YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR KARARLILIĞININ HASSASİYETİ

Fatih KUZGUN

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Şahlar MEHERREM
İkinci Danışmanı:Yrd. Doç. Dr. Ahmet DUMAN

Bornova-İZMİR
2015

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr.Şahlar MEHERREM(Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç.Ahmet DUMAN(Eş Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Mehmet KURT

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Esra DALAN YILDIRIM

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım

Yrd.Doç.Dr.Refet POLAT

Prof. Dr. Behzat Gökçen
Fen. B. E. Enst. Md.

ABSTRACT

SENSIVITY OF SCHUR STABILITY OF LINEAR DIFFERENCE EQATION SYSTEMS

KUZGUN, Fatih
MSc/PhD in Interior Architecture and Environmental Design
Supervisor: Associated Prof. Dr. Şahlar MEHERREM
Co- Supervisor: Assistant Prof. Dr. Ahmet DUMAN
September 2015, 32 pages
In this study ,linear constantcoeefficient equation systems are introduced.Continuation theorems given for the literal Schur stable linear discrete-time equations are analysed and arguments are discussed.Additionally all the results are sustained with numerical examples.

Keywords: The discrete-time equations with constant coefficients, Schur stability, parameter of Schur stability, sensitivitiy, perturbation systems

ÖZET

LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR KARARLILIĞININ HASSASİYETİ

Fatih KUZGUN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç.Dr. Şahlar MEHERREM
İkinci Tez Danışmanı : Yrd.Doç.Dr. Ahmet DUMAN
Eylül 2015,32 sayfa

Bu çalışmada, lineer fark denklem sistemleri tanıtılmış, literatürde bulunan Schur kararlı lineer fark denklem sistemleri için verilen süreklilik teoremleri incelenmiş ve ispatları açılmıştır. Ayrıca elde edilen bütün sonuçlar nümerik örneklerle de desteklenmiştir.

Anahtar sözcükler: Sabit katsayılı fark denklem sistemleri, Schur kararlılık, Schur kararlılık parametreleri, Hassasiyet, Pertürbe sistemleri.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisasns tezimin hazırlık aşamasında; araştırma aşaması, materyal sağlama, tez konusunun detaylı bir şekilde incelenmesi, çalışılması açısından yapmış olduğu tüm yardımlardan dolayı danışmanım Doç. Dr.Şahlar MEHERREM' e , tez çalışmamda katkılarından dolayı tez ikinci danışmanım Yrd. Doç. Ahmet DUMAN' a ve tez çalışmamda verdiği tüm desteklerden dolayı Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT 'a teşekkür ederim.

Fatih KUZGUN
İzmir,2015

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN SCHUR KARARLILIĞININ HASSASİYETİ" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyograf ya da gösterilenlerden oluştuğunu ,bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

14/09/15

Fatih KUZGUN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$\lambda_i(A)$	A matrisinin i inci öz değeri
H^*	H matrisinin adjointi, yani eşlenik transpozesi
$H=H^*>0$	H matrisi, simetrik pozitif matris
$\|\|A\|\|$	A matrisinin $\|A\|=\sqrt{\|\lambda_{max}(A^*A)\|}$ ile verilen spektral normu
$\mu(A)$	$Ax=f$ lineer denklem sisteminin $\mu(A)=\|A\|\,\|A^{-1}\|$ ile verilen şart sayısı
$\kappa(A)$	$\frac{d}{dt}x(t)=Ax(t)$ diferensiyel denklem sisteminin $\kappa(A)=2\|A\|\|H\|$ ile verilen şart sayısı
$\omega(A)$	Sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri için kararlılık parametresi
ω^*	Fark denklem sistemleri için pratiklik parametresi
$M_N(R)$	Elemanları R cisminden alınan $N\times N$ matrisler ailesi

1. GİRİŞ

A, herhangi bir karesel matris olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n), x(0) = c, n = 0,1,2,...$$

fark Cauchy problemi, bilimin farklı dallarında karşılaşılabilen bir problemdir. Bu problemin çözümlerinin hareketini tahmin etmek ve dış etkenlere maruz kalan sistemlerin özelliklerini hangi şartlarda koruduğunu bilmek, araştırmak yapılan çalışmaların bir kaosa uğramaması açısından oldukça önemlidir. Teknolojik sahada da bu tür soruların cevabını önceden tahmin etmek, kaosla karşılaşmamak için önem arz etmektedir.

1.1. Literatür Özeti ve Problemin Tanıtımı

Problemin hassasiyetini belirleyen şartlar literatürde süreklilik teoremleri olarak bilinen teoremlerle ortaya çıkarılmaktadır. Süreklilik teoremleri problemin giriş elemanlarında ne kadar bir değişim olduğunda problemin yapısının korunduğunun bilinmesini sağlamaktadır. Süreklilik teoremleri, denklem teorisinin hemen hemen her alanında kullanılmaktadır. Mesela lineer cebirsel denklemler, diferensiyel denklemler, fark denklemler, v.b. denklemlerin çözümlerinin hassasiyetinin araştırılmasında süreklilik teoremleri ile karşılaşılmaktadır.

Kararlılık teorisinde, kararlı matrislerin kararlı olmayan matrislere olan uzaklığı genellikle ilgi çekici bir problem olmuş ve çalışılmıştır (Van Loan 1985). Şimdi bu süreklilik teoremlerinin bazılarından bahsedelim.

Sabit katsayılı lineer $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$ diferensiyel denklem sisteminin *Hurwitz kararlılık parametresi* $\kappa(A) < \infty$ olmak üzere sistem Hurwitz kararlı iken $\frac{\|B\|}{\|A\|} \le \frac{1}{15\kappa(A)}$ olacak şekildeki her hangi bir B matrisi için A+B matrisi de Hurwitz kararlı olma özelliğini korumaktadır (Bulgak 1999).

Sabit katsayılı lineer $x(n+1)=Ax(n)$ fark denklem sisteminin *Schur kararlılık parametresi* $\omega(A)<\infty$ olmak üzere $\|B\|\leq\frac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$ şartını sağlayan B matrisleri için $A+B$ matrisleri de Schur kararlı olmaktadır (Bulgak 1999).

Bu çalışmada;

Lineer sabit katsayılı fark denklem sistemleri için literatürdeki süreklilik teoremleri araştırılmış ve literatürde bulunan süreklik teoremlerinin ara işlemleri açılmıştır.

1.2. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması 3 bölümden oluşmaktadır.

1. bölümde; problemin tanıtımı ve problemle ilgili literatür özeti verilmiştir.

