YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İFADE EDİLEN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN OPTİMALLİK ŞARTLARI

Derya DİNÇER

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Matematik Bölümü

Sunum Tarihi: 09.07.2015

Bornova-İZMİR

2015

596
TZL-YL-8

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZLİ YÜKSEK LİSANS TEZ JÜRİ SINAV TUTANAĞI

ÖĞRENCİNİN	
Adı, Soyadı	: Derya Dinçer
Öğrenci No	: 13400001005
Anabilim Dalı	: Matematik
Programı	: Matematik Yüksek Lisans
Tez Sınav Tarihi	: 9/07/2015 Sınav Saati : 13:00
Tezin Başlığı:	

Adayın kişisel çalışmasına dayanan tezini 45 dakikalık süre içinde savunmasından sonra jüri üyelerince gerek çalışma konusu gerekse tezin dayanağı olan anabilim dallarından sorulan sorulara verdiği cevaplar değerlendirilerek tezin,

☒ BAŞARILI olduğuna (S) ☒ OY BİRLİĞİ
1 ☐ EKSİK sayılması gerektiğine (I) ile karar verilmiştir.
2 ☐ BAŞARISIZ sayılmasına (F) ☐ OY ÇOKLUĞU

3 ☐ Jüri toplanamadığı için sınav yapılamamıştır.
4 ☐ Öğrenci sınava gelmemiştir.

☒ Başarılı (S)	☒ Başarılı (S)	☒ Başarılı (S)
☐ Eksik (I)	☐ Eksik (I)	☐ Eksik (I)
☐ Başarısız (F)	☐ Başarısız (F)	☐ Başarısız (F)
Üye : Doç. Dr. Şahlar Meherrem	Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet Yantır	Üye : Yrd. Doç. Dr. Zehra Pınar
İmza :	İmza :	İmza :

1 *Bu halde adaya 3 ay süre verilir.*
2 *Bu halde öğrencinin kaydı silinir.*
3 *Bu halde sınav için yeni bir tarih belirlenir.*
4 *Bu halde varsa öğrencinin mazeret belgesi Enstitü Yönetim Kurulunda görüşülür. Öğrencinin geçerli mazeretinin olmaması halinde Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla ilişiği kesilir. Mazereti geçerli sayıldığında yeni bir sınav tarihi belirlenir.*

ÖZET

STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İFADE EDİLEN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ İÇİN OPTİMALLİK ŞARTLARI

Derya DİNÇER
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM
Temmuz 2015, 42 sayfa

Bu çalışmada ilk olarak stokastik süreçler hakkında kısa bir bilgi verildi. Ardından stokastik ve Itô stokastik integraller tanımlandı. Stokastik diferansiyeller ve Itô'nun formülü sunuldu ve çeşitli örnekler verildi. Ek olarak, kısaca optimal kontrol tanımı verildi. Optimal kontrol problemleri, gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler ile tanımlanmış sistemler için düşünüldü. Bir tanesi gecikme denklemlerinin stokastik kontrolü ve bir tanesi gecikmeli stokastik sistemlerin tekil kontrolü için iki tane maksimum prensibi ve kanıtları sunuldu. Son olarak finansal uygulamalar yapıldı.

Anahtar sözcükler: Stokastik Optimal Kontrol, Stokastik İntegralleme ve Stokastik Diferansiyel Denklemler, Gecikmeli Stokastik Optimal Kontrol Sistemleri İçin Bir Maksimum Prensibi.

ABSTRACT

OPTIMALITY CONDITIONS FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEM WHICH IS STATED WITH STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Derya DİNÇER
MSc in Department of Mathematics
Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Şahlar MEHERREM
July 2015, 42 pages

In this study a brief information about stochastic processes was given initially. After that stochastic and Itô stochastic integrals were defined. Stochastic differentials and Itô's formula were presented and various examples were given. In addition, optimal control definition was given briefly. Optimal control problems were considered for systems described by stochastic differential equations with delay. Two maximum principles and their proofs, one for stochastic control of delay equations and one for singular control of stochastic systems with delay, were presented. Finally, financial applications were made.

Keywords: Stochastic Optimal Control, Stochastic Integration and Stochastic Differential Equations, A Maximum Principle For Stochastic Optimal Control Systems With Delay.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlarken bana rehberlik eden saygıdeğer tez danışmanım Yard. Doç. Dr. Şahlar MEHERREM'e, Yaşar Üniversitesi matematik bölümündeki tüm öğretim üyelerine ve hazırlık aşamasında bana yardımcı olan herkese çok teşekkür ederim.

Derya DİNÇER

İzmir, 2015

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Stokastik Diferansiyel Denklemler İle İfade Edilen Optimal Kontrol Problemi İçin Optimallik Şartları" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığının ve yararlandığım eserlerin "Kaynakça" bölümünde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Derya DİNÇER

09/07/2015

İÇİNDEKİLER

1 GİRİŞ

İkinci bölümde stokastik süreçler hakkında bilgi verilmiştir. Stokastik süreç olan Brownian Hareketi bu çalışma için önemlidir. İskoçyalı botanist Robert Brown 1827'de sudaki polen tanelerini, küf sporlarını mikroskop altında incelerken sudaki parçacıkların yönlerinin ve hızlarının sürekli değişen bir hareket içinde olduklarını gözlemledi. Daha sonra aynı hareketi toz zerreleriyle de gözlemleyerek, bu hareketin polenlerin canlı olmasıyla ilgili olmadığını keşfetti. Bu hareketler maddenin kinetik teorisine göre her parçacığın sıvı moleküllerinden yediği çarpmalarla açıklanmaktadır. Brownian Hareketi mikroskobik parçacıkların sıvı ya da gaz içinde, çevreleyen maddenin moleküllerinin etkisi sonucunda rastgele hareketidir. Ardından, $a \le t \le b$ için f ve g, (Ω, A, P) olasılık uzayında stokastik süreç olmak üzere $\int_a^t f(s,\omega)\,ds$ ve $\int_a^t g(s,\omega)\,dB(s,\omega)$ integralleri anlatılmıştır. Eğer f ve g belirli koşulları sağlıyor ve H_{SP} Hilbert Uzayında stokastik süreçlerse, integrallerde Hilbert Uzayında stokastik süreçlerdir. Devamında stokastik diferansiyel denklemler tanımlanmıştır. Itô'nun formülü stokastik diferansiyel denklemlere uygulanmış ve kesin çözümler ile momentleri elde edilmiştir. İkinci bölümün sonunda optimal kontrol tanımlanmıştır. Optimal kontrol teorisinin amacı fiziksel kısıtlamaları karşılayan bir süreç oluşturan ve aynı zamanda bazı performans ölçütlerini maksimum ya da minumum yapan kontrol işaretlerini belirlemektir. Başka bir deyişle optimumlaştırma bir sistemin çalışmasını belli bir ölçüte oranla daha üst düzeye çıkarma veya belli bir masraf fonksiyonunu minimumlaştırma yöntemidir.

Üçüncü bölümde optimal kontrol problemleri, gecikmeli stokastik diferansiyel denklemler ile tanımlanmış sistemler için düşünülmüştür. Gecikme denklemlerinin stokastik kontrolü ve gecikmeli stokastik sistemlerin tekil kontrolü için birer maksimum prensibi ve kanıtları sunulmuştur

Dördüncü bölümde ise bir stokastik gecikme denklemi ile tanımlanmış bir ekonomik nicelikten optimal tüketim oranını bulmayı içeren bir örnek çözümü ile bir piyasada Merton Tipi gecikmeli optimal portföy problemi çözümü verilmiştir.

2 STOKASTİK İNTEGRALLEME VE STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1 Stokastik Süreçler

Bir stokastik süreç (Ω, A, P) olasılık uzayında tanımlı $\{X(t), t \in \tau\}$ rasgele değişkenlerinin bir ailesidir. τ kümesi kesikli ise stokastik süreç kesikli, sürekli ise stokastik süreç süreklidir. t genellikle zamanı gösterir. Stokastik diferansiyel denklemlerin çözümleri stokastik süreçlerdir.

Herhangi bir değişkenin değer değişimleri zaman içerisinde belirsiz bir davranış sergiliyor ise bu değişkenin bir stokastik süreç takip ettiği söylenir. Stokastik süreç sürekli değişken ya da kesikli değişken stokastik süreç olarak sınıflandırılabilir. Sürekli değişken süreçte incelemeye konu olan değişken belirli bir aralıkta herhangi bir değeri alabilirken, bir kesikli değişken süreçte, değişken ayrık değerler almaktadır.

Bir değişkenin sadece bugünkü değerinin geleceği tahmin etmede yeterli olması stokastik sürecin Markov özelliğini ifade eder. Bir başka anlatımla stokastik sürecin Markov özelliği değişkenin bugünkü değerinin değişkenin geçmiş davranışlarından tamamen bağımsız olduğu anlamını taşır.

Hisse senedi piyasalarının genellikle bir Markov süreci takip ettikleri kabul edilir. Bu nedenle bir hisse senedi fiyatının bugünkü değeri gelecekle ilgili tahminlerde kullanılabilecek tek geçerli bilgidir. Geleceği kesin olarak tahmin etmek ise zordur ve tahminler olasılık dağılımlarıyla ifade edilmelidir. Hisse senetleri fiyat davranışlarının bir Markov özelliği taşıdığı kabulü bugünkü hisse senetleri fiyatlarının geçmişteki tüm bilgileri yansıttığını ifade eden zayıf etkin piyasa formu ile de tutarlılık göstermektedir.

Bir Markov stokastik süreç, $N(\mu, \sigma)$ biçiminde gösterilen ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılıma sahiptir. Markov özelliği taşıyan bir değişkenin bir yıl süresince gözlemlenen değer değişimleri dağılımı $N(0,1)$ ise, aynı değişkenin iki yıl içindeki değer değişimleri dağılımı, ortalaması 0 ve varyansı 1 olan iki normal dağılımın toplamına eşit olur. $N(0,1)$ özelliğine sahip iki normal dağılım toplandığında sonuç ortalaması ortalamalar toplamı ve varyansı, varyanslar toplamı olan yeni bir normal dağılımdır. Öyleyse, göz önünde bulundurulan değişken için iki yıllık değer değişiminin ortalaması 0 ve varyansı 2 olur.

Markov özelliği taşıyan ve $N(0,1)$ dağılımına sahip olan bir değişken Wiener süreci izler. Wiener süreci ortalaması 0 ve varyansı 1 olan Markov stokastik sürecinin özel bir durumudur. Bir z değişkeni aşağıdaki iki özelliğe sahip ise bu değişken bir Wiener süreci izler.

Özellik 1: Küçük bir Δt zaman dilimindeki değişim Δz ise,

$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$ dir.

Burada, ε standart normal dağılımdan, $N(0,1)$, tesadüfi seçimdir.

Özellik 2: Herhangi iki farklı kısa Δt zaman aralığındaki Δz değerleri birbirinden bağımsızdır.

