YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASINDA DİAMOND-α TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Mustafa EKER

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. Fatma Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Refet POLAT

Prof.Dr. Cüneyt GÜZELİŞ

Enstitü Müdürü

ABSTRACT

DIAMOND ALPHA DYNAMIC INEQUALIES ON TIME SCALES

EKER, Mustafa

MSc in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ahmet YANTIR

August 2016, 93 pages

Inequalities are very practical part of mathematics. They give us an idea about the size of the quantities and provide an accurate estimate. In many areas of applied mathemetics they also provide us a knowledge about the location of the things. One of the most practical part of the inequalities that it is usually far easier to satisfy assumptions involving inequalities that it is for those involving equations. When derivatives and inequalities are combined, we refer to them as “differential inequalities” and they are vey useful in the analysis of solutions to nonlinear differential equations.

In this thesis, diamond–α Opial dynamic inequalities are considered. Also Diamond-α forms of the Hölder, Cauchy-Schwarz inequalities which are impottant inequalities of mathematical analysis, Diamond-α Hardy type inequalities and Diamond-α Jensen inequality are stated and proved. Finally several generalizations on Diamond-α Opial Inequalities are presented.

Keywords: Time Scale, Diamond–α Derivative, Diamond–α Integral, Dynamic Inequalities, Opial Inequalities

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA DİAMOND ALFA TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Mustafa EKER
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr.Ahmet YANTIR
Ağustos 2016,93 sayfa

Eşitsizlikler matematik biliminin çok önemli konularından biridir.Bize herhangi bir niceliğin büyüklüğü hakkında fikir verir ve hassas tahmin imkanı sağlar.Uygulamalı matematiğin birçok alanında niceliklerin yerleri hakkında bilgi sabibi olmamızı sağlar.Eşitsizliklerin en önemli kullanışlılıklarından biri eşitsizlik içeren şartlarını sağlamanın eşitlik içeren şartlarını sağlamaktan çok daha kolay olmasıdır.Eşitsizlikler ve türev birleştirildiğinde elde edilen yapıya “diferansiyel eşitsizlik” denir ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analizlerinde çok faydalıdır.

Bu tezde, diamond–α Opial dinamik eşitsizlikleri ele alınmıştır. Ayrıca matematiksel analizin en önemli eşitsizliklerinden olan Hölder, Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinin Diamond-α halleri, Diamond-α Hardy tipi eşitsizlikler ve Diamond-α Jensen eşitsizlikleri ispatları ile verilmiştir. Son olarak literatürde çalışılmış olan Opial tip eşitsizliklerin Diamond-α halleri ele alınmış ve çeşitli genellemeler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Zaman Skalası, Diamond–α Türev, Diamond–α İntegral, Dinamik Eşitsizlikler, Opial eşitsizlikler

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Ahmet YANTIR ayrıca bana daima destek olan eşim Tuba EKER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Mustafa EKER
İzmir,2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "ZAMAN SKALASINDA DİAMOND ALFA TİPİ EŞİTSİZLİKLER" adlı çalışmanın,tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu,bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

04/08/2016

Mustafa EKER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar
$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$	İrrasyonel Sayılar
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	İleri sıçrama fonksiyonu
f^{Δ}	Hilger (Delta) türev
f^{∇}	Nabla türev
Δf	İleri fark operatörü
∇f	Geri Fark Operatörü

C_{rd} Sağda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

C_{ld} Solda yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

$f^{\Diamond\alpha}$ Diamond–α türev

1 GİRİŞ

Eşitsizlikler matematik biliminin çok kullanılışlı konularından biridir. Bize herhangi bir niceliğin büyüklüğü hakkında fikir verir ve hassas tahmin imkanı sağlar.Uygulamalı matematiğin birçok alanında niceliklerin yerleri hakkında bilgi sabibi olmamızı sağlar.Eşitsizliklerin en önemli kullanışlılıklarından biri eşitsizlik içeren şartlarını sağlamanın eşitlik içeren şartlarını sağlamaktan çok daha kolay olmasıdır.

Eşitsizlikler ve türev birleştirildiğinde elde edilen yapıya "diferansiyel eşitsizlik" denir ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin analizlerinde çok faydalıdır.

Opial eşitsizlikleri Opial'ın 1960 yılında yazmış olduğu makaleye dayanır.[15] Bu çalışmada Opial,$f \in C^1[0,h]$, $f(0) = f(h) = 0$ ve $(0,h)$ üzerinde $f > 0$ şartını sağlayan f fonksiyonu için

$$\int_0^h |f(t)f'(t)|dt \leq \frac{h}{4}\int_0^h |f'(t)|^2 dt, \tag{1.1}$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Burada $\frac{h}{4}$ en uygun seçim olarak sunulmuştur.

Olech (1.1) ile verilen eşitsizliği $f(0) = 0$ ve f, $[0,h]$ aralığında mutlak sürekli olması koşulları altında,

$$\int_0^h |f(t)f'(t)|dt \leq \frac{h}{2}\int_0^h |f'(t)|^2 dt,$$

şeklinde geliştirmiştir.[14]

Opial eşitsizlikler ayrık halde de literatürde sıkça çalışılmıştır. Çalışmalar Beesack [3], Lasota [13] ve Wong'un [24] makaleleri ile başlamış olup bir çok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Lasota çalışmasında $\{x_i\}_{i=0}^N$, $x_0 = x_N = 0$ şartını sağlayan bir dizi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{N-1} |x_i \Delta x_i| \leq \frac{1}{2}\left[\frac{N+1}{2}\right]\sum_{i=1}^{N-1} |\Delta x_i|^2 ,$$

eşitsizliğini ispatlamıştır. Burada Δ ileri fark operatörü ve $[\cdot]$ tam değer fonksiyonudur. Opial tipi eşitsizliklerin sürekli ve ayrık halleri hakkında daha fazla bilgi [1] ve [17-23] çalışmalarında bulunabilir.

Zaman skalası kavramını ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger doktora teziyle tanıtmış [10] ve Aulbach ve Hilger tarafından bilim dünyasına sunulmuştur. Zaman skalası, ''Bilinmeyen fonksiyonun yeni türevlerini içeren diferensiyel denklemler tanımlayarak ve yeni kalkülüsü kullanarak alıştığımız diferensiyel denklemler teorisini ve diskrit denklemler (fark denklemleri) teorisini birleştiren ve genelleştiren bir denklemler (dinamik denklemler) teorisi geliştirilebilir vurgusu yapılarak oluşturulmuştur.[4,6,11] Kısacası zaman skalası kavramı altında yatan ilk amaç sürekli analiz ile ayrık analizi birleştirmektir.

Yukarıda verilmiş olan Opial ve Lasato tipi eşitsizlikler zaman skalasında dinamik eşitsizlikler olarak tek çatı altında toplanabilir.

Bohner ve Kaymakçalan [5]$f \in C_{rd}^1([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ ve $f(0) = 0$ şartları altında

$$\int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right| \Delta t \leq h \int_0^h (f^\Delta)^2(t) \Delta t \,, \tag{1,2}$$

dinamik eşitsizliğinin sağlandığını ispatlamışlardır. Bu eşitsizlik hem ayrık hem de sürekli halleri kapsamaktadır. Zaman skalası üzerinde Opial tipi eşitsizlikler ve uygulamaları Saker, B.Karpuz, Zhao ve arkadaşları tarafından verilmiştir. [12,22,25]

(1,2) nin ∇ türevli hali de

$$\int_0^h |(f^2)^\nabla(t)| \nabla t \leq h \int_0^h (f^\nabla)^2(t) \nabla t$$

Bohner ve Kaymakçalan [5] tarafından verilmiştir.

2 ZAMAN SKALASINDA ANALİZ

2.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde ilerideki çalışmalarda temel teşkil edecek olan zaman skalasının tanımı, delta türevi, delta integrali ve temel özellikleri ile nabla türevi, nabla integrali ve temel özellikleri hakkında bilgi verilecektir.

Tanım 2.1. Zaman skalası (Time scale) reel sayıların boş olmayan kapalı keyfi bir alt kümesidir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

kümeleri sırasıyla, reel sayılar, tam sayılar doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar olarak adlandırılır ve zaman skalasına örnek olarak verilebilirler. Farklı olarak $[0,1]$, $[2,3]$, $\mathbb{N} \cup [0,1]$ ve Cantor kümesi gibi kapalı alt kümeler de birer zaman skalasıdır.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$$

kümeleri zaman skalası değildir. Bir T zaman skalası, reel sayıların standart topolojisine sahiptir. T üzerinde fdelta türevi

(i) Eğer T = R ise $f^{\Delta} = f'$;

(ii) Eğer T = Z ise $f^{\Delta} = \Delta f$; ¸seklinde tanımlanır.

(i) deki türev bilinen reel sayılardaki adi türevdir. (ii) deki türev ise, tam sayılar üzerindeki fark türevidir.

Tanım 2.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

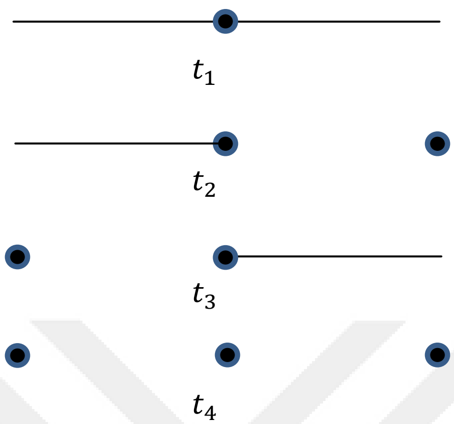
$$\sigma(t) \coloneqq \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$$

ve $\rho: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) \coloneqq \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$$

ile tanımlanır. Eğer *t* noktası, $\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum noktası ise $\sigma(t) = t$, *t* noktası $\mathbb{T}$ nin minimum noktası ise $\rho(t) = t$olarak tanımlanır. Eğer $\sigma(t) > t$ ise *t* noktasına*sağ saçılmış nokta*, eğer $\rho(t) < t$ise *t* noktasına *sol saçılmış nokta* denir. *t*noktası hem sağ saçılmış nokta hem de sol saçılmış nokta ise *ayrık(izole) nokta* adını alır. $t < sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise *t* noktasına *sağ yoğun nokta*, eğer $t > inf\mathbb{T}$ ve

$\rho(t) = t$ ise t noktasına *sol yoğun nokta* denir. Hem sağ yoğun hem de sol yoğun noktalara *yoğun nokta* adı verilir. Bu nokta tanımları¸aşağıdaki gibi gösterilebilinir:



t_1: yoğun
$\rho(t) = t = \sigma(t)$

t_2: sol-yoğun, sağ-saçılmış
$\rho(t) = t < \sigma(t)$

t_3: sol saçılmış, sağ-yoğun
$\rho(t) < t = \sigma(t)$

t_4: saçılmış
$\rho(t) < t < \sigma(t)$

Tanecik fonksiyonu;

μ: $\mathbb{T} \longrightarrow \infty$

$t \longrightarrow \mu(t) \coloneqq \sigma(t) - t$biçiminde tanımlanır.

$\mathbb{T}$kümesinden türetilen $\mathbb{T}^k$ kümesi

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - max\mathbb{T}, & max\mathbb{T} < \infty \; ve \; max\mathbb{T} sol \; saçılımlı \; ise \\ \mathbb{T}, & diğer \; durumlar \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. (Bazı fonksiyonların zaman skalası üzerindeki türevi, tüm zaman skalaları üzerindeki her noktada özellikle zaman skalasının sonlu en küçük üst sınır noktasında tanımlı olmayabilir. Bununla birlikte, $\mathbb{T}^k$ nın tüm noktalarında zaman skalası türevi tanımlıdır. İleride vereceğimiz zaman skalasında türev için $\mathbb{T}^k$ kümesine ihtiyacımız olacaktır)

Ayrıca $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $f^\sigma = f \; o \; \sigma$ şeklindeki bileşke fonksiyondur.

Örnek 2.3. $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerine σ, ρ, μ operatörlerini uygulayalım.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

$$\rho(t) \coloneqq \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

$\rho(t) = t = \sigma(t)$ olduğundan ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için sağlandığından $\mathbb{R}$ tüm noktalarında yoğundur ve her zaman $\mu(t) = 0$ dır.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\ \{t+1, t+2, \dots, \infty\} = t+1$$

$$\rho(t) \coloneqq \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\ \{-\infty, \dots, t-2, t-1\} = t-1$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (t+1) - t = 1$$

ve $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\rho(t) < t < \sigma(t)$ olduğundan $\mathbb{Z}$ tüm noktalarında saçılımlıdır ve her zaman $\mu(t) = 1$ dir.

Yukarıdaki iki durumda da tanecik fonksiyonu sabittir. Tanecik fonksiyonu zaman skalasında türevlerde kullanılır. Sabit ya da değişken olması farklı sonuçlar oluşturacağı için tanecik fonksiyonunun zaman skalasında ayrı bir önemi vardır.

Örnek 2.4. Aşağıda tanımlanan her bir$\mathbb{T}$ zaman skalası için σ, ρ, μ operatörleri aşağıdaki gibi bulunur.

(i) $t \in \mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ olsun. $t = 2^n$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\ \{2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots \infty\} = 2^{n+1} = 2.2^n = 2t$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\{-\infty, \dots, 2^{n-2}, 2^{n-1}\} = 2^{n-1} = \frac{1}{2}.2^n = \frac{t}{2}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = 2t - t = t$$

(ii) $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ olsun. $t = \frac{1}{n}$ için $n = \frac{1}{t}$ olur.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\ \{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots\} = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{t}{1-t}$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\left\{\dots, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right\} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} = \frac{t}{1+t}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \frac{t}{1-t} - t = \frac{t^2 + t - 1}{1-t}$$

(iii) $\mathbb{T} = \left\{\sqrt[3]{n} : n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ olsun. $t = \sqrt[3]{n}$ için $n = t^3$ olur.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\left\{\sqrt[3]{n+1}, \sqrt[3]{n+2}, \ldots\right\} = \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{t^3+1}$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\left\{\ldots, \sqrt[3]{n-2}, \sqrt[3]{n-1}\right\} = \sqrt[3]{n-1} = \sqrt[3]{t^3-1}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \sqrt[3]{t^3+1} - t$$

(iv) $\mathbb{T} = \{n^3 : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ olsun. $t = n^3$ için $n = \sqrt[3]{t}$ olur.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\{(\mathrm{n}+1)^3, (\mathrm{n}+2)^3, \ldots\} = (\mathrm{n}+1)^3 = (\sqrt[3]{t}+1)^3$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\{\ldots, (\mathrm{n}-2)^3, (\mathrm{n}-1)^3\} = (\mathrm{n}-1)^3 = (\sqrt[3]{t}-1)^3$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (\sqrt[3]{t}+1)^3 - t$$

2.2 Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.6. Kabul edelim ki; $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon ve $t \epsilon \mathbb{T}^k$olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ ve t'nin bir $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ $(\delta > 0)$ komşuluğunda ki her s elemanı için

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right]\right| - f^{\Delta}(t).\,[\sigma(t) - s] \leq \varepsilon.\,|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta}(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Bununla birlikte $\forall t \epsilon \mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta}(t)$ türevi mevcut ise f'ye $\mathbb{T}^k$ da delta türevlenebilirdir denir.

$$f^{\Delta}: \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu f'nin $\mathbb{T}^k$ da ki türevi (delta türevi) olarak adlandırılır.

Örnek 2.7. f^{Δ} nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

Bir fonksiyonun iyi tanımlılığını kullanarak ispatımızı yapalım. Bunun için f nin bir t noktasında delta türevi olduğunu kabul edelim. O zaman t nin bir U komşuluğu ve $\varepsilon > 0$ için f fonksiyonu delta türeve sahip olduğundan,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - \tilde{f}^{\Delta}(t).\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.\left|\sigma(t) - s\right|, \quad (\sigma(t) \neq s)$$

ve

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t).\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.\left|\sigma(t) - s\right|, \quad (\sigma(t) \neq s)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerden hareketle,

$$\left|f^{\Delta}(t) - \tilde{f}^{\Delta}(t)\right| = \left|f^{\Delta}(t) - \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \tilde{f}^{\Delta}(t)\right|$$

$$\leq \left|\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f^{\Delta}(t)\right| + \left|\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \tilde{f}^{\Delta}(t)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \varepsilon$$

olur. Bu da $f^{\Delta}(t) = \tilde{f}^{\Delta}(t)$ demektir. O halde delta türevi iyi tanımlıdır.

Örnek 2.8. Çoğu zaman $f^{\Delta}(t), t \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{T}^{k}$ noktalarında da tanımlanabilir. Böyle noktalarda Tanım 2.6 nın aynısı kullanılabilir.

$$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{T}^{k}$ noktalarında herhangi $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için türeve sahiptir. $t \in \mathbb{T}\backslash\mathbb{T}^{k}$noktası maksimum ve sol yayılmıştır. Yani

$$\begin{array}{cc} -\cdot & (\cdot) \\ \tilde{t} & t \end{array}$$

şeklinde bir nokta olup $\sigma(t) = t$ dir.

O halde $s \in U = \left(\frac{t+\tilde{t}}{2}, \frac{3t-t^{2}}{2}\right)$ için bu aralıkta sadece t sayısı vardır.

Böylece

$$\left|\left[f\left(\sigma(t) - f(s)\right)\right] - \alpha.(\sigma(t) - s)\right| = |f(t) - f(t) - \alpha.(t-t)| = 0$$
$$\leq \varepsilon.|t-t| = \varepsilon.0 = 0$$

olup, $\forall\varepsilon > 0$ için bu noktada delta türev keyfi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısıdır.

Örnek 2.9. Eğer,

(i) $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \epsilon\ \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ şeklindeyse,

$$f^{\Delta}(t) = 0$$

dır. Gerçekten delta türevin tanımından, $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$|f((\sigma(t)) - f(s) - 0.(\sigma(t) - s)| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

olup, $\forall s \in \mathbb{T}$ için yukarıdaki eşitsizlik doğrudur.

(ii) $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \epsilon\ \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ olarak tanımlanırsa,

$$f^{\Delta}(t) = 1$$

yazılır. Gerçekten de bu durumda $\varepsilon > 0$ için,

$$\left|f\left(\sigma(t)\right) - f(s) - 1.(\sigma(t) - s)\right| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)|$$

$= 0 \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$dir

Örnek 2.10.

(i) $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f(t) = t^2$ olarak tanımlanan fonksiyonun $\forall t \in \mathbb{T}$ için delta türevini bulalım.

$\forall\varepsilon > 0, \forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon),\ \ \sigma(t) \neq s$ için;

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t).[(\sigma(t)-s)]\right|=\left|(\sigma^2(t)-s^2)-f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|$$
$$\leq \varepsilon.|\sigma(t)-s|=|\sigma(t)-s|.\left|(\sigma(t)-s)-f^{\Delta}(t)\right|\leq \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$
$$=\left|(\sigma(t)-s)-f^{\Delta}(t)\right|\leq \varepsilon$$

dur. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan mutlak değer özelliğinden $f^{\Delta}(t)=\sigma(t)+t$ olarak bulunur

(ii) $\forall t\in\mathbb{T}$ için, $t>0$ olmak üzere,$g(t)=\sqrt{t}$ fonksiyonunun delta türevini bulalım.

$\forall t\in\mathbb{T}$ için, $t>0$ olmak üzere, $g(t)=\sqrt{t}$ fonksiyonu tanımlandığına göre $\forall\varepsilon>0$ için uygun $\delta>0$ ve

$$g^{\Delta}(t)=\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{\sigma(t)}}$$

için

$$\left|\sigma^2(t)-s^2-\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{\sigma(t)}}.(\sigma(t)-s)\right|=|\sigma(t)-s|\left|\frac{1}{\sqrt{\sigma(t)}+\sqrt{s}}-\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{\sigma(t)}}\right|$$

$$\leq \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$

yazılır. Buradan

$$g^{\Delta}(t)=\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{\sigma(t)}}$$

olur.