2. bölümde; sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin Schur kararlılığı ile ilgili bazı temel kavramlar kısaca tanıtılmıştır. Ayrıca Schur kararlılığının hassasiyet problemi için literatürdeki sonuçlar verilmiş ve bu sonuçlarda yapılan ara işlemler açılmıştır.

3. bölümde; İkinci bölümde bulunan literatürde elde edilmiş sonuçlar k. mertebeden lineer fark denklemlerine literatürde uygulanmış ve bu sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

2. LİNEER FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde, sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri, bu sistemlerin Schur kararlılığı ile ilgili bazı temel kavramlar ve literatürde yer alan bazı süreklilik teoremleri verilmiştir.

A, N boyutlu sabit katsayılı karesel bir matris ($A \in M_N(R)$) olmak üzere

$$x(n+1) = Ax(n), \quad n \in Z \tag{2.1}$$

sistemini ele alalım. Bu sistem *sabit katsayılı lineer fark denklem sistemi* olarak, $x(0) = x_0 \in \boldsymbol{R}^N$ başlangıç şartı altında

$$x(n+1) = Ax(n), \quad x(0) = x_0\,, \quad n \geq 0 \tag{2.2}$$

sistemi de *sabit katsayılı lineer fark Cauchy problemi* olarak adlandırılmaktadır.

I birim matris ve A singüler olmayan bir matris olmak üzere

$$X(n+1) = AX(n), \quad X(0) = I\,, \quad n \geq 0 \tag{2.3}$$

Cauchy probleminin çözümü, $X(n) = A^n$ matrisine (2.1) sisteminin *fundamental matrisi* denir. (2.2) Cauchy probleminin çözümü ise $x(n) = A^n x_0$ şeklindedir (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve *ark.* 2000).

2.1.Schur kararlılık

$$x(n+1) = Ax(n), \qquad n \in Z$$

sisteminin *asimtotik kararlı* olabilmesi için gerek ve yeter şart $|\lambda_i(A)| < 1$, (i = 1, 2, ... , N) ve

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t)$$

diferensiyel denklem sisteminin *asimtotik kararlı* olabilmesi için gerek ve yeter şart ise $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, ($i$ = 1, 2, ... , N) olmasıdır (Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Bulgak 1999). Bu kritere *Spektral Kriter* de denilmektedir. Bir sistemin asimtotik kararlı olması A katsayı matrisinin asimtotik kararlı olmasıyla aynı anlama gelmektedir (Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Aydın ve *ark.* 2000).

Literatürde lineer diferensiyel denklem sistemlerin asimtotik kararlılığı yerine *Hurwitz kararlılık*, lineer fark denklem sistemlerinin asimtotik kararlılığı yerine *Schur kararlılık* kavramları da kullanılmaktadır (Wang and Michel 1993, Rohn 1994, Aydın 2004, Voicu and Pastravanu 2006). Çalışma boyunca bu kavramlar kullanılacaktır.

Her hangi bir A kare matrisinin karakteristik denkleminin köklerini (öz değerlerini) hesaplama veya yerini tahmin etme problemi kolay bir problem değildir. Simetrik A matrisinin öz değerlerinin hesaplanması probleminin iyi konulmuş problem olduğu bilinmektedir. Genel durumda bu problem kötü konulmuş bir problemdir (Wilkinson 1965, Bulgak 1999). Yani, matrisin elemanlarındaki küçük değişikliklere karşılık öz değerlerinde büyük değişiklik olabilmektedir. Matris elemanlarındaki değişiklik o kadar küçük olabilir ki matrisin bilgisayardaki temsiline etki etmez. Fakat bu değişiklik A matrisinin Schur kararlılığını etkileyebilir. Mesela

$$A_\omega = \begin{pmatrix} 0.5 & 10 & \cdots & 0 \\ 0 & 0.5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \omega & 0 & \cdots & 0.5 \end{pmatrix}$$

biçimindeki N boyutlu $\omega-$ parametreli A_ω matrisi,

$$det(A_\omega - \lambda I) = (0.5-\lambda)^N \pm 10^{N-1}\,\omega$$

karakteristik denklemine sahiptir. $\omega = 0$ için A_0 matrisinin öz değerleri $\lambda_i(A_0) = 0.5$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) dir. Eğer $\omega = 10^{1-N}$, $N = 101$ için $A_{10^{-100}}$ matrisinin bütün öz değerleri $\lambda\left(A_{10^{-100}}\right) = 1.5$ olur. Buradan,

$$\left\|A_{10^{-100}} - A_0\right\| = 10^{-100} \Rightarrow \left|\lambda\left(A_{10^{-100}}\right) - \lambda\left(A_0\right)\right| = 1$$

olduğu görülür. Bu örnek Ostrowski'ye aittir (Wilkinson 1965, Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998). Böylece Schur kararlı olan A_0 matrisinin elemanlarında yapılan 10^{-100} kadar bir değişim, matrisi Schur kararlı olmayan $A_{10^{-100}}$ matrisine dönüştürmektedir.

Öz değer problemi iyi konulmuş bir problem olmadığından Schur kararlılığı tespit için Spektral Kriter yerine, Schur kararlılığı karakterize eden bir lineer cebirsel denklemin çözümü yardımıyla hesaplanan parametreleri kullanmak daha kullanışlıdır.

Şimdi sabit katsayılı fark denklem sistemlerinin aşikar çözümünün Schur kararlı olup olmadığını belirten Lyapunov teoremini verelim.

Teorem 2.1. (*Lyapunov teoremi*) Verilen bir A matrisinin (veya $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin $x(n) \equiv 0$ aşikar çözümünün) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^* HA - H + I = 0$$

olarak bilinen Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A^*\right)^k A^k \;, \; H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Bulgak 1999).

İspat. Bu teoremin ispatı Akın ve Bulgak 1998 den alınmıştır.

