YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

B-CEBRİNDE TÜREVLER

Sibel ALTUNBIÇAK KAYIŞ

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2015

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr.Esra Dalan YILDIRIM

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof.Dr.Alev FIRAT

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü Müdürü

ii

ÖZET

B-CEBRİNDE TÜREVLER

ALTUNBIÇAK KAYIŞ, Sibel

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Haziran 2015, 24 sayfa

Bu tez esas olarak üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış ve tezi anlamada kolaylık sağlayacak olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. İkinci bölümde B- Cebrinde ve 0-değişmeli B-Cebrinde türev ve f–türev tanımları verilerek günümüze kadar bu konularda yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde B-Cebrinde simetrik ikili türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri B-Cebrinde ve 0-değişmeli B-Cebrinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: B-cebri, 0-değişmeli B-cebri, türev, f-türev, simetrik ikili türev.

ABSTRACT

DERIVATIONS OF B-ALGEBRAS

ALTUNBIÇAK KAYIŞ, Sibel

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asist.Prof.Dr. Şule AYAR ÖZBAL

June 2015, 24 pages

This thesis consists of exactly three parts. In the first part, thesis subject is introduced and related definitions and properties that will make easier to understand the thesis are given. In the second part notions of derivation and –derivation on B-algebras are given and a short summary of the studies which until now has been made on these issues are mentioned. In the third part, the definiton of symmetric bi-derivation on B-algebra is given and related properties are studied in B-algebras and 0-commutative B-algebras

Key words: B-algebras, 0-commutative B-algebras, derivation, *f*-derivation, symmetric bi-derivation.

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlamam için bana yardımcı olan, vaktini, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışmanım Sayın Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL'a, yüksek lisans eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım tüm değerli hocalarıma, doğduğum günden beri benim yükümü çeken canım anneciğime, desteğiyle yanımda olduğunu bildiğim "kardeş candır" ı bana daima hissettiren ağabeyime, oyun vakitlerini çalsam da yaptığım işle kendisine örnek olmayı amaçladığım biriciğim, yakışıklı oğluma ve de tüm nazımı, kaprisimi çeken ama her daim yanımda olarak bana yol gösterip destek olan sevgili eşim Yasin KAYIŞ'a sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Sibel ALTUNBIÇAK KAYIŞ
İzmir, 2015

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "B-CEBRİNDE TÜREVLER" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Sibel ALTUNBIÇAK KAYIŞ

15.06.2015

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

BCH / BCI / BCK- cebirlerinin bir genellemesi olan B-cebri tanımı J. Neggers ve H. S. Kim tarafından 2002 yılında verilmiş ve ilgili özellikleri aynı kişiler tarafından (Neggers J. and Kim H. S.,2002) yaptıkları çalışmalarında verilmiştir. Her grubun, türetilmiş B-cebri grubu olarak bilinen bir B-cebri belirlediği bilinen bir gerçektir.

B-cebrinde türev tanımı ilk olarak N.O. Alsehri tarafından halkalarda türev tanımına benzer şekilde (N.O. Alshehri, 2010) verilmiştir. Daha sonra Fırat, A., Ayar Özbal, Ş., (2011) tarafından B-cebrinde türevin genellemesi olan f-türev tanımlanmış ve ilgili özellikleri yine aynı çalışmada incelenmiştir.

Bu çalışmada önce B-cebri, B-cebri ve 0-değişmeli B-cebrinde türev, f-türev üzerine bilgiler verilmiş bu alanlarda yapılan çalışmalarda elde edilenlerden bahsedilmiştir. Daha sonra B- cebrinde simetrik ikili türev tanımlanmış, bu türeve örnekler verilmiştir ve simetrik ikili türeve ait bazı özellikler B-cebrinde e ve 0-değişmeli B- cebrinde çalışılmıştır

2.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile yapılacak kanıtlarda çok sık kullanılacak olan B-cebrinin bazı özellikleri başvuru kolaylığı sağlamak amacıyla alındıkları kaynaklarla birlikte verilmiştir.

2.1 B-Cebirlerinde Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 X boştan farklı, 0 sabit elemanlı ve üzerinde $*$ ikili işlemi tanımlanmış bir küme olsun. Eğer her x, y, z elemanı için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa X e bir B-cebri denir.

I. $x * x = 0$
II. $x * 0 = x,$
III. $(x * y) * z = x * (z * (0 * y)),$ (Neggers,J. Ve Kim,H.S. ,2002)

Önerme 2.1.2 Eğer $(X,*,0)$ B-cebri ise o zaman her x, y, z elemanı için aşağıdakiler sağlanır.

(1) $(x * y) * (0 * y) = x,$
(2) $x * (y * z) = (x * (0 * z)) * y,$

(3) $x * y = 0$ ise $x = y$,
(4) $0 * (0 * x) = x$(Neggers,J. Ve Kim,H.S. ,2002)

Teorem 2.1.3 : $(X, *, 0)$ bir B-cebri olması için gerek ve yeter koşul her x, y, z elemanı için aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.

