t)+g_0(t) & , \ |x|\le R \\ g(R\dfrac{x}{|x|},y,t)+g_0(t) \ , & |x|>R \end{cases}$$

varsayılsın.

f ’nın teorem 2.1’in tüm şartlarını sağladığı görülmektedir. Bu sebepten (2.1)’i, $[0,\mathrm{T}]$ ’de çözen tek bir $(x(t),y(t))$ çifti vardır. Ito’nun formülü $|x(s)|^2$ ye uygulayıp kullanılırsa, 0<r<t<T için

$$E^{F_\mathrm{T}}|x(t)|^2+E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}|y(s)|^2\,ds$$

$$=E^{F_\mathrm{T}}|X|^2-2E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}(x(s),f(x(s),y(s),s)ds$$

$$\le E^{F_\mathrm{T}}|X|^2+2.E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}|x(s)||f(x(s),y(s),s|ds \quad \text{elde edilir.}$$

Ancak;

f ’nin tanımından dolayı;

$|f(x,y,s)|\le C_0(|x|+|y|)+|g_0(s)|$ ’dır.

bu sebepten;

$$E^{F_\mathrm{T}}|x(t)|^2+E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}|y(s)|^2\,ds$$

$$\le E^{F_\mathrm{T}}[|X|^2+\int_t^{\mathrm{T}}|g_0(s)|^2\,ds]+(1+2C_0+2C_0{}^2)E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}|x(s)|^2\,ds$$

$$+\frac{1}{2}E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}|y(s)|^2\,ds$$

$$\le k^2+C_1\int_t^{\mathrm{T}}E^{F_\mathrm{T}}|x(s)|^2\,ds+\frac{1}{2}\int_t^{\mathrm{T}}E^{F_\mathrm{T}}|y(s)|^2\,ds$$

ile $C_1=1+2C_0+2C_0{}^2$ veya

$$E^{F_\mathrm{T}}|x(t)|^2+2^{-1}E^{F_\mathrm{T}}\int_t^{\mathrm{T}}|y(s)|^2\,ds\le k^2+C_1\int_t^{\mathrm{T}}|x(s)|^2\,ds \tag{2.5}$$

Gronwall's eşitsizliği ve $(H7)$ şartından anlaşıldığı gibi;

$$E^{F_T}\left|x(t)\right|^2 \leq k^2 e^{c_1(T-t)} \ , \ \ \forall 0 \leq r \leq t \leq T \text{ dir.}$$

Özellikle;

$$\left|x(t)\right|^2 \leq k^2 e^{c_1(T-t)} \leq R^2 \ , \ \ \forall T_0 \leq t \leq T$$

ile $T - T_0 = 2C_1^{-1}[\log(\frac{R}{k})]$

Bu yüzden f 'in tanımından dolayı $(x(t), y(t))$, (2.2)'yı $\left[T_{0,}T\right]$ aralığında çözer.

Yukarıdaki değerlendirme ile (2.5), (2.3)'ün ikinci değerlendirmesi anlamına gelir. ■

Lipschitz şartı $(H2)$ 'nin aynı kalmadığı durumlarda bir sonucun olabileceği düşünebilir.

Sadece aşağıdaki Lipschitz şartını varsayılsın. Her h>0,

$$(H8) \ \left|f(x_1, y_1, t, \omega) - f(x_2, y_2, t, \omega)\right| \leq \mu(h)\left|x_1 - x_2\right| + \left|y_1 - y_2\right|,$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m, \ \forall y_1, y_2 \in L(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m), \ \ \left|x_1\right|, \left|x_2\right| \leq h,$$

için bir $\mu(h): R^+ \to R^+$ sürekli eşleştirilmesi mevcuttur.

Ayrıca $(H7)$ yerine *(H9)* varsayılsın.

$$(H9) \ E^{F_T}\{\left|X\right|^2 \int_t^T \left|f(0,0,s)^2\right| ds\} \leq k^2$$

Sonuç 2.3: $(H1)$, $(H8)$ ve $(H9)$u varsayılsın. O halde sabit bir $T_0 \in [0, T]$ ve $[T_0, T]$ aralığında (2.1) i çözen tek bir $(x(t), y(t))$ çifti ve $\left|x(t)\right| \leq 4k$, $t \in [T_0, T]$ var olmalıdır.

İspat: Aşağıdaki ifade atansın.

$$g(x,y,t) = f(x,y,t) - f(0,0,t), g_0(t) = f(0,0,t) \tag{2.6}$$

Yukarıdaki g, g_0 fonksiyonlarının teorem (2.2)'nin tüm şartlarını $R = 4k$, $C = C_0 = \mu(4k)$ ile sağladığı açıkça görülmektedir.

Ayrıca $|x(t)| \le 4k$ olan $[\mathrm{T}_0, \mathrm{T}]$ aralığında (2.1)'i çözen tek bir $(x(t), y(t))$ çiftinin var olduğu görülmektedir. Burada;

$\mathrm{T} - \mathrm{T}_0 = 4C_1^{-1} \log 2$ ile $C_1 = 1 + 2\mu(4k) + 2(\mu(4k))^2$ 'dır. ■

Aşağıdaki lineer büyüme şartı sağlandığı taktirde, global varlık ve teklik sonucunu, yukarıdaki yerel sonucu takip eder.

$$|f(x,y,t) - f(0,0,t)| \le C_0(|x| + |y|), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^m \times L(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m) \tag{2.7}$$

Teorem 2.4: (2.3)'teki varsayımlar ve (2.7) kabul edilsin. Öyleyse $x(t)$ nin sınırlı olduğu [0,T] aralığında; (2.1) i çözen tek bir $(x(t), y(t))$ çifti vardır.

İspat: g, g_0; (2.6)'daki gibi tanımlansın ve aşağıdaki ifadeler atansın.

$$R = e^{C_1 \frac{\mathrm{T}}{2}} k, \; C_1 = 1 + 2C_0 + 2C_0^2$$

O halde teorem (2.2)'deki tüm varsayımlar sağlanır. Ayrıca;

$$\mathrm{T}_0 = \mathrm{T} - 2C_1^{-1}.\log \frac{R}{k} = 0$$

Buradan hareketle $|x(t)|$'nın R ile sınırlı olduğunu [0,T] aralığında olan; (2.1)'i çözen bir tek bir $(x(t), y(t))$ çifti vardır. ■

BÖLÜM 3

3. MATRİS DEĞERLİ GERİYE DOĞRU STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Teorem 2.4 de yerel bir lipschitz şartı için global varlık ve teklik sonucu elde edilmiştir. Ancak bu durumda $f(x,y,t)$ bir lineer büyüme şartını sağlamalıdır. Bu sebepten dolayı pratik olarak uygulamalar kısıtlıdır. Optimum kontrol teorisinde önemli 2.dereceden büyüme durumu bulunmaktadır. Matris değerli Riccati eşitliği için (bkn[14]) Bismut [4]'de, Riccati eşitliğini rastgele katsayılarla ele almış ve bir varlık sonucu elde etmiştir. Bu bölümde yukarıda bahsedilen konuyu içeren matris değerli stokastik diferansiyel denklemin daha genel versiyonu ele alınmaktadır. İspat; teorem 2.2'deki yerel varlık sonucunu temel alır.