Yeter şart: Kabul edelim ki $A^{*}HA-H+I=0$ Lyapunov matris denklemi pozitif tanımlı $H=H^{*}>0$ çözümüne sahip olsun. $x(n+1)=Ax(n)$ olduğundan

$$(Hx(n+1), x(n+1)) - (Hx(n), x(n)) = (HAx(n), Ax(n)) - (Hx(n), x(n))$$

$$= (A^{*}HAx(n), x(n)) - (Hx(n), x(n)) = ((A^{*}HA-H)x(n), x(n))$$

olur, $A^{*}HA-H=-I$ ifadesi dikkate alınırsa

$$(Hx(n+1), x(n+1)) - (Hx(n), x(n)) = -(x(n), x(n))$$

eşitliği sağlanır. Courant-Fisher kuralına göre

$$\lambda_{min}(H)(x,x) \le (Hx,x) \le \lambda_{max}(H)(x,x)$$

dir. Ayrıca $H>0$ ise $\lambda_{min}(H)>0$, $\lambda_{max}(H)>0$ olur ve

$$(x(n),x(n)) \ge \frac{1}{\lambda_{max}(H)}(Hx(n),x(n))$$

yazabiliriz. $-\big(x(n),x(n)\big) \le -\frac{1}{\lambda_{max}(H)}(Hx(n),x(n))$ olduğundan

$$(Hx(n+1), x(n+1)) - (Hx(n), x(n)) \le -\frac{1}{\lambda_{max}(H)}(Hx(n),x(n))$$

olur. Yani

$$(Hx(n+1), x(n+1)) \le \left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)(Hx(n),x(n))$$

dir. İspatın bu kısmında yukarıdaki eşitsizliğe adım adım iterasyon uygulayalım.

$$\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)\big(Hx(n),x(n)\big) \le \left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^{2}\big(Hx(n-1),x(n-1)\big)$$

dolayısıyla

$$(Hx(n+1), x(n+1)) \le \left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^{2}(Hx(n-1),x(n-1)),$$

$$\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^2(Hx(n-1),x(n-1))\leq\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^3(Hx(n-2),x(n-2))$$

dolayısıyla

$$(Hx(n+1),x(n+1))\leq\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^3(Hx(n-2),x(n-2)),$$

$$\vdots$$

$$(Hx(n+1),x(n+1))\leq\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^{n+1}(Hx(0),x(0))$$

olur. Bununla birlikte e^{-z} ifadesinin Taylor serisine açılımı

$$e^{-z}=1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^k\frac{z^k}{k!}+\cdots$$

dır. $0<z<1$ ise $\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}>0$, $\frac{z^4}{4!}-\frac{z^5}{5!}>0$, ... olduğundan

$$1-z\leq e^{-z}$$

dir. $H=A^*HA+I$, $H=H^*>0$ olduğundan $\lambda_{max}(H)>1$ ve dolayısıyla $0<\frac{1}{\lambda_{max}(H)}<1$ dir. Böylece

$$1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\leq e^{-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}}$$

ve

$$\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^n\leq e^{-\frac{n}{\lambda_{max}(H)}}$$

olur. Buradan

$$(Hx(n),x(n))\leq e^{-\frac{n}{\lambda_{max}(H)}}(Hx(0),x(0))$$

ifadesini yazabiliriz. Bu durumda

$$\lambda_{min}(H)(x(0),x(0)) \leq e^{-\frac{n}{\lambda_{max}(H)}}(Hx(0),x(0)) \leq$$
$$e^{-\frac{n}{\lambda_{max}(H)}}\lambda_{max}(H)(x(0),x(0))$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$\|x(n)\|^2 \leq \frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)} e^{-\frac{n}{\lambda_{max}(H)}}\|x(0)\|^2$$

olur. Buradan

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}} e^{-\frac{n}{2\lambda_{max}(H)}}\|x(0)\|$$

ve

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}}\left(1-\frac{1}{\lambda_{max}(H)}\right)^{\frac{n}{2}}\|x(0)\|$$

olur. Şimdi herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}}}$$

olsun. O halde, eğer $\|x(0)\| < \delta$ ise her $n \geq 0$ için

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}}\delta = \varepsilon$$

olur. Böylece $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin $x(0) = 0$ aşikar çözümü Lyapunov'a göre fark kararlıdır. Buradan sonuç olarak aşikar çözüm Lyapunov'a göre fark kararlı ve $n \to \infty$, $\|x(n)\| \to 0$ olduğundan verilen sistem Schur kararlıdır.

Gerek şart: İlk olarak, eğer A Schur kararlı bir matris ise $A^*HA - H + I = 0$ Lyapunov fark matris denkleminin bir çözümünün

$$H = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A^*\right)^k A^k$$

olduğunu göstereceğiz.

Eğer A Schur kararlı ise bu durumda $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin herhangi bir $x(0)$ başlangıç vektörü ile çözümünün zamanla sıfıra gittiğini biliyoruz. Yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\|x(n)\| < \varepsilon\|x(0)\|$ eşitsizliği bütün $n > T(\varepsilon, x(0))$ lar için sağlanacağı bir $T(\varepsilon, x(0))$ sayısı vardır. $q_i(n+1) = Aq_i(n), q_i(0) = e_i$ N tane başlangıç değer problemini ele alalım. Burada

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

N tane N boyutlu vektörlerdir. ASchur kararlı bir matris olduğundan keyfi $\varepsilon > 0$ için$N$ tane $T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_1\right), T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_2\right), \dots, T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_N\right)$ sayıları vardır ve verilen başlangıç değer probleminin çözümleri için

$$\|q_i(n)\| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, n \geq T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_i\right), i = 1,2, \dots, N$$

yazabiliriz. Buradaki e_i birim matrisin i inci sütun vektörü olduğundan

$$\phi(n+1) = A\phi(n), \phi(0) = I$$

sisteminin çözümü $\phi(n)$ fundamental matrisidir. Böylece

$$\phi(n) = [q_1(n), q_2(n), \dots, q_N(n)] \; ve \; \phi(n) = A^n$$

dir.

$$T(\varepsilon) = max\left\{T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_1\right), T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_2\right), \dots, T\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon, e_N\right)\right\}$$

alarak herhangi bir $n \geq T(\varepsilon)$ için

$$\|A^n\| = \|\phi(n)\| \leq \|\phi(n)\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\|q_i(n)\|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\varepsilon^2} \leq \varepsilon$$

yazabiliriz. $k>0$ ($k=1,2,\dots$) olmak üzere

$$H_1=\sum_{m=0}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m,\ H_2=\sum_{m=0}^{2T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m,\dots,H_k=\sum_{m=0}^{kT(\varepsilon)}(A^*)^m A^m>0$$

bir matrisler dizisi elde edebiliriz. Şimdi bu dizinin limitinin var olduğunu gösterelim.