(5) $(x * z) * (y * z) = x * y$
(6) $0 * (x * y) = y * x$(Neggers,J. Ve Kim,H.S. ,2002)

Teorem 2.1.4: Bir B-cebrinde sol ve sağ sadeleştirme (kısaltma) kuralı vardır. (Cho,J.R ve Kim,H.S., 2001)

Tanım 2.1.5: $(X, *, 0)$ B-cebrinde her $x, y \in X$ için $x * (0 * y) = y * (0 * x)$ oluyor ise bu B-cebrine 0 değişmeli denir. (Kim,H.S. xe Park, H.G., 2005)

Önerme 2.1.6: $(X, *, 0)$ bir 0 değişmeli B-cebri ise o zaman her $x, y, z \in X$ için aşağıdakiler vardır. (Kim,H.S. xe Park, H.G., 2005)

(7) $(0 * x) * (0 * y) = y * x$
(8) $(z * y) * (z * x) = x * y$
(9) $(x * y) * z = (x * z) * y$
(10) $[x * (x * y)] * y = 0$
(11) $(x * z) * (y * t) = (t * z) * (y * x)$

Ayrıca 10 ve 11'den $(X, *, 0)$ bir 0 değişmeli B-cebri ise o zaman

(12) $x * (x * y) = y$ tir.

Tanım 2.1.7: X boştan farklı, 0 sabit elemanlı ve üzerinde $*$ ikili işlemi tanımlanan bir küme olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşulla sağlanıyor ise $(X, *, 0)$ a bir BCI-cebri denir.

$BCI - 1$ $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0;$
$BCI - 2$ $\big(x * (x * y)\big) * y = 0;$
$BCI - 3$ $x * x = 0;$
$BCI - 4$ $x * y = 0$ ve $y * x = 0$ ise $x = y$ dir.

X BCI-cebri için her $x, y \in X$ için $x \wedge y = y * (y * x)$ olacak şekilde gösterilir. (Iseki,K., 1980)

Tanım 2.1.8: X BCI -cebri ve $d: X \to X$ bir dönüşüm olsun her $x, y \in X$ için

$d(x * y) = (d(x) * y) \wedge \big(x * d(y)\big)$ koşulu sağlıyor ise $d$ye X in bir (sol-sağ) türevi denir. Ayrıca her $x, y \in X$ için

$d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$ koşulu sağlanıyor ise d ye X in bir (sağ-sol) türevi denir

Eğer d hem (sol-sağ) hem de (sağ-sol) türevi ise o zaman d ye X in türevi denir. (Jun, Y.B. ve Xin,X.L., 2004)

Tanım 2.1.9: X BCI - cebirinde bir d dönüşümü için $d(0) = 0$ ise d ye regüler denir . (Jun, Y.B. ve Xin,X.L., 2004)

3. B-CEBRİNDE VE 0-DEĞİŞMELİ B-CEBRİNDE TÜREV, *f*-TÜREV

Bu bölümde B-cebrinde ve 0 değişmeli B- cebrinde türevle ilgili bugüne kadar yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiş ve ilgili özelliklerden bahsedilmiştir.

3.1 B- Cebrinde Türevler

X bir B -cebri olsun. Her $x, y \in X$ için $x \wedge y = y * (y * x)$ olarak gösterilecektir.

Tanım 3.1.1 : X bir B- cebiri ve $d: X \to X$ bir dönüşümü olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$d(x * y) = (d(x) * y) \wedge \big(x * d(y)\big)$ ise d'ye X'in bir (sağ-sol) türevi denir.

Eğer her $x, y \in X$ için $d(x * y) = (x * d(y)) \wedge (d(x) * y)$ ise d'ye X'in bir (sol-sağ) türevi denir.

Ayrıca d hem bir (sol-sağ) türev hem de bir (sağ-sol) türev ise d ye X in bir türevi denir. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Örnek 3.1.2: $X = \{0,1,2,3\}$ Cayley tablosu aşağıdaki gibi belirtilen bir B -cebri olsun.

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	1	2	0

Tablo 1

$d: X \to X$ dönüşümü

$$d(x) = \begin{cases} 3 & x = 0, \\ 2 & x = 1\,, \\ 1 & x = 2, \\ 0 & x = 3, \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. O zaman kolayca kontrol edilebilir iç d X in bir türevidir.(Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Örnek 3.1.3 $(\mathbb{Z}, -, 0)$ B-cebrinde her $x \in \mathbb{Z}$ için $d(x) = x - 1$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman d X'in (sol-sağ) türevidir; ama

$\big(1 - d(0)\big) \wedge (d(1) - 0) = (1 - (-1)) \wedge (0 - 0) = 2 \wedge 0 = 0 - (0 - 2) =$ $2 \neq 0 = d(1) = d(1 - 0)$ olduğu için x'in bir (sağ,sol) türevi değildir. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Tanım 3.1.4: X B-cebrinin bir d dönüşümü için $d(0) = 0$ ise d regülerdir. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Önerme3.1.5: d X B -cebrinin bir (sol,sağ) türevi olsun. O zaman

(i) Her $x \in X$ için $d(0) = d(x) * x$ tir.

(ii) d $1 - 1$ dir

(iii) Eğer d regüler ise o zaman d birim dönüşümdür. (Yani $d(x) = x$ tir)

$(i \vee)$ Eğer $d(x) = x$ olacak şekilde X in bir x elemanı var ise d birim dönüşümdür.