Birinci özellik Δz nin ortalaması 0, standart sapması $\sqrt{\Delta t}$ ve varyansı Δt olan normal dağılıma sahip olduğunu ifade eder. İkinci özellik ise, z değişkeninin bir Markov süreci izlediğini anlatır.

Uzun bir T zaman dilimi içerisinde z değerindeki bir değişim $z(T)-z(0)$ olarak ifade edilebilir. Bu değişim Δt uzunluğundaki N adet küçük zaman aralığında z değerindeki değişimlerin toplamıdır. Öyleyse,

$N = \dfrac{T}{\Delta t}$ dir.

Wiener sürecinin birinci ve ikinci özelliklerinden, ε standart normal dağılımdan tesadüfi seçimdir ve dolayısıyla da, Δx ortalaması $a\Delta t$, standart sapması $b\sqrt{\Delta t}$ ve varyansı $b^2\Delta t$ özellikleri olan normal dağılıma sahiptir.

Sonlu boyutlu dağılımları normal dağılım olan bir Markov Sürecine Wiener Süreci denir. Wiener süreci için,

- $\{W(t), t \in [0,\infty)\}$ Stokastik Süreç
- $W(0) = 0$

- $E\left(W(t)\right)=0$

- $E\left(W(t)\right)^2=t$

- $t>s$ için $W(t)-W(s)$, $N(0,t-s)$ dağılımlıdır.

- $Cov\left(W(t_1),W(t_2)\right)=\min\{t_1,t_2\}$ dir.

Şimdi, Brown'ın yaptığı deneye dönelim. Polen parçacığının hareketi bağımsız artışlı bir süreç olarak düşünülebilir. Yapılan gözlemler artışların normal dağılımlı olduğunu desteklemektedir. Böylece, Brownian Hareketi bir Wiener Süreci olarak modellenebilir. Modelde sıvı ortama ve parçacığa özgü parametreler de bulunabilir.

Bir Brownian Hareketini modelleyen Wiener Sürecinin kendisine de Brownian Süreci denir. Brownian süreci, sonlu boyutlu dağılımları Normal Dağılım (Gauss Dağılımı) olan bir Markov Sürecidir. Brownian Süreci $\left\{W(t),t\in[0,\infty)\right\}$ veya $\left\{B(t),t\in[0,\infty)\right\}$ biçiminde gösterilir.

2.2 Stokastik İntegralleme

2.2.1 $\int_a^t f(s,\omega)ds$ Biçimindeki İntegraller

$$J(f)=J(f)(\omega)\equiv\int_a^b f(s,\omega)ds, \text{ ve } a\le t\le b \text{ için}$$

$J(f)(t)=J(f)(t,\omega)\equiv\int_a^t f(s,\omega)ds$ şeklindeki integraller sırasıyla $H_{SP}\to H_{RV}$ ve $H_{SP}\to H_{SP}$ tanımlanır. $f\in H_{SP}$ için birinci integral H_{RV} de bir rastgele değişken, ikinci integral H_{SP} de bir stokastik süreçtir. $f\in H_{SP}$ aşağıdaki üç koşulu sağlar.

Koşul 1 $(c_1): f(a)\in H_{RV}$. Bundan dolayı, $\left\|f(a)\right\|_{RV}^2=E\left|f(a)\right|^2\le k_1$, k_1 pozitif bir sabit sayı

Koşul 2 $(c_2): \left\|f(t_2)-f(t_1)\right\|_{RV}^2=E\left|f(t_2)-f(t_1)\right|^2\le k_2\left|t_2-t_1\right|$

$\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve k_2 pozitif bir sabit sayı

Koşul 3 $(c_3): f,[a,b]$ de beklentisizdir.

($f(t,\omega), t'$ zamanına bağlı değil, $t' > t$) Bundan dolayı,

$E\left(f(t)\left(B(t') - B(t)\right)\right) = E\left(f(t)\right)E\left(B(t') - B(t)\right) = 0$ dır. Her $a \le t \le t' \le b$ için.

Tanım 2.1 $f \in H_{SP}$ ve $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}, S_{SP}$ de bir dizidir. $m \to \infty$ iken $\|f - f_m\|_{SP} \to 0$ olsun. O halde, $\int_a^b f(s)\,ds$ integrali,

$$J(f) = \int_a^b f(s)\,ds = \lim_{m\to\infty}\int_a^b f_m(s)\,ds = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}\left(t_{i+1} - t_i\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m-1} f(t_i)\,\Delta t$$

şeklinde tanımlanır.

2.2.2 Itô Stokastik İntegraller

$$I(f) = I(f)(\omega) = \int_a^b f(s,\omega)\,dB(s,\omega) \text{ ve } \quad a \le t \le b$$

$I(f)(t) = I(f)(t,\omega) = \int_a^t f(s,\omega)\,dB(s,\omega)$ integralleri sırasıyla $H_{SP} \to H_{RV}$ ve $H_{SP} \to H_{SP}$ tanımlanır. $f \in H_{SP}$ stokastik sürecinin $(c_1),(c_2),(c_3)$ koşullarını sağladığı varsayılır.

Tanım 2.2 (Adım Fonksiyonları İçin Stokastik İntegral)

Beklentisiz $f_m \in S_{SP}$, $f_m(t,\omega) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) I_i(t)$ ve $\forall i, m$ için $f_i^{(m)} \in H_{RV}$ olmak üzere,

$$I(f_m) = I(f_m)(\omega) = \int_a^b f_m(t,\omega)\,dB(t,\omega)$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega) I_i(t)\,dB(t,\omega)$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)\left(B(t_{i+1},\omega) - B(t_i,\omega)\right) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}(\omega)\Delta B_i \text{ dir.}$$

Burada, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = b \quad [a,b]$ nin bir parçalanışıdır.

$\Delta B_i = \Delta B_i(\omega) = B(t_{i+1},\omega) - B(t_i,\omega)$ ve

$$I_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i \le t \le t_{i+1} \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$i = 0,1,2,\ldots,N-1$ için.

O halde, $I(f_m) = \int_a^b f_m(s)\,dB(s) = \sum_{i=0}^{m-1} f_i^{(m)}\Delta B_i$ olarak tanımlanır. Burada $\Delta B_i = B(t_{i+1}) - B(t_i)$ dir.

Tanım 2.3 (Itô Stokastik İntegral $\int_a^b f(s)\,dB(s)$)

$f \in H_{SP}$ ve $f;(c_1),(c_2),(c_3)$ koşullarını sağlasın. $\int_a^b f(t)\,dB(t)$ integrali,

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dB(t) = \lim_{m\to\infty}\int_a^b f_m(t)\,dB(t) = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m-1} f\left(t_i^{(m)}\right)\left(B\left(t_{i+1}^{(m)}\right) - B\left(t_i^{(m)}\right)\right)$$

olarak tanımlanır. Burada $t_i^{(m)} = a + i\left(\dfrac{b-a}{m}\right)$ dir ve yakınsama H_{RV} dedir.

$a \le t \le b$ ve $f \in H_{SP}$ ayrıca; $f;(c_1),(c_2),(c_3)$ ü sağlamak üzere, $I(f) = I(f)(t,\omega) = \int_a^t f(s,\omega)\,dB(s,\omega)$ stokastik integralini düşünelim. $I: H_{SP} \to H_{SP}$ dir.

Tanım 2.4 (Itô Stokastik İntegral $\int_a^t f(s)\,dB(s)$)

$f \in H_{SP}$ ve $f;(c_1),(c_2),(c_3)$ koşullarını sağlasın. $\int_a^t f(t)\,dB(t)$ integrali,

$$I(f)(t)=\int_a^t f(t)\,dB(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{m-1} f\left(t_i^{(m)}\right)\left(B\left(t_{i+1}^{(m)}\right)-B\left(t_i^{(m)}\right)\right)$$

olarak tanımlanır. Burada $t_i^{(m)}=a+i\left(\frac{t-a}{m}\right)$ dir ve yakınsama H_{RV} dedir.

2.2.3 Stokastik Diferansiyeller ve Itô'nun Formülü

$$X(t)=X(a)+\int_a^t b(s)\,ds+\int_a^t \sigma(s)\,dB(s) \qquad a\le t\le b \text{ için} \tag{2.1}$$

Burada $b,\sigma\in H_{SP}$, $X(a)\in H_{RV}$ dir ve b,σ; $(c_1),(c_2),(c_3)$ koşullarını sağlar.

$\int_a^t b(s)\,ds\in H_{SP}$ ve $\int_a^t \sigma(s)\,dB(s)\in H_{SP}$ dir. O halde $X\in H_{SP}$ olur.

Eğer X (2.1) i sağlıyorsa X, (2.2) stokastik diferansiyelini de sağlar.

$$dX(t)=b(t)\,dt+\sigma(t)\,dB(t) \qquad a<t<b \text{ için} \tag{2.2}$$

Önemli bir sonuç olarak Itô'nun formülü; $X(t)$ stokastik sürecinin düzgün bir fonksiyonu olan $F(t,X(t))$ nin de bir stokastik diferansiyeli sağladığını söyler. Bu teoremi ifade etmek için bir $G:[a,b]\times R\to R$ fonksiyonu üzerinde (c_4) ve (c_5) koşulları yararlıdır.

Koşul 4 (c_4): $G:[a,b]\times R\to R$ fonksiyonu için; $\forall t_1,t_2\in[a,b]$ ve $\forall X\in H_{SP}$ olmak üzere negatif olmayan bir k_3 sabit sayısı vardır. O halde,

$$E\left|G(t_2,X(t_2))-G(t_1,X(t_1))\right|^2\le k_3\left(|t_2-t_1|+E\left|X(t_2)-X(t_1)\right|^2\right)$$

Koşul 5 (c_5): $G:[a,b]\times R\to R$ fonksiyonu için $X(a)\in H_{RV}$ ise $G(a,X(a))\in H_{RV}$ dir.

Teorem 2.1 (Itô'nun Formülü)

$X \in H_{SP}; \forall t \in [a,b]$ için (2.1) i sağlasın. b ve σ fonksiyonları $(c_1),(c_2),(c_3)$ koşullarını sağlasın ve

$t \in [a,b]$ için $\|b^2(t)\|_{RV}, \|\sigma^2(t)\|_{RV} \le k_4$ olsun.

F, t ve x in bir fonksiyonu olsun. $F(t,x)$ in, $t \in [a,b]$ ve $x \in R$ için

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x \partial t}$$

türevleri sürekli olsun. F ve bu türevler (c_4) ve (c_5) koşullarını sağlasın. Ayrıca

$$b(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x},\ \ \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2},\ \ \sigma(t)\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$$

fonksiyonları da (c_4) ve (c_5) koşullarını sağlasın.

O halde F ,

$$dF(t,X(t)) = \left[\frac{\partial F(t,X(t))}{\partial t} + b(t)\frac{\partial F(t,X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 F(t,X(t))}{\partial x^2}\right]dt$$

$$+\sigma(t)\frac{\partial F(t,X(t))}{\partial x}dB(t) \qquad (2.3)$$

stokastik diferansiyelini sağlar.