Örnek 2.11. Tanım 2.6.yardımı ile $t\in\mathbb{T}^k(t\neq\min\mathbb{T})$ için,$g(t)=t<\sigma(t)$ nin sağlandığını, fakat σ sıçrama operatörünün t de delta türevinin olmadığını gösterelim.

$\forall\varepsilon > 0$ için$\exists\delta > 0$ vardır ki $s \in U = (t-\delta, t+\delta)$ olduğunda

$$\left|\left(\sigma(\sigma(t)) - \sigma(s)\right) - \sigma^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$

olur. Ancak $s \in (t-\delta, t]$ise

$$\left|\left(\sigma(\sigma(t)) - \sigma(s)\right) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$

ifadesinde $\sigma(s) = s \to t$ olur. $s\epsilon[t, t+\delta)$ ise $\sigma(s) = s \to \sigma(t) > t$ olur. Böylece; $\sigma^{\Delta}(t)$ değeri, sağdan ve soldan yaklaşıldığında farklı değerler aldığından $t \in \mathbb{T}^{k}(t \neq \min\mathbb{T})$ için $\sigma(t)$ nin delta türevi olmadığını bulmuş oluruz..

Teorem 2.11. Kabul edelim ki; $f:\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve$t \in \mathbb{T}^{k}$ olsun. O zaman;

(i) f, t de türevlenebilir ise f, t de süreklidir.

(ii) f, t de sürekli ve t sağ yayılmış ise o zaman f, t de

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

şeklinde türevlenebilir.

(iii) Eğer, t sağ yoğun ise f , t de türevlenebilir olması ancak ve ancak,

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limitinin sonlu olması ile mümkündür. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

dir.

(iv) f, t de türevlenebilir ise$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$dir.

İspat: (i). Kabul edelim ki f, t de türevlenebilir olsun. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan $\varepsilon \in (0,1)$ alalım ve ε^* sayısını,

$$\varepsilon^* = \varepsilon.\left[1 + \left|f^{\Delta}(t) + 2\mu(t)\right|\right]^{-1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\varepsilon^* \in (0,1)$ dir. Tanım 2.6.ya göre $\forall s \in U$ için,

$$\left|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - [\sigma(t) - s].f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon^*.|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. Bundan dolayı $\forall s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(s)| &= \Big|\left\{f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t).[\sigma(t) - s]\right\} \\
&\quad - \left\{f\big(\sigma(t)\big) - f(t) - \mu(t).f^{\Delta}(t)\right\} + (t - s).f^{\Delta}(t)\Big| \\
&\leq \varepsilon^*.|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*.\mu(t) + |t - s|.f^{\Delta}(t) \\
&\leq \varepsilon^*.\left[\mu(t) + |t - s| + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right] \\
&\leq \varepsilon^*.\left[1 + \left|f^{\Delta}(t)\right| + 2\mu(t)\right] \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

yazılır. Bu da f nin t de sürekli olduğunu gösterir.

(ii) Varsayalım ki f, t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış nokta olsun. Süreklilikten

$$\lim_{s \to t} \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\mu(t)}$$

dir. Buradan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall s \in U$ için,

$$\left[\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\mu(t)}\right] \leq \varepsilon$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. Dolayısıyla $\forall s \in U$ için,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}.\sigma(t) - s\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

gerçeklenir. Bunun anlamı

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}$$

demektir.

(iii) Farzedelim ki f, t de türevlenebilir. t sağ yoğun ve $\varepsilon > 0$ verilsin.f, t noktasında türevlenebilir olduğundan, $\forall s \in U$ için,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t).[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. $\forall s \in U$ için$\sigma(t) = t$ olduğundan,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t).[t - s]\right| \leq \varepsilon.|t - s|$$

yazılır. Burada $s \in U, t \neq s$ olduğundan yukarıda ki eşitsizliğin her tarafını $|t - s|$ ye bölersek

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon$$

olduğunu görürüz. Bu da,

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

eşitliğini verir.

(iv) Eğer $\sigma(t) = t$ ise

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

dır. Ayrıca

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer $\sigma(t) > t$ ise o zaman (ii) den

$$f\big(\sigma(t)\big) = f(t) = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t) = f(t) + \mu(t).\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$
$$= f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$$

olur ki bu da (iv) ispatını tamamlar.■

Örnek 2.12. Teorem 2.11 in (iii) ifadesinin tersini ispat edelim. Kabul edelim ki $t \in \mathbb{T}^k$ sağ yoğun olsun. Eğer

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu ise f, t de türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

$t \in \mathbb{T}^k$ sağ yoğun ve

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = \alpha(t) < \infty$$

olsun. O zaman $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır. Öyle ki $|t-s| < \delta$ olduğunda

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \alpha(t)\right| \leq \varepsilon$$

veya

$$\big||f(t)-f(s)| - \alpha(t).(t-s)\big| \leq \varepsilon.|t-s|$$

yazılabilir. $\alpha(t) = t$ olduğundan $\alpha(t) = f^{\Delta}(t)$bulunur.

Örnek 2.13. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarına bakalım.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise Teorem 2.11 (iii) den $t\epsilon\mathbb{R}$ için

$$f' = \lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f^{\Delta}(t)$$

limitinin var olması delta türevlenebilir olduğunu ifade eder. O halde f nin delta türevi

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'$$

olarak bulunur.

(ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de delta türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1)-f(t)}{1} = f(t+1)-f(t) = \Delta f(t)$$

Örnek 2.14. Teorem 2.11 yardımıyla $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımları kullanarak $f^{\Delta}(t)$ yi bulalım.

(i) $f(t) = \sigma(t)$, $\mathbb{T} := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, $t \in \mathbb{T}\backslash\{0\}$ için her nokta izole olduğundan sağ yayılmıştır.

$$\sigma(t) = \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} = \frac{t}{1-t}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \frac{t^2}{1-t}$$

$$\sigma\big(\sigma(t)\big) = \frac{\frac{1}{1-t}}{1 - \frac{t}{1-t}} = \frac{t}{1-2.t}$$

olur. Teorem 2.11 in (ii) kısmından,

$$\sigma^{\Delta}(t) = \frac{\sigma(\sigma(t)) - \sigma(t)}{\mu(t)} = \frac{\frac{t}{1-2.t} - \frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}} = \frac{t}{1-2.t}$$

bulunur. Özel olarak t=0 için

$$\sigma^{\Delta}(t) = \lim_{s\to 0} \frac{f(0) - f(s)}{0 - s} = \lim_{s \to 0} \frac{\sigma(s)}{s} = \frac{\frac{s}{1-s}}{s} = 1$$

olur.

(ii) $f(t) = t^2, \mathbb{T} := \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$, $t \in \mathbb{T}$ kümesine ait her nokta izole olup, Teorem 2.11 (ii) den

$$\sigma(t) = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \sqrt{t^2+1} - t$$

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

$$=\frac{f\left(\sqrt{t^2+1}\right)-f(t)}{\sqrt{t^2+1}-t}=\frac{t^2+1-t^2}{\sqrt{t^2+1}-t}$$

$$=t+\sqrt{t^2+1}$$

bulunur.

(iii) $f(t)=t^2, \mathbb{T}:=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{N}_0\right\},\ t\in\mathbb{T}$ her noktada izole olup Teorem 2.11 (ii) den

$$\sigma(t)=\frac{2t+1}{2}$$

$$\mu(t)=\sigma(t)-t\ =\frac{2t+1}{2}-t=\frac{1}{2}$$

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2-t^2}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{t^2+t+\frac{1}{4}-t^2}{\frac{1}{2}}=2t+\frac{1}{2}$$

dir.

(iv) $f(t)=t^3, \mathbb{T}:=\mathbb{N}_0^{\frac{1}{3}}=\left\{\sqrt[3]{n}:n\in\mathbb{N}_0\right\},\ t\in\mathbb{T}$, her nokta izole olup Teorem 2.11 (ii) den

$$\sigma(t)=\sqrt[3]{t^3+1}$$

$$\mu(t)=\sigma(t)-t$$

$$=\sqrt[3]{t^3+1}-t$$

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{\left(\sqrt[3]{t^3+1}\right)^3 - t^3}{\sqrt[3]{t^3+1} - t}$$

$$= (t^3+1)^{\frac{2}{3}} + (t^3+1)^{\frac{1}{3}}.t + t^2$$

olarak bulunur.

Teorem 2.15. Kabul edelim ki; $f, g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ de türevlenebilir olsun. Bu durumda

(i) $f + g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, t de türevlenebilir ve $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ dir.

(ii) $\forall \alpha$ sabiti için $\alpha f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t de türevlenebilir ve $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha . f^{\Delta}(t)$dir.

(iii) $f.g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t de türevlenebilir ve

$$(f.g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t).g(t) + f(\sigma(t)).g^{\Delta}(t)$$

$$= f(t).g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t).g(\sigma(t))$$

dir.

(iv) Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$, t de türevlenebilir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t).f(\sigma(t))}$$

dir.

(v) Eğer $f(t).f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$, t de türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki; $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ de türevlenebilir olsunlar.

(i) $\varepsilon > 0$olsun. Bu durumda, $\forall s \in U_1$ için ($f$nin delta türevlenebilirliğinden),

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s|$$

ve$\forall s \in U_2$ için (g nin delta türevlenebilirliğinden),

$$\left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t, U_1 ve U_2 komşulukları vardır. $U = U_1 \cap U_2$ olsun. O zaman tüm

$s \in U$için

$$\left|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - [f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)].(\sigma(t) - s)\right|$$

$$= \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right|$$

$$\leq \left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| + \left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s| + \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s|$$

$$= \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

yazılabilir. Böylece $f + g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, t de türevlenebilir ve t de

$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ sağlanır.

(ii) f delta türevlenebilir olduğundan tanımdan $\forall \varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır ki $\alpha \neq 0$ için

$$\left|f\big(\sigma(t)\big)-f(s)-f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|\leq\frac{\varepsilon}{|\alpha|}.|\sigma(t)-s|$$

yazılabilir. Türevlenebilir iki fonksiyonun çarpımının delta diferensiyellene-bilirliğinden (Burada α yı sabit bir fonksiyon gibi düşünebiliriz.)

$$\left|(\alpha f).\big(\sigma(t)\big)-(\alpha f)(s)-(\alpha f)^{\Delta}(t).\big(\sigma(t)\big)-s\right|$$

$$\begin{aligned}
&=\left|\alpha\big(\sigma(t)\big).f\big(\sigma(t)\big)-\alpha(s).f(s)-\alpha^{\Delta}(t).f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|\\
&=\left|\alpha\left(f\big(\sigma(t)\big)-f(s)\right)-0.f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|\\
&=|\alpha|.\left|f\big(\sigma(t)\big)-f(s)\right|\\
&=|\alpha|.\frac{\varepsilon}{|\alpha|}.|\sigma(t)-s|=\varepsilon.|\sigma(t)-s|
\end{aligned}$$

dir. Burada $\alpha\big(\sigma(t)\big)=\alpha\,,\alpha(s)=\alpha$ ve $\alpha^{\Delta}(t)=0$ dır. Bu da $(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha.f^{\Delta}(t)$ olduğunu verir.

(iii) $\varepsilon\in(0,1)$alalım ve ε^{*}=$\varepsilon.\left[|f(t)|+\left|g\big(\sigma(t)\big)\right|+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]^{-1}$ şeklinde ε^{*} tanımlayalım. Bu durumda $\varepsilon^{*}\in(0,1)$ olur ve aşağıdakiler olacak şekilde t nin U_1,U_2 ve U_3 komşulukları vardır. Tüm $s\in U_1$ için

$$\left|f\big(\sigma(t)\big)-f(s)-f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|$$

ve tüm $s\in U_2$ için

$$\left|g\big(\sigma(t)\big)-g(s)-g^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|$$

dir. Teorem 2.11 nin (i) kısmından, tüm $s\in U_3$ için

$$f(t)-f(s)\leq\varepsilon^{*}$$

yazılabilir. Şimdi $U=U_1\cap U_2\cap U_3$ ve $s\in U$ alalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
&\left|(fg)\big(\sigma(t)\big)-(fg)(s)-\left[f^{\Delta}(t)g\big(\sigma(t)\big)+f(t)g^{\Delta}(t)\right](\sigma(t)-s)\right| \\
&\qquad=\Big|\left[f\big(\sigma(t)\big)-f(s)-f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right]g\big(\sigma(t)\big) \\
&\qquad+\left[g\big(\sigma(t)\big)-g(s)-g^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right]f(t) \\
&\qquad+\left[g\big(\sigma(t)\big)-g(s)g^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right].[f(s)-f(t)] \\
&\qquad+(\sigma(t)-s).g^{\Delta}(t).[f(s)-f(t)]\Big| \\
&\qquad\le\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left|g\big(\sigma(t)\big)\right|+\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.|f(t)|+\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s| \\
&\qquad+\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left|g^{\Delta}(t)\right| \\
&\qquad=\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left[\left|g\big(\sigma(t)\big)\right|+|f(t)|+\varepsilon^{*}+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right] \\
&\qquad\le\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left[1+\left|g\big(\sigma(t)\big)\right|+|f(t)|+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]=\varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|
\end{aligned}
$$

olur. Bu da t noktasında $(fg)^{\Delta}=f^{\Delta}g+f^{\sigma}g^{\Delta}$ eşitliğini verir.

(iv) f,t noktasında türevlenebilir ise

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{\sigma(t)-s}=f^{\Delta}(t)$$

dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to t}\frac{\frac{1}{f(\sigma(t))}-\frac{1}{f(s)}}{t-s}&=\lim_{s\to t}\frac{-\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{f(\sigma(t)).f(s)}}{\sigma(t)-s} \\
&=\left(\lim_{s\to t}\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(s)}{\sigma(t)-s}\right).\left(\lim_{s\to t}\frac{-1}{f\big(\sigma(t)\big).f(s)}\right) \\
&=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f\big(\sigma(t)\big).f(t)}
\end{aligned}
$$

yazılır.

(v)

$$\frac{f}{g} = f.\frac{1}{g}$$

eşitliği yardımıyla teoremin (ii) ve (iv) şıklarını göz öüne alırsak,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) &= \left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) \\
&= f(t).\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t).\left(\frac{1}{g(t)}\right)\circ\big(\sigma(t)\big) \\
&= f(t).\left(-\frac{g^{\Delta}(t)}{g\big(\sigma(t)\big).g(t)}\right) + f^{\Delta}(t).\frac{1}{g\big(\sigma(t)\big)} \\
&= -f(t).\left(\frac{g^{\Delta}(t)}{g\big(\sigma(t)\big).g(t)}\right) + f^{\Delta}(t).\frac{1}{g\big(\sigma(t)\big)} \\
&= \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g\big(\sigma(t)\big)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.16. x, y, z fonksiyonları t de türevlenebilir ise t noktasında

$$(xyz)^{\Delta} = x^{\Delta}yz + x^{\sigma}y^{\Delta}z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}$$

olduğunu gösterek bu durumu n tane fonksiyon için genelleştirelim.

$$\begin{aligned}
(xyz)^{\Delta} &= (xy)^{\Delta}z + (xy)^{\sigma}z^{\Delta} \\
&= (x^{\Delta}y + x^{\sigma}y^{\Delta})z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta} \\
&= x^{\Delta}yz + x^{\sigma}y^{\Delta}z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi bu formülü n tane fonksiyonun çarpımı için genelleştirelim.

$$(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) = x_1^{\Delta}.x_2.\,.\,.x_n + x_1^{\sigma} x_2^{\Delta}.\,.\,.x_n + .\,.\,. + x_1^{\sigma} x_2^{\sigma}.\,.\,.x_{n-1}^{\sigma} x_n^{\Delta}$$

olur. Bunu daha da kısa olarak,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\Delta} = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\sigma}\right) x_k^{\Delta}\left(\prod_{i=k+1}^{n} x_i\right)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Örnek 2.17. Teorem 2.15 in (iii) şıkkını kullanarak f fonksiyonunun $(n+1)$ inci dereceden türevini bulalım.
Teorem 2.15 (iii) den,

$$(f^2)^{\Delta} = (f.f)^{\Delta} = f^{\Delta} f + f^{\sigma} f^{\Delta} = (f + f^{\sigma}) f^{\Delta} \qquad (2.1)$$

bulunur. Buradan $n \in \mathbb{N}$ için

$$(f^{n+1})^{\Delta} = f^{\Delta} \sum_{k=0}^{n} (f^{\sigma})^{k} (f^{n-k})$$

elde edilir.

Teorem 2.18. α keyfi bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.

(i) $f(t) = (t-\alpha)^{m}$ise

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - \alpha)^{v}.(t-\alpha)^{m-v-1}$$

dir.

(ii).

$$g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m}$$

ise

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-v}.(t-\alpha)^{v+1}}$$

dir.

İspat: (i) Bu teoremin ispatını tümevarım yöntemiyle yapalım.

$m = 1$ için $f(t) = t - \alpha$ fonksiyonunun türevi

$$f^{\Delta}(t) = (t-\alpha)^{\Delta} = 1$$

olduğu görülür. Şimdi $f(t) = (t-\alpha)^m$ nin $m-1$ için

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{v}.(t-\alpha)^{m-v-1}$$

Sağlandığını kabul edelim ve bunun m için sağlandığını gösterelim. Burada

$$F(t) = (t-\alpha)^{m+1} = (t-\alpha)f(t)$$

Şeklinde F fonksiyonunu gözönüne alalım. Teorem 2.15 in (iii) kısmından;

$$\begin{aligned} F^{\Delta}(t) &= f\big(\sigma(t)\big) + (t-\alpha).f^{\Delta}(t) \\ &= (\sigma(t)-\alpha)^m + (t-\alpha)\sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{v}.(t-\alpha)^{m-v-1} \end{aligned}$$

$$= (\sigma(t)-\alpha)^m + \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^v . (t-\alpha)^{m-v}$$

$$= \sum_{v=0}^{m} (\sigma(t)-\alpha)^v . (t-\alpha)^{m-v}$$

olduğu görülür.

(iii) $g(t)$ fonksiyonu

$$g(t) = \frac{1}{(t-\alpha)^m} = \frac{1}{f(t)}$$

şeklinde olup Teorem 2.15 in (iv) kısmından, $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$ olmak üzere,

$$g^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t) f^{\sigma}(t)} =$$

$$= \frac{\sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^v (t-\alpha)^{m-1-v}}{(t-\alpha)^m (\sigma(t)-\alpha)^m}$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(t-\alpha)^{v+1} (\sigma(t)-\alpha)^{m-v}}$$

yazılır.

Örnek 2.19. t^2 nin delta türevi $(t^2)^{\Delta} = t + \sigma(t)$ ve $\frac{1}{t}$ nin delta türevi

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{\Delta} = -\frac{1}{t.\sigma(t)}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.20. Teorem 2.18 yardımıyla, verilen fonksiyonların türevlerini bulalım.

(i) Verilen $f(t) = t^2$, fonksiyonu $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$, $\sigma(t) = \sqrt{t^2+1}$

$$f(t) = (t-0)^2$$

formunda yazılırsa, $m = 2, \alpha = 0$ olur. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^v . (t-\alpha)^{m-1-v}$$

formülünde istenenler yerine yazılırsa,

$$f^{\Delta}(t) = (t^2)^{\Delta} = \sum_{v=0}^{1} (\sigma(t)-0)^v . (t-0)^{2-1-v}$$

$$= \sum_{v=0}^{1} \left(\sqrt{t^2+1}\right)^v . t^{1-v}$$

$$= t + \sqrt{t^2+1}$$

olarak bulunur.