$(\vee)$ Eğer her $y \in X$ için $d(y) * x = 0$ veya $x * d(y) = 0$ olacak şekilde X in bir x elemanı var ise X o zaman her $y \in X$

için $d(y) = x$ tir; yani d sabit dönüşümdür. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Önerme 3.1.6: d X B - cebrinin (sağ-sol) türevi olsun. O zaman

(i) Her $x \in X$ için $d(0) = x * d(x)$ tir.

(ii) Her $x \in X$ için $d(x) = d(x) \wedge x$ tir.

(iii) d 1-1 dönüşümdür.

$(i \vee)$ Eğer d regüler ise o zaman d birim dönüşümdür.

$(\vee)$ Eğer X in herhangi bir x elemanı için $d(x) = x$ oluyorsa d birim dönüşümdür.

(Vi) Eğer her $y \in X$ için $d(y) * x = 0$ veya $x * d(y) = 0$ olacak şekilde X in bir x elemanı var ise o zaman her $y \in X$ için $d(y) = x$ tir. Yani d sabit dönüşümdür. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

3.2 0-Değişmeli B-Cebrinde Türevler

Tezin bu kısmında , 0 değişmeli B - cebrinde türev çalışılmış ve ilgili özellikler belirtilmiştir.

Örnek 3.2.1: $X = \{0,1,2,3\}$ Cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen 0- değişmeli bir B-cebri olsun,

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

Tablo 2

$d: X \to X$ dönüşümü

$$d(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ 3, & x = 1 \\ 0, & x = 2 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın, o zaman kolayca görülür ki d X in bir türevidir. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Önerme 3.2.2: $(X,*,0)$ bir 0-değişmeli B-cebri ve d X in (sol-sağ) türevi olsun. O zaman her $x,y \in X$ için

(i) $d(x*y) = d(x)*y$

(ii) $d(x)*d(y) = x*y$ $dir.$ (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Önerme 3.2.3: $(X,*,0)$ bir 0-değişmeli B -cebri ve d X in (sağ -sol) türevi olsun. O zaman her $x,y \in X$ için

(i) $d(x*y) = x*d(y)$

(ii) $d(x)*d(y) = x*y$ $dir.$ (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Tanım 3.2.4: X bir B-cebri d_1, d_2 X in dönüşümleri olsun,

$d_1 \; o \; d_2 = X \to X \;\; her \;\; x \in X$ için

$d_1 \; o \; d_2(x) = d_1(d_2(x))$ olacak şekilde tanımlanır. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

Önerme 3.2.5: X bir 0-değişmeli B -cebri ve d_1, d_2 X in birer (sol-sağ) türevi olsun. O zaman $d_1 \; o \; d_2$ X in bir (sol-sağ) türevidir. (Nora O. Al-Shehrie, 2010)

3.3 B-Cebirlerinde *f*-Türev

Tanım 3.3.1: X bir B -cebri ve f X in endomorfizması olsun

$d: X \to X$ bir dönüşümü olsun, eğer her $x,y \in X$ için

$d(x*y) = (d(x)*f(y)) \wedge (f(x)*d(y))$ sağlanıyor ise d ye X in bir (sol,sağ) f-türevi denir.

Eğer $d: X \to X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için

$d(x*y) = (f(x)*d(y)) \wedge (d(x)*f(y))$ sağlanıyor d ye X in bir (sağ,sol) f-türevi denir.

Ayrıca d hem (sol, sağ): hem de (sağ,sol) f-türev ise d ye X in bir türevi f-türevi denir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Örnek 3.3.2: $X = \{0,1,2,3\}$ cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen bir B -cebri olsun.

*	0	1	2	3
0	0	2	1	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$$d(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ 2, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

Olacak şekilde tanımlanan $d: X \to X$ dönüşümü X in bir türevi olduğunu biliyoruz.

Her $x \in X$ için $f(x) = 0$ olacak şekilde $f: X \to X$ endomorfizma tanımlansın.

O zaman $d(3 * 1) = d(2) = 1$ ancak

$$(d(3) * f(1)) \wedge \left(f(3) * d(1)\right) = (0 * 0) \wedge (0 * 2)$$

$$= 0 \wedge 1 = 1 * (1 * 0) = 0 \text{ dır.}$$

Yani $d(3 * 1) \neq \left(d(3) * f(1)\right) \wedge (f(3) * d(1))$ dir. O halde d X in bir f türevi değildir. (Özbal ve Fırat 2011)

Uyarı 3.3.3: X B -cebrinin her türevi X in birim endomorfizması ile X in f-türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Örnek 3.3.4 : $X = \{0,1,2,3\}$ Cayley tablosu Örnek 3.3.2 deki gibi verilen bir B -cebri olsun,

$$d(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \\ 2, & x = 2 \\ 0, & x = 3 \end{cases}$$

olacak şekilde $d: X \to X$ dönüşümü tanımlansın.

$d(2*1) = d(3) = 0$ ancak

$$d(2*1) = (d(2)*1) \wedge \big(2*d(1)\big) = (2*1) \wedge (2*1) = 3 \wedge 3$$

$$= 3*(3*3) = 3*0 = 3$$

Olduğundan, yani;

$d(2*1) \neq (d(2)*1) \wedge (2*d(1))$ dir. O halde d bir türev değildir.

