YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MV-CEBİRLERİNDE TÜREVLER

Dilek KESKİN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR
2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL
(Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Alev FIRAT

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra Dalan YILDIRIM

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

MV- CEBİRLERİNDE TÜREVLER

KESKİN, DİLEK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Haziran 2016, 31 sayfa

Bu tez esas olarak yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış ve ikinci bölümde tezi anlamada kolaylık sağlayacak olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde MV-cebirlerinde türev tanımı ,dördüncü bölümde MV-cebirlerinde f-türev tanımı , beşinci bölümde ise MV-cebirlerinde simetrik ikili türev tanımı verilerek günümüze kadar bu konularda yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir. Altıncı bölümde MV- cebirlerinde simetrik ikili türev tanımından esinlenerek simetrik ikili f-türev tanımı yapılmış ve ilgili özellikleri MV-cebirlerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: MV-cebri, ideal, türev, simetrik ikili türev, simetrik ikili f-türev.

ABSTRACT

ON DERIVATIONS OF MV-ALGEBRAS

KESKİN, Dilek
M.Sc in Department of Mathematics
Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Şule AYAR ÖZBAL
Jun 2016, 31 pages

This thesis consists essentially of seven chapters. In the first and second chapter, thesis subject is introduced and related definitions and properties that will make easier to understand the thesis are given, respectively. In the third and fourth chapters, notions of derivation and symmetric derivations on MV-algebras are given and a short summary of the studies which until now has been made on these issues are mentioned. In the fifth chapter, the definiton of symmetric *f*-bi-derivation on MV-algebra is given and related properties are studied.

Key words: MV-algebras, ideal, derivation, symmetric bi-derivation, symmetric *f*-bi-derivation.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, konuyla ilgili gerekli kaynakları sağlayan, çalışmalarım boyunca ufkumu genişleterek sürekli gelişmemi sağlayan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL' a ve yine çalışmalarım boyunca sabırla beni destekleyen eşim Erdal KESKİN'e ve oğlum Ata KESKİN' e teşekkür ederim.

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "MV- Cebirlerinde Türevler" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

03.06.2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET iii
ABSTRACT iv
TEŞEKKÜR v
YEMİN METNİ vi
İÇİNDEKİLER vii
1.GİRİŞ 1
2.ÖN BİLGİLER 2
2.1 MV- Cebirlerinde Temel Tanımlar 2
2.2 Homomorfizma ve Idealler 6
3. MV-CEBİRLERİNDE TÜREV 8
4. MV-CEBİRLERİNDE f-TÜREV 16
5. MV-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ TÜREV 21
6. MV-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ f-TÜREVLER 26
7. SONUÇ 29
KAYNAKLAR DİZİNİ 30
ÖZGEÇMİŞ 31

İÇİNDEKİLER

ÖZET iii
ABSTRACT iv
TEŞEKKÜR v
YEMİN METNİ vi
İÇİNDEKİLER vii
1.GİRİŞ 1
2.ÖN BİLGİLER 2
2.1 MV- Cebirlerinde Temel Tanımlar 2
2.2 Homomorfizma ve Idealler 6
3. MV-CEBİRLERİNDE TÜREV 8
4. MV-CEBİRLERİNDE f-TÜREV 16
5. MV-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ TÜREV 21
6. MV-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ f-TÜREVLER 26
7. SONUÇ 29
KAYNAKLAR DİZİNİ 30
ÖZGEÇMİŞ 31

1.GİRİŞ

MV-cebirleri, 1920 lerde Lukasiewicz tarafından tanıtılan çok değerli (Many Valued) lojiği olan Lukasiewicz lojiğinin cebirsel semantiğidir. C.C Chang tarafından Lukasiewicz lojiğini çalışmak için tanımlanmıştır.
Chang (1958, 1959) şu tamlık teoremini kanıtlamıştır:

''[0,1] aralığı üzerindeki (standart) MV-cebirinde geçerli her MV-cebiri denklemi her MV-cebirinde doğrudur.''

Bunun denk bir ifadesi şudur: ''MV-cebirleri [0,1]-totolojilerinin kümesi olarak tanımlanan sonsuz değerli Lukasiewicz lojiğini karakterize eder''.

Önermeler lojiğinin $\rightarrow$ bağlacını içeren sınırlı, değişmeli BCK-cebirleri sınıfı ile çakışan MV-cebirleri matematiğin çeşitli alanlarında yoğun biçimde çalışılmaktadır; örneğin, topolojik uzaylar, modal lojik ve bilgisayar bilimleri gibi. Günümüzde genel kabul gören MV-cebir tanımı P. Mangani'ye aittir.