(ii) $f(t) = t^2$, $\mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$, $\sigma(t) = t + \frac{1}{2}$, $m = 2$, $\alpha = 0$

$$f^{\Delta}(t) = (t^2)^{\Delta} = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-0)^v . (t-0)^{m-1-v}$$

$$= \sum_{v=0}^{1} \left(t+\frac{1}{2}\right)^v . t^{1-v}$$

$$= 2.t + \frac{1}{2}$$

olur.

(iii) $f(t) = t^3$, $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{3}}$, $m = 3, \alpha = 0, \sigma(t) = \sqrt[3]{t^3 + 1}$

$$f^{\Delta}(t) = (t^3)^{\Delta} = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - 0)^v . (t - 0)^{m-1-v}$$

$$= \sum_{v=0}^{2} \left(\sqrt[3]{t^3 + 1}\right)^v . t^{2-v}$$

$$= t^2 + t.\sqrt[3]{t^3 + 1} + \sqrt[3]{(t^3 + 1)^2}$$

olur.

Tanım 2.21. Bir $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ikinci delta türevinden bahsedebilmek için, f^{Δ} nin $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ deki delta türevinden bahsedeceğiz. f^{Δ} nin $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ deki delta türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}\colon \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevler, $f^{\Delta^n}\colon \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$ için,

$$\sigma\big(\sigma(t)\big) = \sigma^2(t)$$

ve

$$\rho\big(\rho(t)\big) = \rho^2(t)$$

veya genel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $\rho^n(t)$ ve $\sigma^n(t)$ yukarıda ifade edildiği gibi tanımlanabilir. Ayrıca yukarıdaki tanımlamalar için,

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t$$

$$f^{\Delta^0} = f$$

$$\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$$

eşitlikleri vardır.

Örnek 2.22. Verilen fonksiyonların ikinci türevlerini bulalım.

(i) $f(t) = t^2, \mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}},\ \sigma(t) = \sqrt{t^2+1}$

$$f^{\Delta}(t) = t + \sqrt[2]{t^2+1}$$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = f^{\Delta^2}(t)$$

$$= [f^{\Delta}(t)]^{\Delta}$$

$$= \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^{\Delta}$$

$$=t^{\Delta} + \left(\sqrt{t^2+1}\right)^{\Delta}$$

$$= 1 + \frac{1}{\left(\sqrt{t^2+1}\right).\left(\sqrt{t^2+2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{t^4+3.t^2+2}+1}{\sqrt{t^4+3.t^2+2}}$$

(ii) $f(t) = t^2,\ \mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{N}_0,\ f^{\Delta}(t) = 2t + \frac{1}{2},\ \sigma(t) = t + \frac{1}{2}$

$$f^{\Delta^2}(t) = [f^{\Delta}(t)]^{\Delta}$$

$$= \left[2t + \frac{1}{2}\right]^{\Delta}$$

$$= (2t)^{\Delta} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta}$$

$$= 2 + 0 = 2$$

Örnek 2.23. Keyfi bir zaman skalası için aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden türevlerini bulalım.

(i) $f(t) = 1,\ f^{\Delta}(t) = 0,\ f^{\Delta^2}(t) = \left(f^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} = 0$

(ii) $f(t) = t,\ f^{\Delta}(t) = 1,\ f^{\Delta^2}(t) = \left(f^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} = (1)^{\Delta} = 0$

(iii) $f(t) = t^2,\ f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t),\ f^{\Delta^2}(t) = \left(f^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} = [t + \sigma(t)]^{\Delta} = 1 + \sigma^{\Delta}(t)$

Örnek 2.24. f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden türevlenebildikleri halde $f.g$ çarpım fonksiyonu genelde ikinci mertebeden türevlenemeyebilir. Çarpımın türevi,

$$(f.g)^{\Delta} = f^{\Delta}.g + f^{\sigma}.g^{\Delta}$$

şeklinde idi. Eğer f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden türevlenebilir ve f^{σ} türevlenebilir ise

$$((f.g)^{\Delta})^{\Delta} = (f^{\Delta}.g + f^{\sigma}.g^{\Delta})^{\Delta}$$

$$= f^{\Delta\Delta}.g + f^{\Delta\sigma}.g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}.g^{\Delta\Delta}$$

$$= f^{\Delta\Delta}.g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}).g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}.g^{\Delta\Delta}$$

yazılır. Burada $f^{\Delta^{\sigma}}$ için $f^{\sigma\Delta}$, kısaca σ ve Δ nın üstel kombinasyonları şeklinde gösterilir.

Teorem 2.25 (Leibniz Teoremi). $S_k^{(n)}$ ile k tane σ, $n-k$ tane Δ içeren tüm kombinasyonların kümesini gösterelim. Eğer, $\forall\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcut ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(f.g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k} \qquad (2.2)$$

sağlanır.

İspat. (2.2) eşitliğini tümevarım yöntemiyle gösterelim.

$n = 1$ için $(f.g)^{\Delta^1} = (f.g)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}.g^{\Delta}$olduğu görülür. Burada $n = 0$ ise

$$\sum_{\Lambda\epsilon\emptyset} f^{\Lambda}$$

olarak kabul edelim. Şimdi $n = m \in \mathbb{N}$ için,

$$(f.g)^{\Delta^m} = \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k}$$

eşitliğinin doğru olduğunu kabul ederek, $n = m + 1 \in \mathbb{N}$ için (2.2) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için Teorem 2.15 in (i) ve (ii) şıklarını göz önüne alacağız.

$$
\begin{aligned}
(f.g)^{\Delta^{m+1}} &= \left\{\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\left\{\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}} f^{\Lambda}\right)^{\sigma} g^{\Delta^{k+1}} + \left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}} f^{\Lambda}\right)^{\Delta} g^{\Delta^k}\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}\left(\sum_{\Lambda\in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Lambda\sigma}\right) g^{\Delta^k} \\
&+ \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}} f^{\Lambda\sigma}\right) g^{\Delta^k} = \left(\sum_{\Lambda\in S_m^{(m)}} f^{\Lambda\sigma}\right) g^{\Delta^{m+1}} + \left(\sum_{\Lambda\in S_0^{(m)}} f^{\Lambda\sigma}\right) g \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Lambda\sigma} + \sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}} f^{\Lambda\sigma}\right) g^{\Delta^k} \\
&= \left(\sum_{\Lambda\in S_{m+1}^{(m+1)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^{m+1}} + \left(\sum_{\Lambda\in S_0^{(m+1)}} f^{\Lambda}\right) g \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m+1)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^{m+1}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m+1)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k}
\end{aligned}
$$

Bu da (2.2) nin $n = m + 1 \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu gösterir.

Örnek 2.26. Eğer, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\forall\Lambda \in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda} = f^{(n-k)}$ olacaktır. Burada $f^{(n)}$, f fonksiyonunun klasik n. türevi olarak ifade edilir. Bu durumda $S_k^{(n)}$ kümesi

$$
\left|S_k^{(n)}\right| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.\,k!}
$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla

$$\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} = \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{(\mathrm{n-k})} = f^{(\mathrm{n-k})} \sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} 1 = \binom{n}{k} f^{(n-k)}$$

olarak bulunur. O halde,

$$(f.g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right) g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

olur.

Örnek 2.27.$\forall n \in \mathbb{N}$ için, $H_0 = 0$ ve

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N})$$

ifadesi Harmonik sayılar olarak adlandırılır. Buna göre zaman skalası,

$$\mathbb{T} = \{H_n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

şeklinde alalım. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için

$\sigma(H_n) = H_{n+1}$

$\rho(H_n) = H_{n-1}$

$\rho(H_0) = H_0$

$\mu(H_n) = \sigma(H_n) - H_n$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

olur. Şimdi $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevine bakalım.

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

Bu eşitlikte t yerine H_n yazılırsa

$$f^{\Delta}(H_n) = \frac{f(\sigma(H_n)) - f(H_n)}{\mu(H_n)}$$

$$= \frac{f(H_{n+1}) - f(H_n)}{\frac{1}{n+1}} (\sigma(H_n) = H_{n+1})$$

$$= (n+1)\Delta f(H_n)$$

olur. Burada Δ fark operatörü ve

$$f(H_{n+1}) - f(H_n) = \Delta f(H_n)$$

biçimindedir. Şimdi de zaman skalası için örnekler tablosu oluşturalım.

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1).t$	qt	${}^{t}/_{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	${}^{t}/_{2}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

Örnek 2.28. (Cantor Kümesi) : $K_0 = [0,1]$ aralığını gözönüne alalım. Bu aralığıönce üç eşit parçaya bölüp orta açık kısmını atalım. Daha sonra geriye kalan aralıkları tekrar, üç eşit parçaya ayırıp ortada kalan açık kısımları atalım. Benzer şekilde geriye kalan her aralığı üç eşit parçaya ayırıp ortada kalan açık kısımları atalım. Bu şekilde devam edildiğinde $[0,1]$ kapalı aralığının alt kümelerinin bir$\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ yakınsak dizi elde edilir. Bu durumdan yararlanarak C, Cantor kümesini

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$$

Şeklinde kapalı küme olarak tanımlarız. Bundan dolayı $\mathbb{T} = C$ bir zaman skalasıdır. $\forall x \in [0,1]$ için

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} (a_k \in \{0,1,2\}, k \in \mathbb{N})$$

dir. Bütün sol açık aralıkları kaldırarak L kümesini tanımlayalım.

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} : m \in \mathbb{N}\ ve\ a_k \in \{0,2\}, 1 \le k \le m \right\}$$

Bu durumda $L \subset \mathbb{T}$ dir. Bütün sağ açık aralıkları atarak R kümesini oluşturalım.

$$R = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{2}{3^{m+1}} : m \in \mathbb{N}\ ve\ a_k \in \{0,2\}, 1 \le k \le m \right\}$$

Burada da, $R \subset \mathbb{T}$ dir. Bu yapılardan dolayı,

$$\sigma(t) = t + \frac{1}{3^{m+1}}, t = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} \in L$$

dir. $\forall t \in \mathbb{T}\backslash L$noktası, t nin her komşuluğundaki $\mathbb{T}$ nin diğer noktalarına sahiptir. Böylece $\sigma(t) = t$ sağlanır. Hepsi birlikte,

$$\sigma(t) = \begin{cases} t + \frac{1}{3^{m+1}}, & eğer\ t = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{m+1}} \in L\ ise \\ t, & eğer\ t \in \mathbb{T}\backslash L\ ise \end{cases}$$

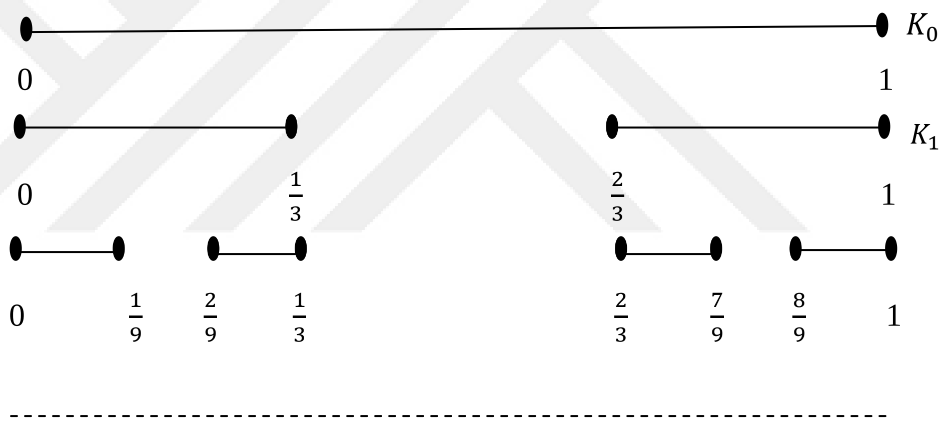
ve benzer şeklide

$$\rho(t) = \begin{cases} t - \dfrac{1}{3^{m+1}}, & eğer\ t = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{a_k}{3^k} + \dfrac{2}{3^{m+1}} \in R\ ise \\ t, & eğer\ t \in \mathbb{T} \backslash R\ ise \end{cases}$$

bulunur. Cantor kümesinin μ parçacık fonksiyonu

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \begin{cases} t + \dfrac{1}{3^{m+1}}, & eğer\ t = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \dfrac{a_k}{3^k} + \dfrac{1}{3^{m+1}} \in L\ ise \\ t, & eğer\ t \in \mathbb{T} \backslash L\ ise \end{cases}$$

Şeklinde bulunur. Bundan başka $L, \mathbb{T}$ nin sağ saçınımlı noktalarından oluşur ve R de $\mathbb{T}$ nin sol saçınımlı noktalarından oluşur. Böylece $\mathbb{T}$, hiçbir izole nokta içermez. Cantor kümesini şu şekilde gösterebiliriz.



2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.29. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ deki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri var(sonlu) ve $\mathbb{T}$ deki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var(sonlu) ise bu f fonksiyonuna *regulated fonksiyon* denir.

Tanım 2.30. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ deki sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise bu f fonksiyonuna *rd- sürekli fonksiyon* denir. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi, türevlenebilir ve türevi rd-sürekli fonksiyonlardır. Bu küme ise,

$$C'_{rd} = C'_{rd}(\mathbb{T}) = C'_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.31. σ, ρ, μ operatörleri için

(i) Sürekli midir?

(ii) rd-sürekli midir?

(iii) Regulated midir?

σ operatörü için:

(i) $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\}$ her zaman sürekli değildir.

(ii) Sağ yoğun noktalarda $\sigma(t) = t$ olduğundan $\sigma(t)$ nin sağ yoğun noktalarda sürekliliği vardır. Sol yoğun noktalarda ise $\sigma(t)$ sonlu olup $\sigma(t) rd$-süreklidir.

(iii) $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ olduğundan sağ ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahiptir. Bu yüzden $\sigma(t)$ regulateddir.

ρ operatörü için:

(i) $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\}$ her zaman sürekli değildir.

(ii) Sağ yoğun noktalarda $\rho(t) \leq t$ olduğundan sürekli değildir. Sol yoğun noktalarda ise $\sigma(t) = t$ olup $\rho(t) rd$-sürekli değildir.

(iii) $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olduğundan $\rho(t)$ regulateddir.

μoperatörü için:

(i) $\mu(t) = \sigma(t) - t$ olup $\sigma(t)$ her zaman sürekli olmadığında $\mu(t)$ her zaman sürekli değildir.

(ii) $\mu(t)$ sağ yoğun noktalarda sürekli ve $\mu(t) \equiv 0$ dır. Sol yoğun noktalarda ise $\sigma(t) - t < \infty$ olmasından $\mu(t) < \infty$ sonlu limite sahiptir. $\mu(t)$ rd-süreklidir.

(iii) $\mu(t)$ regulateddir.

Teorem 2.32. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) f sürekli ise *rd*-süreklidir.

(ii) f *rd*-sürekli ise f regulateddir.

(iii) σ operatörü *rd*-süreklidir.

(iv) Eğer f regulated veya *rd*-sürekli ise o zaman f^{σ} aynı özelliklere sahiptir.

(v) $f$sürekli olmak üzere $g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated veya sürekli ise $f \ o \ g$ bileşke fonksiyonu aynı özelliğe sahiptir.

İspat.

(i) f sürekli ise her noktada sonlu limiti vardır. Dolayısıyla *rd*-süreklidir.

(ii) f *rd*-sürekli ise f nin sol yoğun noktalarda sonlu limiti var ve sağ yoğun noktalarda sürekli fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda sonlu limiti olacağından f regulateddir.

(iii) σ operatörünün*rd*-sürekli olduğu önceki örnekte gösterildi.

(iv) f regulated ise sağ ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahiptir. Sağ yoğun noktalar için $\sigma(t) = t$ olduğundan, $f(t) = f(\sigma(t))$ yazılabilir ve $f = f^{\sigma}$ olur. Dolayısıyla f^{σ} de sonlu limite sahiptir. Sol yoğun noktalar için t sol yoğun nokta olsun. Bu durumda $\sigma(t)$ ya sağ yoğun ya da sol saçılımlıdır. $\sigma(t)$sağ yoğun ise f regulated olduğundan $f^{\sigma}(t) = f\big(\sigma(t)\big) < \infty$ olur.

(v) f sürekli ve g regulated olsun. $t$sağ veya sol yoğun ise $g(t) < \infty$ dur ve $f\big(g(t)\big) < \infty$ olup $f \ o \ g$ bileşke fonksiyonu sürekli veya regulated olur.

Tanım 2.33. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, D (Türevlenebilme Bölgesi) de sürekli olmak üzere, $\mathbb{T}^k \backslash D$ kümesi sayılabilir ve sağ yayılmış nokta içermiyorsa f ye $t \in D$ de pre-türevlenebilir denir ($D \subset \mathbb{T}^k$).

Örnek 2.34. $\mathbb{T} \coloneqq \mathbb{P}_{1,2}$ ve $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ de

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [3k, 3k+1] \\ t - 3k - 1 & , t \in [3k+1, 3k+2] \ k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

şeklinde olsun.

Bu durumda *D* bölgesi

$$D \coloneqq \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \{3k+1\}$$

şeklindedir.

Örnek 2.35. f $\mathbb{T}$ de regulated ise, f $\mathbb{T}$ de *rd*-sürekli ise, f pre-türevlenebilir ise, f nin pre-türevlenebilir *D* bölgesi bulunabilirse aşağıdakiler vardır:

(i) $\mathbb{T}$ nin her bir noktası izole olmak üzere, f $\mathbb{T}$ de tanımlı olsun. Her nokta izole olduğundan sol yoğun nokta yoktur. Böylece f $\mathbb{T}$ de regulated olur. Benzer şekilde *rd*-sürekli olur. f nun türevi

$$f^{\Delta} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} < \infty$$

olup $D = \mathbb{T}^k$ dır.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t = 0 \\ \dfrac{1}{t} & , t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

olsun. O halde $t = 0$ noktası yoğun noktadır. Bu nokta sağ yoğun nokta olarak dikkate alınırsa *f*'nin $t \longrightarrow 0^+$ için

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t}$$

değeri sonlu değildir. $t = 0$ noktası sağ yoğun nokta alınırsa

$$\lim_{t \longrightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \longrightarrow 0^-} \frac{1}{t}$$

değeri sonlu değildir. Böylece f*rd*-sürekli değildir. Dolayısıyla pre-türevlenebilir değildir.

(iii)

$$\mathbb{T} = \mathbb{N}_0 \cup \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

ve

$$f(t) = \begin{cases} 0 \, , t \in \mathbb{N} \\ t \ \ , t \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$t = 1$ noktası sol yoğundur. Sağ yoğun nokta mevcut değildir. Ayrıca

$$\lim_{t \to 1} f(t) = 1$$

sonlu değere sahiptir. Böylece f regulated olur. Sağ yoğun nokta olmadığından f, *rd*-sürekli ve $D = \mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ de pre-türevlenebilir olur.

(iv) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $f(t) = |t|, t \in \mathbb{R}$ olsun. f regulated, *rd*-sürekli olup $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ da pre-türevlenebilir olur.

(v) $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{1,1}$ve

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t = 2k+1, k \in \mathbb{N}_0 \\ t - 3k - 1 & , t \in [2k, 2k+1], k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

f nin sağ yoğun noktalardaki limiti 0 ve sol yoğun noktalardaki limiti 1 olup f regulated olur. f sağ yoğun noktalarda

$$f(t_0) = \lim_{t \to t_0} f(t) = 0$$

olup süreklidir. Böylece f *rd*-sürekli olur. Ayrıca $\sigma(t) = t$ ise

$$f^{\Delta} = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

veya $\sigma(t) > t$ ise

$$f^{\Delta} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

ile delta türeve sahiptir. Buradan $D = \mathbb{T}^k = \mathbb{P}_{1,1}$ olur.