Her $x \in X$ için $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$

Olacak şekilde tanımlanan X bir endomorfizması tanımlansın. O zaman görülebilir ki d X in bir f-türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Önerme3.3.5: d X B-cebrinin bir (sol,sağ) f türevi olsun . O zaman aşağıdakiler vardır.

(i) Her $x \in X$ için $d(0) = d(x)*f(x)$ tir.

(ii) Eğer f 1-1 ise o zaman d 1-1 dir.

(iii) Eğer d regüler ise o zaman $d = f$ tir.

(iV) Eğer $d(x) = f(x)$ olacak şekilde X in bir x elemanı var ise o zaman d regülerdir.

(V) Eğer her $y \in X$ $için$ $d(y)*f(x) = 0$ veya $f(x)*d(y) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ var ise o zaman $d(y) = f(x)$tir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Önerme 3.3.6: d X B-Cebrinin bir (sağ-sol)türevi olsun. O zaman aşağıdakiler vardır.

(i) Her $x \in X$ $için$ $d(0) = f(x)*d(x)$ $tir.$

(ii) Her $x \in X$ $için$ $d(x) = d(x) \wedge f(x)$ $tir.$

(iii) Eğer f 1-1 bir endomorfizma ise o zaman d 1-1 dir.

(iV) Eğer d regüler ise o zaman $d = f$ tir.

(V) Eğer $d(x) = f(x)$olacak şekilde $x \in X$ var ise o zaman d regülerdir.

(Vi) Her $y \in X$ için $d(y) * f(x)$ =0 veya $f(x) * d(y) = 0$ olacak şekilde $x \in X$ var ise d sabittir. (Özbal ve Fırat, 2011)

3.4 0-Değişmeli B-Cebrinde *f*-Türev

Örnek 3.4.1: $X = \{0,1,2\}$ Cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen bir B-cebri olsun. Her $x \in X$ için

$$d(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

olacak şekilde tanımlansın .

$d(2 * 1) = d(1) = 1$ ancak

$d(2 * 1) = (d(2) * 1) \wedge \left(2 * d(1)\right) = (0 * 1) \wedge (2 * 1) = 2 \wedge 1$

$= 1 * (1 * 2) = 2$ olduğundan ;yani

$d(2 * 1) \neq (d(2) * 1) \wedge (2 * d(1)$ olduğu için d bir $t$ürev değildir.

$$x \in X \text{ için } f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & x = 1 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan X in bir endomorfizması ile d X in bir (sol,sağ) f-türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Örnek 3.4.2 $X = \{0,1,2,3\}$ Cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen 0-değişmeli B -cebri olsun.

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

Her $x \in X$ için $d(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ 1, & x = 1 \\ 0, & x = 2 \\ 3, & x = 3 \end{cases}$

olacak şekilde tanımlanan d dönüşümü

$d(1 * 0) = d(1) = 1$ ama

$$d(1 * 0) = \big(1 * d(0)\big) \wedge (d(1) * 0) = (1 * 2) \wedge (1 * 0) = 3 \wedge 1$$

$$= 1 * (1 * 3) = 1 * 2 = 3$$

olduğundan yani $d(1 * 0) \neq \big(1 * d(0)\big) \wedge (d(1) * 0)$ olduğu için X in bir türevi değildir.

$x \in X$ $için$ $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 3, & x = 1 \\ 2, & x = 2 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$

olacak şekilde tanımlanan X in bir f endomorfizması tanımlansın. Kolayca görülebilir ki d X in bir f-türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Önerme3.4.3:$(X,* ,0)$ bir 0-değişmeli B-cebri ve d X in bir (sol,sağ) f-türevi olsun . O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler vardır.

(i) $d(x * y) = d(x) * f(y)$

(ii) $d(x) * d(y) = f(x) * f(y)$ (Özbal ve Fırat, 2011)

Önerme 3.4.4:(X,∗ ,0) bir 0-değişmeli B -cebri ve d x in bir (sağ,sol) f-türevi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler vardır.

$(i)\quad d(x*y)=f(x)*d(y)$

$(ii)\quad d(x)*d(y)=f(x)*f(y)$ (Özbal ve Fırat, 2011)

Tanım 3.4.5:d_1, d_2 X B-cebrinin dönüşümleri olsun.

$d_1 o\, d_2: X \to X$ bileşke işlemi her $x \in X$ için $d_1 o d_2(x) = d_1(d_2(x))$ olacak şekilde tanımlanır. (Özbal ve Fırat, 2011)

Önerme 3.4.6:X bir 0-değişmeli B-cebir , d_1 X in (sol -sağ)-f_1 türevi; ve d_2 X in (sol -sağ)-f_2 türevi olsun. O zaman $d_1 o d_2$ X in (sol -sağ) $f_1 o f_2$ türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Önerme 3.4.7:X bir 0-değişmeli B-cebir, d_1 X in (sağ,sol)-f_1 türevi; ve d_2 X in (sağ,sol)-f_2 türevi olsun. O zaman $d_1 o d_2$ X in (sağ,sol) $f_1 o f_2$ türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Teorem 3.4.8:X bir 0-değişmeli B-cebir, d_1 X in f_1 türevi ve d_2 X in f_2 türevi olsun. O zaman $d_1 o d_2$ X in $f_1 o f_2$ türevidir. (Özbal ve Fırat, 2011)

Teorem 3.4.9:X bir 0-değişmeli$B$-cebri; $d_2 o f_1 = f_1 o d_2$; $f_2 o d_1 = d_1 o f_2$ olacak şekilde d_1 X in bir f_1 türevi; d_2 X in bir f_2 türevi ve f_1, f_2 X in birer endomorfizması olsun. O zaman $d_1 o d_2 = d_2 o d_1$ dir. (Özbal ve Fırat, 2011)

4. B-CEBRİNDE SİMETRİK İKİLİ TÜREV

Bu bölümde, B- cebrinde e simetrik ikili türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikler incelenmiştir.