Tüm nxn simetrik matrislerinin uzayını S^n ile ifade edilsin. Skaler çarpım ile;

$$(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2) = tr(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2) \ , \quad \forall \mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2 \in S^n$$

S^n bir Öklid uzayıdır, bu nedenle herhangi bir $Y(.) \in M^2(L(\mathbb{R}^d;S^n))$ süreci için Ito integrali olan

$$\int_0^t Y(S)dW(s)$$ iyi bir şekilde tanımlanmıştır.

Ayrıca herhangi bir $\rho > 0$ için

$S_p^n = \{X \in S^n; X \geq -\rho I\}$ ifade edilir.

Öncelikle aşağıdaki matris değerli geriye doğru lineer stokastik diferansiyel denklem ele alınsın.

$$\begin{cases} -d\mathrm{X}(t) = [F^0(x(t),y(t),t) + R(t)]dt - Y(t)dW(t), \\ \mathrm{X}(\mathrm{T}) = Q \end{cases} \tag{3.1}$$

$F^0(X,Y,t,\omega)$ nin (X,Y) ye göre lineer olduğu yerlerde;

$$F^0(x,y,t) = A^*(t)\mathrm{X}(t) + \mathrm{X}(t)A(t) + \sum_{j=1}^{q} G_j^{\,*}(t)\mathrm{X}(t)G_j(t)$$

$$+\sum_{i=1}^{d} (C_i^{\,*}(t)\mathrm{X}(t)C_i(t) + Y_i(t)C_i + C_i^{\,*}(t)Y_i(t))$$

ve $A(.)$, $C_i(.)$, $i = 1,...,d$ ve $G_j(.)$, $j = 1,...,q$ ifadelerinin hepsi n×n matris değerli F_t uyumlu süreçtir. Burada; R(.) bir S^n değerli F_t uyumlu süreçtir. Q, S^n değerli F_t ile ölçülebilir rastgele değişkendir.

Her X, Y için aşağıdaki ifade varsayılsın.

$$\left|F^0(X,Y,t)\right| \le C_0(|X| + |Y|), \tag{3.2}$$

$$E^{F_t}\{\int_t^{\mathrm{T}} \left|R(s)^2 ds + |Q|^2\right|\} \le k^2 \tag{3.3}$$

Yardımcı Teorem 3.1: (3.2) ve (3.3) varsayımları bir kenara konsun. Tüm [0,T] aralığı için; $|X(t)|^2 \le k^2.e^{C_1\mathrm{T}}$

$$E^{F_1}\int_t^{\mathrm{T}} |Y(s)|^2\, ds \le 2k^2(1 + C_1\mathrm{T}e^{C_1\mathrm{T}}) \text{ ile;} \tag{3.4}$$

$C_1 = 1 + 2C_0 + 2C_0^{\,2}$ şeklinde olan ve geriye doğru stokastik diferansiyel denklem (3.1)'i çözen $M^2(S^n)$ x $M^2(¡^{\,d}, S^n)$ içindeki tek bir $(x(t), y(t))$ çifti var olmalıdır. Üstelik Q ve *R(t)* negatif değil, $X(t)$ de negatif değildir.

İspat: (2.1) Öklid uzayı S^n içindeki bir geriye doğru stokastık diferansiyel denklemi olarak ele alınabileceğinden dolayı (3.1)'in varlığı ve tekliği doğrudan bölüm 2'deki şekildedir.

$X(t)$'nin negatif olmayışı hala ispatlanmalıdır. $W^1(.)$, $W(.)$'den bağımsız bir q boyutlu standart Wiener süreci olsun. Verilen herhangi bir $(x,y) \in ¡^{\,n}$x $[0,\mathrm{T}]$ için y_s aşağıda verilen ileriye doğru lineer stokastik diferansiyel denklemin çözümü olsun.

$$d_{y_s} = \mathrm{A}(s)y_s ds + C(s)y_s dW(s) + G(s)y_s dW^1(s)$$

$$y_t = x\,,\quad t \le s \le \mathrm{T}$$

Ito'nun formülü $(X(s)y_s, y_s)$'ye uygulanırsa;

$$d(\mathrm{X}(s)y_s, y_s) = -(R(s)y_s, y_s)ds + (Y(s)y_s, y_s)dW(s)$$

$$+2(\mathrm{X}(s)y_s, C(s)y_s dW(s) + G(s)y_s dW^1(s))$$

O halde;

$F_t^* = \sigma\{W(s)\ ,\ W^1(s);\ s \le t\}$ şeklinde tanımlandığında şu ifadeye ulaşılır.

$$(\mathrm{X}(t)x, x) = E^{F_t^*}[\int_t^{\mathrm{T}} (R(s)y_s, y_s)ds + (Qy_T, y_T]$$

R(s), Q(s) negatif olmadığından $X(t)$ de negatif olmayan değerdir. ■

Şimdi ; $F(X,Y,t,w) : S_p^n \text{ x } L(\mathbb{R}^d; S^n) \text{ x } [0,\mathrm{T}] \text{ x } \Omega \to S^n$,

$Q(\omega) : \Omega \to S^n$ için aşağıdaki lineer olmayan matris değerli geriye doğru stokastik diferansiyel denklemi ele alalım;

$$\begin{cases} -dX(t) = F(X(t), Y(t), t)dt - Y(t)dW(t), \\ X(\mathrm{T}) = Q \end{cases} \tag{3.5}$$

Her (X,Y), $F(X,Y,t,\omega)$ bir F_t uyumlu süreçtir. Q , F_t ölçülebilirdir. Problem $M^2(S_p^n)xM^2(L(R^d;S^n))$ içinde olan, yukarıdaki eşitliği tüm [0,T] içinde çözen bir $(X(.),Y(.))$ uyumlu çiftini bulmaktır.