(vi) $\mathbb{T} = \mathbb{P}_{1,1}$ ve $t \in [2k, 2k+1], k \in \mathbb{N}_0$

$$f(t) = k$$

f sabit fonksiyonu sonlu limite sahiptir. Ayrıca sol yoğun ve sağ yoğun noktalarda mevcuttur. Dolayısıyla f regulated ve *rd*-süreklidir. $f(t) = k$ sabit fonksiyonunun türevi 0 dır. $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta} \equiv 0$$

dır. f pre-türevlenebilirdir ve $D = \mathbb{T}^k = \mathbb{P}_{1,1}$ olur.

Teorem 2.36. Kompakt bir aralık üzerinde tanımlı her regulated fonksiyon sınırlıdır.

İspat. Farzedelim ki $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olmasın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f(t_n)| > n$ olacak şekilde $t_n \in [a,b]$ vardır. $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a,b]$ olduğundan $\{t_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ şeklinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $\exists t_0 \in [a,b]$ için

$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$ olur. $\mathbb{T}$ kapalı ve $\{t_{n_k}: k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ olmasından $t_0 \in \mathbb{T}$ dir.$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$ olduğu için t_0 izole nokta olamaz ve dolayısıyla bu t_0 noktasına alttan ve ya üstten yakınsayan birer dizi vardır. Bu durumda $t \longrightarrow t_0$ için, $f(t)$ nin regulated olmasından sonludur. Bu da bir çelişkidir.

Teorem 2.37.(Ortalama Değer Teoremi) Kabul edelim ki,f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ de tanımlı ve ikisi de D de pre-türevlenebilir reel değerli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $\forall t \in D$ için

$$|f^{\Delta}(t)| \le g^{\Delta}(t)$$

den $\forall r, s \in \mathbb{T}, r \le s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \le g(s) - g(r)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\varepsilon > 0, r \le s\ ve\ r, s \in \mathbb{T}$ olsun. $[r, s) \setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesini tanımlayalım. Şimdi tümevarım yoluyla $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$S(t) : |f(t) - f(r)| \le g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Biz iddia ediyoruz ki ortalama değer teoremi sağlanır. Şimdi Teorem 2.7. nin dört şıkkını sağlatalalım.

(i) $S(r)$ aşikar olarak sağlanır.

(ii) t sağ saçılımlı nokta alalım ve farz edelim ki $S(t)$ sağlanır. O zaman $t \in D$ ve

$$\begin{aligned} |f(\sigma(t)) - f(r)| &= |f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) - f(r)| \\ &\le \mu(t)|f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)| \\ &\le \mu(t) g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\right) \\ &= g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n}\right) \\ &< g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left(\sigma(t) - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n}\right) \end{aligned}$$

olup $S(\sigma(t))$ sağlanır.

(iii) Farzedelim ki $S(t)$ sağlanır ve $t \neq s$ sağ yoğun yani $\sigma(t) = t$ dir. Bu halde $t \in D$ ve $t \notin D$ durumları söz konusudur. İlk olarak $t \in D$ durumunu alalım. Bu durumda, f ve g, t de türevlenebilir ve bundan dolayı tüm $\tau \in U$ için

$$\left|f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t-\tau)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

ve

$$|g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t-\tau)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. Böylece tüm $\tau \in U$ için

$$|f(t) - f(\tau)| \leq \left[|f^{\Delta}(t)|\frac{\varepsilon}{2}\right]|t-\tau|$$

ve

$$g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t-\tau) \geq -\frac{\varepsilon}{2}|t-\tau|$$

dir. Buraya kadar yapılanlardan dolayı tüm $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için

$$\begin{aligned}
|f(\tau) - f(r)| &\leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \left[\left|f^{\Delta}(t)\right|\frac{\varepsilon}{2}\right]|t-\tau| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \left[\left|g^{\Delta}(t)\right|\frac{\varepsilon}{2}\right]|t-\tau| + \ g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right) \\
&= g^{\Delta}(t)(\tau - t) + \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau| + \ g(t) - g(r) + \varepsilon(t-r) + \varepsilon\sum_{t_n<t} 2^{-n} \\
&= g(\tau) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau| + \frac{\varepsilon}{2}|t-\tau| + \ g(t) - g(r) + \varepsilon(t-r) \\
&\qquad + \varepsilon\sum_{t_n<t} 2^{-n} \\
&\leq \ g(\tau) - g(r) + \varepsilon\left(\tau - r + \sum_{t_n<\tau} 2^{-n}\right) \qquad (t \longrightarrow \ \tau \ i\text{ç}in)
\end{aligned}$$

yazarız. Böylece tüm $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için $S(\tau)$ sağlanır.

İkinci olarak $t \notin D$ olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $m \in \mathbb{N}$ için $t = t_m$ olur. $f$ve$g$ pre-türevlenebilir olduklarından her ikisi de sürekli ve $\forall\tau \in U$ için

$$|f(\tau) - f(r)| \leq \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} \quad ve \quad |g(\tau) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. Böylece $\forall\tau \in U$ için

$$g(\tau) - g(t) \geq -\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

olur ve buradan

$$
\begin{aligned}
|f(\tau) - f(r)| &\leq |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} + g(t) - g(r) + \varepsilon\left(t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} - g(r) + \varepsilon\left(\tau - r + \sum_{t_n<\tau} 2^{-n}\right) \\
&= \varepsilon 2^{-m} + g(\tau) - g(r) + \varepsilon\left(\tau - r + \sum_{t_n<\tau} 2^{-n}\right) \\
&\leq g(\tau) - g(r) + \varepsilon\left(\tau - r + \sum_{t_n<\tau} 2^{-n}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Bu da tüm $\tau \in U \cap (t, \infty)$ için $S(\tau)$ nin sağlandığını gösterir.

(iv) Şimdi de t nin bir sol yoğun nokta ve tüm $\tau < t$ için $S(\tau)$ nin doğru olduğunu kabul edelim. O zaman

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau \to t^-} |f(\tau) - f(r)| &\leq \lim_{\tau \to t^-} \left\{g(\tau) - g(r) + \varepsilon\left(\tau - r + \sum_{t_n<\tau} 2^{-n}\right)\right\} \\
&\leq \lim_{\tau \to t^-} \left\{g(\tau) - g(r) + \varepsilon\left(\tau - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$S(\tau)$ sağlanır. Dolayısıyla f ve g süreklidir.

Sonuç 2.38. Farzedelim ki f ve g, D bölgesinde pre-türevlenebilir olsun.

(i) Eğer U uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık ise o zaman

$$|f(t) - f(s)| \leq \left\{\sup_{\tau \in U^K \cap D} \left|f^{\Delta}(t)\right|\right\} |s - r|$$

dir.

(ii) $\forall t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise, f sabit fonksiyondur.

(iii) $\forall t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise, o zaman $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$g(t) = f(t) + C$$

dir. Burada C sabittir.

İspat.

(i) Kabul edelim ki f, D bölgesinde pre-türevlenebilir ve $r \leq s\ ve\ r, s \in \mathbb{T}$ için

$$g(t) = \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^K \cap D} \left| f^{\Delta}(\tau) \right| \right\} |t - \tau|$$

şeklinde$g$ fonksiyonu tanımlarsak, o zaman $t \in [r, s]^K \cap D$ için

$$g^{\Delta}(t) = \sup_{\tau \in [r,s]^K \cap D} \left| f^{\Delta}(\tau) \right| \geq \left| f^{\Delta}(t) \right|$$

olur. Ortalama Değer Teoreminden tüm $t \in [r, s]$ için

$$|f(t) - f(\tau)| \leq g(t) - g(\tau)$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} |f(s) - f(\tau)| &\leq g(s) - g(\tau) \\ &= g(s) \\ &= \left\{ \sup_{\tau \in [r,s]^K \cap D} \left| f^{\Delta}(\tau) \right| \right\} |s - \tau| \end{aligned}$$

bulunur.

(ii)

$$f^{\Delta}(t) = 0$$

olsun. $t \in D$için (i) den

$$\left| f^{\Delta}(t) \right| \leq 0$$

yazılabilir. Buradan $r, s \in \mathbb{T}, r \leq s$ için

$$|f(s) - f(r)| \leq 0 - 0 = 0$$

olur. Ayrıca mutlak değer özelliğinden

$$0 \leq |f(s) - f(r)| \leq 0 \Leftrightarrow f(s) = f(r)$$

olur ki bu da $f(t)$ nin sabit fonksiyon olduğunu gösterir.

(iii) $\forall t \in D$için

$$f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$$

olsun. Ayrıca h, g, f fonksiyonları D bölgesinde pre-türevlenebilir olsun.

$$h(t) = f(t) - g(t)$$

eşitliğinde her iki tarafın delta türevini alalım.

$$h^{\Delta}(t) = (f(t) - g(t))^{\Delta} = f^{\Delta}(t) - g^{\Delta}(t)$$

ve (ii) den

$$\left|h^{\Delta}(t)\right| = 0 \Rightarrow h(t) = C$$

idi. O zaman

$$C = f(t) - g(t) \Rightarrow g(t) + C = f(t)$$

olarak bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.39.(Pre-Anti Türevin Varlığı) Kabul edelim ki f regulated olsun. O zaman $\forall t \in D$ için,

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

olacak şekilde D diferensiyellenebilme bölgesine sahip pre-diferensiyellenebilen bir F fonksiyonu vardır.

Tanım 2.40. Kabul edelim ki $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated olsun. O zaman *Pre-Anti Türevin Varlığı* ndan F fonksiyonuna f nin pre-anti türevi denir. Bu durumda, bir regulated f fonksiyonunun belirsiz integrali,

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. Burada C keyfi bir sabit, F de f nin pre-anti türevidir. Cauchy integralini $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

olarak tanımlayacağız. Bir $F\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}^K$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

sağlıyorsa F fonksiyonuna $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi denir.

Örnek 2.41. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$$\int a^t \Delta t$$

belirsiz integralini hesaplayalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t)$ yazılır. Buna göre $a \neq 1$ sabiti için

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1}-a^t}{a-1} = a^t$$

eşitliği yardımıyla

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

olur. Burada C keyfi bir sabit sayıdır.

Örnek 2.42. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikleri gösterelim.

(i)

$$\int (t+a)^k \Delta t = \frac{(t+a)^{k+1}}{k+1} + C$$

Delta türevi için,

$$\Delta\left(\frac{(t+a)^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{(t+a+1)^{k+1} - (t+a)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[(t+a+1)^k - ((t+a)(t+a-1)(t+a-2)\dots(t+a-k))\right]$$

$$= \frac{1}{k+1}[(t+a+1)(t+a)(t+a-1)\dots(t+a-k+1)$$

$$-((t+a)(t+a-1)(t+a-2)\dots(t+a-k))]$$

$$= \frac{1}{k+1}[(t+a)(t+a-1)\dots(t+a-k+1).((t+a+1)-(t+a-k))]$$

$$= \frac{1}{k+1}[(t+a)(t+a-1)\dots(t+a-k+1).(k+1)]$$

$$= (t+a)^k$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitliğin her iki tarafının integralini alırsak,

$$\int (t+a)^k \Delta t = \frac{(t+a)^{k+1}}{k+1} + C$$

bulunur.

(ii)

$$\int \binom{t}{a} \Delta t = \binom{t}{a+1} + C$$

Yukarıdakine benzer şekilde,

$$\Delta\binom{t}{a+1} = \binom{t+1}{a+1} - \binom{t}{a+1} = \frac{(t+1)^{a+1}}{\Gamma(a+2)} - \frac{t^{a+1}}{\Gamma(a+2)} = \frac{(t+1)t^{a} - t^{a}(t-a)}{\Gamma(a+2)}$$

$$= \frac{(a+1)t^{a}}{\Gamma(a+2)} = \frac{(a+1)t^{a}}{(\mathrm{a}+1)\Gamma(a+1)} = \frac{t^{a}}{\Gamma(a+1)} = \binom{t}{a}$$

eşitliğinden ifadenin sağlandığını görürüz.

Teorem 2.43.(Anti Türevlerin Varlığı) Her rd-sürekli fonksiyon anti türeve sahiptir. Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ ise, $t \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun anti türevi olan F fonksiyonu

$$F^{\Delta}(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau$$

şeklinde tanımlanır.

İspat. Kabul edelim ki f rd-sürekli olsun. Teorem 2.32nin (ii) şıkkından f regulated olur. Böylece Teorem 2.40 tan $\forall t \in D$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

olacak şekilde F nin varlığı garantilenir. Bu da F fonksiyonunun D de pre-türevlenebilirliğini verir. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

olduğunu (bu durum, $\forall t \in \mathbb{T}^k \backslash D$ deki tüm noktaları içerir) göstermeliyiz. Kabul edelim ki, $\forall t \in \mathbb{T}^k \backslash D$ olsun. O zaman t sağ yoğundur. Çünkü $\mathbb{T}^k \backslash D$ kümesi sağ yoğun nokta içeremez. f rd-sürekli olduğundan, f, t de süreklidir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall s \in U$ için,

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde t nin bir U komşuluğu vardır. $\tau \in \mathbb{T}$ için,

$$h(\tau) \coloneqq F(\tau) - f(t).(\tau - t_0)$$

tanımlansın. Bu durumda, h fonksiyonu D de pre-türevlenebilirdir ve $\forall \tau \in D$ için,

$$h^{\Delta}(\tau) = F^{\Delta}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$$

yazarız. Böylece $\forall s \in U \cap D$ için,

$$|h^{\Delta}(\tau)| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Bundan dolayı

$$\sup_{s\in D\cap U}\left|h^{\Delta}(s)\right| \leq \varepsilon$$

dır. Böylece Sonuç 2.38 yardımıyla $r \in U$ için,

$$\begin{aligned}|F(t)-F(r)-f(t).(t-r)| &= |h(t)+f(t)(t-t_0)-[h(r)+f(t)(r-t_0)]| \\ &= |h(t)-h(r)| \\ &\leq \left\{\sup_{s\in D\cap U}\left|h^{\Delta}(s)\right|\right\}|t-r| \\ &\leq \varepsilon|t-r|\end{aligned}$$

olur. Bu da F nin t de

$$F^{\Delta}(t) = f(t)$$

türevlenebilir olduğunu gösteriniz.

Bazı önemli örnekler şu şekilde verilebilir:

$\mathbb{T}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Z}$
$\sigma(t)$	t	$t+1$
$\rho(t)$	t	$t-1$
$\mu(t)$	0	1
$f^{\Delta}(t)$	$f'(t)$	$\Delta f(t)$
$\int_a^b f(t)\Delta t$	$\int_a^b f(t)dt$	$\sum_{t=a}^{b-1} f(t) \quad (a<b)$

Teorem 2.44. Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

İspat: Bir önceki teoremden f nin F gibi bir anti türevi vardır ve

$$\left(F^{\Delta}(t) = \frac{F\big(\sigma(t)\big)-F(t)}{\sigma(t)-(t)} = f(t)\right)$$

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = F\big(\sigma(t)\big)-F(t) = \mu(t)F^{\Delta}(t) = \mu(t)f(t)$$

Teorem 2.45. Eğer $a,b,c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f,g \in C_{rd}$ ise o zaman

(i)

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$$

(ii)

$$\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$$

(iii)

$$\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$$

(iv)

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$$

(v)

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$$

(vi)

$$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$$

(vii)

$$\int_a^a f(t)\Delta t = 0$$

(viii) Eğer, $[a,b)$ üzerinde $|f(t)| \leq g(t)$ ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

(ix) $\forall t \in [a,b)$için$f(t) \geq 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

Teorem 2.46. Eğer $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a, b]$ yalnızca izole noktalar içeriyorsa,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & a < b \ ise \\ 0 & a = b \ ise \\ -\sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & a > b \ ise \end{cases}$$

(iii) Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk: k \in \mathbb{Z}\}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a < b \ ise \\ 0 & a = b \ ise \\ -\sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a > b \ ise \end{cases}$$

(iv) Eğer için $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \ ise \\ 0 & a = b \ ise \\ -\sum_{t=a}^{a-1} f(t) & a > b \ ise \end{cases}$$

dir.

Örnek 2.47. $a \in \mathbb{T}$ alalım. Burada, $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olamk üzere,

$$\int_a^t 1\Delta s = t - a \qquad ((t-a)^\Delta = t^\Delta - a^\Delta = 1 - 0 = 1)$$

dir. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \int_a^t s ds = \frac{t^2}{2}$$

dir. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \sum_{s=0}^{t-1} s = 0 + 1 + 2 + \cdots + (t-2) + (t-1) = \frac{(t-1)t}{2}$$

dir. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh)h = \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} sh^2 = h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s = h^2\left(0 + 1 + 2 + \cdots + \left(\frac{t}{h} - 1\right)\right)$$

$$= h^2\left(\frac{t}{h} - 1\right)\frac{t}{h}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t-h)t$$

dir.

$\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & , \quad 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{1}{2} & , \quad 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.48. $f, f^{\Delta}, f^{\nabla}$ fonksiyonları sürekli olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler;

(i)

$$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\Delta} = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s$$

(ii)

$$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\nabla} = f(\rho(t), \rho(t)) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\Delta s$$

(iii)

$$\left[\int_a^t f(t,s)\nabla s\right]^{\Delta} = f\big(\sigma(t), \sigma(t)\big) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s$$

(iv)

$$\left[\int_a^t f(t,s)\nabla s\right]^{\nabla} = f(\rho(t),t) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s$$

olarak tanımlanır.

2.4 Δ ve ∇ Üstel Fonksiyon

Bu kısımda zaman skalası üzerine tanımlanan genelleşmiş $\Delta -$ ve $\nabla -$üstel fonksiyonların tanımlarını ve özelliklerini vereceğiz. Zaman skalasında üstel fonksiyonlarla ilgili sonuçlar [10,17] da mevcuttur.

Tanım 2.49. $h > 0$ için Hilger karmaşık sayıları

$$\mathbb{C}_h = \left\{z \in \mathbb{C}:\ z \neq -\frac{1}{h}\right\}$$

ile tanımlanır. $h = 0$ ise $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$ ile verilir.

Tanım 2.50. $h > 0$ için

$$\mathbb{Z}_h = \left\{z \in \mathbb{C}:\ -\frac{\pi}{h} < z < \frac{\pi}{h}\right\}$$

ile tanımlanır. $h = 0$ ise $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$ ile verilir.

Tanım 2.51.$h > 0$ olmak üzere silindir ve $\nu -$silindir dönüşümleri:

(i) $\xi_h: \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$için$\xi_h(z) := \frac{1}{h}Log(1+zh)$,

(ii) $\hat{\xi}_h: \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$için$\hat{\xi}_h(z) := -\frac{1}{h}Log(1-zh)$,

ile tanımlanırlar. $h = 0$ için $\forall z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\xi_0(z) = \hat{\xi}_0(z) = z$ dir.

Tanım 2.52.

(i) Eğer $p: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$$

koşulunu sağlıyorsa $p(t)$ fonksiyonuna regresif denir. Tüm rd-sürekli ve regresif fonksiyonların ailesi $\mathcal{R}$ ile gösterilir. $p \in \mathcal{R}$ ise $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleşmiş $\Delta -$üstel fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau\right)$$

(ii) Eğer $q: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_k$ için

$$1 - \nu(t)q(t) \neq 0$$

koşulunu sağlıyorsa $q(t)$ fonksiyonuna $\nu -$ regresif denir. Tüm ld-sürekli ve $\nu -$ regresif fonksiyonların ailesi $\mathcal{R}_\nu$ ile gösterilir. $q \in \mathcal{R}$ise$s, t \in \mathbb{T}$ için genelleşmiş $\nabla -$üstel fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_q(t,s) = \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}\big(q(\tau)\big)\nabla\tau\right)$$

Tanım 2.53.