Tanım 4.1: X bir B-cebri olsun. Her $x, y \in X$ için $D(x,y) = D(y,x)$ oluyorsa $D(.,.): X \times X \to X$ dönüşümüne simetrik denir.

Tanım 4.2 X bir B-cebri olsun. $D(.,.) : X \times X \to X$ simetrik dönüşümü için $d(x) = D(x, x)$ şeklinde tanımlanan $d : X \to X$ dönüşümüne $D(.,.)$ nin **izi** denir.

Tanım 4.3: X bir B-cebri olsun. X in $D: X \times X \to X$ bir simetrik dönüşümü her x, y, z elemanı X için $D(x*y,z) = (D(x,z)*y) \wedge (x*D(y,z))$ koşulunu sağlıyor ise D ye X in bir (sol-sağ) simetrik ikili türevi denir.

Benzer şekilde, her x, y, z elemanı X için

$D(x * y, z) = \big(x * D(y,z)\big) \wedge \big(D(x,z) * y\big)$ oluyor ise D ye X in bir (sağ-sol) simetrik ikili türevi denir.

Eğer D X in hem (sol,sağ) hem (sağ,sol) simetrik ikili türevi ise D ye X in simetrik ikili türevi denir.

Örnek 4.4: $X = \{0,1,2\}$ Cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen bir 0-değişmeli B-cebri olsun.

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

X üzerinde $D: X \times X \to X$ simetrik dönüşümü

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) = (2,2) ve\ (x,y) = (0,1)\ ve\ (x,y) = (1,0) \\ 1, & (x,y) = (0,2) ve\ (x,y) = (2,0)\ ve\ (x,y) = (1,1) \\ 2, & (x,y) = (2,1) ve\ (x,y) = (1,2)\ ve\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Olacak şekilde tanımlansın. O zaman D X in bir (sol,sağ) simetrik ikili türevidir.

Örnek 4.5 : $(Z, -, 0)$ B-cebrinde $D: Z \times Z \to Z$ $D(x,y) = x - 1$ dönüşümü tanımlansın.

$$D(x - y, z) = x - y - 1$$

$$D(x - y, z) = (D(x,z) - y) \wedge \big(x - D(y,z)\big)$$

$$= \big((x-1) - y\big) \wedge (x - (y - 1))$$

$$= (x - 1 - y) - \big((x - 1 - y) - (x - y + 1)\big)$$

$= x - y - 1$ olduğundan D dönüşümü (sol-sağ) simetrik ikili türevdir.

Örnek 4.6: $X = \{0,1,2,3\}$ Cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen bir B-cebri olsun.

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) = (0,0) ve\ (x,y) = (1,1)\ ve\ (x,y) = (2,2)\ ve\ (x,y) = (3,3) \\ 1, (x,y) = (3,2) ve\ (x,y) = (2,3)\ ve\ (x,y) = (0,1) ve\ (x,y) = (1,0) \\ 2, (x,y) = (2,0) ve\ (x,y) = (0,2)\ ve\ (x,y) = (1,3) ve\ (x,y) = (3,1) \\ 3, (x,y) = (3,0) ve\ (x,y) = (0,3)\ ve\ (x,y) = (1,2) ve\ (x,y) = (2,1) \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. O zaman $D\ \ X\ \ in$ bir simetrik ikili türevidir.

Önerme 4.7: $D\ \ X\ \ B$-cebrinin (sol,sağ)simetrik ikili türevi olsun.O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler vardır.

(i) $D(x,y) = D(x,y) \wedge (x * D(0,y))$

(ii) Her $x \in X$ için $d\ \ D$ nin izi olmak üzere $D(0,x) = d(x) * x$ tir.

(iii) Her $x, y \in X$ için $D(0,y) = D(x,y) * x$ tir.

Kanıt: (i) $x, y \in X$ olsun Tanım 2.1.1 (II) ve D (sol,sağ) simetrik ikili türev tanımından

$$D(x,y) = D(x * 0, y) = (D(x,y) * 0) \wedge \big(x * D(0,y)\big) = D(x,y) \wedge (x * D(0,y))$$

O halde

$D(x,y) = D(x,y) \wedge \big(x * D(0,y)\big)$ dir.

(ii) $x \in X$ olsun. Tanım 2.1.1 (I)ve D (sol,sağ) simetrik ikili türev tanımı kullanılarak
$D(0,x) = D(x * x, x) = (D(x,x) * x) \wedge \big(x * D(x,x)\big)$

$$= (d(x) * x) \wedge \big(x * d(x)\big)$$

$$= \big(x * d(x)\big) * \Big(\big(x * d(x)\big) * (d(x) * x)\Big)$$

(2) ve (6) dan

$$= \left(\left(x * d(x)\right) * \left(0 * (d(x) * x)\right)\right) * \left(x * d(x)\right)$$

$$= \left(\left(x * d(x)\right) * \left(x * d(x)\right)\right) * \left(x * d(x)\right)$$

$$= 0 * \left(x * d(x)\right) = d(x) * x$$

O halde $D(0, x) = d(x) * x$ tir.