$$H_{k+1}=\sum_{m=0}^{(k+1)T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m=\sum_{m=0}^{kT(\varepsilon)}(A^*)^m A^m+\sum_{m=kT(\varepsilon)+1}^{(k+1)T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m$$

$$=(A^*)^{kT(\varepsilon)}\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m\,A^{kT(\varepsilon)}+\sum_{m=0}^{kT(\varepsilon)}(A^*)^m A^m$$

$$=(A^*)^{kT(\varepsilon)}\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m\,A^{kT(\varepsilon)}+H_k$$

$$=(A^*)^{kT(\varepsilon)}\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m\,A^{kT(\varepsilon)}+(A^*)^{(k-1)T(\varepsilon)}\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m\,A^{(k-1)T(\varepsilon)}+H_{k-1}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}(A^*)^{sT(\varepsilon)}\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m\,A^{sT(\varepsilon)}+H_1$$

$$=\sum_{s=0}^{k}(A^*)^{sT(\varepsilon)}[H_1-I]A^{sT(\varepsilon)}+I$$

olur. Bu son elde edilen eşitliği elde edilişini bir önceki eşitlik kullanarak biraz daha açalım

$$H_{k+1}=\sum_{s=1}^{k}(A^*)^{sT(\varepsilon)}\left(\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m+I-I\right)A^{sT(\varepsilon)}+H_1$$

yaılabilir, $I=(A^*)^0A^0$ olduğu dikkate alınırsa

$$H_{k+1}=\sum_{s=1}^{k}(A^*)^{sT(\varepsilon)}\left(\sum_{m=1}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m+(A^*)^0A^0-I\right)A^{sT(\varepsilon)}+H_1$$

$$H_{k+1}=\sum_{s=1}^{k}(A^*)^{sT(\varepsilon)}\left(\sum_{m=0}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m-I\right)A^{sT(\varepsilon)}+H_1$$

$H_1=\sum_{m=0}^{T(\varepsilon)}(A^*)^m A^m$ olduğundan

$$H_{k+1}=\sum_{s=1}^{k}(A^*)^{sT(\varepsilon)}(H_1-I)A^{sT(\varepsilon)}+H_1$$

dır. Buradan

$$H_{k+1} = \sum_{s=1}^{k} (A^*)^{sT(\varepsilon)} (H_1 - I) A^{sT(\varepsilon)} + H_1 - I + I$$

ve böylece

$$= \sum_{s=0}^{k} (A^*)^{sT(\varepsilon)} [H_1 - I] A^{sT(\varepsilon)} + I$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$H_{k+1} = \sum_{s=0}^{k} (A^*)^{sT(\varepsilon)} [H_1 - I] A^{sT(\varepsilon)} + I$$

dir. $k > 0$ için

$$h_{k+1} = \|H_{k+1}\|$$

artan pozitif sayı dizisini oluşturalım. Buradan

$$h_{k+1} \leq 1 + \sum_{s=0}^{k} \left\|(A^*)^{sT(\varepsilon)} [H_1 - I] A^{sT(\varepsilon)}\right\| \leq \sum_{s=0}^{k} \left\|A^{sT(\varepsilon)}\right\|^2 [h_1 + 1]$$

olur. Böylece

$$h_1 \leq h_{k+1} < 1 + \frac{[h_1 + 1]}{1 - \varepsilon^2}$$

elde ederiz. Yani $\{h_k\}$ sayı dizisi h_1 ile alttan $1 + \frac{[h_1+1]}{1-\varepsilon^2}$ ile üstten sınırlıdır.

Bolzano-Weierstrass teoreminden $\{h_k\}$ sayı dizisinin bir limiti vardır. $\{h_k\}$sayı dizisinin limitinin var olması $\{H_k\}$ matris dizisinin de limitinin var olması demektir. $\{H_k\}$ matris dizisinin limiti var ve

$$H = \lim_{k \to \infty} H_k = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k$$

dır. Şimdi $\{H_k\}$ matris dizisinin limiti olarak bulduğumuz H matrisinin Lyapunov fark matris denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$A^* H_k A - H_k = (A^*)^{kT(\varepsilon)+1} A^{kT(\varepsilon)+1} - I$$

olduğu açıktır. $k \to \infty$ iken eşitliğin sol tarafının limitinin olduğunu biliyoruz. Çünkü

$$k \to \infty,\ H_k \to H\ ;\ \left\|A^{kT(\varepsilon)}\right\| \to 0$$

dır. Bundan dolayı $A^*HA - H + I = 0$ ve H bu Lyapunov fark denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi H matrisinin pozitif tanımlı olduğunu gösterelim. H simetrik bir matris olduğundan Courant-Fisher prensibine göre H matrisinin en küçük öz değeri için

$$\lambda_{min}(H) = min_{\|x\|=1}(Hx, x)$$

veya

$$\lambda_{min}(H) = min_{\|x\|=1}([I + A^*HA]x, x) \geq 1$$

olur. Bu ise bize $H = H^*$ matrisinin pozitif tanımlı bir matris olduğunu gösterir. Böylece teoremin gerek şartının ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.2. Verilen bir A matrisinin (veya $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin $x(n) \equiv 0$ aşikar çözümünün) Schur kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$A^*HA - H + C = 0, C = C^* > 0$$

olarak bilinen Lyapunov fark matris denkleminin

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k CA^k\ ,\ H = H^* > 0$$

çözümünün olmasıdır (Aydın 1995, Akın ve Bulgak 1998, Elaydi 1999, Bulgak 1999).

Lyapunov fark denklemini sağlayan $H = H^* > 0$ pozitif tanımlı H matrisi varsa $\omega(A) = \|H\|$, aksi halde $\omega(A) = \infty$ olarak seçilir. Bu şekilde tanımlanan $\omega(A)$ matris fonksiyoneline A matrisinin *Schur kararlılık parametresi* yada *Schur kararlılığının kalitesini gösteren parametre* denir (Bulgakov ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999). ω^* , 1 den büyük bir sayı ($\omega^* > 1$) olmak üzere $\omega(A) \leq \omega^*$ eşitsizliği sağlanıyorsa A matrisine pratik Schur kararlı (ω^*–Schur kararlı) matris olarak adlandırılır. $\omega(A) > \omega^*$ ise A matrisine ω^*–Schur kararsız matris denir (Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999, Aydın 2004).

2.2. Çözümün üst sınırı

Bir sistemi çözüme den, sistemin çözümünün davranışı hakkında bilgi edinmek mühendislik problemlerinde önem arz etmektedir. Şimdi (2.2) sabit katsayılı fark denklem sisteminin çözümünün davranışı hakkında bilgi veren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.3.(2.2) Cauchy probleminin çözümünün üst sınırı, Schur kararlı A matrisi için

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\omega(A)}\,\left(1-\frac{1}{\omega(A)}\right)^{\frac{n}{2}} \|x_0\|, \quad n \geq 0$$

ve

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\omega(A)}\, e^{-\frac{n}{2\omega(A)}} \|x(0)\|$$

dir (Bulgak ve Godunov 1988, Akın ve Bulgak 1998, Bulgak 1999).

İspat. Bu teoremin ispatı Akın ve Bulgak 1998 den alınmıştır.