Örnek 2.1

$\int_0^t s\,dB(s)$ stokastik integralini düşünelim. $dX(t) = dB(t)$ olsun. Burada $\sigma = 1$ ve $b = 0$ dır. $F(t,x) = tx$ olsun.

$dX(t) = dB(t)$ olduğundan $X(t) = B(t)$ dir.

Itô'nun formülünü uygulayalım.

$$d\left(t.B(t)\right)=\left(B(t)+0.t+\frac{1}{2}.1^2.0\right)dt+1.t.dB(t)$$

$$d\left(t.B(t)\right)=B(t)dt+t.dB(t)$$

$$\int_0^t d\left(sB(s)\right)=\int_0^t B(s)ds+\int_0^t sdB(s)$$

$$\int_0^t sdB(s)=-\int_0^t B(s)ds+sB(s)\Big|_0^t$$

$$=-\int_0^t B(s)ds+t.B(t)$$

Örnek 2.2

$\int_0^t B(s)dB(s)$ stokastik integralini düşünelim. $dX(t)=dB(t)$ olsun. Buradan $b=0$ ve $\sigma=1$ dir. $F(t,x)=\frac{1}{2}x^2$ olsun.

$dX(t)=dB(t)$ olduğundan $X(t)=B(t)$ dir.

Itô'nun formülünü kullanalım.

$$d\left(\frac{1}{2}B^2(t)\right)=\frac{1}{2}dt+B(t)dB(t)$$

$$\int_0^t d\left(\frac{1}{2}B^2(s)\right)=\int_0^t \frac{1}{2}ds+\int_0^t B(s)dB(s)$$

$$\int_0^t B(s)dB(s)=\frac{1}{2}B^2(s)\Big|_0^t-\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\left(B^2(t)-B^2(0)\right)-\frac{t}{2}$$

2.3 Stokastik Diferansiyel Denklemler

$\left[0,T\right]$ aralığında bir Itô stokastik diferansiyel denklemi,

$$X\left(t,\omega\right)=X\left(0,\omega\right)+\int_{0}^{t}b\left(s,X\left(s,\omega\right)\right)ds+\int_{0}^{t}\sigma\left(s,X\left(s,\omega\right)\right)dB\left(s,\omega\right) \tag{2.4}$$

şeklindedir.

$0\le t\le T$ için ve $X\left(0,.\right)\in H_{RV}$ dir. Diferansiyel formda ise

$$dX\left(t,\omega\right)=b\left(t,X\left(t,\omega\right)\right)dt+\sigma\left(t,X\left(t,\omega\right)\right)dB\left(t,\omega\right) \quad \text{şeklindedir.} \tag{2.5}$$

2.3.1 Itô'nun Formülü ve Kesin Çözümler

Itô'nun formülü belirli stokastik diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulmada yardımcıdır. Ayrıca Itô'nun formülü belirli problemlerin kesin çözümlerinin bilinmediği durumlarda kesin momentlerin tespitinde de kullanılabilir.

Itô stokastik diferansiyel denkleminin diferansiyel formunu

$$dX\left(t\right)=b\left(t,X\left(t\right)\right)dt+\sigma\left(t,X\left(t\right)\right)dB\left(t\right)$$

şeklinde düşünelim. Burada $0\le t\le T$ ve $X\left(0\right)\in H_{RV}$ dir.

F düzgün bir fonksiyon ve Teorem 2.1 deki koşulları sağlıyor olsun. O halde, Itô'nun formülü $F\left(t,X\right)$ e uygulanabilir. X, (2.4) stokastik diferansiyelini sağlamaktadır. Böylece F için stokastik diferansiyel aşağıdaki şekilde olur.

$$dF\left(t,X\left(t\right)\right)=\left(\frac{\partial F\left(t,X\right)}{\partial t}+b\left(t,X\right)\frac{\partial F\left(t,X\right)}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^{2}\left(t,X\right)\frac{\partial^{2}F\left(t,X\right)}{\partial x^{2}}\right)dt$$

$$+\sigma\left(t,X\right)\frac{\partial F\left(t,X\right)}{\partial x}dB\left(t\right) \tag{2.6}$$

Örnek 2.3 (Bir Stokastik Diferansiyel Denklemin Kesin Çözümü)

$$dX(t) = -\beta X(t)dt + \lambda dB(t), \quad X(0) = X_0$$

stokastik diferansiyel denklemini düşünelim. Burada β, λ ve X_0 sabitlerdir.

$b(t, X(t)) = -\beta X(t), \ \ \sigma(t, X(t)) = \lambda$ olur.

$F(t, X) = e^{\beta t} X(t)$ olsun. Itô'nun formülü kullanalım.

$$d\left(e^{\beta t} X(t)\right) = \left[\beta e^{\beta t} X(t) - \beta X(t) e^{\beta t} + 0\right] dt + \lambda e^{\beta t} dB(t)$$

Her iki tarafın 0 dan t ye integralini alalım.

$$e^{\beta t} X(t) - X(0) = \int_0^t e^{\beta s} \lambda dB(s)$$

Buradan kesin çözüm $X(t) = X_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \lambda dB(s)$ olarak elde edilir.

Örnek 2.4 (Bir Stokastik Diferansiyel Denklemin Kesin Çözümü)

$$dX(t) = b(t) X(t) dt + \sigma(t) X(t) dB(t), \quad X(0) = X_0$$

stokastik diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Burada X_0 bir sabittir.

$b(t, X(t)) = b(t) X(t)$ ve $\sigma(t, X(t)) = \sigma(t) X(t)$ olur.

$F(t, X) = ln(X(t))$ olsun. Itô'nun formülünü uygulayalım.

$$d(ln\, X(t)) = \left[b(t) X(t) \frac{1}{X(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2(t) X^2(t) \left(-\frac{1}{X^2(t)} \right) \right] dt$$

$$+ \left[\sigma(t) X(t) \frac{1}{X(t)} \right] dB(t)$$

Her iki tarafın 0 dan t ye integralini alalım.

$$ln\left(X\left(t\right)\right)-ln\left(X_0\right)=\int_0^t\left(b\left(s\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\left(s\right)\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s\right)dB\left(s\right)$$

Böylece $X\left(t\right)=X_0\exp\left(\int_0^t\left(b\left(s\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\left(s\right)\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s\right)dB\left(s\right)\right)$ kesin çözümüne ulaşılır.

Itô'nun formülü belirli stokastik diferansiyel denklemler için çözümlerin momentlerini tespit etmemizi sağlar. Bu momentleri bulmak için

$$E\left(\int_0^t G\left(t,X\left(t\right)\right)dB\left(t\right)\right)=0 \tag{2.7}$$

ifadesinden faydalanılır.

Örnek 2.5 (Lineer Katsayılı Bir Stokastik Diferansiyel Denklem İçin Kesin Momentleri Bulma)

$dX\left(t\right)=2dt+X\left(t\right)dB\left(t\right),\quad X\left(0\right)=0$ stokastik diferansiyel denklemini düşünelim. $E\left(X\left(t\right)\right),\ E\left(X^2\left(t\right)\right),\ E\left(X^3\left(t\right)\right)$ momentlerini bulalım.

Stokastik diferansiyel denklemde $b\left(t,X\left(t\right)\right)=2$ ve $\sigma\left(t,X\left(t\right)\right)=X\left(t\right)$ dir. Stokastik diferansiyel denklemde her iki tarafın 0 dan t ye integralini alalım.

$$X\left(t\right)=2t+\int_0^t X\left(s\right)dB\left(s\right)$$

Sonra beklenen değeri bulursak, $E\left(\int_0^t X\left(s\right)dB\left(s\right)\right)=0$ olduğundan $E\left(X\left(t\right)\right)=2t$ bulunur.

$F\left(t,X\right)=X^2$ ye Itô'nun formülünü uygulayalım.

$$d\left(X^2(t)\right)=\left[0+b\left(t,X(t)\right).2X(t)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(t,X(t)\right).2\right]dt$$
$$+\left[\sigma\left(t,X(t)\right).2X(t)\right]dB(t)$$

$$d\left(X^2(t)\right)=\left[4X(t)+X^2(t)\right]dt+2X^2(t)dB(t)$$

Her iki tarafın önce 0 dan t ye integralini alıp sonra beklenen değerini bulursak (2.7) eşitliği yardımıyla,

$$E\left(X^2(t)\right)=E\int_0^t\left(4X(s)+X^2(s)\right)ds \text{ olur.}$$

Her iki tarafın t ye göre türevini alırsak,

$$\frac{d\ E\left(X^2(t)\right)}{dt}=4E\left(X(t)\right)+E\left(X^2(t)\right)=8t+E\left(X^2(t)\right) \text{ olur.} \quad E\left(X^2(0)\right)=0 \text{ dır.}$$

Bu birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi çözülünce; $X(t)$ nin kesin ikinci momenti $E\left(X^2(t)\right)=-8t-8+8e^t$ olarak bulunur.

$F(t,X)=X^3$ e Itô'nun formülünü uygulayalım.

$$d\left(X^3(t)\right)=\left[0+2.3X^2(t)+\frac{1}{2}X^2(t).6X(t)\right]dt+X(t).3X^2(t)dB(t)$$

$$d\left(X^3(t)\right)=\left[6X^2(t)+3X^3(t)\right]dt+3X^3(t)dB(t)$$

Her iki tarafın önce 0 dan t ye integral alıp sonra beklenen değeri bulursak (2.7) eşitliği yardımıyla $E\left(X^3(t)\right)=E\int_0^t\left(6X^2(s)+3X^3(s)\right)ds$ olur.

Her iki tarafın t ye göre türevini alalım.

$$\frac{dE\left(X^3(t)\right)}{dt}=6E\left(X^2(t)\right)+3E\left(X^3(t)\right)=-48t-48+48e^t+3E\left(X^3(t)\right)$$

$E\left(X^3(0)\right)=0$ dır. Bu birinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemi çözersek $X(t)$ nin kesin üçüncü momentini $E\left(X^3(t)\right)=16t+\frac{64}{3}-24e^t+\frac{8}{3}e^{3t}$ olarak buluruz.