(iii) Her x, y elemanı X için

$D(0, y) = D(x * x, y)$

$$= (D(x, y) * x) \wedge (x * D(x, y)$$

$$= (x * D(x, y)) * \left(\left(x * D(x, y)\right) * (D(x, y) * x)\right)$$

(2) den

$$=\left(\left(x * D(x, y)\right) * \left(0 * (D(x, y) * x)\right)\right) * \left(x * D(x, y)\right)$$

$$=\left(\left(x * D(x, y)\right) * (x * D(x, y))\right) * \left(x * D(x, y)\right)$$

(I) Kullanılarak;
$= 0 * (x * D(x, y))$

(6) dan

$= D(x, y) * x$ O halde

$D(0, y) = D(x, y) * x$ tir.

Teorem 4.8: D X B-cebrinin bir (sol,sağ) simetrik ikili türevi olsun.O zaman her x, y elemanı X için $D(x, y) = D(x, y) \wedge \left(x * (d(y) * y)\right)$ dir.

Kanıt: $D(x, y) = D(x * 0, y)$

$$= (D(x, y) * 0) \wedge \left(x * D(0, y)\right)$$

$$= D(x,y) \wedge (x * D(0,y))$$

Önerme 4.7 (ii) den

$$= D(x,y) \wedge \big(x * (d(y) * y)\big)$$

Önerme 4.9: d , X B-cebrinin D (sol,sağ)simetrik ikili türevinin izi olsun.

O zaman aşağıdakiler her $x \in X$ için sağlanır.

(i) $d(0) = D(x,0) * x$ tir.

(ii) Her $x, y \in X$ için , eğer $D(x,0) = D(y,0)$ ise o zaman d $1 -$ 1 dir.

(iii) Eğer d $1 - 1$ ise o zaman $D(x,0) = x$ tir.

(iV) $Eğer$ $D(x,0) = x$ olacak şekilde X in bir x elemanı var ise o zaman d regülerdir.

(V) Eğer her $y \in X$ için $d(y) * x = 0$ veya $x * d(y) =$ 0 olacak şekilde

X in bir x elemanı var ise o zaman $d(y) = x$ $tir.$

Kanıt: (i) $x \in X$ olsun $x * x = 0$ olduğundan

$$d(0) = D(0,0) = D(x * x, 0)$$

$$= (D(x,0) * x) \wedge \big(x * D(x,0)\big)$$

$$= \big(x * D(x,0)\big) * ((x * D(x,0) * (D(x,0) * x))$$

(I) ve (6) ‘dan

$$= \big(x * D(x,0)\big) * \big(0 * (D(x,0) * x)\big) * (x * D(x,0))$$

$$= (\big(x * D(x,0)\big) * \big(x * D(x,0)\big) * (x * D(x,0))$$

$$= 0 * \big(x * D(x,0)\big) = D(x,0) * x$$

O zaman $x \in X$ için $d(0) = D(x, 0) * x$

(ii) $x, y \in X$ için $d(x) = d(y)$ olsun.

(i) den $\mathrm{d}(0) = \mathrm{D}(\mathrm{x}, 0) * \mathrm{x}$ ve $\mathrm{d}(0) = \mathrm{D}(\mathrm{y}, 0) * \mathrm{y}$

O halde $D(x, 0) * x = D(y, 0) * y$ dir.

(Teorem 2.1.4) ten $x = y$ dir. Yani 1-1 dir.

(iii) d regüler yani $\mathrm{d}(0) = 0$ olsun

(i) den $d(0) = D(x, 0) * x$ tir. d regüler olduğundan

$d(0) = 0 = D(x, 0) * x$ tir.

Önerme 2.1.2 (3) den $D(x, 0) = x$ tir.

(iV) $x \in X$ için $D(x, 0) = x$ olsun.

(I) den $D(x, 0) * D(x, 0) = 0$ dır. O halde (i) den

$\mathrm{d}(0) = \mathrm{D}(\mathrm{x}, 0) * \mathrm{x} = 0$ elde edilir. yani d regülerdir.

(V) $x \in X$ için ve her $y \in X$ için

$\mathrm{d}(\mathrm{y}) * \mathrm{x} = 0$ veya $\mathrm{x} * \mathrm{d}(\mathrm{y}) = 0$ olsun.

(3) ten $d(y) = x$ tir.

Önerme 4.10: d X B-cebrinin (sağ,sol) simetrik türevinin izi olsun.

O zaman aşağıdakiler vardır.

i) Her $x \in X$ için $d(0) = x * D(x, 0)$ dır.

ii) Her $x \in X$ için $d(x) = \big(x * D(0, x)\big) \wedge d(x)$ dir.

iii) Eğer her $x, y \in X$ için $D(x, 0) = D(y, 0)$ ise d $1 - 1$ dir.

iV) Eğer d regüler ise $D(x, 0) = x$ tir.

$V)$ Eğer $D(x,0) = x$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut ise d regülerdir .