(2.2) sistemi

$$x(n+1) = Ax(n), \quad x(0) = x_0$$

ele alalım. Burada A matrisi Schur kararlı ve

$$(\,Hx(n{+}1)\,,x(n{+}1)) - (\,Hx(n)\,,x(n)\,) = (\,(\,A^{*}HA - H\,)\,x(n)\,,x(n)\,)$$

olduğundan

$$(\,Hx(n{+}1)\,,x(n{+}1)\,) - (\,Hx(n)\,,x(n)\,) = -\,(\,x(n)\,,x(n)\,)$$

ifadesi sağlanır. $H = H^{*} > 0$ simetrik pozitif tanımlı matris olduğundan $0 < \lambda_{\min}(H) = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_{\max}(H) = \lambda_n$ ve Rayleigh Ritz oranına göre

$$\lambda_{\min}(H)(x,x) \le (Hx,x) \le \lambda_{\max}(H)(x,x)$$

dir. Buradan

$$(x(n),x(n)) \ge \frac{1}{\lambda_{\max}(H)}(Hx(n),x(n))$$

yazabiliriz. Böylece

$$(Hx(n+1),x(n+1)) - (Hx(n),x(n)) \le -\frac{1}{\lambda_{\max}(H)}(Hx(n),x(n))$$

buradan

$$(Hx(n+1),x(n+1)) \le (1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})(Hx(n),x(n))$$

yazabiliriz. İterasyon uygularsak

$$(Hx(n+1),x(n+1)) \le (1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^{n+1}(Hx(0),x(0))$$

RayleighRitz oranından

$$\lambda_{\min}(H)(x(n),x(n)) \le (1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^{n}(Hx(0),x(0)) \le (1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^{n}\lambda_{\max}(H)(x(0),x(0))$$

elde ederiz. Buradan

$$\|x(n)\|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}(1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^n \|x(0)\|^2$$

ve

$$\|x(n)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}(1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^{\frac{n}{2}} \|x(0)\|$$

yazabiliriz. $H=\sum_{k=0}^{\infty}(A^*)^k A^k$ olduğundan

$$\begin{aligned}(Hx(n),x(n)) &= (\sum_{k=0}^{\infty}(A^*)^k A^k x(n),x(n)) = \sum_{k=0}^{\infty}((A^*)^k A^k x(n),x(n)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(A^k x(n),A^k x(n)) = \sum_{k=0}^{\infty}\|A^k x(n)\|^2 = \|x(n)\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\|A^k x(n)\|^2\end{aligned}$$

olup buradan

$$\frac{(Hx(n),x(n))}{(x(n),x(n))} > 1$$

yazma imkanı tanır. Buradan $\lambda_{\max}(H)=\max\frac{(Hx(n),x(n))}{(x(n),x(n))}>1$ ve $\lambda_{\min}(H)=\min\frac{(Hx(n),x(n))}{(x(n),x(n))}>1$ dolayısıyla $0<\frac{1}{\lambda_{\max}(H)}<1$ dir. Böylece

$$(1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)}) \leq e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)}}$$

ve

$$(1-\frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^n \leq e^{-\frac{n}{\lambda_{\max}(H)}}$$

olur. Buradan

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}\, e^{-\frac{n}{2\lambda_{\max}(H)}} \|x(0)\|$$

yazabiliriz. $\lambda_{\min}(H) = \min \frac{(Hx(n), x(n))}{(x(n), x(n))} > 1$ olduğunu kullanırsak

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\lambda_{\max}(H)}\,(1 - \frac{1}{\lambda_{\max}(H)})^{\frac{n}{2}} \|x(0)\|$$

ve

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\lambda_{\max}(H)}\, e^{-\frac{n}{2\lambda_{\max}(H)}} \|x(0)\|$$

elde ederiz. $H = H^* > 0$ simetrik pozitif tanımlı matris olduğundan $\|H\| = \lambda_{\max}(H)$ dir. Böylece

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\|H\|}\,(1 - \frac{1}{\|H\|})^{\frac{n}{2}} \|x(0)\|$$

ve

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\|H\|}\, e^{-\frac{n}{2\|H\|}} \|x(0)\|$$

yazılabilir. Böylece

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\omega(A)}\,(1 - \frac{1}{\omega(A)})^{\frac{n}{2}} \|x_0\|$$

ve

$$\|x(n)\| \le \sqrt{\omega(A)}\, e^{-\frac{n}{2\omega(A)}} \|x(0)\|$$

elde edilir.

2.3. Süreklilik teoremleri

A, $B \in M_N(R)$ olmak üzere (2.1) *sabit katsayılı lineer fark denklem sisteminin pertürbe sistemi* olarak adlandırılan

$$y(n+1) = (A+B)\, y(n), \qquad n \in Z \tag{2.4}$$

sistemini ele alalım.

(2.1) sistemi (yada A matrisi) Schur kararlı ise;

– (2.4) pertürbe sistemi hangi şartlarda Schur kararlı olarak kalmaktadır?

Bir diğer ifadeyle,

– (2.1) sisteminin Schur kararlılığının dayanıklılığı acaba ne kadardır?

soruları akla gelen anlamlı sorulardır. Bu ve benzeri sorulara literatürde *Süreklilik Teoremleri* olarak bilinen teoremlerle cevap verilmektedir.

Şimdi (2.4) sisteminin Schur kararlılığının hassasiyetini gösteren literatürdeki bazı süreklilik teoremleri verelim.

Teorem 2.4. (2.1) sistemi Schur kararlı ($\omega(A) < \infty$) olmak üzere $\|B\| < \dfrac{\|A\|}{10\omega(A)}$ şartını sağlayan herhangi bir Bpertürbe matrisi için $A+B$ matrisi Schur kararlıdır, ayrıca

$$|\omega(A+B)-\omega(A)| < 4\omega^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}$$

eşitsizliği doğrudur (Akın ve Bulgak 1998).

Teorem 2.5. (2.1) sistemi Schur kararlı ($\omega(A)<\infty$) olmak üzere $\|B\| \le \dfrac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$ şartını sağlayan herhangi bir B pertürbe matrisi için A+B matrisi Schur kararlıdır, ayrıca

$$|\omega(A+B)-\omega(A)| \le 5\omega^{\frac{5}{2}}(A)\|B\|$$

eşitsizliği doğrudur (Bulgak ve Godunov 1988, Bulgak 1999).

Lemma 2.1. A matrisi Schur kararlı ((2.1) sistemi Schur kararlı) ve A+B matrisi de Schur kararlı ise simetrik pozitif tanımlı bir $C=I+B^*XA+A^*XB+B^*XB$ matrisi vardır (Duman 2008).