Örnek 2.6 (Lineer Katsayılı Olmayan Bir Stokastik Diferansiyel Denklemin Kesin Momentlerini Bulma)

$$dX(t)=-\frac{1}{4}X^3(t)dt+\frac{1}{2}X^2(t)dB(t),\quad X(0)=\frac{1}{2}$$

stokastik diferansiyel denklemini düşünelim. $E\left(X(t)\right)$ ve $E\left(X^3(t)\right)$ momentlerini bulalım.

$$dE\left(X(t)\right)=-\frac{1}{4}E\left(X^3(t)\right)dt \text{ ve } E\left(X(0)\right)=\frac{1}{2} \text{ dir.} \tag{2.8}$$

$E\left(X(t)\right)$ yi bulmak için $E\left(X^3(t)\right)$ yi bulmalıyız. Itô’nun formülünü stokastik diferansiyel denklemimize uyguladığımızda,

$$d\left(X^3(t)\right)=\left[0-\frac{1}{4}X^3(t)\cdot 3X^2(t)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot X^4(t)\cdot 6X(t)\right]dt$$

$$+\frac{1}{2}X^2(t)\cdot 3X^2(t)dB(t)$$

$$d\left(X^3(t)\right)=\left[-\frac{3}{4}X^5(t)+\frac{3}{4}X^5(t)\right]dt+\frac{3}{2}X^4(t)dB(t)$$

$$d\left(X^3(t)\right)=\frac{3}{2}X^4(t)dB(t) \text{ olur.}$$

$E\left(X^3(0)\right)=\frac{1}{8}$ dir. Böylece $E\left(X^3(t)\right)=\frac{1}{8}$ olur. Bu (2.8) de yerine konup adi diferansiyel denklem çözülünce $E\left(X(t)\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{32}t$ elde edilir.

2.4 OPTİMAL KONTROL

Varsayalım ki kontrol edilen sistem

$$\dot{x}(t) = a\big(x(t), u(t), t\big) \tag{2.9}$$

diferansiyel denklemi ile ifade edilsin. Burada $u(t)$ kontrol, $x(t)$ ise $u(t)$ ye uygun olan (2.9) sisteminin çözümü olan durum eğrisidir. Amacımız $u(t)$ ye uygun olan sistemin çözümü $x(t)$ durumu ile birlikte

$$J(u) = g\big(x(t_f), t_f\big) + \int_{t_0}^{t_f} f\big(x(t), u(t), t\big)\,dt \tag{2.10}$$

performans ölçüsünü minimum yapan $u(t)$ kontrolünü bulmaktır. Mümkün durum ve kontrol bölgeleri sınırlı değildir. Başlangıç koşulları $x(t_0) = x_0$ ve başlangıç zamanı t_0 belirlidir. x, $n \times 1$ boyutlu durum vektörü; u, $m \times 1$ boyutlu kontrol girdileri vektörüdür.

Hamiltonian fonksiyonu (2.11) de verilmiştir.

$$H\big(x(t), u(t), p(t), t\big) = f\big(x(t), u(t), t\big) + p^T(t)\Big[a\big(x(t), u(t), t\big)\Big] \tag{2.11}$$

Gerekli koşullar, $\forall t \in \left[t_o, t_f\right]$ için (2.12)-(2.15) olarak yazılır.

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}\big(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t\big) \tag{2.12}$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\big(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t\big) \tag{2.13}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}\big(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t\big) \tag{2.14}$$

ve

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x}\left(x^*\left(t_f\right),t_f\right)-p^*\left(t_f\right)\right]^T \delta x_f+\left[H\left(x^*\left(t_f\right),u^*\left(t_f\right),p^*\left(t_f\right),t_f\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g}{\partial t}\left(x^*\left(t_f\right),t_f\right)\right]\delta t_f=0 \qquad (2.15)$$

Örnek 2.7

İkinci mertebeden sistem aşağıdaki şekilde verilmiş olsun.

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=u(t)$$

Performans ölçüsü ise

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}u^2(t)\,dt$$

şeklinde verilsin.

$x(0)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}^T$; $x(2)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$ başlangıç ve son koşullarıyla optimal kontrolü ve optimal durumu bulunuz. (Kontrol ve durumun şartsız olduğunu varsayınız.)

Çözüm: Önce sistem ile performans ölçüsünün karşılaştırması yapılsın.

$$f\left(x(t),u(t),t\right)=f\left(u(t)\right)=\frac{1}{2}u^2(t)$$

$$a\left(x(t),u(t),t\right)=\left[a_1,a_2\right]^T$$

Burada $a_1=x_2(t), a_2=u(t)$ dir.

Adım 1: Hamiltonian fonksiyonu oluşturulur.

$$H = H\left(x_1(t), x_2(t), u(t), p_1(t), p_2(t)\right)$$

$$= f\left(u(t)\right) + p^T(t)\, a\left(x(t), u(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}u^2(t) + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

Adım 2: $u^*(t)$ in bulunuşu

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) + p_2^*(t) = 0 \rightarrow u^*(t) = -p_2^*(t)$$

Adım 3: Adım 2 deki sonuçları Adım 1 de kullanırsak optimal H^* elde edilir.

$$H^*\left(x_1^*(t), x_2^*(t), p_1^*(t), p_2^*(t)\right) = \frac{1}{2}p_2^{*2}(t) + p_1^*(t)x_2^*(t) - p_2^{*2}(t)$$

$$= p_1^*(t) \cdot x_2^*(t) - \frac{1}{2}p_2^{*2}(t)$$

Adım 4: Durum ve yardımcı durum denklemleri elde edilir.

$$\dot{x}_1^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)_* = x_2^*(t)$$

$$\dot{x}_2^*(t) = +\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)_* = -p_2^*(t)$$

$$\dot{p}_1^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_* = 0$$

$$\dot{p}_2^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)_* = -p_1^*(t)$$

Önceki denklemleri çözersek, optimal durum ve yardımcı durum elde edilir.

$$x_1^*(t) = \frac{c_3}{6}t^3 - \frac{c_4}{2}t^2 + c_2 t + c_1$$

$$x_2^*(t) = \frac{c_3}{2}t^2 - c_4 t + c_2$$

$$p_1^*(t) = c_3$$

$$p_2^*(t) = -c_3 t + c_4$$

Adım 5: Optimal kontrol elde edilir.

$$u^*(t) = -p_2^*(t) = c_3 t - c_4$$

Burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabitleri sınır koşulları kullanılarak hesaplandığında $c_1 = 1,\ \ c_2 = 2,\ \ c_3 = 3$ ve $c_4 = 4$ olarak elde edilir.

Son olarak, bu değerler yerine yazılınca optimal durumlar, yardımcı durumlar ve kontrol

$$x_1^*(t) = 0,5t^3 - 2t^2 + 2t + 1$$

$$x_2^*(t) = 1,5t^2 - 4t + 2$$

$$p_1^*(t) = 3$$

$$p_2^*(t) = -3t + 4$$

$u^*(t) = 3t - 4$ olarak elde edilir.

3 GECİKMELİ STOKASTİK OPTİMAL KONTROL SİSTEMLERİ İÇİN BİR MAKSİMUM PRENSİBİ

Varsayalım ki $X(t) = X^{\xi}(t)$ durumu $t \geq 0$ zamanlı (3.1) deki Itô stokastik gecikme denklemi ile tanımlanmış bir nicelik (fizikte, ekonomide veya biyolojide) olsun.

$$\begin{cases} dX(t) = b\big(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t)\big)dt \\ \qquad +\sigma\big(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t)\big)dB(t); \quad t \geq 0 \\ X(s) = \xi(s); \quad -\delta \leq s \leq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Burada, $B(t) = B(t,\omega);\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega,\ (\Omega, F, F_t, P)$ filtrelenmiş olasılık uzayında bir boyutlu Brownian Hareketidir. $b : R_+ \times R^3 \times U \to R$ ve $\sigma : R_+ \times R^2 \times U \to R$ sürekli diferansiyellenebilir (C^1) fonksiyonlar, $u(t) = u(t,\omega)$, kapalı konveks $U \subset R^k$ kümesinde değerli F_t adapte(beklentisiz) stokastik süreçtir (kontrol süreci) ve

$$Y(t) = \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} X(t+s)\,ds, \qquad Z(t) = X(t-\delta) \tag{3.2}$$

X in $X_t := \{X(t+s); s \in [-\delta, 0]\}$ yol parçalarının verilmiş fonksiyonellerini gösterir. $\lambda \in R$ verilmiş ortalama parametre ve $\delta > 0$ verilmiş gecikmedir. $\xi : [-\delta, 0] \to R$ sürekli fonksiyonu X in başlangıç yoludur.

Varsayalım ki bir performans fonksiyoneli,

$$J(u) = E^{\xi}\left[\int_0^T f\big(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t)\big)dt + g\big(X(T), Y(T)\big)\right] \tag{3.3}$$

olsun. Burada $f : R \times R^3 \times U \to R$ ve $g : R^2 \to R$ alttan sınırlı C^1 fonksiyonları ve $E^{\xi} = E,\ X$ in başlangıç yolundaki beklenen değeri göstersin. $\xi \in C[-\delta, 0]\big([-\delta, 0] \to R$ ye tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesidir.) A kümesi, $u(t,\omega) : R_+ \times \Omega \to U$ ($u \in A$, (3.1) in $\forall \xi \in C[-\delta, 0]$ için tek ve güçlü çözümü olmak üzere) mümkün adapte kontrollerinin ailesi olsun. Problemimiz,

$$J(u^*) = \sup\{J(u); u \in A\} \tag{3.4}$$

(3.4) deki $u^* \in A$ yı bulmaktır. Böyle $u^* \in A$ lar (varsa) optimal kontrol olarak adlandırılırlar. Verilen her u için (3.1)-(3.2) sistemi gecikmeli stokastik denkleme bir örnektir.

3.1 Gecikme Denklemleri İçin Bir Maksimum Prensibi

$X_t \in C[-\delta, 0]$, $t-\delta$ dan t ye X yolunun parçası olsun. Yani

$$X_t(s) = X(t+s); \qquad -\delta \le s \le 0 \tag{3.5}$$

$$G(t) = F(t, X(t), Y(t)) \tag{3.6}$$

tanımlayalım. Burada F, $C^{1,2,1}(R^3)$ te verilmiş bir fonksiyon ve

$$Y(t) = \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} X(t+s)\, ds \text{ dir.} \tag{3.7}$$

Yardımcı Teorem 3.1 (Gecikme İçin Itô Formülü)

$$dG(t) = LFdt + \sigma(t,x,y,z,u)\frac{\partial F}{\partial x} dB(t) + \left[x - \lambda y - e^{-\lambda\delta} z\right]\frac{\partial F}{\partial y} dt \tag{3.8}$$

Burada;

$$LF = LF(s,x,y,z,u) = \frac{\partial F}{\partial s} + b(s,x,y,z,u)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(s,x,y,z,u)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \text{ dir ve}$$

$LF(s,x,y,z,u)$ ve (3.8) de görülen diğer fonksiyonlar,

$s = t,\quad x = X(t),\quad y = Y(t),\quad z = Z(t) = X(t-\delta)$ ve $u = u(t)$ şeklinde değerlendirilir.

Kanıt: Teoremin kanıtı [15] ve [22] de yapılmıştır.