(i) $p \in \mathcal{R}$ için birinci mertebeden lineer $y^\Delta(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemine *regresif dinamik denklem* denir.

(ii) $p \in \mathcal{R}_\nu$ için birinci mertebeden lineer $y^\nabla(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemine *v-regresif dinamik denklem* denir.

Teorem 2.54.

(i) $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y^\Delta(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemi regresif olsun. Bu durumda $\Delta -$ üstel fonksiyonu $e_p(t, t_0)$

$$y^\Delta(t) = p(t)y(t), \;\; y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

(ii) $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y^\nabla(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemi v-regresif olsun. Bu durumda $\nabla -$ üstel fonksiyonu $\hat{e}_p(t, t_0)$

$$y^\nabla(t) = p(t)y(t), \;\; y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

Teorem 2.55.

(i) p fonksiyonu sürekli ve regresif olsun. Bu durumda

$e_p(t,t_0) = \hat{e}_{\frac{p^\rho}{1+p^\rho \nu}}(t,t_0)$,

(ii) q fonksiyonu sürekli ve v-regresif olsun. Bu durumda

$$\hat{e}_q(t,t_0) = e_{\frac{q^\sigma}{1+q^\sigma \mu}}(t,t_0)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 2.56. $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_\nu$olsun. Bu durumda

(i) $e_p^\rho(t,t_0) = \frac{1}{1+p^\rho(t)\nu(t)} e_p(t,t_0)$ ve $e_p^\rho(t_0,t_0) = \frac{1}{1+p^\rho(t_0)\nu(t_0)}$;

(ii) $\hat{e}_p^\rho(t,t_0) = 1 - p(t)\nu(t)\hat{e}_q(t,t_0)$ ve $\hat{e}_p^\rho(t_0,t_0) = 1 - p(t_0)\nu(t_0)$

eşitlikleri sağlanır.

2.5 Diamond-α Türev

Tanım 2.57. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k^k$olsun. Bu durumda $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists \delta > 0$ için t noktasının bir U komşuluğundaki her s elemanı için $\mu_{ts} = \sigma(t) - s$ ve $\nu_{ts} = \rho(t) - s$ olmak üzere

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)|[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\Diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\nu_{ts} < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

eşitsizliği sağlanırsa $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ ifadesine $\mathbb{T}_k^k$ üzerinde f fonksiyonunun *diamond-α türevi* denir.[16]

Diamond-α türevi Δ ve ∇ türevlerinde olduğu gibi iyi tanımlıdır. Gerçekten $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde t'nin U_1 ve U_2 komşuluklarındaki her bir $\phi_1(t)$ ve $\phi_2(t)$ değerler olmak üzere $\forall s \in U_1$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

yazılabilir. $\forall\varepsilon > 0$için$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Bu taktirde$\forall s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$|\phi_1(t) - \phi_2(t)||\mu_{ts}\nu_{ts}| = |\phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}|$$
$$= |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts}$$
$$-(\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts})|$$
$$< |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts}|$$
$$+|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}|$$
$$< \varepsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| + \varepsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

elde edilir. Böylece $|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \varepsilon$ ve $\varepsilon \to 0$ iken $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ olur. [21]

Teorem 2.58. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere f fonksiyonunu $t \in \mathbb{T}$ de hem Δ hem de ∇ türevlenebilsin. Bu durumda f fonksiyonu t de $\lozenge_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$f^{\lozenge_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)$$

şeklindedir. [16]

İspat:$f^\Delta(t)$ ve $f^\nabla(t)$ türevleri mevcut olsun. Böylece $\forall\varepsilon > 0$ verildiğinde t'nin U_1 ve U_2 komşuluklarındaki $\forall s \in U_1$ için

$$|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t)\mu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|[f^\rho(t) - f(s)] - f^\nabla(t)\nu_{ts}| < \varepsilon|\nu_{ts}|$$

yazılır. Bu takdirde $\forall s \in U_1$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\nu_{ts}\mu_{ts}| < \alpha\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^\nabla(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| < (1-\alpha)\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

elde edilebilir. Böylece $\forall s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)]\mu_{ts}\nu_{ts}|$$
$$\leq |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\nu_{ts}\mu_{ts}|$$
$$+|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^\nabla(t)\mu_{ts}\nu_{ts}|$$
$$< \alpha\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| + (1-\alpha)\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

olur. Buradan $f^{\lozenge_\alpha}(t)$ türevi vardır ve $f^{\lozenge_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)$ bulunur.

Tanım 2.59.(Diamond-α Türev)

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $f(t), \mathbb{T}$ üzerinde $\Delta -$ ve $\nabla -$ türevlenebilir olsun. Bu durumda $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ fonksiyonunun $f^{\Diamond\alpha}(t)$ türevi

$$f^{\Diamond\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla}(t)$$

olarak tanımlanır. Böylece $f$diamond-α türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun $\Delta -$ ve $\nabla -$ türevlenebilir olmasıdır.[4]

Bu tanımdan $\alpha = 1$alınırsa,$f^{\Diamond\alpha}(t) = f^{\Delta}(t)$ ve $\alpha = 0$ alınırsa, $f^{\Diamond\alpha}(t) = f^{\nabla}(t)$ bulunur. Bu da $\alpha = 1$ için diamond-α türevinin $\Delta -$türevine , $\alpha = 0$ için diamond-α türevinin $\nabla -$türevine eşit olduğunu gösterir. Ayrıca $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğunda, kombine dinamik türevler, herhangi bir ayrık zaman skalası üzerinde bize merkezi bir formül verir.

Sonuç 2.60. $t \in \mathbb{T}$ noktası yoğun olsun. Bu durumda $f'(t)$ varsa

$$f^{\Diamond\alpha}(t) = f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(t) = f'(t)$$

şeklindedir.

İspat: $t \in \mathbb{T}$ noktası yoğun ve $f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ sonlu bir değer olarak limiti mevcut olsun. t noktasının yeterli küçük bir U komşuluğundaki $\forall s, t \in U$ için $h = s - t$ alınırsa

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur. Bu da $f^{\Delta}(t)$, aynı zamanda $f^{\nabla}(t)$ demektir.

$f^{\Diamond\alpha}$ için

$$f^{\Diamond\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla}(t) = \alpha f'(t) + (1-\alpha) f'(t) = f'(t)$$

bulunur.

Teorem 2.61. $f, g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ birer fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_{\alpha} -$ türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

(i) $f + g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_{\alpha} -$türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Diamond\alpha}(t) = f^{\Diamond\alpha}(t) + g^{\Diamond\alpha}(t)$$

şeklindedir.

(ii) c herhangi bir sabit sayı olmak üzere, $cf: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha -$türevlenebilirdir ve

$$(cf)^{\Diamond_\alpha}(t) = cf^{\Diamond_\alpha}(t)$$

şeklindedir.

(iii) $f.g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha -$türevlenebilirdir ve

$$(f.g)^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^\sigma(t)g^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\rho(t)g^\nabla(t)$$

şeklindedir.

(iv) $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{g}: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha -$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = -\frac{\left(g^\sigma(t) + g^\rho(t)\right)g^{\Diamond_\alpha} - \alpha g^\sigma(t)g^\Delta(t) - (1-\alpha)g^\rho(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$

şeklindedir.

(v) $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha -$türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = -\frac{f^{\Diamond_\alpha}(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) - \alpha f^\sigma(t)g^\rho(t)g^\Delta(t) - (1-\alpha)f^\rho(t)g^\rho(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$

şeklindedir.[4]

İspat:

(i)
$$\begin{aligned}(f+g)^{\Diamond_\alpha}(t) &= \alpha(f+g)^\Delta(t) + (1-\alpha)(f+g)^\nabla(t) \\ &= \alpha f^\Delta(t) + \alpha g^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t) + (1-\alpha)g^\nabla(t) \\ &= \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t) + \alpha g^\Delta(t) + (1-\alpha)g^\nabla(t) \\ &= f^{\Diamond_\alpha}(t) + g^{\Diamond_\alpha}(t)\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}(cf)^{\Diamond_\alpha}(t) &= \alpha(cf)^\Delta(t) + (1-\alpha)(cf)^\nabla(t) \\ &= \alpha c f^\Delta(t) + (1-\alpha)cf^\nabla(t) = c\left(\alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)\right) = cf^{\Diamond_\alpha}(t)\end{aligned}$$

(iii) $(fg)^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha(fg)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)(fg)^{\nabla}(t)$

$$= \alpha f^{\Delta}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)g(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\Delta}(t)$$

$$= f^{\Diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\Delta}(t)$$

(iv)

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{g}\right)^{\nabla}(t)$$

$$= -\alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= -\alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} + (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)} - \alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)} + \alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= -\frac{\alpha g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - \frac{\alpha g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)} + \frac{\alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= \frac{\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

(v)

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = \left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t)$$

$$= f^{\Diamond_\alpha}(t)\frac{1}{g}(t) + \alpha f^{\sigma}(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)$$

$$= f^{\Diamond_\alpha}(t)\frac{1}{g}(t) + \alpha f^{\sigma}(t)\frac{\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)} + (1-\alpha)f^{\rho}(t)\frac{\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= \frac{f^{\Diamond_\alpha}(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$
$$+ \frac{\alpha f^\sigma(t)\left[\left(g^\sigma(t)+g^\rho(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t)-\alpha g^\Delta(t)g^\sigma(t)-(1-\alpha)g^\nabla(t)g^\rho(t)\right]}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$
$$+ \frac{(1-\alpha)f^\rho(t)\left[\left(g^\sigma(t)+g^\rho(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t)-\alpha g^\Delta(t)g^\sigma(t)-(1-\alpha)g^\nabla(t)g^\rho(t)\right]}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$
$$= -\frac{f^{\Diamond_\alpha}(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)-\alpha f^\sigma(t)g^\rho(t)g^\Delta(t)-(1-\alpha)f^\rho(t)g^\rho(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$

Teorem 2.62. $f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha-$türevlenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki türevler;

(i) $f^{\Diamond_\alpha\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta\Delta}(t)+(1-\alpha)f^{\nabla\Delta}(t)$

(ii) $f^{\Diamond_\alpha\nabla}(t)=\alpha f^{\Delta\nabla}(t)+(1-\alpha)f^{\nabla\nabla}(t)$

(iii) $f^{\Delta\Diamond_\alpha}(t)=\alpha f^{\Delta\Delta}(t)+(1-\alpha)f^{\nabla\nabla}(t)vef^{\Delta\Diamond_\alpha}(t)\neq f^{\Diamond_\alpha\Delta}(t)$

(iv) $f^{\nabla\Diamond_\alpha}(t)=\alpha f^{\nabla\Delta}(t)+(1-\alpha)f^{\nabla\nabla}(t)vef^{\nabla\Diamond_\alpha}(t)\neq f^{\Diamond_\alpha\nabla}(t)$

(v) $f^{\Diamond_\alpha\Diamond_\alpha}(t)=\alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t)+\alpha(1-\alpha)\left(f^{\nabla\Delta}(t)+f^{\Delta\nabla}(t)\right)+(1-\alpha)^2 f^{\nabla\nabla}(t)$

$$\neq \alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t)+(1-\alpha)^2 f^{\nabla\nabla}(t)$$

biçimindedir.[6]

Teorem 2.63. $f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Diamond_\alpha-$türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(a)=f(b)$ ise

$$f^{\Diamond_\alpha}(\tau')\leq 0\leq f^{\Diamond_\alpha}(\tau)$$

eşitsizliğini sağlayan $\tau',\tau\in[a,b)$ noktaları vardır.[6]

Teorem 2.64. $f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Diamond_\alpha-$türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f^{\Diamond_\alpha}(\tau')(b-a)\leq f(b)-f(a)\leq f^{\Diamond_\alpha}(\tau)(b-a)$$

eşitsizliğini sağlayan $\tau',\tau\in[a,b)$ noktaları vardır.[6]

Sonuç 2.65. $f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Diamond_\alpha-$türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall t\in[a,b)$ için;

(i) $f^{\lozenge_\alpha}(t) > 0$ ise f artan bir fonksiyondur.

(ii) $f^{\lozenge_\alpha}(t) < 0$ ise f azalan bir fonksiyondur.

(iii) $f^{\lozenge_\alpha}(t) \geq 0$ ise f azalmayan bir fonksiyondur.

(iv) $f^{\lozenge_\alpha}(t) \leq 0$ ise f artmayan bir fonksiyondur.

2.6 Diamond-α İntegral

Tanım 2.66. $a, t \in \mathbb{T}$ ve $h: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\lozenge_\alpha$ integrali $\alpha \in [0,1]$için

$$\int_a^t h(\tau) \lozenge_\alpha \tau = \alpha \int_a^t h(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t h(\tau)\nabla\tau$$

şeklinde tanımlanır. $\lozenge_\alpha$ integral $\Delta -$ ve $\nabla -$ integrallerinin lineer kombinasyonudur. Genelde $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(\int_a^t h(\tau) \lozenge_\alpha \tau\right)^{\lozenge_\alpha} = f(t)$$

sağlanmaz.[8]

Teorem 2.67. $a, b, t \in \mathbb{T}$ ve $c \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

(i)

$$\int_a^t [f(\tau) + g(\tau)] \lozenge_\alpha \tau = \int_a^t f(\tau) \lozenge_\alpha \tau + \int_a^t g(\tau) \lozenge_\alpha \tau$$

(ii)

$$\int_a^t cf(\tau) \lozenge_\alpha \tau = c\int_a^t f(\tau) \lozenge_\alpha \tau$$

(iii)

$$\int_a^t f(\tau) \lozenge_\alpha \tau = -\int_t^a f(\tau) \lozenge_\alpha \tau$$

(iv)

$$\int_a^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau = \int_a^b f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau + \int_b^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau$$

(v)

$$\int_a^a f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau = 0$$

biçimindedir.[8]

İspat: İntegral tanımından;

(i)

$$\int_a^t [f(\tau)+g(\tau)]\,\lozenge_\alpha \tau = \alpha \int_a^t [f(\tau)+g(\tau)]\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t [f(\tau)+g(\tau)]\nabla\tau$$

$$= \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + \alpha \int_a^t g(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau + (1-\alpha)\int_a^t g(\tau)\nabla\tau$$

$$= \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau + \alpha \int_a^t g(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t g(\tau)\nabla\tau$$

$$= \int_a^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau + \int_a^t g(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau$$

(ii)

$$\int_a^t cf(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau = \int_a^t cf(\tau)\Delta\tau + \int_a^t cf(\tau)\nabla\tau = c\left(\int_a^t f(\tau)\Delta\tau + \int_a^t f(\tau)\nabla\tau\right)$$

$$= \int_a^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau$$

(iii)

$$\int_a^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau = \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= -\alpha \int_t^a f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_t^a f(\tau)\nabla\tau = -\int_t^a f(\tau)\,\lozenge_\alpha \tau$$

(iv)

$$\int_a^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau = \alpha\int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= \alpha\int_a^b f(\tau)\Delta\tau + \alpha\int_b^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau + (1-\alpha)\int_b^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= \alpha\int_a^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau + \alpha\int_b^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_b^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= \int_a^b f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau + \int_b^t f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau$$

(v)

$$\int_a^a f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau = \alpha\int_a^a f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^a f(\tau)\nabla\tau = \alpha.0 + (1-\alpha).0 = 0$$

Yardımcı Teorem 2.68. f ve $g, [a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

(i) Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau \geq 0$$

eşitsizliği vardır.

(ii) Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \leq g(t)$ ise

$$\int_a^b f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau \leq \int_a^b g(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau$$

(iii) Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \geq 0$ oluyorsa, bu durumda $f(t) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_a^b f(\tau)\,\lozenge_\alpha\,\tau = 0$$

olmasıdır.[9]

Teorem 2.69. f, a noktasından b noktasına $\Delta-$ ve $\nabla-$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda f, a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilir ve

$$\int_a^t f(\tau)\lozenge_\alpha \tau = \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau$$

biçimindedir.[5]

Sonuç 2.70. $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda;

(i) $a < b$ olsun. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ her sabit fonksiyon a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(\tau)\lozenge_\alpha \tau = c(b-a)$$

şeklindedir.

(ii) $[a, b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için her monoton fonksiyon a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilirdir.

(iii) $[a, b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için her sürekli fonksiyon a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilirdir.

(iv) $[a, b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için sadece sonlu sayıda bir çok süreksiz noktalarda her sınırlı fonksiyon a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilirdir.

(v) $[a, b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için her düzenli fonksiyon a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilirdir.

(vi) $[a, b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için sınırlı bir fonksiyon, a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilir olsun. Bu durumda f, $[a, b]$ nin her $[c, d]$ alt aralığında $\lozenge_\alpha-$integrallenebilirdir.

(vii) f, a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha-$integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f|$ fonksiyonu da $\lozenge_\alpha-$integrallenebilirdirdir ve

$$\left|\int_a^b f(\tau)\lozenge_\alpha \tau\right| \leq \int_a^b |f(\tau)|\lozenge_\alpha \tau$$

şeklindedir.[5]

2.7 Diamond-α Üstel Fonksiyon

Tanım 2.71.(Kombine Üstel Fonksiyon) Diamond-α dinamik denklemler,$\Delta -$ ve $\nabla -$ dinamik denklemlerin bir konveks kombinasyonudur. Biz burada diamond-α dinamik denklemler de üstel fonksiyonu tanımlayabilmek için $\Delta -$ ve $\nabla -$üstel fonksiyonların kombinasyonunu tanımlayacağız. Bu kombine üstel fonksiyonu için iki farklı fonksiyon tanımlayacağız. Bu fonksiyonları ${}_{\alpha}E_p$ ve ${}_{\alpha}e_p$ ile gösterelim.

$p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_{\nu}$, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

Birincisi ve en çok bilinen tanım:

$${}_{\alpha}E_p(t, t_0) = \alpha e_p(t, t_0) + (1-\alpha)\hat{e}_p(t, t_0)$$

şeklindedir. Örneğin;

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve$p(t) = \frac{1}{2}$ olsun.$t_0 = 0$ alırsak$e_p(t, 0) = \left(\frac{3}{2}\right)^t$,

$y^{\Delta}(t) = \frac{1}{2}y(t)$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin tek çözümü olur. Ayrıca $\hat{e}_p(t, 0) = 2^t$, $y^{\nabla}(t) = \frac{1}{2}y(t)$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin tek çözümü olur. Bu durumda konveks kombine üstel fonksiyon $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$${}_{\alpha}E_p(t, 0) = \alpha\left(\frac{3}{2}\right)^t + (1-\alpha)2^t$$

şeklindedir.

İkincisi ve $\Delta -$ ve $\nabla -$üstel fonksiyonlara benzeyen tanım:

$${}_{\alpha}e_p(t, t_0) := \exp\left(\alpha \int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_{t_0}^{t} \hat{\xi}_{\nu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\nabla\tau\right)$$

şeklindedir ve bu tanımdan bazı sonuçlar elde edebiliriz:

i. ${}_{\alpha}e_p(t, t_0) = e_p^{\alpha}(t, t_0)\hat{e}_p^{(1-\alpha)}(t, t_0)$;

ii. $\ln\big({}_{\alpha}e_p(t, t_0)\big) = \alpha e_p(t, t_0) + (1-\alpha)\hat{e}_p(t, t_0)$;

iii. ${}_{\alpha}e_p(t, s)\,{}_{\alpha}e_p(s, t_0) = {}_{\alpha}e_p(t, t_0)$

${}_{\alpha}E_p$ve ${}_{\alpha}e_p$ fonksiyonlarının her ikisinde de $\alpha = 1$ alındığında $\Delta -$üstel fonksiyon, $\alpha = 0$ alındığında $\nabla -$üstel fonksiyon oluşur. $e_p$ve$\hat{e}_p$ başlangıç değer problemlerinin birer çözümüdür. Ancak ${}_{\alpha}E_p$ ve ${}_{\alpha}e_p$ üstel fonksiyonları bir dinamik başlangıç değer probleminin çözümü değildir

3 ZAMAN SKALASINDA BAZI DİAMOND-α DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde zaman skalasında Hölder, Cauch Schwarz, Hardy Tipi ve Jensen eşitsizliklerinin diamond-α durumlarını inceleyeceğiz.