$\mu(.)$ 'nün $(H8)$ ile aynı pozitif fonksiyon olduğu aşağıdaki varsayımlara ihtiyaç vardır;

$$(\mathrm{A1}) \begin{cases} (i)\ |Q(\omega)|\ ,\ |F(0,0,t,\omega)| \quad \text{C ile sınırlıdır.} \\ (ii)\ |F(X_1,Y_1,t) - F(X_2,Y_2,t)| \le \mu(R)(|X_1 - X_2| + |Y_1 - Y_2|) \end{cases}$$

$$\forall X_1, X_2 \in S_p^n, |X_1|, |X_2| \le R,\quad \forall Y_1, Y_2 \in L(\mathbb{R}^d, S^n)$$

Geri kalan varsayımlar açıklamadan aşağıdaki matris değerli yardımcı fonksiyonlar belirtilmelidir.

$$\mathrm{A}^{+}, \mathrm{A}^{-}, C_i^{+}, C_i^{-},\ i=1,..,d,\ G_j^{+}, G_j^{-},\ j=1,..,l$$

S_p^n x $L(R^d;S^n)$ x $[0,\mathrm{T}]$ x Ω de $L(\mathbb{R}^n)$ değerleri ile tanımlı olan her (X,Y) için tümünün F_t uyumlu olduğu ve

$$(\mathrm{A2})\begin{cases} (i)\quad S_p^n \text{ x } L(\mathbb{R}^d;S^n) \text{ x } [0,\mathrm{T}]'de \\ (ii)\quad \left|M^{+}(X,Y,t)\right| \le C, \qquad M^{+} = A^{+}, C_i^{+}, G_j^{+} \\ (iii)\left|M^{-}(X,Y,t)\right| \le \mu(|x|),\ M^{-} = A^{-}, C_i^{-}, G_j^{-} \end{cases}$$

şeklinde olan;

$$F^{+} = F - [A^{+*}\mathrm{X} + \mathrm{XA}^{+} + \sum_{i=0}^{d} C_i^{+*}\mathrm{X}C_i^{+} + Y_i C_i^{+} + C_i^{+*}Y_i)$$

$$+\sum_{j=1}^{l}{}^{l}\ G_j^{+*}\mathrm{X}G_j^{+}]$$

$$F^{-} = F - [A^{-*}\mathrm{X} + \mathrm{X}A^{-} + \sum_{i=1}^{d}(C_i^{-*}\mathrm{X}C_i^{-} + Y_i C_i^{-} + C_i^{-*}Y_i)$$

$$+\sum_{j=1}^{l} G_j^{-*} X G_j^{-}] \text{ ifade edilir.}$$

Aşağıda belirtilenler varsayılırsa;

$$(\mathrm{A3})\begin{cases} F^{+}(X,Y,t) \le \beta I, \quad \beta \text{ bir pozitif sbt.} \\ F^{-}(X,Y,t) \ge 0 \end{cases}$$

Matris değerli geriye doğru stokastik diferansiyel denklemin (3.5) global varlık ve tekliği iddia edebilir.

Teorem 3.2. (A1)-(A3)'ü varsayımının kabulü ile $|X(t)|$ 'nin sınırlı ve negatif olmadığı (3.5)'i çözen ve $M^2(S^n)$ x $M^2(L(\mathbb{R}^d;S^n))$ içinde olan ve (3.5)'i çözen bir (X,Y) çifti vardır.

Bu teoremi kanıtlamak için sıradaki ön tahminler kullanılır.

Yardımcı Teorem 3.3: $0 \le \lambda \le 1$ verilmiş olsun. Aşağıdaki geriye doğru eşitliği

$$\begin{cases} -d\mathrm{X}_\lambda(t) = \lambda F(X_\lambda(t), Y_\lambda(t))dt - Y_\lambda(t)dW(t) \\ X_\lambda(\mathrm{T}) = \lambda Q \end{cases} \tag{3.6}$$

Çözen $|X_\lambda(t)|$ 'nin sınırlı olduğu $M^2(S_p^n)$ x $M^2(L(\mathbb{R}^d; S^n))$ içinde bir $(X_\lambda(.), Y_\lambda(.))$ çiftinin var olduğu kabul edilsin.

O halde $X_\lambda(t)$ negatif değildir ve

$$|X_\lambda(t)|^2 \le C_2^{\,2}$$

$$E^{F_t} \int_t^{\mathrm{T}} |F(X_\lambda(s), Y_\lambda(s), s|^2 \, ds \le C_3^{\,2} \tag{3.7}$$

burada C_2 ve C_3; (t, ω, λ) 'da bağımsız sabitlerdir.

İspat:(i) Negatif olmama: A^-, C^- ve G^- notasyonlarını kullanarak (X_λ, Y_λ), aşağıdaki ifade ile (3.1) için bir çözüm kabul edilebilir.

A(t)= $\lambda A^-(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t)$

$C_i(t) = \lambda C_i^-(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t)$ i=1,..,d

$$G_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\lambda} G_j^-(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t),\ j = 1,..,d \\ \sqrt{(\lambda - \lambda^2)} C_{j-l}^-(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t),\ j = l+1,.q, q = l+d \end{cases}$$

R(t)= $\lambda F^-(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t)$

$X(t)$ sınırlı olduğundan dolayı, (A1) ve (A2) varsayımlarından yol çıkarak A(t), C(t), G(t) ve R(t) de sınırlıdır ve R(t) negatif değildir.

Teorem (3.1) için $X_\lambda(t)$ negatif değildir.

(ii) Düzgün sınırlılık: A^+, C^+ ve G^+ notasyonlarını kullanarak aşağıdaki ifadelerle;

A(t)= $\lambda A^+(\mathrm{X}_\lambda(t), Y_\lambda(t), t)$

$C_i(t) = \lambda(C_i^+(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t)$ $\qquad$ i =1…d

$$G_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\lambda} G_j^+(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t) \\ \sqrt{(\lambda-\lambda^2)} C_{j-1}^+(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t), \quad j = l+1, .., q, \; q = l+d \end{cases}$$

R(t)= $\lambda F^+(X_\lambda(t), Y_\lambda(t), t)$

$(X_\lambda(.), Y_\lambda(.))$, (3.1) lineer eşitliğinin bir çözümü olarak kabul edilebilir.

(A2) varsayımından; $\left|\mathrm{A}^+\right|, \left|C_i^+\right|$ ve $\left|G_j^+\right|$, C ile düzgün sınırlıdır. Bu nedenle; $\left|\mathrm{A}(t)\right|, \left|C_i(t)\right|$ ve $\left|G_i(t)\right|$ de C ile sınırlıdır.

Aşağıdaki geriye doğru eşitliği ele alınsın.

$$\begin{cases} -d\,\hat{\mathrm{X}}(t) = [F^0(\hat{\mathrm{X}}(t), \hat{Y}_i(t), t) + \beta I]dt - \hat{Y}(t)d\omega(t), \\ \hat{\mathrm{X}}(\mathrm{T}) = Q \end{cases} \tag{3.8}$$

Yardımcı teorem (3.1)'deki $|Q|^2 + \int_t^{\mathrm{T}} |\beta I|^2 \, dt \le C^2 + b\beta^2 \mathrm{T}$ den dolayı

$$\left|\hat{\mathrm{X}}(t)\right|^2 \le (C^2 + n\beta^2 \mathrm{T}).e^{\mathrm{C_1 T}} \text{ ve } C_1^2 = 1 + 2C_0 + 2C_0^2 \tag{3.9}$$

Diğer taraftan; Yardımcı teorem 3.1'in negatif olmayan kısmından ve (F^+ için) (A3) varsayımından;

$X_\lambda(t) \le \hat{\mathrm{X}}\,(t)$ olduğu görülür.