Şimdi (3.1)-(3.4) stokastik kontrol problemine dönelim. Bu problem için Hamiltonian $H : R_+ \times R \times R \times R \times U \times R^3 \times R^2 \longrightarrow R$ yi

$$
\begin{aligned}
H(t,x,y,z,u,p,q) &= f(t,x,y,z,u) + b(t,x,y,z,u).p_1 \\
&+ \left(x - \lambda y - e^{-\lambda\delta} z\right).p_2 + \sigma(t,x,y,z,u).q_1,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $p = (p_1, p_2, p_3)^T \in R^3$ ve $q = (q_1, q_2) \in R^2$ dir. Her $u \in A$ için bağlantılı eşlenik denklemler (3.10)-(3.15) geriye doğru stokastik diferansiyel denklemleridir. $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))^T$ ve $q(t) = (q_1(t), q_2(t))$ bilinmeyen F_t adapte süreçlerdir.

$$
\begin{aligned}
&dp_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}\left(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t), p(t), q(t)\right)dt + q_1(t)\,dB(t) \\
&t \in [0,T]
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&dp_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial y}\left(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t), p(t), q(t)\right)dt + q_2(t)\,dB(t) \\
&t \in [0,T]
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
dp_3(t) = -\frac{\partial H}{\partial z}\left(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t), p(t), q(t)\right)dt; \quad t \in [0,T]
\tag{3.12}
$$

$$
p_1(T) = \frac{\partial g}{\partial x}\left(X(T), Y(T)\right)
\tag{3.13}
$$

$$
p_2(T) = \frac{\partial g}{\partial y}\left(X(T), Y(T)\right)
\tag{3.14}
$$

$$
p_3(T) = 0
\tag{3.15}
$$

Burada $X(t), Y(t), Z(t)$ (3.1)-(3.2) nin u ya uygun olan çözümüdür.

Teorem 3.2 (Gecikme Denklemlerinin Stokastik Kontrolü İçin Bir Maksimum Prensibi)

$\bar{u} \in A$ olsun ve $\bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t)$ ve $p(t), q(t)$ sırasıyla (3.1)-(3.2) ve (3.10)-(3.15) e uygun olan çözümler olsun.

$H(t,.,.,.,., p(t), q(t))$ ve $g(.,.)$ konkav, $\forall t \in [0,T]$ için (3.16)

$$
H\left(t, \bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)\right)
$$

$$=\sup_{\upsilon\in U} H\left(t,\bar{X}(t),\bar{Y}(t),\bar{Z}(t),\upsilon,p(t),q(t)\right)\ \forall t\in[0,T]\text{ için} \tag{3.17}$$

$$p_3(t)=0\ \forall t\in[0,T]\text{ için} \tag{3.18}$$

olduğunu varsayalım. O halde $\bar{u}$ (3.4) problemi için bir optimal kontroldür.

Kanıt: $u\in A$ seçelim ve $X(t),Y(t),Z(t)$ (3.1)-(3.2) ye uygun olan çözümler olsun.

$\zeta(t)=\left(X(t),Y(t),Z(t)\right)$ ve $\bar{\zeta}(t)=\left(\bar{X}(t),\bar{Y}(t),\bar{Z}(t)\right)$ diyelim.

$D_1=E\left[\int_0^T\left\{f\left(t,\bar{\zeta}(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(t,\zeta(t),u(t)\right)\right\}dt\right]$ ve

$D_2=E\left[h\left(\bar{X}(T),\bar{Y}(T)\right)-h\left(X(T),Y(T)\right)\right]$ olsun.

$$J(\bar{u})-J(u)=D_1+D_2\geq 0 \tag{3.19}$$

kanıtı gereklidir.

(3.9) ile

$$D_1=E\left[\int_0^T\left\{H\left(t,\bar{\zeta}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)\right)-H\left(t,\zeta(t),u(t),p(t),q(t)\right)\right\}dt\right]$$

$$-E\left[\int_0^T\left\{b\left(t,\bar{\zeta}(t),\bar{u}(t)\right)-b\left(t,\zeta(t),u(t)\right)\right\}p_1(t)\,dt\right]$$

$$-E\left[\int_0^T\left\{\left(\bar{X}(t)-\lambda\bar{Y}(t)-e^{-\lambda\delta}\bar{Z}(t)\right)-\left(X(t)-\lambda Y(t)-e^{-\lambda\delta}Z(t)\right)\right\}p_2(t)\,dt\right]$$

$$-E\left[\int_0^T\left\{\sigma\left(t,\bar{\zeta}(t),\bar{u}(t)\right)-\sigma\left(t,\zeta(t),u(t)\right)\right\}q_1(t)\,dt\right]$$

$$=:\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4 \tag{3.20}$$

elde edilir.

$(\zeta,u)\to H(\zeta,u)=H(t,\zeta,u,p,q)$ nun konkav olması sebebiyle, (3.17) ile

$$H(\zeta,u)-H(\bar{\zeta},\bar{u})\le H_{\zeta}(\bar{\zeta},\bar{u})\cdot(\zeta-\bar{\zeta})+H_{u}(\bar{\zeta},\bar{u})\cdot(u-\bar{u})$$

$$\le H_{\zeta}(\bar{\zeta},\bar{u})\cdot(\zeta-\bar{\zeta}) \text{ dır.}$$

Burada, $H_{\zeta}=\left(\frac{\partial H}{\partial x},\frac{\partial H}{\partial y},\frac{\partial H}{\partial z}\right)$ dir. Bunu Δ_1 de yerine koyarak, (3.8) ile,

$$\Delta_1\ge E\left[\int_0^T -H_{\zeta}\left(t,\bar{\zeta}(t),\bar{u}(t),p(t),q(t)\right)\cdot\left(\zeta(t)-\bar{\zeta}(t)\right)dt\right]$$

$$=E\left[\int_0^T\left(\zeta(t)-\bar{\zeta}(t)\right)dp(t)-\int_0^T\left(X(t)-\bar{X}(t)\right)q_1(t)\,dB(t)\right]$$

$$=E\left[\int_0^T\left(X(t)-\bar{X}(t)\right)dp_1(t)+\int_0^T\left(Y(t)-\bar{Y}(t)\right)dp_2(t)\right] \tag{3.21}$$

elde ederiz. Sonra D_2 yi yazarız. g konkav olduğundan,

$$D_2=E\left[g\left(\bar{X}(T),\bar{Y}(T)\right)-g\left(X(T),Y(T)\right)\right]$$

$$\ge -E\left[\frac{\partial g}{\partial x}\left(\bar{X}(T),\bar{Y}(T)\right)\left(X(T)-\bar{X}(T)\right)+\frac{\partial g}{\partial y}\left(\bar{X}(T),\bar{Y}(T)\right)\left(Y(T)-\bar{Y}(T)\right)\right]$$

$$=-E\left[\left(X(T)-\bar{X}(T)\right)p_1(T)+\left(Y(T)-\bar{Y}(T)\right)p_2(T)\right]$$

$$=-E\left[\int_0^T\left(X(t)-\bar{X}(t)\right)dp_1(t)+\int_0^T p_1(t)\,d\left(X(t)-\bar{X}(t)\right)\right.$$

$$\left.+\int_0^T\left\{\sigma\left(t,\zeta(t),u(t)\right)-\sigma\left(t,\bar{\zeta}(t),\bar{u}(t)\right)\right\}q_1(t)\,dt\right]$$

$$-E\left[\int_0^T\left(Y(t)-\bar{Y}(t)\right)dp_2(t)+\int_0^T p_2(t)\,d\left(Y(t)-\bar{Y}(t)\right)\right] \tag{3.22}$$

olur. (3.21) ve (3.20) ile bu bir araya getirilirse,

$D_2 \geq -\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 = -D_1$ elde edilir.

Bundan dolayı $J(\overline{u}) - J(u) = D_1 + D_2 \geq 0$ dır.

$u \in A$ nın keyfi olmasından dolayı $\overline{u}$ nun optimal kontrol olduğu kanıtlanmış olur.

Bir Tekil Kontrol Versiyonu

Belirtilecek olan en genel sonuç değildir. Fakat ilginç uygulamaları da kapsayabilecek özel bir durum sunulmuştur.

$\left(X_0(t), X_1(t)\right) = \left(X_0(t), X(t)\right) \in R^2$ durumunun aşağıdaki denklemler ile tanımlandığını varsayalım.

$$dX_0(t) = b_0\left(t, \zeta(t), u(t)\right)dt + \sigma_{00}\left(t, \zeta(t), u(t)\right)dB_0(t)$$

$$+\sigma_{01}\left(t, \zeta(t), u(t)\right)dB_1(t) + a_{11}(t)dL(t) + a_{12}(t)dM(t); \qquad X_0\left(0^-\right) = x_0 \qquad (3.23)$$

$$dX(t) = b_1\left(t, \zeta(t), u(t)\right)dt + \sigma_{10}\left(t, \zeta(t), u(t)\right)dB_0(t)$$

$$+\sigma_{11}\left(t, \zeta(t), u(t)\right)dB_1(t) + a_{21}(t)dL(t) + a_{22}(t)dM(t);$$

$$X(s) = \xi(s) \quad s \in [-\delta, 0) \text{ için} \qquad (3.24)$$

Burada $B_0(t), B_1(t)$ R de tanımlı bağımsız Brownian Hareketleri,

$$\zeta(t) = \left(X_0(t), X(t), Y(t), Z(t)\right) \qquad (3.25)$$

ve

$$Y(t) = \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} X(t+s)ds, \qquad Z(t) = X(t-\delta) \text{ dir.} \qquad (3.26)$$

Burada $b_i : R_+ \times R^4 \times U \to R, \sigma_{ij} : R_+ \times R^4 \times U \to R$ verilmiş C^1 fonksiyonları $(i, j = 0,1)$ ve $a_{ij}(t)$ verilmiş sürekli deterministik fonksiyonlardır; $1 \le i, j \le 2$. $L(t)$ ve $M(t)$ süreçleri tahmin edilebilir sağdan sürekli ve azalmayan süreçlerdir. $L(0^-) = M(0^-) = 0$ dır. Daha önceden $u(t) \in U$ nun adapte süreç olduğunu varsaymıştık. $0 \le t \le T$ için $(X_0(t), X(t))$ (3.23)-(3.24) nin tek güçlü çözümüdür. A kümesi (u, L, M) mümkün kontrollerinin kümesidir.

Böylece bu modelde $X_0(t)$ de değil, sadece $X_1(t) = X(t)$ de bir gecikme olacağını varsayarız.

Performans fonksiyoneli;

$$J(u,L,M) = E\left[\int_0^T f\left(t, X_0(t), X(t), Y(t), Z(t), u(t)\right) dt\right.$$

$$\left. + g\left(X_0(T), X(T), Y(T)\right) + \int_0^T \theta_1(t)\, dL(t) + \theta_2(t)\, dM(t)\right] \qquad (3.27)$$

olarak verilsin. f, g alttan sınırlı C^1 fonksiyonları ve $\theta_1(t), \theta_2(t)$ sürekli deterministik fonksiyonlardır. O halde problemimiz $(u^*, L^*, M^*) \in A$ yı

$$J(u^*, L^*, M^*) = \sup\left\{J(u, L, M); (u, L, M) \in A\right\}. \qquad (3.28)$$

şeklinde bulmaktır.