3.1 Hölder ve Cauchy-Schwarz Eşitsizlikleri

3.1.1 Bir Boyutlu Hölder Eşitsizliği

Teorem 3.1$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun.

$f, g \in C[[a, b]_{\mathbb{T}}, [0, \infty))$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x) g^q(x) \Diamond_\alpha x > 0$$

ve

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad 1 < p$$

dir. O zaman

$$\int_a^b f(x) g(x) \Diamond_\alpha x \leq \left(\int_a^b f^p(x) \Diamond_\alpha x \right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(x) \Diamond_\alpha x \right)^{1/q}$$

dur.

İspat:$a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$a^{1/p} . b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

dur.

Durum 1:

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x\right) = 0$$

olduğunda

$$\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x = 0$$

veya

$$\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x = 0$$

dır. Bu durumda eşitsizlik sağlanır.

Durum 2: Varsayalım ki

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x\right) \neq 0$$

ve

$$a(x) = \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x} \quad , \quad b(x) = \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x}$$

olsun. a ve b arasında eşitsizlik elde etmek için integral alınırsa;

$$\int_a^b \frac{|f(x)|}{\left\{\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x\right\}^{1/p}} \cdot \frac{|g(x)|}{\left\{\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x\right\}^{1/q}} \Diamond_\alpha x$$

$$= \int_a^b a^{1/p}(x).\, b^{1/q}(x) \Diamond_\alpha x \ \leq \int_a^b \left(\frac{a(x)}{p} + \frac{b(x)}{q}\right) \Diamond_\alpha x$$

$$= \int_a^b \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x} \Diamond_\alpha x + \int_a^b \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x} \Diamond_\alpha x$$

$$= \frac{1}{p} \int_a^b \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p \Diamond_\alpha x} \Diamond_\alpha x + \frac{1}{q} \int_a^b \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q \Diamond_\alpha x} \Diamond_\alpha x$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliği sağlandığından;

$$\int_a^b f(x)g(x) \Diamond_\alpha x \leq \left(\int_a^b f^p(x) \Diamond_\alpha x\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(x) \Diamond_\alpha x\right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır.

Özel olarak $p = q = 2$ alınırsa aşağıda ki teorem de gösterilen Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir. Bu teoremin ispatı Hölder eşitsizliğinin ispatıyla aynıdır.

Teorem 3.2.(Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve$a < b$ olsun. $f, g \in C[[a, b]_{\mathbb{T}}, [0, \infty))$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)g(x) \Diamond_\alpha x \leq \sqrt{\left(\int_a^b |f(x)|^2 \Diamond_\alpha x\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 \Diamond_\alpha x\right)}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.1.2 İki Boyutlu Hölder Eşitsizliği

Teorem 3.3. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun.

$f, g, h: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ ve $\Diamond_\alpha$ türevlenebilir bir fonksiyon, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $p > 1$ dir.. Bu durumda;

$$\int_a^b \int_a^b |h(x,y)\, f(x,y)\, g(x,y)| \Diamond_\alpha x \Diamond_\alpha y$$
$$\leq \left(\int_a^b \int_a^b |h(x,y)|\, |f(x,y)|^p \Diamond_\alpha x \Diamond_\alpha y \right)^{1/p} \left(\left(\int_a^b \int_a^b |h(x,y)|\, |g(x,y)|^q \Diamond_\alpha x \Diamond_\alpha y \right)^{1/q} \right)$$

eşitsizliği sağlanır

3.2 Diamond-α Hardy Tip Eşitsizliği

Teorem 3.4 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun.

$K: \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\varphi: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $\psi: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $p > 1$ olmak üzere

$$F(x) = \int_a^b K(x,y) \psi^{-p}(y) \Diamond_\alpha y\,,$$

$$G(y) = \int_a^b K(x,y) \varphi^{-q}(x) \Diamond_\alpha x$$

ile tanımlansın. Bu durumda

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)g(y)\Diamond_\alpha x \, \Diamond_\alpha y$$

$$\leq \left(\int_a^b \varphi^p(x)F(x)f^p(x)\Diamond_\alpha x\right)^{1/p} \left(\int_a^b \psi^q(y)G(y)g^q(y)\Diamond_\alpha y\right)^{1/q} \qquad ...(3.1)$$

ve

$$\int_a^b G^{1-p}(y)\psi^{-p}(y)\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x\right)^p \Diamond_\alpha y \leq \int_a^b \varphi^p(x)F(x)f^p(x)\Diamond_\alpha x \ldots (3.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır ve birbirine denktir.

İspat: Öncelikle (3.1) eşitsizliğini ispatlayalım.

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)g(y)\Diamond_\alpha x\Diamond_\alpha y \ = \int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)\frac{\varphi(x)}{\psi(y)}g(y)\frac{\psi(y)}{\varphi(x)}\Diamond_\alpha x\Diamond_\alpha y$$

eşitliğine zaman skalasında Hölder eşitsizliği uygularsak

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)g(y)\Diamond_\alpha x\Diamond_\alpha y$$

$$\leq \left(\int_a^b \int_a^b K(x,y)\left(\frac{f(x)\varphi(x)}{\psi(y)}\right)^p \Diamond_\alpha x\Diamond_\alpha y\right)^{1/p} . \left(\int_a^b \int_a^b K(x,y)\left(\frac{g(y)\psi(y)}{\varphi(x)}\right)^q \Diamond_\alpha x \, \Diamond_\alpha y\right)^{1/q}$$

$$= \left(\int_a^b f^p(x)\varphi^p(x)\left(\int_a^b K(x,y)\psi^{-p}(y)\Diamond_\alpha y\right)\Diamond_\alpha x\right)^{1/p} .$$

$$\left(\int_a^b g^q(y)\psi^q(y)\left(\int_a^b K(x,y)\varphi^{-q}\Diamond_\alpha x\right)\Diamond_\alpha y\right)^{1/q}$$

$$=\left(\int_a^b f^p(x)\varphi^p(x)F(x)\Diamond_\alpha x\right)^{1/p}.\left(\int_a^b g^q(y)\psi^q(y)G(y)\Diamond_\alpha y\right)^{1/q}$$

elde edilir. Şimdi de (3.2) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$g(y)=G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y)\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x\right)^{p-1}$$

şeklinde tanımlayalım.

(3.1) eşitsizliğini ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ifadesini kullanırsak;

$$\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y)\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x\right)^{p-1}.\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x\right)\Diamond_\alpha y$$

$$=\int_a^b\int_a^b K(x,y)f(x)g(y)\Diamond_\alpha x\Diamond_\alpha y$$

$$\leq\left(\int_a^b \varphi^p(x)F(x)f^p(x)\Diamond_\alpha x\right)^{1/p}.\left(\int_a^b \psi^q(y)G(y)g^q(y)\Diamond_\alpha y\right)^{1/q}\quad(3.1)$$

bulunur.

$$g^q(y)=G^{(1-p)q}(y).\psi^{-pq}(y)\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x\right)^{(p-1)q}$$

$$=G^{-p}(y).\psi^{-p-q}(y)\left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x\right)^{p}$$

ile tanımlayalım. $g^q(y)$ ifadesini eşitsizlikde yerine yazarsak;

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)g(y)\, \Diamond_\alpha x \Diamond_\alpha y$$

$$\leq \left(\int_a^b \varphi^p(x)F(x)f^p(x)\, \Diamond_\alpha x \right)^{1/p} . \left(\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x \right)^p \Diamond_\alpha y \right)^{1/q}$$

elde edilir. Eşitisizliğin her iki tarafını

$$\left(\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x \right)^p \Diamond_\alpha y \right)^{1/q}$$

ile bölersek;

$$\frac{\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x \right)^p \Diamond_\alpha y}{\left(\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x \right)^p \Diamond_\alpha y \right)^{1/q}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \varphi^p(x)F(x)f^p(x)\, \Diamond_\alpha x \right)^{1/p}$$

$$\left(\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x \right)^p \Diamond_\alpha y \right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_a^b \varphi(x)F(x)f^p(x)\, \Diamond_\alpha x \right)^{1/p}$$

bulunur. Her iki tarafın p inci kuvveti alınırsa

$$\int_a^b G^{1-p}(y).\psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y)f(x)\Diamond_\alpha x \right)^p \Diamond_\alpha y \leq \int_a^b \varphi(x)F(x)f^p(x)\, \Diamond_\alpha x$$

bulunur.

(3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinin denk olduğunu gösterelim.

(3.2) eşitsizliğini kullanarak (3.1) eşitsizliğini ispatlayalım.

$$\int_a^b \int_a^b K(x,y) f(x) g(y) \lozenge_\alpha x \lozenge_\alpha y$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(x,y) f(x) g(y) \psi^{-1}(y) \psi(y) G^{\frac{1}{q}}(y) G^{-\frac{1}{q}}(y) \lozenge_\alpha x \lozenge_\alpha y$$

$$= \int_a^b \psi^{-1}(y) G^{-\frac{1}{q}}(y) \left(\int_a^b K(x,y) f(x) \lozenge_\alpha x \right) g(y) G^{\frac{1}{q}}(y) \psi(y) \lozenge_\alpha y$$

$$\leq \left(\int_a^b \psi^{-p}(y) G^{-\frac{1}{q}}(y) \left(\int_a^b K(x,y) f(x) \lozenge_\alpha x \right)^p \lozenge_\alpha y \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b g^q(y) G(y) \psi^q(y) \lozenge_\alpha y \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_a^b G^{1-p}(y) \psi^{-p}(y) \left(\int_a^b K(x,y) f(x) \diamond_\alpha x \right)^p \lozenge_\alpha y \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b g^q(y) G(y) \psi^q(y) \lozenge_\alpha y \right)^{\frac{1}{q}}$$

(3.2) Eşitsizliğinden;

$$\leq \left(\int_a^b \varphi^p(x) F(x) f^p(x) \lozenge_\alpha x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b g^q(y) G(y) \psi^q(y) \lozenge_\alpha y \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. (3.1)ve(3.2) eşitsizliklerinin denk olduğu görülür.

3.3 Jensen Eşitsizliği

3.3.1 Bir Boyutlu Jensen Eşitsizliği

Teorem 3.5. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$g: [a, b] \to (c, d)$ sağ yoğun ve sürekli, $F: (c, d) \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlardır. Bu durumda;

$$F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t}{b-a}\right) \leq \int_a^b \frac{F(g(t))\Diamond_\alpha t}{b-a}$$

dır.

İspat: $x_0 \in (c, d)$ için [2] den $\exists \beta \in \mathbb{R}$ vardır. Öyle ki;

$F(x) - F(x_0) \geq \beta(x - x_0)$, $\forall x \in (c, d)$ olur. g sağ yoğun sürekli ise

$$\int_a^b g(\tau)\,\Diamond_\alpha \tau$$

integrali tanımlıdır.

$$x_0 = \frac{\int_a^b g(\tau)\Diamond_\alpha \tau}{b-a}$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır.

fogde sağ yoğun olduğundan $F(x) - F(x_0) \geq \beta(x - x_0)$ eşitsizliği $x = g(t)$ için uygulanabilir.

$$F(g(t)) - F(x_0) \geq \beta(g(t) - x_0)$$

$$\int_a^b F(g(t))\Diamond_\alpha t-(b-a).F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t}{b-a}\right)=\int_a^b F(g(t))\,\Diamond_\alpha t-(b-a).F(x_0)$$

$$=\int_a^b \Big(F(g(t))-F(x_0)\Big)\Diamond_\alpha t\geq\beta\int_a^b (g(t)-x_0)\Diamond_\alpha t$$

$$=\beta\left(\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t-(b-a)x_0\right)=\beta.\left(\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t-\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t\right)$$

$$\int_a^b F(g(t))\Diamond_\alpha t-(b-a).F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t}{b-a}\right)\geq 0$$

$$\int_a^b F(g(t))\Diamond_\alpha t\geq(b-a).F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t}{b-a}\right)$$

$$\int_a^b \frac{F(g(t))\Diamond_\alpha t}{b-a}\ \geq F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Diamond_\alpha t}{b-a}\right)$$

dir.

3.3.2 İki Boyutlu Jensen Eşitsizliği

Teorem 3.6. $t_1, t_2\in\mathbb{R}$ ve $-\infty\leq m<n\leq\infty$ öyle ki $f:\mathbb{R}\to(m,n)$ sürekli, $\Diamond_{\alpha_1}$,$\Diamond_{\alpha_2}$

$$\phi\left(\frac{\int_c^d\int_a^b f(x_1,x_2)\Diamond_{\alpha_1}x_1\Diamond_{\alpha_2}x_2}{\int_c^d\int_a^b \Diamond_{\alpha_1}x_1\Diamond_{\alpha_2}x_2}\right)\leq\frac{\int_c^d\int_a^b \phi(f(x_1,x_2))\Diamond_{\alpha_1}x_1\Diamond_{\alpha_2}x_2}{\int_c^d\int_a^b \Diamond_{\alpha_1}x_1\Diamond_{\alpha_2}x_2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat:$t_0 \in m, n$ için $\exists\beta \in \mathbb{R}$ vardır ki;

$\phi(t) - \phi(t_0) \geq \beta(t - t_0)$dır. (3,3)

$$t_0 = \frac{\int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2)\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2}{\int_c^d \int_a^b \Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2}$$

şeklinde tanımlanırsa, t_0 için $\phi o f$ de (3,3) eşitsizliğini sağlar. $\big(t = f(x_1, x_2)\big)$

$\phi\big(f(x_1, x_2)\big) - \phi(t_0) \geq \beta(f(x_1, x_2) - t_0)$dır. (3,4)

$$\begin{aligned}
\int_c^d \int_a^b \phi(f(x_1, x_2))\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2 - (b-a)(d-c)\phi\left(\frac{\int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2)\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2}{\int_c^d \int_a^b \Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2}\right) \\
\geq \int_c^d \int_a^b \phi\big(f(x_1, x_2)\big)\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2 - \int_c^d \int_a^b \phi(t_0)\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2 \\
= \int_c^d \int_a^b \big[\phi\big(f(x_1, x_2)\big) - \phi(t_0)\big]\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2 \\
\geq \beta \int_c^d \int_a^b (f(x_1, x_2) - t_0)\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2 \\
= \beta\left(\int_c^d \int_a^b f(x_1, x_2)\Diamond_{\alpha_1} x_1 \Diamond_{\alpha_2} x_2 - (d-c)(b-a)t_0\right) = 0
\end{aligned}$$

olur.

4 Diamond-α Opial Dinamik Eşitsizlikleri

Bu bölümde zaman skalası üzerinde Opial tipi Daiamond-α dinamik eşitsizlikleri ele alacağız.Literatürde bir çok yazar tarafından [12,22,25] elde edilmiş Opial tipi delta eşitsizliklerin diamond-α türevi ile vereceğiz. Bu bölümde vereceğimiz sonuçlar

$$x^{\Diamond_\alpha \Diamond_\alpha}(t) + p(t)x(t) = 0$$

ikinci derece diamond-α dinamik denkleminin çözümlerinin sıfırlarının dağılımı hakkında yararlı olacaktır.

4.1 Zhao ve Arkadaşlarının Genelleştirmelerinin Sonuçları

Bu bölümde Zhao, Xu ve Li [25]tarafından elde edilen bazı delta Opial eşitsizliklerin diamond-α türevli hallerine genellemelerini inceleyeceğiz.

4.1.1 Sıfır Başlangıç Koşulu

Öncelikle $f(0) = 0$ durumunu inceleyelim.

Teorem 4.1. $w(t)$, $(0, h)$ üzerinde $\int_0^h w^{1-q}(t)\Delta t < \infty$ $, q > 1$ şartını sağlayan pozitif ve sürekli bir fonksiyon olsun. $f\colon [0, h] \to \mathbb{R}$ ve $f(0) = 0$ şartını sağlayan türevlenebilir f fonksiyonu için

$$\int_0^h \left|(f + f^\sigma)f^\Delta\right|\Delta t \leq \left(\int_0^h w^{1-q}\Delta t\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_0^h w\left|f^\Delta\right|^p \Delta t\right)^{\frac{2}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$'dir. Eşitlik durumu bazı c sabitleri için

$f(t) = c\int_0^t w^{1-q}\Delta\tau$ durumunda sağlanır[25,Teorem 4.1].

Teorem 4.2. $p > 1$, $q = {}^{p}/_{(p-1)}$, $\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

ve $w \in C\big([0,h]_{\mathbb{T}}, (0,\infty)\big)$, $f \in C^1_{\diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun.

Eğer $\alpha f^{\Delta} \geq 0, (1-\alpha) f^{\nabla} \geq 0$ ve $f(0) = 0$ ise, bu durumda

$$\alpha^4 \int_0^h \left|(f^2)^{\Delta}(t)\right| \Delta t + (1-\alpha)^4 \int_0^h |(f^2)^{\nabla}(t)| \nabla t$$

$$\leq \left(\int_0^h w^{1-q}(t) \diamond_\alpha t\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_0^h w(t) \left|f^{\diamond_\alpha}(t)\right|^p \diamond_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}} \qquad (4.1)$$

eşitsizzliği sağlanır.

İspat: Teorem 4.1 den

$$\int_0^h \left|(f^2)^{\Delta}(t)\right| \Delta t \leq \left(\int_0^h w^{1-q}(t) \Delta t\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_0^h w(t) \left|f^{\Delta}(t)\right|^p \Delta t\right)^{\frac{2}{p}}. \qquad (4.2)$$

Elde edilir. Aynı şekilde nabla türevi içinde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\int_0^h |(f^2)^{\nabla}(t)| \nabla t \leq \left(\int_0^h w^{1-q}(t) \nabla t\right)^{\frac{2}{q}} \left(\int_0^h w(t) |f^{\nabla}(t)|^p \nabla t\right)^{\frac{2}{p}}. \qquad (4.3)$$

$\alpha f^{\Delta} \geq 0$ve$(1-\alpha) f^{\nabla} \geq 0$ olduğundan $f^{\diamond_\alpha}$ tanımından.

$$\left|\alpha f^{\Delta}\right|^p \leq \left|f^{\diamond_\alpha}\right|^p \text{ve} |(1-\alpha) f^{\nabla}|^p \leq \left|f^{\diamond_\alpha}\right|^p (4.4)$$

eşitsizlikleri bulunur.

Notasyonda basitlik için aşağıdakileri tanımlayalım;

$$a=\alpha\int_0^h w^{1-q}(t)\Delta t\,, \qquad b=(1-\alpha)\int_0^h w^{1-q}(t)\nabla t,$$

$$c=\alpha\int_0^h w(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^p\Delta t, \qquad d=(1-\alpha)\int_0^h w(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^p\nabla t$$

(4.2),(4.3), (4.4) eşitsizlikleri, Hölder eşitsizliği ve

$$4=\frac{2}{q}+(1+p)\frac{2}{p}$$

kullanılarak

$$\begin{aligned}\alpha^4\int_0^h\left|(f^2)^{\Delta}(t)\right|\Delta t+(1-\alpha)^4\int_0^h|(f^2)^{\nabla}(t)|\nabla t &\le a^{\frac{2}{q}}c^{\frac{2}{p}}+b^{\frac{2}{q}}d^{\frac{2}{p}}\\ &\le (a^2+b^2)^{\frac{1}{q}}(c^2+d^2)^{\frac{1}{p}}\le[(a+b)^2]^{\frac{1}{q}}[(c+d)^2]^{\frac{1}{p}}\\ &=(a+b)^{\frac{2}{q}}(c+d)^{\frac{2}{p}}\end{aligned}$$

elde edilir. a,b,c,d yerine yazıldığında ispat tamamlanır.