$X_\lambda(t)$'nin negatif olmayışı;

$C_2{}^2 = (C_2 + \eta\beta^2 \mathrm{T})e^{C_1\mathrm{T}}$ ile

$\left|X_\lambda(t)\right|^2 = tr(X_\lambda(t) \leq tr(\overset{\wedge}{\mathrm{X}}{}^2(t)) \leq C_2{}^2$ olduğunu gösterir.

$\left|Y_\lambda\right|$ tahmini için, Ito'nun formülü $\left|X_\lambda(t)\right|^2$'ye uygulanırsa;

$$\left|X_\lambda(t)\right|^2 + E^{F_t}\int_t^{\mathrm{T}}\left|Y_\lambda(t)\right|^2$$

$$= E^{F_t}\left|Q\right|^2 + 2E^{F_t}\int_t^{\mathrm{T}}(X_\lambda(s), F(X_\lambda(s), Y_\lambda(s), s))ds$$

$$\leq C^2 + 2E^{F_t}\int_t^{\mathrm{T}}\left|X_\lambda(s)\right|(F(0,0,s)\left|+\mu(C_2)(\left|X_\lambda(s)\right| + \left|Y_\lambda(s)\right|\right|)ds$$

$$\leq C^2 + 2E^{F_t}\int_t^{\mathrm{T}}C_2(C + \mu(C_2)C_2 + \mu(C_2)\left|Y_\lambda(s)\right|)ds$$

$$\leq 2^{-1}E^{F_t}\int_t^{\mathrm{T}}\left|Y_\lambda(s)\right|^2 ds + C^2 + (2CC_2 + 2C^2{}_{2\mu}(C_2) + 2(C_{2\mu}(C_2))^2)\mathrm{T}$$

Bu sebepten;

$$C_4 = 2[C^2 + 2CC_2 + 2C_2{}^2\mu(C_2) + 2(C_2\mu(C_2))^2)\mathrm{T}]$$

ile $E^{F_t}\int_t^{\mathrm{T}}\left|Y_\lambda(s)\right|^2 ds \leq C_4$ 'tür. ■

Yardımcı Teorem 3.4: Eğer $(X_\lambda(.), (Y_\lambda(.))$, (3.6)'yı çözüyorsa; ve $X_\lambda(t)$ sınırlı ise; her $\lambda \in [0,1-\delta_0]$ için bir pozitif δ_0 sabiti vardır ki, her $0 \leq \delta \leq \delta_0$ için, aşağıdaki karmaşık geriye doğru eşitliği;

$$\begin{cases} -dx(t) = (\lambda+\delta)F(X(t), Y(t), t)dt - Y(t)dW(t) \\ X(T) = (\lambda+\delta)Q \end{cases} \tag{3.10}$$

$X(t)$ 'nin negatif olmadığı ve C_2 tarafından sınırlı olduğu bir $(X(.),Y(.))$ çözümüne sahiptir. (C_2 önceki yardımcı teoremde olan C_2 ile aynıdır).

İspat: Yardımcı teorem 3.3 den görüldüğü üzere; $X_\lambda(t)$ C_2 tarafında sınırlıdır ve negatif değildir. Negatif olmama; aşağıdaki durumu açığa çıkarır;

$$X_\lambda(t) + \xi \geq -\rho I, \quad \forall \xi \in S^n, \quad |\xi|^2 \leq \rho^2 \tag{3.11}$$

R= ρ olarak aşağıdaki geriye doğru eşitliğin çözümünü ele alınırsa;

$$\begin{cases} d\xi(t) = [g(\xi(t), n(t), t) + g_0(t)]dt + \eta(t)dW(t) \\ \xi(\mathrm{T}) = \delta Q \end{cases} \tag{3.12}$$

İçin; aşağıdaki ifadelere ulaşılır.

$$g(\zeta,\eta,t) = -(\lambda+\delta)(F(X_\lambda(t)+\zeta Y_\lambda(t)+\eta,t) - F(X_\lambda(t),Y_\lambda(t),t))$$

$$g_0(t) = -\delta F(X_\lambda(t),Y_\lambda(t),t))$$

Görüldüğü üzere $X = X_\chi + \zeta, Y = Y_\lambda + \eta$ Alırsak; (3.10)'u çözmek aynı zamanda (3.12)'yi çözmek anlamına gelir. Diğer taraftan (3.11)'den $g(\zeta,\eta,t), |\zeta| \leq R$ içinde iyi bir şekilde konumlandırılmıştır.

Yardımcı teorem (3.3) ve varsayım (A1(ii)) ile; (3.12)'nin teorem 2.2'deki tüm varsayımları karşıladığı kontrol edebilir.

$$C_0 = \mu(C_2 + R), k^2 = \delta^2(C^2 + C_3{}^2)$$

Görüldüğü üzere; (3.12), $[\mathrm{T}_0, \mathrm{T}]$ aralığında; $|\zeta(t)| \leq R$ olan; Teorem (2.2)'de

$$\mathrm{T} - \mathrm{T}_0 = 2C_1^{-1} \log \frac{R^2}{\delta^2(C^2 + C_3{}^2)}, C_1 = 1 + 2C_0 + 2C_0{}^2$$

olan tek bir çözüme sahiptir.

$\delta_0 = (C + C_3)^{-1/2} R \quad e^{C_1 \mathrm{T}/2}$ alırsak; $\forall 0 < \delta \leq \delta_0$ için $\mathrm{T}_0 = 0$ 'dır.

Yani tüm [0,T] aralığı için çözüm tanımlıdır. Sonuç olarak süreç çiftleri;

$$(X(t),Y(t)) = (X_{\lambda}(t)+\zeta(t),Y_{\lambda}(t)+\eta(t))$$

(3.10)'u $0 \le \delta \le \delta_0$ için çözer. Sınırlılık ve negatif olmama doğrudan yardımcı teorem 3.3 ile ilişkilidir. ■

Yukarıdaki iki yardımcı teoremi esas alarak, teorem 3.1'in ispatına geçilebilir.