Bu problem için Hamiltonian $H : R_+ \times R \times R \times R \times R \times U \times R^4 \times R^{3\times 2} \to R$ yi

$$\begin{aligned} &H(t, x_0, x, y, z, u, p, q) = H(t, \zeta, u, p, q) = f(t, \zeta, u) \\ &+ b_0(t, \zeta, u) \cdot p_0 + b_1(t, \zeta, u) \cdot p_1 + \left(x - \lambda y - e^{-\lambda\delta} z\right) \cdot p_2 \\ &+ \sigma_{00}(t, \zeta, u) q_{00} + \sigma_{01}(t, \zeta, u) q_{01} + \sigma_{10}(t, \zeta, u) q_{10} \\ &+ \sigma_{11}(t, \zeta, u) q_{11} \end{aligned} \qquad (3.29)$$

şeklinde tanımlarız. Burada, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in R^4, q = (q_{ij})_{0 \le i \le 2, 0 \le j \le 1} \in R^{3\times 2}$ ve

$\zeta = (x_0, x, y, z)$ dir. Uygun olan eşlenik denklemler (3.30)-(3.33) şeklindedir.

$$\begin{cases} dp_0(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_0}\big(t, \zeta(t), u(t), p(t), q(t)\big)dt + q_{00}(t)dB_0(t) \\ \qquad +q_{01}(t)dB_1(t); \qquad t \in [0,T] \\ p_0(T) = \dfrac{\partial g}{\partial x_0}\big(X_0(T), X(T), Y(T)\big) \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\begin{cases} dp_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}\big(t, \zeta(t), u(t), p(t), q(t)\big)dt + q_{10}(t)dB_0(t) \\ \qquad +q_{11}(t)dB_1(t); \qquad t \in [0,T] \\ p_1(T) = \dfrac{\partial g}{\partial x}\big(X_0(T), X(T), Y(T)\big) \end{cases} \tag{3.31}$$

$$\begin{cases} dp_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial y}\big(t, \zeta(t), u(t), p(t), q(t)\big)dt + q_{20}(t)dB_0(t) \\ \qquad +q_{21}(t)dB_1(t); \qquad t \in [0,T] \\ p_2(T) = \dfrac{\partial g}{\partial y}\big(X_0(T), X(T), Y(T)\big) \end{cases} \tag{3.32}$$

ve

$$\begin{cases} dp_3(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial z}\big(t, \zeta(t), u(t), p(t), q(t)\big)dt; \qquad t \in [0,T] \\ p_3(T) = 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

Teorem 3.3 (Gecikmeli Stokastik Sistemlerin Tekil Kontrolü İçin Bir Maksimum Prensibi)

$(\bar{u}, \bar{L}, \bar{M}) \in A$ olduğunu varsayalım. $\bar{\zeta}(t) = \big(\bar{X}_0(t), \bar{X}(t), \bar{Y}(t), \bar{Z}(t)\big)$ ve $p(t), q(t)$ (3.23)-(3.24) ve (3.30)-(3.33) un uygun çözümleri olsun. (3.34)-(3.37) nin

$$(\zeta, u) \to H\big(t, \zeta, u, p(t), q(t)\big) \tag{3.34}$$

ve $g(.)$ konkav fonksiyonlardır, $\forall t \in [0,T]$ için

$$H\big(t, \bar{\zeta}(t), \bar{u}(t), p(t), q(t)\big) = \sup_{\upsilon \in U} H\big(t, \bar{\zeta}(t), \upsilon, p(t), q(t)\big), \forall t \in [0,T] \tag{3.35}$$

$$E\left[\int_0^T \{\theta_1(t)+a_{11}p_0(t)+a_{21}p_1(t)\}\cdot d\left(L-\bar{L}\right)(t)+\int_0^T \{\theta_2(t)\right.$$

$$\left.+a_{12}(t)\,p_0(t)+a_{22}(t)\,p_1(t)\}\cdot d\left(M-\bar{M}\right)(t)\right]\leq 0, \quad \forall (u,L,M)\in A \text{ için} \tag{3.36}$$

$$p_3(t)=0, \quad \forall t\in[0,T] \text{ için} \tag{3.37}$$

sağlandığını varsayalım. O halde $\left(\bar{u},\bar{L},\bar{M}\right)$ (3.27) problemi için bir optimal kontroldür.

Kanıt: Bu teoremin kanıtı Teorem 3.2 nin kanıtına benzer olarak yapılabilir. Buradaki temel farklılık, $D_3 := E\left[\int_0^T \theta_1(t)\,d\left(\bar{L}-L\right)(t)+\theta_2(t)\,d\left(\bar{M}-M\right)(t)\right]$ dir. Ayrıca $D_2 := E\left[g\left(\bar{X}_0(T),\bar{X}(T),\bar{Y}(T)\right)-g\left(X_0(T),X(T),Y(T)\right)\right]$ yi hesaplarken, L,M ve $\bar{L},\bar{M}$ nin sırasıyla $\zeta(t)$ ve $\bar{\zeta}(t)$ üzerindeki etkisini hesaba katmalıyız. Bunu yaparak (3.36) ek koşulunu elde etmiş oluruz. Detaylar atlanmıştır.

4 FİNANSAL UYGULAMALAR

Örnek 4.1 (Optimal Tüketim)

$X(t)$, t zamanında bir ekonomik niceliğin boyutu olsun ve (4.1) ile verilsin.

$$\begin{cases} dX(t) = \left[\mu X(t) + \alpha Y(t) + \beta Z(t) - u(t)\right] dt \\ \qquad + \sigma\big(t, X(t), Y(t), Z(t), u(t)\big) dB(t); \qquad t > 0 \\ X(s) = \xi(s); \quad -\delta \le s \le 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Burada $\sigma : R^5 \to R$ verilmiş bir C^1 fonksiyonu ve önceden verildiği gibi

$$Y(t) = \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} X(t+s)\, ds, \qquad Z(t) = X(t-\delta) \text{dir.} \tag{4.2}$$

$\mu, \alpha, \beta, \lambda$ ve $\delta > 0$ sabitlerdir ve $\xi \in C[-\delta, 0]$ dır. Bu modelde $X(t)$nin ortalama gelişim oranı şimdiki değer ile daha önceki değerlerin ortalamasının lineer kombinasyonudur. $u(t) \ge 0$ kontrolünü bizim tüketim oranımız olarak yorumlayabiliriz.

$u(t)$ tüketim oranına bağlantılı performansın,

$$J(u) = E\left[\int_0^T e^{-\rho t} \frac{u^{\gamma}(t)}{\gamma} dt + X(T) + vY(T)\right] \tag{4.3}$$

olarak verildiğini varsayalım. Burada $T > 0$, $\rho > 0$, $\gamma \in (0,1)$ ve $v \in R$ sabitlerdir. $(1-\gamma$ tüketicinin göreli risk giderleri). Problemimiz

$$J(u^*) = \sup_u J(u). \tag{4.4}$$

şeklinde bir F_t adapte $u^*(t,\omega)$ bulmaktır.

Bu durumda Hamiltonian (3.9)

$$H\left(t,x,y,z,u,p,q\right)=e^{-\rho t}\frac{u^{\gamma}}{\gamma}+\left[\mu x+\alpha y+\beta z-u\right]p_1$$

$$+\left[x-\lambda y-e^{-\lambda\delta}z\right]p_2+\sigma\left(t,x,y,z,u\right)q_1 \tag{4.5}$$

şeklini alır.

Bundan dolayı eşlenik denklemler (3.10) – (3.15),

$$\begin{cases} dp_1\left(t\right)=-\left[\mu p_1\left(t\right)+p_2\left(t\right)+\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\left(t,X\left(t\right),Y\left(t\right),Z\left(t\right),u\left(t\right)\right)q_1\left(t\right)\right]dt \\ \qquad\qquad +q_1\left(t\right)dB\left(t\right) \\ p_1(T)=1 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} dp_2\left(t\right)=-\left[\alpha p_1\left(t\right)-\lambda p_2\left(t\right)+\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\left(t,X\left(t\right),Y\left(t\right),Z\left(t\right),u\left(t\right)\right)q_1\left(t\right)\right]dt \\ \qquad\qquad +q_2\left(t\right)dB\left(t\right) \\ p_2(T)=v \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} dp_3\left(t\right)=-\left[\beta p_1\left(t\right)-e^{-\lambda\delta}p_2\left(t\right)+\dfrac{\partial\sigma}{\partial z}\left(t,X\left(t\right),Y\left(t\right),Z\left(t\right),u\left(t\right)\right)q_1\left(t\right)\right]dt \\ p_3(T)=0 \end{cases} \tag{4.8}$$

olurlar.

$p\left(T\right)$ ve $p_1\left(t\right)$, $p_2\left(t\right)$ nin katsayıları deterministik olduğundan $q_1\left(t\right)=q_2\left(t\right)=0$ olarak seçebiliriz. Bu nedenle (3.18) koşulu $p_3\left(t\right)=0$ aşağıdaki şekilde formüle edilebilir.

$$\beta p_1\left(t\right)-e^{-\lambda\delta}p_2\left(t\right)=0, \qquad \forall t\in[0,T] \text{ için} \tag{4.9}$$

Burada $p_1\left(t\right),p_2\left(t\right)$ aşağıdaki denklemlerin çözümleridir.

$$\begin{cases} dp_1\left(t\right)=-\left[\mu p_1\left(t\right)+p_2\left(t\right)\right]dt \\ p_1\left(T\right)=1 \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\begin{cases} dp_2(t) = -\left[\alpha p_1(t) - \lambda p_2(t)\right]dt \\ p_2(T) = \nu \end{cases} \tag{4.11}$$

(4.9) da $t = T$ seçersek,

$$\nu = \beta e^{\lambda\delta} \text{ ve } \quad \beta \neq 0 \tag{4.12}$$

olur. $\tilde{p}_2(t) = \beta^{-1} e^{-\lambda\delta} p_2(t)$ diyelim ve (4.10) ve (4.11) de yerine koyalım. Böylece (4.13) ve (4.14) oluşur.

$$\begin{cases} dp_1(t) = -\left[\mu p_1(t) + \beta e^{\lambda\delta} \tilde{p}_2(t)\right]dt \\ p_1(T) = 1 \end{cases} \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} d\tilde{p}_2(t) = -\left[\alpha\beta^{-1} e^{-\lambda\delta} p_1(t) - \lambda \tilde{p}_2(t)\right]dt \\ \tilde{p}_2(T) = 1 \end{cases} \tag{4.14}$$

Bu sistemin çözümü,

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \end{bmatrix} = e^{A(T-t)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

Burada,

$$A = \begin{bmatrix} \mu & \beta e^{\lambda\delta} \\ \alpha\beta^{-1} e^{-\lambda\delta} & -\lambda \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

Buradan $p_1(t) = \tilde{p}_2(t)$ şartının tüm t lerde sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\mu + \beta e^{\lambda\delta} = \alpha\beta^{-1} e^{-\lambda\delta} - \lambda$$

veya

$$\alpha = \beta e^{\lambda\delta}\left(\mu + \lambda + \beta e^{\lambda\delta}\right) \text{olmasıdır.} \tag{4.15}$$

Buradan $p_3(t) = 0$ şartının $\forall t \in [0, T]$ iken sağlanması için gerek ve yeter koşul (4.12) ve (4.15) in sağlanıyor olmasıdır, sonucuna ulaşırız.