Uyarı: p çift doğal sayı ise; Teorem (4.2) deki $\alpha f^{\Delta}\ge 0,(1-\alpha)f^{\nabla}\ge 0$ şartları $\alpha(1-\alpha)f^{\Delta}f^{\nabla}\ge 0$ şartı ile değiştirilebilir.

Sonuç 4.3.$\alpha\in[0,1]$, $h\in(0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w\in C\big([0,h]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f\in C^1_{\diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun.Eğer $\alpha(1-\alpha)f^{\Delta}f^{\nabla}\ge 0$ ve $f(0)=0$ ise

$$\alpha^4 \int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4 \int_0^h |(f^2)^\nabla(t)|\nabla t$$
$$\leq \left(\int_0^h \frac{\Diamond_\alpha t}{w(t)}\right)\left(\int_0^h w(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha t\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2 de eğer ağırlık fonksiyonu $w(t) = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.$p > 1, q = {}^{p}/_{(p-1)}$, $\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $f \in C^1_{\diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha f^\Delta \geq 0, (1-\alpha)f^\nabla \geq 0$ ve $f(0) = 0$ ise

$$\alpha^4 \int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4 \int_0^h |(f^2)^\nabla(t)|\nabla t \leq h^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^h \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^p \Diamond_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer $p = q = 2$, ise bu sonuç aşağıdaki hale dönüşür.

Sonuç 4.5.$\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $f \in C^1_{\diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Eğer

$\alpha(1-\alpha)f^\Delta f^\nabla \geq 0$ ve $f(0) = 0$ ise

$$\alpha^4 \int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4 \int_0^h |(f^2)^\nabla(t)|\nabla t \leq h \int_0^h \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer $\alpha = 1$ alınırsa bu sonuç aşağıda ki hale dönüşür.

Sonuç 4.6. Varsayalım ki $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $f \in C^1_{rd}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$olsun.

Eğer $f(0) = 0$ ise

$$\int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t \leq h \int_0^h \left|f^\Delta(t)\right|^2 \Delta t \,.$$

sonucu elde edilir.

4.1.2 Keyfi Sınır Koşulları

Şimdi de $f(0)$ ve $f(h)$ nin keyfi sabitler olduğu durumları ele alalım.

Teorem 4.7. $1 < p \leq 2$, $q = p/p - 1$, $\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$w \in C\big([0,h]_{\mathbb{T}}, (0,\infty)\big)$, $f \in C^1_{\diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun.

Eğer $\alpha f^\Delta \geq 0, (1-\alpha)f^\nabla \geq 0$ ise

$$\alpha^4 \int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4 \int_0^h |(f^2)^\nabla(t)|\nabla t$$

$$\leq \beta^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^h w(t)\left|f^{\diamond_\alpha}(t)\right|^p \diamond_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}} + 2\gamma(a^4 + (1-a)^4)\big(f(h) - f(0)\big)$$

(4.5)

eşitsizlği sağlanır.

İspat: Keyfi $u \in [0,h]_{\mathbb{T}}$ alalım. Öncelikle Teorem 4.1 i $g = f - f(0)$ fonksiyonuna uygulayalım. Bu durumda

$$\alpha^4\int_0^u\left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t+(1-\alpha)^4\int_0^u|(f^2)^\nabla(t)|\nabla t$$

$$=a^4\int_0^u\left|(g^2)^\Delta(t)+2f(0)f^\Delta(t)\right|\Delta t$$

$$+(1-a)^4\int_0^u|(g^2)^\nabla(t)+2f(0)f^\nabla(t)|\nabla t$$

$$\leq a^4\int_0^u\left|(g^2)^\Delta(t)\right|\Delta t+(1-a)^4\int_0^u|(g^2)^\nabla(t)|\nabla t$$

$$+2a^4|f(0)|\int_0^u\left|f^\Delta(t)\right|\Delta t+2(1-a)^4|f(0)|\int_0^u|f^\nabla(t)|\nabla t$$

$$\leq\left(\int_0^u w^{1-q}(t)\lozenge_\alpha t\right)^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^u w(t)\left|g^{\lozenge_\alpha}(t)\right|^p\lozenge_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$+2\gamma(a^4+(1-a)^4)\big(f(u)-f(0)\big)$$

$$\leq\big(v(u)\big)^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^u w(t)\left|f^{\lozenge_\alpha}(t)\right|^p\lozenge_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$+2\gamma(a^4+(1-a)^4)\big(f(u)-f(0)\big)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\alpha^4\int_u^h\left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t+(1-\alpha)^4\int_u^h|(f^2)^\nabla(t)|\nabla t$$

$$\leq\big(v(u)\big)^{\frac{2}{q}}\left(\int_u^h w(t)\left|f^{\lozenge_\alpha}(t)\right|^p\lozenge_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$+2\gamma(a^4+(1-a)^4)\big(f(h)-f(u)\big)$$

bulunur. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanır ve $a,b\geq 0, r\geq 1$ için $a^r+b^r\leq(a+b)^r$ eşitsizliği kullanılılırsa (4.5) eşitsizliğinin sağlanır.

Uyarı:$p > 2$ olduğunda Teorem 4.7 nin son kısmının ispatında $a, b \geq 0$ ve $0 < r < 1$ için geçerli olan $a^r + b^r \leq 2^{1-r}(a+b)^r$ eşitsizliği kullanılabilir. Böylece (4.5) eşitsziliğinin sağ tarafındaki ilk terime gelecek $2^{1-\frac{2}{p}}$ ek çarpanı ile de sağlanır. Aynı durum $p > 2$ olduğunda delta ve nabla türevli eşitsizlikler için de geçerlidir.

Eğer $\alpha = 1$, ise Teorem aşağıdaki şekilde indirgenir. [25,Teorem 4.3]

Sonuç 4.8. Varsayalım ki $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$w \in C\big([0,h]_{\mathbb{T}}, (0,\infty)\big)$, $f \in C^1_{rd}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Eğer $f^{\Delta} \geq 0$ ise

$$\int_0^h \left|(f^2)^{\Delta}(t)\right|\Delta t \leq \beta^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^h w(t)\left|f^{\Delta}(t)\right|^p \Delta t\right)^{\frac{2}{p}} + 2\gamma\big(f(h) - f(0)\big) ,$$

$$\beta := \min_{u\in[0,h]_{\mathbb{T}}} \max\left\{\int_0^u w^{1-q}(t)\Delta t, \int_u^h w^{1-q}(t)\Delta t\right\}$$

ve

$$\gamma := \max\{|f(0)|, |f(h)|\}$$

Eğer $f(0) = f(h)$, ise teorem aşağıdaki şekilde indirgenir.

Sonuç 4.9. Varsayalım ki $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$, $\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w \in C\big([0,h]_{\mathbb{T}}, (0,\infty)\big)$, $f \in C^1_{\Diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha^4 f^{\Delta} \geq 0$, $(1-\alpha)f^{\nabla} \geq 0$ ve $f(0) = f(h) = 0$ ise

$$\alpha^4 \int_0^h \left|(f^2)^{\Delta}(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4 \int_0^h |(f^2)^{\nabla}(t)|\nabla t \leq \beta^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^h w(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^p \Diamond_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\beta \coloneqq \min_{u\in[0,h]_{\mathbb{T}}} \max\left\{\int_0^u w^{1-q}(t)\Diamond_\alpha t, \int_u^h w^{1-q}(t)\Diamond_\alpha t\right\}$$

dir.

Eğer $w(t) \equiv 1$ ise Teorem 4.7 aşağıdaki şekilde indirgenir.

Sonuç 4.10. Varsayalım ki; $1 < p \leq 2$, $q = p/(p-1)$, $\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$, $C\big([0,h]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$, $f \in C^1_{\Diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha^4 f^\Delta \geq 0$ ve$(1-\alpha)f^\nabla \geq 0$ ise

$$\alpha^4\int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4\int_0^h |(f^2)^\nabla(t)|\nabla t$$
$$\leq \beta^{\frac{2}{q}}\left(\int_0^h \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^p \Diamond_\alpha t\right)^{\frac{2}{p}} + 2\gamma(\alpha^4 + (1-\alpha^4)\big(f(h)-f(0)\big),$$

$$\beta \coloneqq \min_{u\in[0,h]_{\mathbb{T}}} \max\{u, h-u\} \text{ve} \quad \gamma \coloneqq max\{|f(0)|,|f(h)|\}$$

dır.

Eğer $p = q = 2$ ise bu sonuç aşağıdaki şekilde indirgenir.[7,Teorem 3.2]

Sonuç 4.11. Varsayalım ki $\alpha \in [0,1]$, $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $f \in C^1_{\Diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha^4 f^\Delta \geq 0$ ve$(1-\alpha)f^\nabla \geq 0$ ise

$$\alpha^4\int_0^h \left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^4\int_0^h |(f^2)^\nabla(t)|\nabla t$$
$$\leq \beta\int_0^h \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha t + 2\gamma(\alpha^4 + (1-\alpha^4)\big(f(h)-f(0)\big)$$

$$\beta \coloneqq \min_{u\in[0,h]_{\mathbb{T}}} \max\{u, h-u\} \text{ve} \quad \gamma \coloneqq max\{|f(0)|,|f(h)|\}$$

dır.

Eğer $\alpha = 1$ ise bu sonuç aşağıdaki şekilde indirgenir. [17, Teorem 6.27]

Sonuç 4.12. Varsayalım ki $h \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}$ ve $f \in C^1_{\Diamond_\alpha}([0,h]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun.

Eğer $f^{\Delta} \geq 0$ ise

$$\int_0^h \left|(f^2)^{\Delta}(t)\right|\Delta t \leq \beta \int_0^h \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t + 2\gamma\big(f(h) - f(0)\big)$$

$$\beta \coloneqq \min_{u\in[0,h]_{\mathbb{T}}} \max\{u, h-u\} \text{ve} \quad \gamma \coloneqq max\{|f(0)|, |f(h)|\}$$

4.2 Başak Karpuz ve Arkadaşları Tarafından Sonuçların Genellemeleri

Bu bölümde, Karpuz, Kaymakçalan ve Öcalan [12] tarafından elde dilen bir ağırlık fonksiyonu ile bazı delta Opial eşitsizliklerin diamond-α durumunda genellemelirini inceleyeceğiz. Başlangıç noktası olarak aşağıda sonucu verilen teoremi alacağız [12].

Teorem 4.13. ([12,Teorem 3.1] Varsayalım ki $\in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$,

$w \in C_{rd}\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f \in C^1_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $f(a) = 0$ ise

$$\int_a^b w(t)\left|(f^2)^{\Delta}\right|\Delta t \leq K \int_a^b \left|f^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t\,,$$

dir. Öyle ki;

$$K = \sqrt{2\int_a^b w^2(t)(\sigma(t)-a)\Delta t}\,.$$

dir.

İspat:[12]

Amaçlarımıza ulaşmak için, sonraki işlemimizi takip etmenizi tavsiye ederiz.Bu işlem, Teorem 4.13 ün en önemli bölümüdür.

Teorem 4.14. Varsayalım ki $\in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w \in C_{rd}\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f \in C^1_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun.Eğer $f(a)=0$ ise

$$\int_a^b w(t)\left|(f^2)^\Delta\right|\Delta t \le K\int_a^b \left|f^\Delta(t)\right|^2\Delta t\,,$$

dir. Öyle ki;

$$K=\sqrt{\int_a^b w^2(t)h^\Delta(t)\Delta t}\ \text{ve}\quad h(t)=(t-a)^2\text{dir.}$$

İspat: $g(t) := \int_a^t \left|f^\Delta(s)\right|^2\Delta s$ olarak tanımlansın.

O zaman $g(a)=0$, $g^\Delta(t)=|f^2(t)|^2$ ve

$$\begin{aligned}|f(t)| = |f(t)-f(a)| = {} & \left|\int_a^t f^\Delta(s)\Delta s\right| \le \int_a^t \left|f^\Delta(s)\right|\Delta s\\ &\le \sqrt{t-a}\sqrt{\int_a^t |f^\Delta(s)|^2\Delta s} = \sqrt{(t-a)g(t)}\end{aligned}$$

dir. Zaman skalasında Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanıldığında [4,Teorem 6.15]

$$\begin{aligned}\left|(f^2)^\Delta(t)\right| = {} & \left|\big(f(t)+f(\sigma(t))\big)f^\Delta(t)\right|\\ &\le \big(|f(t)|+\left|f(\sigma(t))\right|\big)\left|f^\Delta(t)\right|\\ &\le \left(\sqrt{t-a}\sqrt{g(t)}+\sqrt{\sigma(t)-a}\sqrt{g(\sigma(t))}\right)\sqrt{g^\Delta(t)}\\ &\le \sqrt{t-a+\sigma(t)-a}\sqrt{g(t)+g(\sigma(t))}\sqrt{g^\Delta(t)}\\ &= \sqrt{h^\Delta(t)}\sqrt{(g^2)^\Delta(t)}\end{aligned}$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanıldığında, sonuç olarak

$$\int_a^b w(t)\left|(f^2)^\Delta\right|\Delta t \leq \int_a^b w(t)\sqrt{h^\Delta(t)}\sqrt{(g^2)^\Delta(t)\Delta t}$$
$$\leq \sqrt{\int_a^b w^2(t)h^\Delta(t)\Delta t}\sqrt{\int_a^b (g^2)^\Delta(t)\Delta t}$$
$$= K\sqrt{g^2(b)} = Kg(b) = K\int_a^b \left|f^\Delta(t)\right|^2 \Delta t\,,$$

O zaman zaman skalasında Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Benzer şekilde, aşağıdaki teoremde nabla için de aynı sonucu bulabiliriz.

Teorem 4.15. Varsayalım ki, $\in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w \in C_{1d}\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f \in C_{1d}^1([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $f(a) = 0$ ise

$$\int_a^b w(t)|(f^2)^\nabla|\nabla t \leq L\int_a^b |f^\nabla(t)|^2\nabla t\,,$$

dir. Öyle ki;

$$L = \sqrt{\int_a^b w^2(t)h^\nabla(t)\nabla t}\,\text{ve}\quad h(t) = (t-a)^2\text{dir.}$$

Şimdi aşağıdaki diamond-α eşitsizliği ispatlamak için hazırız.

Teorem 4.16. Varsayalım ki; ,$\alpha \in [0,1], a \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w \in C\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f \in C_{\Diamond_\alpha}^1([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha(1-\alpha)f^\Delta f^\nabla \geq 0$ ve $f(a) = 0$ ise

$$\alpha^4\int_a^b w(t)\left|(f^2)^\Delta\right|\Delta t \,+\, (1-\alpha)^4\int_a^b w(t)|(f^2)^\nabla|\nabla t \,\leq \Lambda\int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

dir. Öyle ki;

$$\Lambda = \sqrt{\int_a^b w^2(t)h^{\Diamond_\alpha}(t)\Diamond_\alpha t}\,\text{ve}\quad h(t) = (t-a)^2\text{dir.}$$

İspat: Teorem 4.14 ve Teorem 4.15 den

$$
\begin{aligned}
&\alpha^4 \int_a^b w(t)\left|(f^2)^\Delta\right|\Delta t \;+\; (1-\alpha)^4 \int_a^b w(t)|(f^2)^\nabla|\nabla t \\
&\leq \alpha^4\, K \int_a^b \left|f^\Delta(t)\right|^2 \Delta t \;+\; (1-\alpha)^4\, L \int_a^b |f^\nabla(t)|^2 \nabla t \\
&= \alpha^2\, K \int_a^b \left|\alpha f^\Delta(t)\right|^2 \Delta t \;+\; (1-\alpha)^2\, L \int_a^b |(1-\alpha) f^\nabla(t)|^2 \nabla t \\
&\leq \alpha^2\, K \int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Delta t \;+\; (1-\alpha)^2\, L \int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \nabla t \\
&= (\alpha K)\left(\alpha \int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Delta t\right) + \big((1-\alpha)L\big)\left((1-\alpha)\int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \nabla t\right) \\
&\leq \sqrt{\alpha^2 K^2 + (1-\alpha)^2 L^2}\, \sqrt{\left(\alpha \int_a^b |f^{\Diamond_\alpha}(t)|^2 \Delta t\right)^2 + \left((1-\alpha)\int_a^b |f^{\Diamond_\alpha}(t)|^2 \nabla t\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\alpha^2 K^2 + (1-\alpha)^2 L^2}\, \sqrt{\left(\int_a^b |f^{\Diamond_\alpha}(t)|^2 \Diamond_\alpha t\right)^2} \\
&= \widetilde{\Lambda} \int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha t,
\end{aligned}
$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Lambda} &= \sqrt{\alpha^2 K^2 + (1-\alpha)^2 L^2} \\
&= \sqrt{\alpha^2 \int_a^b w^2(t) h^\Delta(\mathrm{t})\Delta t \;+\; (1-\alpha)^2 \int_a^b w^2(t) h^\nabla(\mathrm{t})\nabla t} \\
&\leq \sqrt{\alpha \int_a^b w^2(t) h^{\Diamond_\alpha}(\mathrm{t})\Delta t \;+\; (1-\alpha) \int_a^b w^2(t) h^{\Diamond_\alpha}(\mathrm{t})\nabla t} \\
&= \sqrt{\int_a^b w^2(t) h^{\Diamond_\alpha}(t) \Diamond_\alpha t} = \Lambda\,,
\end{aligned}
$$

kullanılarak ispat tamamlanır.

Önceki sonuçların ispatlarındaki adımları izleyerek aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 4.17. $\alpha \in [0,1], \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w \in C\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve

$f \in C^1_{\lozenge_\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$olsun. Eğer $\alpha(1-\alpha)f^{\Delta}f^{\nabla} \geq 0$ ve $f(b)=0$ ise

$$\alpha^4 \int_a^b w(t)\left|(f^2)^{\Delta}\right|\Delta t \;+\; (1-\alpha)^4 \int_a^b w(t)|(f^2)^{\nabla}|\nabla t \;\leq \Omega \int_a^b \left|f^{\lozenge_\alpha}\right|^2 \lozenge_\alpha t$$

dir. Öyle ki;

$$\Omega = \sqrt{\int_a^b w^2(t)h^{\lozenge_\alpha}(t)\lozenge_\alpha t} \text{ ve } \quad h(t)=(b-t)^2 \text{dir.}$$

Aşağıdaki teorem Teorem 4.16 ve Teorem 4.17nin birleşimidir.

Teorem 4.18.$\alpha \in [0,1]$, $\in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $w \in C\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve

$f \in C^1_{\lozenge_\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha(1-\alpha)f^{\Delta}f^{\nabla} \geq 0$ ve $f(a)=f(b)=0$ ise

$$\alpha^4 \int_a^b w(t)\left|(f^2)^{\Delta}\right|\Delta t \;+\; (1-\alpha)^4 \int_a^b w(t)|(f^2)^{\nabla}|\nabla t \;\leq \beta \int_a^b \left|f^{\lozenge_\alpha}\right|^2 \lozenge_\alpha t$$

dir. Öyle ki;

$$\beta := \min_{u\in[a,b]_{\mathbb{T}}} v(u)$$

ve

$$v(u) := \max\left\{\sqrt{\int_a^u w^2(t)h_a^{\lozenge_\alpha}(t)\lozenge_\alpha t}\ , \qquad \sqrt{\int_u^b w^2(t)h_b^{\lozenge_\alpha}(t)\lozenge_\alpha t}\right\}$$

dir. $c \in \mathbb{T}$ sabit sayısı için $h_c(t)=(t-c)^2$ tanımlanır.