Teorem 3.1'in ispatı: $\{\lambda_i\}$ aşağıdaki gibi olsun.

$$0 = \lambda_0 < \lambda_2 < .. < \lambda_\rho = 1, \lambda_{i+1} - \lambda_i \le \delta_0, i = 0,..,\rho - 1$$

Yardımcı teorem 3.3'ü kullanarak; alternatif olarak (3.6)'yı $\lambda = \lambda_0, \lambda = \lambda_1, .., \lambda = \lambda_\rho = 1$ için çözülebilir. Yardımcı teorem 3.3'den; belirli $X_1(.)$ içindeki tüm $X_\lambda(.)$ negatif değildir ve düzgün sınırlıdır. Bu sebepten $(X_1(.),\ Y_1(.))$, (3.5)'in istenen çözümüdür. ■

Teorem 3.2' nin uygulamaları için aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 1. $F^0(X,Y,t)$'nin yardımcı teorem 3.1'deki ile (3.1)'in aynı lineer fonksiyon olduğu aşağıdaki ifade ele alınsın.

$$\begin{cases} -dx(t) = [F^0(X(t),Y(t),t + R(X(t),Y(t),t - L(X(t),Y(t),t]dt - Y(t)dW(t) \\ X(\mathrm{T}) \ = Q \end{cases} \qquad (3.13)$$

$R(X,Y,t,\omega)$ ve $L(X,Y,t,\omega)$ 'de $S_p^n \ x \ L(¡\ ^d; S^n) \ x \ [0,T] \ x \ \Omega$ üstünde S^n içindeki değerler ile tanımlıdır. Her (X,Y) için uyumlu F_t mevcuttur. Her (t,ω) (A1(ii))'deki yerel Lipschitz şartını sağlar. Ayrıca $R(X,Y,t,w)$ ve $L(X,Y,t,w)$ negatif değildir ve (α,β,ρ) negatif olmayan sabitler olduğunda (p>2);

$$\left|R(X,Y,t)\right| \le C, \left|L(X,Y,t)\right| \le \alpha\left|X\right|^2 + \beta\left|X\right|^\rho$$

(3.13)'ün $X(.)$ 'in negatif olmadığı ve sınırlı olduğu tek bir çözümü olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten;

$\mathrm{A}^+ = \mathrm{A}\ , C_i^+ = C_i\ , G_j^+ = G_j\ , F^+ = R - L$ alırsak;

$\mathrm{A}^+, C_i^+, G_j^+$ ve F^+, (A2) ve (A3) varsayımlarını sağlar. Diğer taraftan

$$\mathrm{A}^-(X,t) = \mathrm{A}(t) - \alpha X - \beta |X|^{\rho-2} X,\ C_i^- = C_i,\ G_j^- = G_j$$

$F^-(X,Y,t) = R(X,Y,t) - L(X,Y,t) + 2\alpha X^2 + 2\beta |x|^{\rho-2} X^2$ alındığında;

kolayca $\mathrm{A}^-, C_i^-, G_j^-$ ve F^-nin (A2) ve (A3) varsayımlarını sağladığı kontrol edebilir. Teorem (3.2)'den görüleceği üzere; (3.13)'ün çözümü vardır ve tektir. $X(t)$ sınırlıdır ve negatif değildir.

Yukarıdaki örneğin özel bir durumu aşağıdaki gibidir.

Örnek 2: (3.13)'ü

$$K(X,t) = XB(t) + \sum_{j=1}^{l} G_j^*(t) X D_j(t),$$

M(X,t)=$[N(t) + \sum_{j=1}^{l} D_j^*(t) X (D_j(t)]^{-1}$ şartlar için;

$$R(X,Y,t,\omega) = R(t,\omega)$$

$L(X,Y,t,w) = K(X,t)M(X,t)K^*(X,t)$ ifadeleriyle ele alınsın.

Burada B(.), Dj(.), j=1,…..*l*, $L(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^n)$ 'de değerlere sahip ve N(.), S^K değerlere sahip bir F_t uyumlu süreçtir. Hepsi sınırlıdır ve N(t) $\geq \gamma l$.

$L = KMK^*(X,t)$ 'nin S_ρ^n de iyi tanımlıdır. Örnek 1'deki tüm varsayımların $\rho = \gamma / 2lC^2$ ile sağlandığı görülür. Bu durumda (3.13) bir stokastik Riccati eşitliğidir. $C(t) \equiv 0$ Olduğu durum Bismut [4] tarafından incelenmiş ve Peng [12], genel durum için bir varlık ve teklik sonucunu elde etmiştir. Bu eşitlik aşağıdaki gibi bir optimum kontrol yorumlamasına sahiptir .(bknz [4] ve [12]).

$$(x(t_0)x, x) \;=\; \inf_{\upsilon(.)} E^{F_{t_0}^{\alpha}} \{\int_{t_0}^{\mathrm{T}} [R(t), x_t, x_t) + (N(t), \upsilon_t, \upsilon_t)]dt + (Qx_{\mathrm{T}}, x_{\mathrm{T}})\}$$ ki bu

aşağıdaki ifadeyi ilgilendirir.

$$\begin{cases} dx_t = (\mathrm{A}(t)x_t + \beta(t)\upsilon_t)dt + C(t)x_t dw(t) + (G(t)x_t + D(t)\upsilon_t dW^1(t) \\ x_{t_0} = x \;, \qquad t_0 \le t \le \mathrm{T} \end{cases}$$

BÖLÜM 4

4. OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN STOKASTİK MAKSİMUM PRENSİBİ

Bu bölümde durum değişkenlerinin rastgele ve geriye doğru stokastik diferansiyel denklemleri tarafından ifade edilen bir stokastik optimal kontrol problemi ele alınmaktadır. Amaç, bir stokastik maksimum prensibinin yerel formunu türetmektir.(Sadece ileriye doğru rastgele değişkenlerin görüldüğü sistemlerde stokastik maksimum prensibi için gerekli uygulamalar [3], [5], [7], [8] ve [11]'de bulunabilir).

4.1. Problem

f,σ,g,l,h ve γ Aşağıdaki gibi olsun.

$f(x,\upsilon,t)\,;\ \mathbb{R}^n \mathrm{x}\ \mathbb{R}^k\ \mathrm{x}\ [0,\mathrm{T}] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\sigma(x,\upsilon,t);\ \mathbb{R}^n\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}^k\ \mathrm{x}\ [0,\mathrm{T}] \rightarrow L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n)$

$g(x,y,z,\upsilon,t):\mathbb{R}^n\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}^m\ \mathrm{x}\, L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}^k\ \mathrm{x}\ [0,\mathrm{T}] \rightarrow \mathbb{R}^m$

$l(x,y,z,\upsilon,t):\mathbb{R}^n\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}^m\ \mathrm{x}\ L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}^k\ \mathrm{x}\ [0,\mathrm{T}] \rightarrow \mathbb{R}$

$h(x):\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\gamma(x):\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Aşağıdakileri varsayalım.

(i) f,σ,g,l,h ve γ, $\mathbb{R}^n\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}^m \mathrm{x}\ \ L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m)\mathrm{x}\,\mathbb{R}^k\ \mathrm{x}\ [0,\mathrm{T}]$'de sürekli olsun ve

$\left(x,y,z,x,v\right)$'e göre sürekli diferansiyellenebilsin.

(ii) f, σ ve g'nin türevleri sınırlı olsun (4.1)

(iii) l'nin türevleri $C(1+|x|+|y|+|z|+|\vartheta|)$ ile sınırlı olsun , h ve γ türevleri x'e göre $C(1+|x|)$ ile sınırlı olsun.