2.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile yapılacak kanıtlarda çok sık kullanılacak olan MV-cebirlerinin kapsadığı işlemlerin özellikleri homomorfizma ve idealleri verilmiştir.

2.1 MV- Cebirlerinde Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 Bir M MV-cebri $\oplus$ ikili işlemi ve $*$ birli işlemi ve 0 sabit ile her $a, b \in$M için aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir yapıdır ve (M,$\oplus$,$*$,0) ile gösterilir.

MV1) (M,$\oplus$,0) bir değişmeli monoid,

MV2) $(a^*)^* = a$,

MV3) $0^* \oplus a = 0^*$,

MV4) $(a^* \oplus b)^* \oplus b = (b^* \oplus a)^* \oplus a$ (Rasouli ve Davvaz ,2010).

Bir (M,$\oplus$,$*$,0) MV-cebri evrenini M ile gösteriyoruz. $\{0\}$ kümesinin bir MV-cebrine aşikar bir örnek oluşturduğu açıktır. M evreni birden çok elemana sahip bir MV-cebrine aşikar olmayan MV-cebri denir (Mundici , 2007).

Örnek 2.1.2 M=[0,1] gerçel aralığı olsun ve her $x, y \in [0,1]$ için $x \oplus y$ =min$\{1, x + y\}$ ve $x^* = 1 - x$ tanımlarını yapalım. O zaman ([0,1],$\oplus$,$*$,0) bir MV-cebridir (Mundici , 2007).

Bir M MV-cebrinin bir X alt kümesi M nin sıfır elemanını içeriyorsa ve M nin X e kısıtlanan işlemlerine kapalı ise M nin bir alt cebiridir (Mundici , 2007).

Örnek 2.1.3 [0,1] deki rasyonel sayılar ve her bir n $\geq$ 2 tam sayısı için n elemanlı

$X_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$ kümesi [0,1] in alt cebirlerine örnektir (Mundici , 2007).

Örnek 2.1.4 M bir MV-cebri ve X bir küme olmak üzere $\oplus, *$ işlemleri ve 0 elemanı tanımlandığında tüm $f{:}X \to$M fonksiyonlarının M^X kümesi bir MV-cebridir. $[0,1]$ den $[0,1]$ e sürekli fonksiyonlar $[0,1]^{[0,1]}$ MV-cebrinin bir alt cebiridir (Mundici , 2007).

Her bir M MV-cebri üzerinde 1 sabiti ve $\odot$, $\ominus$ işlemleri $1 = 0^*$, $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$, $x \ominus y = x \odot y^*$ olarak tanımlanır (Alshehri ,2010).

Bu tanımdan sonra $0 \neq 1$ ise bir MV-cebri aşikar değildir diyeceğiz. Aşağıdaki eşitlikler MV2) aksiyomunun sonuçlarıdır :

MV5) $1^* = 0$

MV6) $x \oplus y = (x^* \odot y^*)^*$

Bunun üzerine MV3) ve MV4) aksiyomları aşağıdaki gibi yazılabilir :

MV3') $x \oplus 1 = 1$

MV4') $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$ elde edilir. MV4) de $y = 0^*$ yazılırsa

MV7) $x \oplus x^* = 1$ elde edilir.

Uyarı 2.1.5 $[0,1]$ MV-cebrinde $x \odot y$ =max $\{0, x + y - 1\}$ ve $x \ominus y$ =max $\{0, x - y\}$ olduğu görülebilir (Mundici, 2007).

Aşağıdaki teorem bir MV-cebri üzerinde bir sıralama olanağı verir :

Teorem 2.1.6 M bir MV-cebri ve $x, y \in$M olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

i) $x^* \oplus y = 1$,
ii) $x \odot y^* = 0$,
iii) $y = x \oplus (y \ominus x)$,
iv) $x \oplus z = y$ olacak şekilde bir $z \in$M vardır (Chang ,1958)

Tanım 2.1.7 M bir MV-cebri ve $x, y \in$M olsun. Teorem 2.1.6 nın denk koşullarını sağlayan $x \leq y$ bağıntısına M nin doğal sıralaması denir (Cignoli ve Mundici ,2000)

Önerme 2.1.8 Bir M MV-cebri üzerindeki doğal sıralama bir kısmi sıralama bağıntısıdır (Cignoli ve Mundici ,2000)

Kanıt :

Yansıma MV7) ye denktir; ters simetri Teorem 2.1.6 ii) ve iii) den; geçişme Teorem 2.1.6 iv) den sonuçlandırılır. Bir MV-cebrinde $\leq$ bir kısmi sıralama bağıntısı her $x, y \in$ M MV-cebri için $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul $x \wedge y = x$ olması şeklinde tanımlanır (Alshehri ,2010).