Örnek 2.1. $x(n+1)=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}x(n)$ sistemini ele alalım. $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$ matrisi için Lyapunov matris denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bu denklem sisteminin çözümü $H=\begin{pmatrix} 1.33391 & 0.112895 \\ 0.112895 & 1.17242 \end{pmatrix}$ bulunduğundan sistem Schur kararlı ve $\omega(A)=\|H\|=1.39197$ olarak hesaplanır. $B=\begin{pmatrix} 0.003 & -0.001 \\ 0.02 & -0.003 \end{pmatrix}$ pertürbe matrisi için Lyapunov matris denklemi,

$$\begin{pmatrix} 0.503 & -0.08 \\ 0.199 & 0.297 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.503 & 0.199 \\ -0.08 & 0.297 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bu denklem sisteminin çözümü$X = \begin{pmatrix} 1.33557 & 0.122181 \\ 0.122181 & 1.17059 \end{pmatrix}$ bulunduğundan sistem Schur kararlı ve ω(*A*+*B*) = 1.4005 dir.. Lemma 2.1. de varlığı garanti edilen (Lyapunov fark matris denklemini sağlayan) simetrik pozitif tanımlı *C* matrisi $C=\begin{pmatrix} 1.00219 & 0.00785812 \\ 0.00785812 & 0.997151 \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Teorem 2.6. *A* Schur kararlı bir matris ($\omega(A)<\infty$) olsun. $\|B\|<\sqrt{\|A\|^2+\dfrac{1}{\omega(A)}}-\|A\|$ şartını sağlayan *B* pertürbe matrisi için *A*+*B* Schur kararlı bir matris ve

$$\omega(A+B)\leq\frac{\omega(A)}{1-(2\|A\|+\|B\|)\|B\|\omega(A)}\ ;\ |\omega(A+B)-\omega(A)|\leq\frac{(2\|A\|+\|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1-(2\|A\|+\|B\|)\|B\|\omega(A)}$$

eşitsizlikleri doğrudur (Duman ve Aydın 2011).

İspat. Teoremin birinci kısmının ispatını Aydın ve *ark.* 2001 deki teorem 2 nin ispat tekniği adım adım uygulanarak elde edilmiştir. $\|B\|<\sqrt{\|A\|^2+\dfrac{1}{\omega(A)}}-\|A\|$ eşitsizliği,

$$\alpha = 1-(||B||^2+2||A||||B||)\omega(A)>0$$

eşitsiliğine denktir. $\alpha>0$ iken pertürbe edilmiş sistemin Schur kararlı olduğunu gösterelim. (2.4) sisteminin fundamental matrisi *Y*(*n*) ve ve *u*, *N* boyutlu vektör olmak üzere

$$(HY(n+1)u, Y(n+1)u)$$

formunu ele alalım. Buradan

$$(HY(n+1)u, Y(n+1)u) = (H(A+B)Y(n)u, (A+B)Y(n)u)$$

$$= ((A+B)^*H(A+B)Y(n)u, Y(n)u)$$

$$= (HY(n)u, Y(n)u) - (Y(n)u, Y(n)u) + \big((A^*HB + B^*HA + B^*HB)Y(n)u, Y(n)u\big)$$

elde edilir. $\alpha = 1 - (\|B\|^2 + 2\|A\|\|B\|)\omega(A)$ olduğundan

$$(HY(n+1)u, Y(n+1)u) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|H\|}\right)(HY(n)u, Y(n)u)$$

eşitsizliği bulunur. Bulunan eşitsizliğin sağ tarafı n için arka arkaya uygulandığında

$$(HY(n+1)u, Y(n+1)u) \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\|H\|}\right)^n (Hu, u)$$

eşitsizliği elde edilir. H pozitif tanımlı bir matris ve

$$n \to \infty, \|Y(n)\| = \|(A+B)^n\| \to 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $A+B$ matrisinin bütün özdeğerlerinin birim diskin içine düşmesini yani $|\lambda_i(A+B)| < 1$ ($i=1,2,...,N$) olmasını gerektirir. Böylece (2.4) sisteminin Schur kararlı olduğu gösterilmiş ve teoremin 1. kısmını ispatı tamamlanmış olur.

Teoremin 2. kısmının ispatı Duman ve Aydın 2011 de açık şekilde bulunduğundan burada ispatın 2. kısmı verilmemiştir.

Örnek 2.2. Karşılaştırma yapılırken kolaylık sağlaması açısından pertürbe matrisinin normu $\|B\|$ nin üst sınırını

- $\delta_1 = \dfrac{\|A\|}{10\omega(A)}$ (Teorem 2.4)

- $\delta_2 = \dfrac{1}{20\omega^{\frac{3}{2}}(A)}$ (Teorem 2.5)

- $\delta_3 = \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\omega(A)}} - \|A\|$ (Teorem 2.6),

ile

- A_i matrisi için pertürbe matrislerini B_i^k

ile, $\theta = |\omega(A+B) - \omega(A)|$ olmak üzere θ nın üst sınırlarını

- $\theta_1 = 4\omega^2(A)\frac{\|B\|}{\|A\|}$ (Teorem 2.4)

- $\theta_2 = 5\omega^{\frac{5}{2}}(A)\|B\|$ (Teorem 2.5)

- $\theta_3 = \frac{(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega^2(A)}{1-(2\|A\| + \|B\|)\|B\|\omega(A)}$ (Teorem 2.6)

olarak gösterelim.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.1 \\ 0.5 & -0.9 \end{pmatrix}$ alalım. $\omega(A_1) = 4.82986$, $\delta_1 = 0.0236208$, $\delta_2 = 0.00471051$, $\delta_3 = 0.0873943$ dır. Bu değerlere uygun pertürbe matrislerini $B_1^1 = \begin{pmatrix} 0.004 & 0 \\ 0 & -0.004 \end{pmatrix}$, $B_1^2 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & -0.02 \end{pmatrix}$ alalım. Buna göre $\omega(A_1 + B_1^1)$ $= 4.96652$, $\omega(A_1 + B_1^2) = 5.61529$ dir.

- $A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.01 & -0.25 \end{pmatrix}$ alalım. $\omega(A_2)= 1.46925$, $\delta_1= 0.0411262$, $\delta_2= 0.0280754$, $\delta_3=0.418365$ dur. Bu değerlere uygun pertürbe matrislerini

$B_2^1 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & -0.04 \end{pmatrix}$, $B_2^2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$ alalım. Buna göre $\omega(A_2 + B_2^1) =$ 1.55741, $\omega(A_2 + B_2^2) = 3.35874$ dir.