U, $\mathbb{R}^k$ boş olmayan dışbükey bir alt kümesi olsun.

$U = \{\vartheta(.) \in M^2(\mathbb{R}^k) \setminus \vartheta(t) \in \mathrm{U}\}$

U 'nun herhangi bir elemanı, kabul edilebilir kontrol olarak adlandırılır. Verilen herhangi bir $\vartheta(.)$ kabul edilebilir kontrolü için; x_0 ve y_τ verildiği ve deterministik olduğu aşağıdaki ileriye ve geriye doğru stokastik diferansiyel denklemi ele alınsın.

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), \vartheta(t), t)dt + \sigma(x(t), \vartheta(t), t)dW(t), \\ x(0) = x_0 \\ dy(t) = g(x(t), y(t), z(t), \vartheta(t), t)dt + z(t)dW(t), \\ y(\mathrm{T}) = y_{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{4.2}$$

Teorem 2.1'den (4.2)'yi çözen aşağıda ifade edilen bir tek üçlü mevcuttur.

$(x(.), y(.), z(.)) \in M^2(\mathbb{R}^n) \text{ x } M^2(\mathbb{R}^m) \text{ x } M^2(L(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^m))$

(4.2) eşitliği, durum eşitliği olarak adlandırılır.

Çözüme karşılık gelen $(x(.), y(.), z(.))$, durum değişkeni veya eğri (trajectory) olarak adlandırılır. Maliyet fonksiyonu (Performans kriteri) ;

$$J(\vartheta(.)) = E[\int_t^{\mathrm{T}} l\,(x(t), y(t), z(t), \vartheta(t), t)dt + h(x(\mathrm{T}) + \gamma(y(0))] \tag{4.3}$$

olarak tanımlanır.

Optimum kontrol problemi maliyet fonksiyonu olan $J(\vartheta(.))$ kabul edilebilir kontroller üzerinden minimum hale getirmelidir.

Eğer kabul edilebilir kontrol $u(.)$ minimum değere ulaşırsa bir optimal kontrol olarak adlandırılır.

Uyarı: $J(\vartheta(.)) = E\gamma(y(0))$ durumunda yukarıdaki optimum kontrol probleminin önemli bir örneğidir.

Klasik optimum kontrol problemi bu problemin çok özel bir durumu olarak ele alınabilir.

4.2. Varyasyonlu Eşitlikler ve Varyasyonlu Eşitsizlik

$u(.)$ bir optimum kontrol ve $(x(.), y(.), z(.))$ karşılık gelen eğri (trajectory) olsun. $\vartheta(.)$, $u(.)+\vartheta(.)\in U$ şeklinde olsun.

U konveks olduğundan; $0\le\rho\le 1$, için; $u_\rho = u(.)+\rho\vartheta(.)$ 'de U'nun içindedir.

$$d\xi(t) = (f_x(x(t),u(t),\zeta(t)+f_v(x(t),u(t),\vartheta(t))dt \tag{4.4}$$

$$+(\sigma x(x(t),u(t))\ \xi(\mathrm{t})\sigma_v(x(t),u(t)\vartheta(t))dW(t), \qquad \xi(0)=0;$$

$$d\eta(t) = (g_x(x(t),y(t),z(t),u(t))\xi(t)+g_y(x(t),y(t),z(t),u(t)),\eta(t),$$

$$+g_z(x(t),y(t),z(t),u(t)),\xi(t)+g_\vartheta(t),y(t),z(t),u(t))\vartheta(t))dt \tag{4.5}$$

$$+\xi(t)d\omega(t)$$

$$\eta(\mathrm{T})=0$$

belirtilen bu ifadenin bir çözümü $\xi((.),\eta(.),\xi(.)$ 'dur.

Teorem 2.1'den (4.4) ve (4.5)' i çözen bir tek üçlü bulunabilir.

$$(\xi(.),\eta(.),\xi(.))\in M^2(\mathbb{R}^n)\ \mathrm{x}\ M^2(\mathbb{R}^m)\ \mathrm{x}\ M^2(L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m))$$

(4.4) ve (4.5) eşitlikleri varyasyonlu eşitlik olarak adlandırılır. u_ρ 'de karşılık gelen eğri (trajectory) $(X_\rho(.),Y_\rho(.),z_\rho(.))$ 'yı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\tilde{X}_\rho(t) = \rho^{-1}(x_\rho(t)-x(t))-\xi(t),$$

$$\tilde{y}_\rho(t) = \rho^{-1}(y_\rho(t)-y(t)-\eta(t),$$

$$\tilde{z}_\rho(t) = \rho^{-1}(z_\rho(t)-z(t)-\xi(t).$$

Aşağıdaki yakınsama sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 4.1. (4.1) varsayılmak üzere;

$$\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{0\le t\le T} E\left|\tilde{x}_p\right|^2 = 0$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ \sup_{0\le t\le T} E\left|\tilde{y}_p\right|^2 = 0 \tag{4.6}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\ E\left|\tilde{z}_p\right|^2 = 0$$

İspat: $\tilde{x}(.)$ nın yakınsamasının kanıtı, [1] ın yardımcı teorem 4.1'de bulunabilir. Sadece $\tilde{y}_\rho(.)$ ve $\tilde{z}_\rho$ ile ilgilenilmesi gereklidir.

$$\begin{cases} d\,\tilde{y}_\rho = \rho^{-1}[g(x+\rho(\xi+\tilde{x}_\rho), y+\rho(\eta+\tilde{y}_\rho), z+\rho(\zeta+\tilde{z}_\rho), u+p\upsilon, t) \\ -g(x,y,z,u,t) - g_x\xi - g_y\eta - g_z\zeta - g_\upsilon\upsilon]dt + \tilde{z}(t)dW(t), \\ \tilde{y}_\rho(T) = 0, \end{cases}$$

veya;

$$\begin{cases} d\,\tilde{y}_\rho = (A_\rho(t)\,\tilde{x}_\rho(t) + B_\rho(t)\,\tilde{y}_\rho(t) + C_\rho(t)\,\tilde{z}_\rho(t) + G_\rho(t))dt + \tilde{z}_\rho(t)dW(t); \\ \tilde{y}_\rho(T) = 0, \end{cases}$$

sahip olunduğundan; aşağıdakileri ifade edebiliriz.