$Vi)$ Her $y \in X$ için $d(y) * x = 0$ veya $x * d(y) = 0$ olacak şekilde

$x \in X$ mevcut ise $d(y) = x$ tir.

Kanıt: $i)$ $x \in X$ olsun $x * x = 0$ olduğundan

$$d(0) = D(0,0) = D(x * x, 0)$$

$$= \big(x * D(x,0)\big) \wedge (D(x,0) * x)$$

$$= (D(x,0) * x) * \Big((D(x,0) * x) * \big(x * D(x,0)\big)\Big)$$

I ve (6) den

$$= \Big((D(x,0) * x) * \Big(0 * \big(x * D(x,0)\big)\Big)\Big) * (D(x,0) * x)$$

$$= \big((D(x,0) * x) * (D(x,0) * x)\big) * (D(x,0) * x)$$

$$= 0 * (D(x,0) * x)$$

$$= x * D(x,0)$$ elde edilir.

Yani her $x \in X$ için $d(0) = x * D(x,0)$ dır.

$ii)$ $x \in X$ olsun $x * 0 = x$ olduğundan

$$d(x) = D(x,x) = D(x * 0, x)$$

$$= \big(x * D(0,x)\big) \wedge (D(x,x) * 0)$$

(II) ve (i) kullanılarak

$$= \big(x * D(0,x)\big) \wedge D(x,x)$$

$$= (x * D(0,x)) \wedge d(x)$$

O halde $d(x) = \big(x * D(0,x)\big) \wedge d(x)$ elde edilir.

$iii)$ $d(x) = d(y)$ olacak şekilde $x, y \in X$ olsun (i) kullanılarak

$d(0) = x * D(x,0)$ ve $d(0) = y * D(y,0)$ elde edilir.

Buradan $x * D(x,0) = y * D(y,0)$ olur. Teorem 2.1.4 kullanılarak

$x = y$ elde edilir. O halde d $1-1$ dir.

(iV) d regüler olsun

(i) den $d(0) = x * D(x,0)$ olur.

d regüler olduğundan

$d(0) = x * D(x,0) = 0$ olur ve (3) kullanılarak $D(x,0) = x$ elde edilir.

(V) Herhangi bir $x \in X$ için $D(x,0) = x$ olsun.

(I) den $x * D(x,0) = 0$ dır ve (i)kullanılarak

$d(0) = x * D(x,0) = 0$ dır. O halde $d(0) = 0$ yani d regülerdir

(Vi) Her $y \in X$ için $d(y) * x = 0$ veya $x * d(y) = 0$ olacak şekilde $x \in X$ olsun.

O zaman (3)ten $d(y) = x$ elde edilir.

Önerme 4.11: $(X,*,0)$ 0-değişmeli B-cebri ve d X in (sol,sağ) simetrik türevinin bir izi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

(i) $d(x * y) = (d(x) * y) * y$

(ii) $D(x,0) * D(y,0) = x * y\ dir.$

Kanıt: (i) $x, y \in X$ olsun. O zaman

$$d(x * y) = D(x * y, x * y)$$

$$= \big(D(x, x * y) * y\big) \wedge \big(x * D(y, x * y)\big)$$

$$= \big(x * D(y, x * y)\big) \wedge ((x * D(y, x * y)\big) * (D(x, x * y) * y)$$

(12) den

$$= D(x, x * y) * y$$

$$= \Big((D(x,x) * y) \wedge \big(x * D(x,y)\big)\Big) * y$$

(12) den

$= (D(x,x) * y) * y$ elde edilir. yani $d(x * y) = (d(x) * y) * y$ dir.

(ii) $x, y \in X$ olsun. Önerme 4.9 (i) kullanılarak

$d(0) = D(x, 0) * x$ ve $d(0) = D(y, 0) * y$ yazılır.

Buradan $D(x, 0) * x = D(y, 0) * y$ ve

$(D(x, 0) * x) * (D(y, 0) * y)$ =0 elde edilir.

(11) den

$(x * y) * (D(x, 0) * D(y, 0)) = 0$ yazılır.

O halde (3) kullanılarak

$D(x, 0) * D(y, 0) = x * y$ elde edilir.

Önerme 4.12: (X,∗ ,0) bir 0-değişmeli B-cebri ve d X in (sağ,sol) simetrik türevinin izi olsun.o zaman $her\ x, y \in X$ için

(i) $d(x * y) = d(y)$

(ii) d sabit bir dönüşümdür.

(iii) $D(y, 0) * D(x, 0) = y * x$ tir.

Kanıt: (i) $d(x * y) = D(x * y, x * y)$

$$= \left(x * D(y, x * y)\right) \wedge (D(x, x * y) * y)$$

$$= (D(x, x * y) * y) \wedge \left((D(x, x * y) * y) * \left(x * D(y, x * y)\right)\right)$$

(12) den

$$= \left(x * D(y, x * y)\right)$$

$$= x * ((x * D(y, y) \wedge (D(y, x) * x))$$

(12) den

$$= x * \left(x * D(y, y)\right) = x * \left(x * d(y)\right)$$

(12) den

$= d(y)$ elde edilir.

Yani $d(x * y) = d(y)$ dir.

(ii) $x \in X$ olsun, (II) ve (i) kullanılarak $d(x) = d(x * 0) = d(0)$ elde edilir. Yani d sabit bir dönüşümdür.