A	δ_1	δ_2	δ_3	B	θ	θ_1	θ_2	θ_3
A_1	0.0236208	0.00471051	0.0873943	B_1^1	0.13666	0.32716	0.212291	0.223132
				B_1^2	0.78543	1.6358	*	1.38088
A_2	0.0411262	0.0280754	0.418365	B_2^1	0.08816	0.571607	0.356183	0.116341
				B_2^2	1.88949	*	*	25.3962

Tablo 1. Farklı Schur kararlı A matrislerine, matrisin özelliği bozulmaksızın Teorem 2.4, Teorem 2.5 ve Teorem 2.6 ile verilen pertürbenin sınırlarını (δ_1, δ_2 ve δ_3), bu sınırlara uygun B pertürbe matrislerine karşılık Schur kararlılık parametreleri arasında gerçekleşen fark (θ) ve aynı pertürbe matrisleri için yine Teorem 2.4, Teorem 2.5 ve Teorem 2.6 ile verilen parametreler arasındaki farkın üst sınırlarını (θ_1, θ_2 ve θ_3) gösteren tablo

Tablo 1. de verilen Schur kararlı A_i (i =1, 2, 3) matrisleri için 2. 3. ve 4. sütundan anlaşılacağı üzere Teorem 2.4 (δ_1), Teorem 2.5 (δ_2) ve Teorem 2.6 (δ_3) nin izin verdiği maksimum pertürbeler görülmektedir. Görüldüğü gibi Teorem 2.4, Teorem 2.5 den ve Teorem 2.6, Teorem 2.4 ve Teorem 2.5 den daha fazla pertürbeye izin vermektedir. Mesela Schur kararlı A_2 matrisi için $A_2 + B_2^k$ matrisi Schur kararlı olacak şekilde pertürbe matrisinin normunun üst sınırları δ_1= 0.0411262, δ_2= 0.0280754 ve δ_3= 0.418365, yani A_2 matrisi için Teorem 2.4, Teorem 2.5 den ve Teorem 2.6, Teorem 2.4 ve Teorem 2.5 den daha fazla pertürbe yapılabilmektedir. δ_2 ye göre yapılan pertürbe B_2^1 matrisi için gerçekleşen değer θ = 0.08816 iken, Teorem 2.6 ile verilen sınır θ_3= 0.116341, Teorem 2.4 ile verilen sınır θ_1= 0.571607 ve Teorem 2.5 ile verilen sınır θ_2= 0.356183 olmaktadır. Burada θ_3 üst sınırı gerçekleşen θ değerine θ_1 ve θ_2 sınırından daha yakın olmaktadır.

$\delta_2 < \delta_1 < \|B\| < \delta_3$ olan B pertürbe matrisleri için Teorem 2.4 ve Teorem 2.5 şartları sağlanmadığından $\theta_1$ve θ_2 değeri, $\delta_2 < \|B\| < \delta_1 < \delta_3$ olan B pertürbe matrisleri için de Teorem 2.5 ün şartları sağlanmadığından θ_2 değeri hesaplanamamıştır. Bu durum Tablo 1. de * ile gösterilmiştir. Mesela B_2^2 matrisi için θ_1 ve θ_2 değeri hesaplanamazken θ_3 = 12.4998 olarak hesaplanmıştır.

Teorem 2.7. A, ω^*–Schur kararlı matris ($\omega(A) \le \omega^*$) olmak üzere

$$\|B\| \le \sqrt{\|A\|^2 + \frac{\omega^* - \omega(A)}{\omega^*\,\omega(A)}} - \| A \|$$

şartını sağlayan B pertürbe matrisi için A+B matrisi de ω^*–Schur kararlıdır (Duman ve Aydın 2011).

Örnek 2.3. $A = \begin{pmatrix} -0.7 & 4 \\ 0.01 & -0.3 \end{pmatrix}$ ve ω^*=10 olsun. $\omega(A)$= 63.436 > ω^* olduğundan A, ω^*–Schur kararsız matristir.

Örnek 2.4. $A=\begin{pmatrix} 0.1 & -0.03 \\ 0.04 & 0.2 \end{pmatrix}$ ve $\omega^{*}=10$ olsun. $\omega(A)= 1.04347 \le \omega^{*}$ olduğundan A, ω^{*}–Schur kararlı matristir. Ayrıca teorem 2.7 den $\|B\| \le 0.744442$ olacak şekilde Bpertürbe matrisleri için $A+B$ matrisi ω^{*}–Schur kararlıdır. Mesela $B=\begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{pmatrix}, \|B\| = 0.7 < 0.744442$ (teorem 2.7) alalım. Gerçekten $A+B=\begin{pmatrix} 0.8 & -0.03 \\ 0.04 & 0.9 \end{pmatrix}$ olup $\omega(A+B) = 5.23189$ olduğu görülür.

3. SONUÇLARIN k. MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİNE UYGULAMASI

3.1 Sonuçların k. mertebeden Lineer Fark Denklemlerine Uygulaması

Bu bölüm (Duman ve Aydın 2011) den alınmış ve yanlızca örneklendirilmiştir. (Duman ve Aydın 2011) de sabit katsayılı lineer fark denklem sistemleri için 2. bölümde yer alan teoremlerin, k.mertebeden lineer fark denklemlerine uygulaması yapılmıştır.

$$x(n+1) - a_0 x(n) - \dots - a_{k-1} x(n-k+1) = 0, n \geq 0 \tag{3.1}$$

k.mertebeden lineer fark denklemini ele alalım. (3.1) denklemi için

$$x(n-k+1) = y_1(n),$$

$$x(n-k+2) = y_2(n),$$

$$\dots$$

$$x(n) = y_k(n),$$

ve $y(n) = \begin{pmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \\ \vdots \\ y_k(n) \end{pmatrix}$ olsun. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$ olmak üzere (3.1) denklemini

$$y(n+1) = Cy(n), n \geq 0 \tag{3.2}$$

matris-vektör şeklinde yazabiliriz.

Böylece 2. bölümde (2.1) sisteminin Schur kararlılığının hassasiyeti üzerine verilen sonuçlar, kolaylıkla (3.1) k.mertebeden sabit katsayılı lineer fark denklemlerine uygulanabilir.

(3.1) denkleminin, yani (3.2) sisteminin pertürbe sistemi olan

$$z(n+1) = (C+D)z(n), \tag{3.3}$$

sistemini ele alalım. Burada $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_{k-1} & d_{k-2} & d_{k-3} & \dots & d_0 \end{pmatrix}$ dir.

$d = (d_{k-1}, d_{k-2}, \dots, d_1, d_0)$ ve $B_\gamma = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k) | \|x\| < \gamma\}$ olmak üzere B_γ kümesine n–boyutlu top denir (Roger and Charles, 1999).

Şimdi sistem (3.2) için teorem 2.6 nın bir varyantını verelim.