Sonra,

$$\upsilon \to H\left(t, X(t), Y(t), Z(t), \upsilon, p(t), 0\right), \quad \forall \upsilon \geq 0$$

ifadesini maksimize ederek $u^*(t)$ yi buluruz.

$\dfrac{\partial H}{\partial \upsilon}\left(t, X(t), Y(t), Z(t), \upsilon, p(t), 0\right) = e^{-\rho t}\upsilon^{\gamma-1} - p_1(t)$ sebebiyle konkavlıktan,

$$u^*(t) = \left[e^{\rho t} p_1(t)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{4.16}$$

olarak buluruz. Burada (4.9) ve (4.10) ile

$$p_1(t) = \exp\left\{\left(\mu + \beta e^{\lambda\delta}\right)(T-t)\right\} \text{ dir.} \tag{4.17}$$

(4.17) yi (4.16) da yerine yazarsak $u^*(t)$ yi elde ederiz.

Teorem 4.1 elde edilmiş oldu.

Teorem 4.1

(4.12) ve (4.15) in sağlandığını varsayalım. O halde (4.1) - (4.4) problemi için optimal tüketim oranı $u^*(t)$

$$u^*(t) = \exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\left(\left(\mu + \beta e^{\lambda\delta} - \rho\right)t - \left(\mu + \beta e^{\lambda\delta}\right)T\right)\right\} \tag{4.18}$$

olarak verilir.

Örnek 4.2 (Bir Piyasada Gecikmeli Optimal Portföy)

Aşağıdaki gibi iki yatırım olasılığı bulunan bir piyasa düşünelim.

1) Bono ya da bir banka hesabı gibi güvenli (risksiz) bir yatırım. Fiyat dinamikleri,

$dx_0(t) = r x_0(t)dt; \qquad x_0(0) = 1$ ile verilsin. Burada $r > 0$ bir sabittir.

2) Hisse senedi gibi riskli bir yatırım. Fiyat dinamikleri, aşağıdaki stokastik gecikme denklemi ile tanımlansın.

$$dx_1(t) = \left[\mu x_1(t) + \alpha \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} x_1(t+s)\,ds + \beta x_1(t-\delta) \right] dt$$

$$+\sigma \left[x_1(t) + v \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} x_1(t+s)\,ds \right] dB(t);\ x_1(s) = b(s),\quad s \in [-\delta, 0] \text{ için}$$

Burada $\mu, \alpha, \beta, \lambda, \delta > 0$, σ ve v sabitlerdir.

Şimdi bir temsilcinin güvenli yatırımdan riskli yatırıma ve tersine para transferi konusunda istediği gibi davranabileceğini varsayalım. $L(t)$ güvenli yatırımdan riskli yatırıma $t \geq 0$ zamanına göre transfer edilmiş toplam miktar ve $M(t)$ riskli yatırımdan güvenli yatırıma t zamanına göre transfer edilmiş toplam miktar olsun. O halde $X_0(t), X(t)$ para miktarları sırasıyla güvenli ve riskli yatırımlarda tutulur ve t zamanında aşağıdaki iki denklem ile verilir.

$$dX_0(t) = rX_0(t)\,dt - dL(t) + dM(t); \qquad X_0(0^-) = x_0 \tag{4.19}$$

$$dX(t) = \left[\mu X(t) + \alpha Y(t) + \beta Z(t) \right] dt$$

$$+\sigma \left[X(t) + vY(t) \right] dB(t) + dL(t) - dM(t); \quad X(s) = \xi(s);\ s \in [-\delta, 0) \tag{4.20}$$

Burada önceden belirttiğimiz gibi

$$Y(t) = \int_{-\delta}^{0} e^{\lambda s} X(t+s)\,ds, \qquad Z(t) = X(t-\delta) \text{ dir.} \tag{4.21}$$

Daha öncede varsaydığımız gibi $L(t)$ ve $M(t)$ tahmin edilebilir, sağdan sürekli, azalmayan süreçlerdir ve $L(0^-) = M(0^-) = 0$ dır. (L, M) gibi böyle portföylere mümkün denir. A, tüm mümkün portföylerin kümesini göstersin.

$(L^*, M^*) \in A$ portföyünün bulunması problemini

$$J(L^*, M^*) = \sup\{J(L, M); (L, M) \in A\} \tag{4.22}$$

şeklinde düşünürüz. Burada $\theta \in R$, $T > 0$ ve $\gamma \in (0,1)$ verilmiş sabitleri için

$$J(L,M) = E\left[\frac{1}{\gamma}\left(X_0(T) + X(T) + \theta Y(T)\right)^{\gamma}\right] \text{dir.}$$

J miktarı, dönem sonuna ait hesap miktarlarının lineer kombinasyonunun beklenen yararı olan $X_0(T) + X(T)$ yi ve önceki $X(t)$ değerlerinin $Y(T)$ ortalamasını gösterir. Bu problem bir Black Scholes piyasasında optimal portföyün klasik Merton probleminin bir gecikme genellemesi olarak düşünülebilir. Gecikmesiz durumda $(v = \alpha = \beta = \delta = 0)$, $L(t)$ ve $M(t)$ yi aşağıdaki şekilde seçmenin optimalliği Merton tarafından kanıtlanmıştır.

$$\frac{X(t)}{X_0(t) + X(t)} = \frac{\mu - r}{\sigma^2(1-\gamma)} \qquad \forall t \in [0,T] \text{ için,} \tag{4.23}$$

Belirli koşullarda benzer bir portföyün de gecikme genellemesi için optimal olduğunu göstereceğiz. Bunu yapabilmek için Teorem 3.3 ü uygularız.

Bu durumda Hamiltonian(3.29),

$$\begin{aligned} H(t,x_0,x,y,z,p,q) &= r x_0 p_0 + [\mu x + \alpha y + \beta z] p_1 \\ &\quad + \left[x - \lambda y - e^{-\lambda\delta} z\right] p_2 + \sigma [x + v y] q_1 \end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklini alır. Burada, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)^T \in R^4$, $q = (q_0, q_1, q_2) \in R^3$; $x, y, z \in R$, $t \geq 0$ dır.

$$D = \left(X_0(T) + X(T) + \theta Y(T)\right)^{\gamma - 1} \tag{4.25}$$

(4.25) i yerine koyalım.

Uygun olan eşlenik denklemler (3.30)-(3.33) kullanılarak (4.26)-(4.29) olarak elde edilir.

$$\begin{cases} dp_0(t) = -r p_0(t)\,dt + q_0(t)\,dB(t); & t \in [0,T] \\ p_0(T) = D \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\begin{cases} dp_1(t) = -\left[\mu p_1(t) + p_2(t) + \sigma q_1(t)\right]dt + q_1(t)dB(t);\ t \in [0,T] \\ p_1(T) = D \end{cases} \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} dp_2(t) = -\left[\alpha p_1(t) - \lambda p_2(t) + \sigma v q_1(t)\right]dt + q_2(t)dB(t);\ t \in [0,T] \\ p_2(T) = \theta D \end{cases} \tag{4.28}$$

$$\begin{cases} dp_3(t) = -\left[\beta p_1(t) - e^{-\lambda\delta} p_2(t)\right]dt; \qquad t \in [0,T] \\ p_3(T) = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

Örnek 4.1 deki gibi,

$$p_3(t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T] \tag{4.30}$$

sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\beta p_1(t) = e^{-\lambda\delta} p_2(t) \tag{4.31}$$

olmasıdır.

$$\theta = v = \beta e^{\lambda\delta} \quad \text{ve} \quad \alpha = \beta e^{\lambda\delta}\left(\lambda + \mu + \beta e^{\lambda\delta}\right) \tag{4.32}$$

sonucundan (4.31) i elde ederiz.

Bunu doğrulamak için (4.32) yi (4.27) ve (4.28) de yerine koyarız ve

$$\begin{cases} dp_1(t) = -\left[\mu p_1(t) + p_2(t) + \sigma q_1(t)\right]dt + q_1(t)dB(t);\ t \in [0,T] \\ p_1(T) = D \end{cases} \tag{4.33}$$

$$\begin{cases} dp_2(t) = -\left[\beta e^{\lambda\delta}\left(\lambda + \mu + \beta e^{\lambda\delta}\right) p_1(t) - \lambda p_2(t) + \sigma\beta e^{\lambda\delta} q_1(t)\right]dt; \\ \qquad + q_2(t)dB(t);\ t \in [0,T] \\ p_2(T) = \beta e^{\lambda\delta} D \end{cases} \tag{4.34}$$

elde ederiz. Örnek 4.1 deki gibi

$$\tilde{p}_2(t) = \beta^{-1} e^{-\lambda\delta} p_2(t) \tag{4.35}$$

olsun ve yerine koyalım. O zaman $\left(p_1(t), \tilde{p}_2(t)\right)$ için denklemler,

$$\begin{cases} dp_1(t) = -\left[\mu p_1(t) + \beta e^{\lambda\delta}\tilde{p}_2(t) + \sigma q_1(t)\right]dt + q_1(t)dB(t) \\ p_1(T) = D \end{cases} \tag{4.36}$$

$$\begin{cases} d\tilde{p}_2(t) = -\left[\left(\lambda + \mu + \beta e^{\lambda\delta}\right)p_1(t) - \lambda\tilde{p}_2(t) + \sigma q_1(t)\right]dt \\ \qquad + \beta^{-1}e^{-\lambda\delta}q_2(t)dB(t) \\ \tilde{p}_2(T) = D \end{cases} \tag{4.37}$$

haline gelir.

$$y(t) = \tilde{p}_2(t) - p_1(t) \tag{4.38}$$

olarak tanımlayalım. (4.37) den (4.36) yı çıkarırsak,

$$\begin{cases} dy(t) = \left(\lambda + \beta e^{\lambda\delta}\right)y(t)dt + \left(\beta^{-1}e^{-\lambda\delta}q_2(t) - q_1(t)\right)dB(t) \\ y(T) = 0 \end{cases} \tag{4.39}$$

elde ederiz. Bu geriye doğru stokastik diferansiyel denklemin tek çözümü

$$y(t) = 0, \quad \beta^{-1}e^{-\lambda\delta}q_2(t) - q_1(t) = 0 \tag{4.40}$$

olur. Bu iddia edildiği gibi (4.32) den (4.30) un bulunmasını kanıtlar.