(iii) $x, y \in X$ olsun Önerme 4.10(i) den

$d(0) = x * D(x, 0)$ ve $d(0) = y * D(y, 0)$ dır. Buradan $x * D(x, 0) = y * D(y, 0)$ yazılır ve

$x * D(x, 0) = y * D(y, 0)$ yazılır ve

$\left(x * D(x, 0)\right) * \left(y * D(y, 0)\right) = 0$ dır ve aynı zamanda

(11) den

$\left(D(y, 0) * D(x, 0)\right) * (y * x) = 0$ yazılır. O halde (3) ten

$D(y, 0) * D(x, 0) = y * x$ tir.

5. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı B-cebrinde türev için yapılan çalışmalardaki boşlukların kapatılması ve simetrik ikili türev tanımları ile B-cebirlerinin yapısının incelenmesidir. Bu çalışmada ilk olarak tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı tanım, özellikler ve örnekler verilmiştir. İkinci bölümde B-cebrinde ve 0-değişmeli B-cebrinde türev ve f-türev özellikleri açıklanmış ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde simetrik ikili türev tanımı verilmiş ve B-cebrinde bu tanım yardımıyla bazı özellikler bulunmuş ayrıca bu özelliklerle doğrulayan örnekler sunulmuştur.

Bundan sonra diğer cebirler için, simetrik ikili türevler ve bunların özellikleri çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abujabal, H. A.S.A. ve Al-Shehri, N. O.Some Results on Derivations of BCI-Algebras,PK ISSN 0022-2941; CODEN JNSMAC. Vol.46,13-19.

Iseki,K., 1980, S. On BCI-Algebras, Math. Seminar Notes,8:125-130.

Maksa Gy.,1980, A Remark on Symmetric Biadditive Functions Having Nonnegative Diagonalization,Glasnik Math.,15:35,279-282.

Hu,Q.P. andLi,X., 1983, On BCH-Algebras, Math. Seminar Notes, 11: 313-320.

Hu,Q.P. andLi,X.,1985,On Proper BCH-Algebras, Math. Japo. 30:659-661.

Maksa Gy., 1987, On the Trace of Symmetric Bi-Derivation, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada,9,303-307.

Vukman J., 1989,Symmetric Bi-Derivations on Prime and Semi-Prime Rings, Aequations Math.,38,245-254.

Vukman J., 1990,Two result Concerning Symmetric Bi-Derivations on Prime Rings, Aequations Math., 40,181-189.

Dudek, W.A. and Zhang, X., 1998, On ideals andcongruences inBCC-algebras. Czechoslovak Math. Journal.48 (123): 21-29.

Jun,Y.B., Roh,E.H. and Kim, H.S., 1998,On BH-algebras, Sci. Math., Japonica Online,1,347-354.

Neggers, J. And Kim, H.S., 1999, On D-algebras, Math.Slovaca,Co.,49:19-26.

Neggers, J. And Kim, H.S., 2002, On B-Algebras, Mate. Vesnik,54:21-29.

Jun, Y.B. and Xin, X.L., 2004, On Derivations of BCI-algebras, Inform. Sci., 159:167-176.

Kim, H.S., and Park, H.G.,2005, On –comitative B-Algebras, Sci. Math. Japonica Online,3-,31-36.

Prabpayak C. And Leerawat U.,2009,On Derivations of BCC-algebras. Kasetsart J.(Nat.Sci.) 43:398-401.

Al-Shehri, N. O., 2010, On Derivations of B-algebras, JKAU: Sci., VO1. 22 No. 1, pp:71-83(2010 A.D./1431 A.H.);DOI:10.4197/Sci.22-1.5.

Fırat, A., 2010, On f-Derivations off BCC-Algebras, Ars Combinatoria,97A pp.377-388.

Cho,J.R., and Kim, H.S., 2011,On B-Algebras and Quasigroups,and Related Systems,8:1-6.

Ilbira S., Firat A., Jun, Y.B., 2011, On Symetric Bi-Derivations of BCI-Algebras,Applied Mathematical Sciences, Vol.5,no.60,2957-2966.

Fırat, A., Ayar Özbal, Ş., 2011 , On f-Derivations of B-Algebras , ARS Combinatoria, Volume CII, October, (SCI-E), s. 1-11.

Iseki, K. And Tanaka, 2015, An Introduction to Theory of BCK-Algebras, Math. Japo.,23,1-26.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Diyarbakır'da doğan Sibel ALTUNBIÇAK KAYIŞ, ilköğrenimini Kastamonu'da tamamladıktan sonra ortaöğrenimini Antalya'da, ardından da Dokuz Eylül Üniversitesi-Buca Eğitim Fakültesi-Matematik Öğretmenliğini Bölümü'nü bitirdi. 2000 yılında mezun olarak öğretmenliğe başladı. Hatay'da öğretmenlik yaptıktan sonra İzmir-Torbalı'ya atandı.2002 yılından beri Torbalı'daki çeşitli okullarda öğretmen ve idareci olarak çalıştı. TUBİTAK'ın düzenlemiş olduğu " Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık" kamplarına katıldı. Evli ve bir çocuk annesi olan KAYIŞ Torbalı Anadolu Lisesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.