Teorem 3.1. (3.2) sistemi Schur kararlı (C kompanyan matrisiSchur kararlı). Eğer$d \in B_{\gamma(C)}$, ise pertürbe edilmiş (3.3) sistemi Schur kararlıdır, burada $\gamma(C) = \sqrt{\|C\|^2 + \frac{1}{\omega(C)}} - \|C\|$ dir (Duman ve Aydın 2011).

Not 3.1. Dpertürbe matrisi için Schur kararlılığın bir bölgesi olan $B_{\gamma(C)}$topu,1 boyutlu ise$B_{\gamma(C)}$ bir aralık, 2 boyutlu ise $B_{\gamma(C)}$ bir disk ve 3 boyutlu ise $B_{\gamma(C)}$ bir küre olur.

Şimdi sistem (3.2) için teorem 2.8 in bir sonucu olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.(3.2) sistemiω^*–Schur kararlı (Ckompanyan matrisiω^*–Schurkararlı). Eğer $\delta_3^* = \sqrt{\|C\|^2 + \frac{\omega^* - \omega(C)}{\omega^* \omega(C)}} - \|C\|$ ve $d = (d_{k-1}, d_{k-2}, \ldots, d_1, d_0)$ olmak üzere $d \in B_{\delta_3^*}$, ise (3.3) pertürbe sistemi de ω^*–Schur kararlıdır (Duman ve Aydın 2011).

Örnek3.1. $x_{n+1} - \frac{1}{100}x_n = -\frac{5}{10}x_{n-1} - \frac{17}{100}x_{n-2}, \ n > 0,$

(3.4)

fark denklemini ele alalım. C kompanyan matrisi için, kolayca

$$\omega(C) = \|H\| = 4.2824$$

olduğu hesaplanabilir. $\omega(C) < \infty$ olduğundan (3.4) denklemi Schur kararlıdır. $\omega_1^* = 15$ ve $\omega_2^* = 60$ olarak alalım. Böylece

- $\gamma = \gamma(C) = 0.0997427$
- $\delta_{3_1}^* = 0.0721178,$
- $\delta_{3_2}^* = 0.0928954,$
- $d = (d_2, d_1, 0),$

$\Rightarrow \|d\| = \sqrt{d_2^2 + d_1^2} < \gamma(C) \Rightarrow d_2^2 + d_1^2 < \gamma^2,$

- $B_\gamma = \{(d_2, d_1, 0) \mid \|d\| < 0.0997427\}$
- $B_{\delta_{3_1}^*} = \{(d_2, d_1, 0) \mid \|d\| < 0.0721178\},$
- $B_{\delta_{3_2}^*} = \{(d_2, d_1, 0) \mid \|d\| < 0.0928954\}.$

hesaplarız.

- $d = (0.06, 0.06, 0) \in B_\gamma$ için $\omega(C + D) = 3.8128,$

- $d = (0.04, 0.04, 0) \in B_{\delta_{3_1}^*}$ için , $\omega(C + D) = 3.94439 \leq \omega_1^* = 15$

şeklinde elde edilir. Böylece teorem 3.1 ve 3.2 nin sağlandığı gösterilir.

REFERANSLAR

1. Akın Ö. ve Bulgak H., *Lineer fark denklemleri ve kararlılık teorisi*, Selçuk Üniv. Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi, No: 2, Konya 1998.

2. Aydın K., Bulgak H. And Demidenko G. V.,*Numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients*, Siberian Math. J., 41, No: 6, 1005–1014, Novosibirsk, 2000.

3. Aydın K. ,Bulgak H. andDemidenko G.V., *Continuity of numeric characteristics for asymptotic stability of solutions to linear difference equations with periodic coefficients*, Selcuk Journal of Applied Mathematics, vol.2, Num:2, Konya, 2001.

4. Aydın K.,*Sabit katsayılı Schur kararlı fark denklemlerin çözümünün değerlendirilmesi*, ZKÜ, İntegral Geometri ve Ters Problemler Çalıştayı, 08–09 Mayıs 2004

5. Bulgakov A. Ya. andGodunov S. K.,*Circle dichotomy of the matrix spectrum*, Siberia Math. J., 29, No: 5, 59–70, Novosibirsk, 1988.

6. Bulgak H.,*Pseudoeigen values, spectra lportrait of a matrix and their connections with differentcriteria of stability*, Error Control and Adaptivity in Scientific Computing, 95-124, 1999.

7. Bulgak H. And Eminov D.,*Computer dialogue system, MVC*, Selçuk Journal Applied Mathematics, 2, 17–38, 2001.
8. Driver R. D.,Ladas G., and Vhalos P.N., *Asymptotic Behavior of a Linear Delay Difference Equation*,Proc. Am. Math. Soc., 115(1), 105–112, 1992.

9. Duman A.,*Periyodik Lineer Fark Denklem Sistemlerinin Schur Kararlılığının Hassasiyeti*, Doktora Tezi, Selçuk Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2008.

10. Duman A. and Aydın K., *Someresults on thesensitivity of Schur stability of linear difference equations with constant coefficients* ,Konuralp Journal of Mathematics, 2 (2), 22-34, 2014.

11. Duman A. and Aydın K., *Sensitivity of linear difference equation systems with constant coefficients,* Scientific Researchand Essays, 6 (28), 5846-5854, 2011.

12. Elaydi N.,*An introduction to difference equations*, Springer, 1999.

13. Roger AH., Charles RJ.,*Matrix analysis. Cambridge University Press*, Cambridge, 1999.

14. Rohn J.,*Positive definiteness and stability of interval matrices*,Siam Journal on Matrix Analysis and Applications, 15 (1), 175–184, 1994.

15. Van Loan C.,*How near is a stable matrix to unstable matrix?*, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 47, 1985.

16. Voicu M. and Pastravanu O., *Generalized matrix diagonal stability and linear dynamical systems*, Linear Algebra and its Applications, 419, 299–310, 2006.

17. Wang K. N. and Michel A. N.,*On sufficient conditions for the stability of interval matrices*, Systems & Control Letters, 20 (5), 345–351, 1993.

18. Wilkinson J. H.,*The algebrai ceigen value problem*, Clarendom Pres Oxford, 1965.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Aydın'da ailemin tek çocuğu olarak dünyaya geldim.Atatürk İlkokulundan sonra Yenimahalle ortaokulu ve Nazilli lisesinde eğitim gördüm..Eskişehir Anadolu Üniversitesinden 1999 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Matematik öğretmeni olarak Milli Eğitim Bakanlığında göreve başladım.Su anda Övgü Terzibaşıoğlu Anadolu lisesinde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.Evli ve bir çocuk sahibiyim.