İspat: $u \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ keyfi sayısını alalım. Teorem 4.16 dan

$$\alpha^4 \int_a^u w(t)\left|(f^2)^{\Delta}\right|\Delta t \; + \; (1-\alpha)^4 \int_a^u w(t)|(f^2)^{\nabla}|\nabla t \; \leq v(u) \int_a^u \left|f^{\Diamond_\alpha}\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

Teorem 4.17 den

$$\alpha^4 \int_u^b w(t)\left|(f^2)^{\Delta}\right|\Delta t \; + \; (1-\alpha)^4 \int_u^b w(t)|(f^2)^{\nabla}|\nabla t \; \leq v(u) \int_u^b \left|f^{\Diamond_\alpha}\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

eşitsizliklerine sahibiz. Bu iki eşitsizliği toplarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\alpha^4 \int_a^b w(t)\left|(f^2)^{\Delta}\right|\Delta t \; + \; (1-\alpha)^4 \int_a^b w(t)|(f^2)^{\nabla}|\nabla t \; \leq v(u) \int_a^b \left|f^{\Diamond_\alpha}\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

$u \in [a,b]_{\mathbb{T}}$üzerinde minimuma geçersek, ispat tamamlanır.

4.3 Saker Tarafından Sonuçların Genellemeri

Bu bölümde, iki ağırlık fonksiyonu ve Saker [22] tarafından elde edilen bazı delta Opial eşitsizliklerin diamond-α türevli hallerine genellemelerini inceleyeceğiz. Başlangıç noktamız aşağıda verilen teorem olacaktır.[22]

Teorem 4.19. ([18, Teorem 1]) : $a \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $r, s \in C_{rd}\big([a,b]_{\mathbb{T}}, (0,\infty)\big)$ ve $f \in C^1_{\mathrm{rd}}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun.

Eğer $f(a) = 0$ ise

$$\int_a^b s(t)\left|(f^2)^{\Delta}(t)\right|\Delta t \leq K \int_a^b r(t)\left|f^{\Delta}(t)\right|^2 \Delta t$$

eşitsizliği vardır. Öyle ki

$$K = \sqrt{2\int_a^b \frac{s^2(t)}{r(t)}\left(\int_a^t \frac{\Delta s}{r(s)}\right)\Delta t} + \sup_{a \leq t \leq b} \frac{\mu(t)s(t)}{r(t)}$$

biçiminde tanımlanır. Buradaki ,$\mathbb{T}$ zaman skalasında tanecik fonksiyonudur.

Teorem 4.20. $a \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $r,s \in C_{rd}\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f \in C^1_{\mathrm{rd}}([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$olsun. Eğer $f(a)=0$ ise

$$\int_a^b s(t)\left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t \le K\int_a^b r(t)\left|f^\Delta(t)\right|^2\Delta t$$

eşitsizliği vardır. Öyle ki;

$$K=\sqrt{\int_a^b s^2(t)(R^2)^\Delta(t)\Delta t}\ \text{ve}\quad R(t)=\int_a^t \frac{\Delta s}{r(s)}$$

dir.

İspat: $g(t):=\int_a^t r(s)\left|f^\Delta(s)\right|^2\Delta s$ fonksiyonu tanımlanıyor. $g(a)=0$ için $g^\Delta(t)=\ r(t)\left|f^\Delta(t)\right|^2$dir.Buradan $\left|f^\Delta(t)\right|=\sqrt{\frac{g^\Delta(t)}{r(t)}}=\sqrt{R^\Delta(t)g^\Delta(t)}$ bulunur.Ayrıca

$$\begin{aligned}|f(t)|=|f(t)-f(a)|=\left|\int_a^t f^\Delta(s)\Delta s\right| &\le \int_a^t f^\Delta(s)\Delta s\\ &=\int_a^t \frac{1}{\sqrt{r(s)}}\left(\sqrt{r(s)}\left|f^\Delta(s)\right|\right)\Delta s \le \sqrt{\int_a^t \frac{\Delta s}{r(s)}}\sqrt{\int_a^t r(s)|f^\Delta(s)|^2\Delta s}\\ &=\sqrt{R(t)}\sqrt{g(t)}\end{aligned}$$

bulunur. Zaman skalasında Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}\left|(f^2)^\Delta(t)\right| &= \left|\Big(f(t)+f\big(\sigma(t)\big)\Big)f^\Delta(t)\right|\\ &\le \Big(|f(t)|+\left|f\big(\sigma(t)\big)\right|\Big)\left|f^\Delta(t)\right|\\ &\le \left(\sqrt{R(t)}\sqrt{g(t)}+\sqrt{R\big(\sigma(t)\big)}\sqrt{g\big(\sigma(t)\big)}\right)\sqrt{R^\Delta(t)g^\Delta(t)}\\ &\le \sqrt{R(t)+R\big(\sigma(t)\big)}\sqrt{g(t)+g\big(\sigma(t)\big)}\sqrt{R^\Delta(t)g^\Delta(t)}\\ &=\sqrt{(R^2)^\Delta(t)}\sqrt{(g^2)^\Delta(t)}\end{aligned}$$

bulunur. Cauchy-Schwarz eşitliğinden ve yukarıda ki ifadeden;

$$\int_a^b s(t)\left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t \le \int_a^b s(t)\sqrt{(R^2)^\Delta(t)}\sqrt{(g^2)^\Delta(t)}\Delta t$$

$$\le \sqrt{\int_a^b s^2(t)(R^2)^\Delta(t)\Delta t}\sqrt{\int_a^b (g^2)^\Delta(t)\Delta t} = K\sqrt{g^2(b)} = Kg(b)$$

$$= K\int_a^b r(t)\left|f^\Delta(t)\right|^2\Delta t$$

bulunur. Burada son kez zaman skalasında Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullandık ve İspatı tamamladık.

Benzer şekilde, aşağıdaki teoremde nabla için de aynı sonucu bulabiliriz.

Teorem 4.21. $a \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $r, s \in C_{1d}\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve $f \in C_{1\mathrm{d}}^1([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$ olsun. Eğer $f(a) = 0$ ise

$$\int_a^b s(t)|(f^2)^\nabla(t)|\,\nabla t \le L\int_a^b r(t)|f^\nabla(t)|^2\nabla t$$

eşitsizliği vardır. Öyle ki;

$$L = \sqrt{\int_a^b s^2(t)(S^2)^\nabla(t)\nabla t}\ \text{ve}\quad S(t) = \int_a^t \frac{\nabla s}{r(s)}$$

dir.

Şimdi bu eşitsizliklerin diamond-α türevi için ispatını yapabiliriz.

Teorem 4.22. $\alpha \in [0,1]$, $a \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_{\mathbb{T}}$, $r, s \in C\big([a,b]_{\mathbb{T}},(0,\infty)\big)$ ve

$f \in C_{\Diamond_\alpha}^1([a,b]_{\mathbb{T}},\mathbb{R})$olsun. Eğer $\alpha(1-\alpha)f^\Delta f^\nabla \ge 0$ ve $f(a) = 0$ ise

$$\alpha^5\int_a^b s(t)\left|(f^2)^\Delta(t)\right|\Delta t + (1-\alpha)^5\int_a^b s(t)|(f^2)^\nabla(t)|\,\nabla t \le \Lambda\int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2\Diamond_\alpha t$$

eşitsizliği vardır. Öyle ki;

$$\Lambda = \sqrt{\int_a^b s^2(t)(T^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\Diamond_\alpha t} \text{ ve } \quad T(t) = \int_a^t \frac{\Diamond_\alpha s}{r(s)}$$

dir.

İspat: Teorem 4.20 ve Teorem 4.21 den;

$$\begin{aligned}
&\alpha^5 \int_a^b s(t)\left|(f^2)^\Delta(t)\right| \Delta t + (1-\alpha)^5 \int_a^b s(t)|(f^2)^\nabla(t)| \nabla t \\
&\qquad \le \alpha^5 K \int_a^b r(t)\left|f^\Delta(t)\right|^2 \Delta t + (1-\alpha)^5 L \int_a^b r(t)|f^\nabla(t)|^2 \nabla t \\
&\qquad = \alpha^3 K \int_a^b r(t)\left|\alpha f^\Delta(t)\right|^2 \Delta t + (1-\alpha)^3 L \int_a^b r(t)|(1-\alpha) f^\nabla(t)|^2 \nabla t \\
&\qquad \le \alpha^3 K \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Delta \mathrm{t} + (1-\alpha)^3 L \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \nabla t \\
&\qquad = (\alpha^2 K)\left(\alpha \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Delta \mathrm{t}\right) \\
&\qquad + ((1-\alpha)^2 L)\left((1-\alpha) \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \nabla t\right) \\
&\qquad \le \tilde{\Lambda} \sqrt{\left(\alpha \int_a^b r(t)|f^{\Diamond_\alpha}(t)|^2 \Delta \mathrm{t}\right)^2 + \left((1-\alpha) \int_a^b r(t)|f^{\Diamond_\alpha}(t)|^2 \nabla t\right)^2} \\
&\qquad \le \tilde{\Lambda} \sqrt{\left(\int_a^b r(t)|f^{\Diamond_\alpha}(t)|^2 \Diamond_\alpha \mathrm{t}\right)^2} = \tilde{\Lambda} \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha \mathrm{t}
\end{aligned}$$

dir. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda} = \sqrt{\alpha^4 K^2 + (1-\alpha)^4 L^2}& \\
&= \sqrt{\alpha^4 \int_a^b s^2(t)(R^2)^\Delta(t)\Delta t + (1-\alpha)^4 \int_a^b s^2(t)(S^2)^\nabla(t)\nabla t} \\
&\le \sqrt{\alpha \int_a^b s^2(t)(T^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\Delta t + (1-\alpha) \int_a^b s^2(t)(T^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\nabla t} \\
&= \sqrt{\int_a^b s^2(t)(T^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\Diamond_\alpha t} = \Lambda
\end{aligned}$$

ifadesini kullanırsak,

$$\alpha^3(R^2)^\Delta \le (T^2)^{\Diamond_\alpha} \text{ve} (1-\alpha)^3(S^2)^\Delta \le (T^2)^{\Diamond_\alpha} \tag{4.6}$$

bulunur. İspatı tamamlamak için (4.6) nın doğru olduğunu gösterelim.

[18,Teorem 5.37] yi de dikkate alırsak,

$$R^\Delta = S^\nabla = \frac{1}{r}, \quad R^\nabla = \frac{1}{r^\rho} \text{ ve } S^\Delta = \frac{1}{r^\sigma}$$

ve bunların bütün pozitif türevleri bulunabilir. Bu ilişkileri ve zaman skalası kurallarını kullanarak,

$$(R^2)^\nabla = \frac{R+R^\rho}{r^\rho}, \qquad (S^2)^\Delta = \frac{S+S^\sigma}{r^\sigma}, \qquad (R^2)^\Delta = \frac{R+R^\sigma}{r},$$

$$(S^2)^\nabla = \frac{S+S^\rho}{r}, \qquad (RS)^\Delta = \frac{S}{r} + \frac{R^\sigma}{r^\sigma}, \qquad (RS)^\nabla = \frac{S}{r^\rho} + \frac{R^\rho}{r}$$

ve bunların pozitif türevleri bulunabilir. $T = \alpha R + (1-\alpha)S$ olduğundan,aşağıdaki işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}(T^2)^{\Diamond_\alpha} = \alpha(T^2)^\Delta + (1-\alpha)(T^2)^\nabla \\ &= \alpha(\alpha^2(R^2)^\Delta + 2\alpha(1-\alpha)(RS)^\Delta + (1-\alpha)^2(S^2)^\Delta) \\ &+ (1-\alpha)(\alpha^2(R^2)^\nabla + 2\alpha(1-\alpha)(RS)^\nabla + (1-\alpha)^2(S^2)^\nabla) \\ &= \alpha^3(R^2)^\Delta + (1-\alpha)^3(S^2)^\nabla + 2\alpha^2(1-\alpha)(RS)^\Delta \\ &+ 2\alpha(1-\alpha)^2(RS)^\nabla + \alpha(1-\alpha)^2(S^2)^\Delta + \alpha^2(1-\alpha)(R^2)^\nabla\end{aligned}$$

bulunur. Yani (4.6) eşitsizliğinin doğruluğu görülmüş olur.Bu da ispatı tamamlar.Bu teoremlerin ispatlarını kullanarak aşağıdaki teoremleri de ispatlayabiliriz.Bu teoremlerdan aşağıdaki teoremlerin de varlığı bulunmuş olur.

Teorem 4.23. $\alpha \in [0,1]$, $a \in \mathbb{T}$, $b \in (a,\infty)_\mathbb{T}$, $r, s \in C\big([a,b]_\mathbb{T}, (0,\infty)\big)$ ve

$f \in C^1_{\Diamond_\alpha}([a,b]_\mathbb{T}, \mathbb{R})$olsun. Eğer $\alpha(1-\alpha)f^\Delta f^\nabla \ge 0$ ve $f(a) = 0$ ise

$$\alpha^5 \int_a^b s(t)\left|(f^2)^{\Delta}(t)\right| \Delta t + (1-\alpha)^5 \int_a^b s(t)|(f^2)^{\nabla}(t)| \nabla t \leq \Omega \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

eşitsizliği vardır. Öyle ki;

$$\Omega = \sqrt{\int_a^b s^2(t)(T^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\Diamond_\alpha t} \text{ ve } \; T(t) = \int_t^b \frac{\Diamond_\alpha s}{r(s)}$$

dir.

Teorem 4.22 ve Teorem 4.23 in birleşiminden aşağıdaki teorem elde edilir.

Bu teoremin ispatı Teorem 4.18 in ispatıyla aynıdır.

Teorem 4.24. $\alpha \in [0,1]$, $a \in \mathbb{T}$, $b \in (a, \infty)_{\mathbb{T}}$, $r, s \in C\big([a,b]_{\mathbb{T}}, (0,\infty)\big)$ ve

$f \in C^1_{\Diamond_\alpha}([a,b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ olsun. Eğer $\alpha(1-\alpha)f^{\Delta}f^{\nabla} \geq 0$ ve $f(a) = f(b) = 0$ ise

$$\alpha^5 \int_a^b s(t)\left|(f^2)^{\Delta}(t)\right| \Delta t + (1-\alpha)^5 \int_a^b s(t)|(f^2)^{\nabla}(t)| \nabla t \leq \beta \int_a^b r(t)\left|f^{\Diamond_\alpha}(t)\right|^2 \Diamond_\alpha t$$

eşitsizliği vardır. Öyle ki;

$$\beta \coloneqq \min_{u \in [a,b]_{\mathbb{T}}} v(u)$$

için

$$v(u) = max\left\{\sqrt{\int_a^u s^2(t)(T_a^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\Diamond_\alpha t} \;, \sqrt{\int_u^b s^2(t)(T_b^2)^{\Diamond_\alpha}(t)\Diamond_\alpha t}\right\}$$

dir. T_c fonksiyonu ise $c \in \mathbb{T}$ sabit sayısı için $T_c(t) = \int_c^t \frac{\Diamond_\alpha s}{r(s)}$ biçiminde tanımlanır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1.R. P. Agarwal And P. Y. H. Pang, *Opial Inequalities with Applications in Differential and DifferenceEquations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

2. R. Agarwal, M. Bohner, and A. Peterson. Inequalities on time scales: a survey. Math. Inequal. Appl., 4(4):535–557, 2001.

3. P. R. Beesack, *On an integral inequality of Z. Opial*, Trans. Amer. Math. Soc., 104: 470–475, 1962.

4. M. Bohner And A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*, Birkh¨auser, Boston, 2001.

5. M. Bohner And B. Kaymakçalan, *Opial inequalities on time scales*, Ann. Polon. Math.,**77** (1):11–20, 2001.

6. M. Bohner And A. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkh¨auser, Boston, 2003.

7.M. Bohner And O. Duman, *Opial-type inequalities for diamond-alpha derivatives and integrals on time scales*, Differ. Equ. Dyn. Syst.,18 (1–2): 229–237, 2010.

8. Davis, J.M., Fadag M., Henderson, J. and Sheng, Q., An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 7(3), 395 413, 2006.

9. Ferreira, R.A.C., Sidi Ammi, M.R. and Torres, D.F.M., Diamond Jensen's inequality on time scales, *J. Inequal Appl.*, Art. ID 576876, pp.13, 2008.

10.Hilger, S. *Ein Maßkettenkalkül mit Anvendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis*, Universitat Würzburg, 1988.

11. Hilger, S., *Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus*, Results Math. 18 (1990), 18–56.

12. B. Karpuz, B. Kaymakçalan, And Ö.Öcalan, *A generalization of Opial's inequality andapplications to second-order dynamic equations*, Differ. Equ. Dyn. Syst.18 (1–2): 11–18, 2010.

13. A. Lasota, *A discrete boundary value problem*, Ann. Polon. Math.,20: 183–190, 1968.

14. Z. Olech, *A simple proof of a certain result of Z. Opial*, Ann. Polon. Math.,8: 61–63, 1960.

15. Z. Opial, *Sur une in´egalit´e*, Ann. Polon. Math.,8: 29–32, 1960.

16. Rogers Jr., J. W. and Sheng, Qin., Notes on the diamond dynamic derivative on time scales, *J. Math. Anal. Appl.*,326(1), 228 241,2007.

17. S. H. Saker, *Applications of Opial and Wirtinger inequalities on zeros of third order differential equations*, Dynam. Systems Appl.,20 (4): 479–494, 2011.

18. S. H. Saker, *Lyapunov type inequalities for a second order differential equation with a dampingterm*, Ann. Polon. Math.,103 (1): 37–57, 2011.

19. S. H. Saker, *Lyapunov's type inequalities for fourth-order differential equations*, Abstr. Appl. Anal. pages Art. ID 795825, 25, 2012.

20. S. H. Saker, R. P. Agarwal, And D. O'regan, *Gaps between zeros of second-order half-linear differential equations*, Appl. Math. Comput.,219 (3): 875–885, 2012

21. S. H. Saker, R. P. Agarwal, And D. O'regan, *New gaps between zeros of fourth-order differential equations via Opial inequalities*, J. Inequal. Appl., pages 2012: 182, 19, 2012

22. S. H. Saker, *Opial's type inequalities on time scales and some applications*, Ann. Polon. Math.,104 (3): 243–260, 2012.

23. S. H. Saker, R. P. Agarwal, And D. O'regan, *Properties of solutions of fourth-order differential equations with boundary conditions*, J. Inequal. Appl., pages 2013: 278, 15, 2013.

24. J. S. W. Wong, *A discrete analogue of Opial's inequality*, Canad. Math. Bull.,10: 115–118, 1967.

25. Z. Zhao, Y. Xu, And Y. Lı, *Dynamic inequalities on time scales*, Int. J. Pure Appl. Math. , 22 (1): 51–58, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Çorum'da ailemin ilk çocuğu olarak dünyaya geldim. İlköğrenimimi Ankara'da bulunan Dikmen Merkez İlköğretim Okulunda, lise eğitimimi yine Ankara'da bulunan Kirami Refia Alemdaroğlu Lisesinde tamamladım. Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 2011 yılında mezun olduktan sonra 2012 yılında Matematik öğretmeni olarak Maltepe Askeri Lisesi'nde göreve başladım.Şu anda bu kurumda matematik öğretmeni olarak görevime devam ediyorum. Evliyim.