$$A_\rho = \int_0^1 [g_x(x+\lambda\rho(\xi+\tilde{x}_\rho), y+\lambda\rho(\eta+\tilde{y}_\rho), z+\lambda\rho(\zeta+\tilde{z}_\rho), u+\lambda\rho\upsilon, t)]d\lambda,$$

$$B_\rho = \int_0^1 [g_x(x+\lambda\rho(\xi+\tilde{x}_\rho), y+\lambda\rho(\eta+\tilde{y}_\rho), z+\lambda\rho(\zeta+\tilde{z}_\rho), u+\lambda\rho\upsilon, t)]d\lambda,$$

$$C_\rho = \int_0^1 [g_z(x+\lambda\rho(\xi+\tilde{x}_\rho), y+\lambda\rho(\eta+\tilde{y}_\rho), z+\lambda\rho(\zeta+\tilde{z}_\rho), u+\lambda\rho\upsilon, t)]d\lambda,$$

$$G_\rho = (A_\rho(t) - g_x(x,y,z,u))\xi + (B_\rho(t) - g_y(x,y,z,u))\eta + (C_\rho(t) - g_z(x,y,z,u))\zeta$$

$$+\int_0^1 [g_\upsilon(x + \lambda\rho(\xi + \tilde{x}_\rho), y + \lambda\rho(\eta + \tilde{y}_\rho), z + \lambda\rho(\xi + \tilde{z}_\rho), u + \lambda\rho\upsilon, t)$$

$$-g_\upsilon(x,y,z,\upsilon)]\upsilon d\lambda.$$

Ito formülünü $\left|\tilde{y}_\rho(s)\right|^2$ ’ye uygularsak;

$$J_\rho = E\int_t^T (\left|A_\rho(s)\tilde{x}_\rho(s)\right|^2 + \left|G_\rho(s)\right|^2)ds \text{ ile}$$

$$E\left|\tilde{y}_\rho(t)\right|^2 + E\int_t^T \left|\tilde{z}_\rho(s)\right|^2 ds \qquad (4.7)$$

$$= -2E\int_t^T (\tilde{y}_\rho(s), A_\rho(s)\tilde{x}_\rho(s) + B_\rho(s)\tilde{y}_\rho(s) + C_\rho(s)\tilde{z}_\rho(s) + G_\rho(s))ds$$

$$\leq KE\int_t^T \left|\tilde{y}_\rho(s)\right|^2 ds + 2^{-1}E\int_t^T \left|\tilde{z}_\rho(s)\right|^2 ds + J_\rho,$$

ye ulaşılır.

$\lim_{\rho\to 0} J_\rho = 0$ ’dır. O halde (4.6)’nın son iki yakınsamasını ispatlamak için; Gronwall’s eşitsizliği (4.7)’ye uygulanabilir.

4.3. Varyasyonel Eşitsizlik ve Maksimum Prensibi

$u(.)$ bir optimum kontrol olduğundan;

$$\rho^{-1}[J(u(.) + \rho\upsilon(.)) - J(u(.))] \geq 0 \qquad (4.8)$$

buradan ve yardımcı teorem 4.1’den aşağıdaki yardımcı teorem 4.2’ye ulaşılır. ■

Yardımcı Teorem 4.2: (4.1)’i varsayarsak, aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılmış olur.

$$E\int_t^T [l_x(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\xi(t)+l_y(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\eta(t)$$

$$+l_z(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\zeta(t)+l_\upsilon(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\upsilon(t)]dt$$

$$+Eh_x(x(T))\xi(T)+E_{\gamma_y}(y(0))\eta(0)\geq 0. \qquad (4.9)$$

İspat: (4.8)'de $\rho\to 0$ olsun. O halde (4.6)'nın ilk değerlendirmesinden; aşağıdaki ifadeyi türetilir.

$$\rho^{-1}E(h(x_\rho(T))-h(x(T)))=E\int_0^1 h_x(x(T)+\lambda(x_\rho(T)-x(T)))d\lambda(\dot{x}_\rho(T)+\xi(T))$$

$$\to Eh_x(x(T))\xi(T).$$

Benzer şekilde;

$$\rho^{-1}E(\gamma(y_\rho(0))-\gamma(y(0)))\to E_{\gamma_y}(y(0))\eta(0),$$

ve

$$\rho^{-1}E\int_t^T [l(x_\rho(t),y_\rho(t),z_{\rho},(t),u_\rho(t)+\rho\upsilon(t))-l(x(t),y(t),z(t),\upsilon(t))]dt$$

$$\to E\int_t^T [l_x(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\xi(t)+l_y(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\eta(t)$$

$$+l_z(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\zeta+l_\upsilon(x(t),y(t),z(t),u(t),t)\upsilon(t)]dt.$$

ifadeleri de türetilir. ∎

Bu durumda (4.9) düzenlenmiştir.

Maksimum prensibini türetmek için; aşağıdaki eşlenik denklemden bahsedilebilinir;

$$\begin{cases} -dp(t) = [\, f_x^*(x(t),u(t))\,p(t) + g_x^*(x(t),u(t))q(t) \\ \qquad\quad +\sigma_x^*(x(t),y(t))k(t) + l_x(x(t),u(t))]dt - k(t)dW(t), \\ \;p(T) = (h_x(x(T)), \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} -dq(t) = g_y^*(x(t),y(t),z(t),u(t),t)q(t) + l_y(x(t),y(t),z(t),u(t),t)]dt \\ \qquad\quad +[g_z^*(x(t),y(t),z(t),u(t),t)q(t) + l_z(x(t),y(t),z(t),u(t),t)]dW(t), \\ \;q(0) = \gamma_y(y(0)). \end{cases} \tag{4.11}$$

Bu durumda; problem (4.10) ve (4.11)i çözen bir $(p(.),k(.),q(.))$ üçlüsü bulunmaktadır.

Yardımcı teorem 4.3: (4.1) varsayımı elimizde bulunsun. Ohalde; (4.10) ve (4.11) eşlenik denklemlerini çözen;

$$(p(.),k(.),q(.)) \in M^2(\mathbb{R}^n) \text{ x } M^2(L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n) \text{ x } M^2(\mathbb{R}^m)$$

bir tek üçlü mevuttur.

İspat: (4.11) eşitliği sıradan bir geriye doğru stokastik denklemdir. O halde varlığı ve tekliği açıkça ortadır. (4.11)'den $q(.)$'yu çözüldüğünde; (4.10)'un (2.1) tipli bir geriye doğru stokastik diferansiyel denklem olduğu görülür.

Teorem 2.1'den anlaşıldığı üzere; (4.10)'u çözen;

$M^2(\mathbb{R}^n)$ x $M^2(L(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^n))$ içinde bir $(p(.),k(.),q(.))$ şekilde tek bir çift vardır. ■

Hamiltonion $H : \mathbb{R}^n \text{ x } \mathbb{R}^m \text{x } L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m) \text{ x } \mathbb{R}^k \text{x } [0,\mathrm{T}] \to R$ ve;

$$\begin{aligned} H(x,y,z,\upsilon,p,k,q,t) = (p, f(x,\upsilon)) + (k,\sigma(x,\upsilon)) + (q, g(x,y,z,\upsilon,t)) \\ +l(x,y,z,\upsilon t) \end{aligned}$$

dir.