Sonrasında maksimum prensibi koşulu (3.36) yı düşünürüz. Bu durumda koşulumuz aşağıdaki şekli alır.

$$E\left[\int_0^T \left(p_0(t) - p_1(t)\right)\left(dL(t) - d\bar{L}(t)\right) - \left(p_0(t) - p_1(t)\right)\left(dM(t) - d\bar{M}(t)\right)\right] \geq 0 \tag{4.41}$$

$\forall (L, M) \in A$ için

Bunun sağlanması için $\left(\bar{L}, \bar{M}\right) \in A$ nın bulunmasının yeterli olacağı açıktır. $\left(\bar{L}, \bar{M}\right) \in A$ ya uygun olan $p_0(t)$ ve $p_1(t)$ için,

$$p_0(t) \;=\; p_1(t) \;, \forall t \in [0, T] \text{ için} \tag{4.42}$$

sağlanmalıdır.

$$R(t) := \frac{V(t)}{W(t)} = \frac{\mu + \beta e^{\lambda\delta} - r}{\sigma^2(1-\gamma)}, \ \forall t \in [0,T] \text{ için} \tag{4.43}$$

varlığını kesinleştiren $(\bar{L}, \bar{M})$ portföyünü deneyelim.

Burada,

$$V(t) := X(t) + \beta e^{\lambda\delta} Y(t) \tag{4.44}$$

t zamanında riskli yatırımda gecikme içeren zenginliktir ve

$$W(t) := X_0(t) + V(t) \tag{4.45}$$

temsilci tarafından tutulmuş t zamanında toplam gecikme içeren zenginliktir.

Bu seçenek gecikmesiz durum için (4.23) sonucundan çıkmıştır.

$(\bar{L}, \bar{M})$ seçimi için (4.42) yi doğrulamak için ilk olarak aşağıda verilmiş olan (4.26) nın $(p_0(t), q_0(t))$ çözümlerini kanıtlarız.

$$p_0(t) = e^{\rho(T-t)} W(t)^{\gamma-1} \tag{4.46}$$

$$q_0(t) = (\gamma - 1)\sigma R p_0(t) \tag{4.47}$$

Burada,

$$\rho = r\gamma + \frac{\left(\mu + \beta e^{\lambda\delta} - r\right)^2 \gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} \text{ dır.} \tag{4.48}$$

(4.43) teki $V(t)$ ve (4.20) ve (4.32) ile

$$dV(t) = \left(\mu + \beta e^{\lambda\delta}\right) V(t)\,dt + \sigma V(t)\,dB(t) + dL(t) - dM(t) \text{ dir.} \tag{4.49}$$

$$A(t) = e^{\rho(T-t)} \left(X_0(t) + V(t)\right)^{\gamma-1} = e^{\rho(T-t)} W^{\gamma-1}(t) \tag{4.50}$$

tanımlayalım. O halde Itô'nun formülü ile,

$$dA(t) = e^{\rho(T-t)}\Big[-\rho W^{\gamma-1}(t) + (\gamma-1)W^{\gamma-2}(t)\Big(rX_0(t) + \big(\mu+\beta e^{\lambda\delta}\big)V(t)\Big)$$

$$+\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)W^{\gamma-3}(t)\sigma^2 V^2(t)\Big]dt + e^{\rho(T-t)}\big[(\gamma-1)W^{\gamma-2}(t)\sigma V(t)\big]dB(t)$$

olur. Şimdi,

$$V(t) = RW(t), \quad X_0(t) = (1-R)W(t) \tag{4.51}$$

yi yerine koyarak,

$$dA(t) = \Big[-\rho + (\gamma-1)\Big\{r(1-R) + \big(\mu+\beta e^{\lambda\delta}\big)R\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\sigma^2 R^2\Big]A(t)dt + (\gamma-1)\sigma R A(t)dB(t) \tag{4.52}$$

elde ederiz.

Şimdi (4.48), (4.45) ve $\bar{\mu} = \mu + \beta e^{\lambda\delta}$ ile

$$-\rho + (\gamma-1)\Big\{r(1-R) + \big(\mu+\beta e^{\lambda\delta}\big)R\Big\} + \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\sigma^2 R^2$$

$$= -r\gamma - \frac{(\bar{\mu}-r)^2\gamma}{2\sigma^2(1-\gamma)} + (\gamma-1)\left\{r\left(1-\frac{\bar{\mu}-r}{\sigma^2(1-\gamma)}\right) + \frac{\bar{\mu}(\bar{\mu}-r)}{\sigma^2(1-\gamma)}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\sigma^2\frac{(\bar{\mu}-r)^2}{\sigma^4(1-\gamma)^2}$$

$$= \frac{(\bar{\mu}-r)^2}{2\sigma^2(1-\gamma)}\big[-\gamma + 2(\gamma-1) - (\gamma-2)\big] - r\gamma + (\gamma-1)r = -r \tag{4.53}$$

olur. Bundan dolayı (4.52) ile

$$\begin{cases} dA(t) = -rA(t) + (\gamma - 1)\sigma RA(t)\,dB(t) \\ A(T) = D \end{cases} \qquad (4.54)$$

olur.

Bu, $p_0(t) = A(t),\ q_0(t) = (\gamma - 1)\sigma RA(t)$ nin (4.26) yı iddia edildiği gibi çözdüğünü gösterir.

Geriye (p_1, q_1) için (4.33) denklemini de çözen $(p,q) := (p_0, q_0)$ eşitliğini doğrulamak kalır. (4.31) in ışığında bu,

$$dp_0(t) = -\left[\mu p_0(t) + \beta e^{\lambda\delta} p_0(t) + \sigma q_0(t)\right]dt + q_0(t)\,dB(t) \qquad (4.55)$$

demektir. Bunun için (4.56) ya sahip olmak yeterlidir.

$$\left(\mu + \beta e^{\lambda\delta}\right) p_0(t) + \sigma q_0(t) = r p_0(t) \qquad (4.56)$$

$q_0(t) = (\gamma - 1)\sigma R p_0(t) = -\dfrac{\mu + \beta e^{\lambda\delta} - r}{\sigma} p_0(t)$ sebebiyle (4.56) nın sağlandığını görürüz.

Eğer $\left(\bar{L}, \bar{M}\right)$ aşağıdaki şekilde seçilirse $p_0(t) = p_1(t)$ olduğu doğrulanmış olur.

$$V(t) = \frac{\mu + \beta e^{\lambda\delta} - r}{\sigma^2 (1 - \gamma)} W(t) \qquad \forall t \in [0, T] \text{ için}$$

Böylece, teorem 4.2 nin kanıtı tamamlanmış olur.

Teorem 4.2

Varsayalım ki (4.32) sağlansın. O halde (4.22) problemi için $\left(L^*, M^*\right)$ optimal portföyü aşağıdaki zenginlik süreçlerine uygun olan mal varlığıyla tanımlanan $\left(L^*, M^*\right) = \left(\bar{L}, \bar{M}\right)$ portföyüdür.

$$V(t) = X(t) + \beta e^{\lambda\delta} Y(t) \qquad \text{(Sermayede gecikme içeren zenginlik)}$$

$W(t) = X_0(t) + V(t)$ (Toplam gecikme içeren zenginlik)

zenginlik süreçleri,

$V(t) = \dfrac{\mu + \beta e^{\lambda\delta} - r}{\sigma^2(1-\gamma)} W(t)$ $\forall t \in [0,T]$ için, eşitliğini sağlar.

KAYNAKÇA

[1] Allen, E., 2007, Modeling with Itô Stochastic Differential Equations, The Netherlands, Springer.

[2] Kirk, D. E., 1970,1988, Optimal Control Theory An Introduction, Mineola New York, Dover Publications, Inc.

[3] Naidu, D. S., 2002, Optimal Control Systems, CRC Press.

[4] Oksendal, B.,Sulem, A., 2000, A Maximum Principle For Optimal Control Of Stochastic Systems With Delay, With Applications To Finance, Optimal Control and Partial Differential Equations- Innovations and Applications., Amsterdam, IOS Press.

[5] Robert Brown, 2014, Vikipedi, Özgür Ansiklopedi, http://tr.wikipedia.org/ wiki/Robert_ Brown, (2015)

[6] Brownian Motion, http://www.merriam-webster.com/dictionary/Brownian %20motion, (2015)

[7] Aygören, H., İMKB-100 Endeks Davranışının Monte Carlo Simulasyonu İle İncelenmesi, Pamukkale Üniversitesi

[8] Öztürk, F., Ve Biraz İstatistik, 2011, https://fikriozturk.files.wordpress.com/ 2014/01/vebirazistatistik.pdf, (2014)

[9] Meydan Larousse,1985, cilt 2, İstanbul, Meydan Yayınevi, 597

[10] Meydan Larousse,1960, ek cilt, İstanbul, Meydan Yayınevi,630

[11] Bensoussan, A., 1983, Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially observed diffusions, Stochastics 9, 169-222

[12] Cadenillas A., Haussmann, U.G., 1994, The stochastic maximum principle for a singular control problem, Stochastics and Stochastics Reports 49, 211-237

[13] Elsanosi, I., 2000, Some solvable impulse control problems for stochastic systems with delay, Manuscript, University of Oslo

[14] Haussmann, U., 1986, A Stochastic Maximum Principle for Optimal Control of Diffusions, Longman Scientific and Technical

[15] Kolmanovskii, V.B., Maizenberg, T.L., 1973, Optimal control of stochastic systems with aftereffect, In Stochastic Systems, Translated from Avtomatika i Telemekhanika No.1, 47-61

[16] Kolmanovskii, V.B., Shaikhet, L.E., 1996, Control of Systems with Aftereffect, Translation of Mathematical Monographs, Vol. 157, American Mathematical Society

[17] Merton, R., 1971, Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model, Journal of Economic Theory 3, 373-413

[18] Mohammed, S., 1984, Stochastic Functional Differential Equations, Pitman

[19] Mohammed, S.,1998, Stochastic differential systems with memory, Theory examples and applications, In L. Decreusefond et al, Stochastic Analysis and Related Topics VI, The Geilo Workshop 1996, Birkauser, pp. 1-77

[20] Peng, S., 1990, A general stochastic maximum principle for optimal control problems, SIAM J. Control& Optim. 28, 966-979

[21] Yong, J., Zhou, X.Y., 1999, Stochastic Controls, Springer-Verlag

[22] Elsanosi, I., Oksendal B., Sulem A., Some solvable stochastic control problems with delay, To appear in Stochastics and Stochastics Reports

[23] Adapted process, 2014, Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipeida .org/wiki/Adapted_process, (2015)

ÖZGEÇMİŞ

Derya DİNÇER, 1979 yılında İzmir'de doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladıktan sonra Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğini 2001 yılında bitirdi. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak göreve başladı. 2006 yılında Ege Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İnsan Kaynakları Yönetimi ve Yönetim Geliştirme yüksek lisansını tamamladı. Tübitak destekli TUSİ - Ortaöğretim Öğretmenleri için Matematik Olimpiyat Eğitimlerinin üç kademesine katıldı. Halen Namık Kemal Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.