Bu notasyonu kullanarak; (4.10) ve (4.11) eşlenik denklemleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{cases} -dp(t) = H_x(x(t), u(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)dt - k(t)dW(t); \\ p(T) = h_x(x(T)), \\ -dq(t) = H_y(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)dt \\ +H_z(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)dW(t), \\ q(0) = \gamma_y(y(0)). \end{cases} \qquad (4.12)$$

Şimdi aşağıdaki teorem iddia edilmektedir.

Teorem 4.4: $u(.)$ bir optimum kontrol ve $(x(.), y(.), z(.))$ karşılık gelen eğri (trajectory) olmak üzere $(p(.), k(.), q(.))$ nun (4.12) eşlenik denkleminin çözümü olduğu aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$(H_\upsilon(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t), \upsilon - u(t)) \geq 0 \qquad \forall \upsilon \in U \qquad (4.13)$$

İspat: Ito formülünü $(\xi(t), p(t) + (\eta(t), q(t)$ 'ye uygularsak (4.4) , (4.5) ve (4.12) den aşağıdaki ifade türetilir.

$$E[(\xi(T), p(T)) + (\eta(T), q(T)) - (\xi(0), p(0)) - (\eta(0), q(0))]$$

$$= -E\int_0^T [l_x(x(t), y(t), z(t), u(t))\xi(t) + l_y(x(t), y(t), z(t), u(t))\eta(t)$$

$$+l_z(x(t), y(t), z(t), u(t))\zeta(t) + H_\upsilon(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)$$

$$-l_\upsilon(x(t), y(t), u(t), t)]dt.$$

bu denklem ve (4.9), U'daki $u(.) + \upsilon(.)$ nın $\upsilon(.)$ için aşağıdaki ifadeyi gösterir.

$$E\int_0^T (H_\upsilon(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t), \upsilon(t))dt \geq 0$$

■

4.4. İkinci Durum

Farklı bir durum da gözönüne alınarak; durum eşitliği aşağıdaki ileriye ve geriye doğru stokastik diferansiyel eşitliğinden oluşsun.

$$\begin{cases} dx(t) = f(x(t), y(t), z(t), \upsilon(t), t)dt + \sigma(x(t), y(t), z(t), \upsilon(t), t)dW(t), \\ x(0) = x_0, \\ dy(t) = g(y(t), z(t), \upsilon(t), t)dt + z(t)dW(t), \\ y(T) = y_T. \end{cases} \tag{4.14}$$

Optimum kontrol problemi maliyet fonksiyonunu kabul edilebilir kontroller üzerinden minimum hale getirmelidir.

$$J(\upsilon(.)) = E\ [\int_0^T l(x(t), y(t), z(t), \upsilon(t), t)dt + h(x(T)) + \gamma(y(0))] \tag{4.15}$$

Bu maksimum prensibinin ispatı, aslında bir önceki durumla aynıdır. Bu nedenle ispata gerek görmeden; Hamiltonion'ı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$H(x, y, z, \upsilon, p, k, q, t) = (p, f(x, y, z, \upsilon, t)) + (k, \sigma(x, y, z, \upsilon, t)),$$

$$+(q, g(y, z, \upsilon, t)) + l(x, y, z, \upsilon, t)) + l(x, y, z, \upsilon, t).$$

$u(.)$ bir optimum kontrol ve $(x(.), y(.), z(.))$ karşılık gelen optimal eğri (trajectory) olsun. Aşağıdaki eşlenik eşitliği sunulur.

$$\begin{cases} -dp(t) = H_x(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)dt - k(t)dW(t), \\ p(T) = h_x(x(T)), \\ -dq(t) = H_y(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)dt \\ +H_Z(x(t), y(t), z(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t)dW(t), \\ q(0) = \gamma_x(y(0)). \end{cases} \tag{4.16}$$

Yukarıda belirtilen şartları ve yardımcı teoremleri göz önüne alarak aşağıdaki teoremi iddia edilebilir.

Teorem 4.5: Varsayalım ki, $u(.)$ (4.14) ve (4.15) problemi için optimal kontrol ve $(x(.), y(.), z(.))$ karşılık gelen optimal eğri (trajectory) olsun. O halde;

$$(H_{\upsilon}(x(t), y(t), u(t), p(t), k(t), q(t), t), \upsilon - u(t)) \geq 0, \quad \forall \upsilon \in \mathrm{U} \text{ dir.} \tag{4.17}$$

Burada $(p(.), (k(.), q(.))$; (4.16) eşlenik eşitliğinin çözümüdür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] **Allen, E.,** 2007, Modelling with Ito Stokastic Differential Equatons,The Netherlands, Springer.

[2] **Aygören, H.,** İMKB-100 Endeks Davranışının Monte Carlo Simülasyonu ile Incelenmesi, Pamukkale Üniversitesi.

[3] **Bensoussan, A.,** 1981, Lectures on stochastic control, in Nonlinear Filtering and Stochastic Control, Proceedings, Cortona.

[4] **Bismut, J.M.,** 1976, Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients, SIAM J. Control, Vol. 14, 419-444 pp.

[5] **Bismut, J.M.,** 1978, An introductory approach to duality in optimal stochastic control, SIAM J. Rev., Vol. 20, No.1, 62-78 pp.

[6] **Duffie D. and Epstein, L.,** Stochastic differential utility and asset pricing, Private communication.

[7] **Haussmann, U.G.,** 1976, General necessary conditions for optimal control of stochastic systems, Math. Programming Stud.Vol.6, 34-48 pp.

[8] **Kushner, H.J.,** 1972,Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems, SIAM J. Control, Vol. 10, 550-565pp.

[9] **Öztürk, F.,** 2014, Ve Biraz İstatistik, https//:fikriozturk.files.wordpress.com.

[10] **Pardoux, E. and Peng, S.,** 1990, Adapted solution of backward stochastic equation, Systems Control Lett., Vol. 14, 55-61pp.

[11] **Peng, S.,** 1990, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. Control Optim., Vol. 28, No. 4, 966-979 pp.

[12] **Peng, S.,** 1992, Stochastic Hamilton-Jacobi-Bellman equations, SIAM J. Control Optim, Vol. 30, No. 2, 284-304 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

[13] **Peng, S.,** 1993, Backward Stokastik Dfferential Equations and Applications to Optimal Control, Springer-Verlag Newyork Inc.APPL math Optim 27,125-144pp.

[14] **Wonham, W.M.,** 1969, On a matrix Ricatti equation of stochastic control, SIAM J. Control, Vol. 6, 312-326 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Vildan TÜRKSEVEN, 1973 yılında Bursa'da doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Bursa'da tamamladıktan sonra Uludağ Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü 1994 yılında bitirdi. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak göreve başladı. TÜBİTAK destekli TUSİ-Ortaöğretim Öğretmenleri için Matematik Olimpiyatları Eğitimleri'nin üç kademesine katıldı. Halen Manisa Fen Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.