Eğer M üzerinde tanımlı $\leq$ sıralama bağıntısı total ise M doğrusal sıralıdır denir. Herhangi bir M MV-cebri için B(M) kümesi

$\mathrm{B(M)} = \{x \in \mathrm{M}: x \oplus x = x\} = \{x \in \mathrm{M}: x \odot x = x\}$ olarak tanımlandığında $(\mathrm{B(M)}, \oplus, *, 0)$, M nin en büyük alt cebri bir Boolean cebridir (Alshehri ,2010).

Teorem 2.1.9 M bir MV-cebri olsun. Her bir $a \in$ M için a^*,

$\begin{cases} a \oplus x = 1 \\ a \odot x = 0 \end{cases}$ denklemlerinin tek x çözümüdür (Cignoli ve Mundici ,2000).

Kanıt :

Teorem 2.1.6 i) ve ii) dikkate alındığında $a \oplus x = 1$, $a^* \leq x$ ve $a \odot x = 0$, $x \leq a^*$ yazılır. Buradan $a^* \leq x \leq a^*$, yani $a^* = x$ elde edilir.

Bir MV-cebri üzerinde doğal sıralamanın bazı özellikleri aşağıda kanıtsız olarak verilmiştir :

Teorem 2.1.10 Her M MV-cebrinde doğal sıralama aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $x \leq y \iff y^* \leq x^*$,

ii) $x \leq y$ ise her bir $z \in$M için $x \oplus z \leq y \oplus z$ ve $x \odot z \leq y \odot z$ dir.

iii) $x \odot y \leq z \iff x \leq y^* \oplus z$ (Cignoli ve Mundici ,2000).

Önerme 2.1.11 Her bir MV-cebri üzerinde doğal sıralama bir kafes yapısı belirler. Daha açık olarak x ve y elemanlarının $x \vee y$ birleşimi ve $x \wedge y$ kesişimi aşağıdaki gibidir :

$$x \vee y = (x \odot y^*) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y \quad ,$$

$$x \wedge y = (x^* \vee y^*)^* = x \odot (x^* \oplus y)$$ (Mundici, 2007).

Önerme 2.1.12 Aşağıdaki denklemler her MV-cebrinde geçerlidir :

i) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$,

ii) $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$,

iii) $(x \ominus y) \wedge (x \ominus z) = 0$ (Cignoli ve Mundici ,2000).

Teorem 2.1.13 M bir MV-cebri ve $x, y, z \in$M olsun.
O zaman aşağıdakiler geçerlidir :

i) $x \ominus 0 = x$, $0 \ominus x = 0$, $x \ominus x = 0$, $1 \ominus x = x^*$, $x \ominus 1 = 0$,

ii) $x \odot y \leq x \wedge y \leq x$, $y \leq x \vee y \leq x \oplus y$,

iii) $x \oplus y = 0$ ise $x = y = 0$ ve $x \odot 1 = x$ dir.

iv) $x \oplus y = y \Leftrightarrow x \wedge y^* = 0$,

v) $x \oplus y = y$ gerek ve yeter koşul $x \odot y = x$ dir.

vi) $x \odot y = x \odot z$ ve $x \oplus y = x \oplus z$ ise $y = z$ dir (Davvaz ,2012).

Önerme 2.1.14 M bir doğrusal sıralı MV-cebri olsun . O zaman her $x, y, z \in$ M için $x \oplus y = x \oplus z$ *ve* $x \oplus z \neq 1$ ise $y = z$ dir (Chang ,1958).

2.2 Homomorfizma ve Idealler

Tanım 2.2.1 M ve X MV-cebirler olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir f :M→ X fonksiyonuna bir homomorfizma denir.

H1) $h(0) = 0$,

H2) $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$,

H3) $h(x^*) = h(x)^*$

h bire-bir ise h ye bir injektif homomorfizma, örten ise sürjektif homomorfizma denir. Bir injektif ve sürjektif homomorfizmaya bir izomorfizma denir.

Bir h: M → X homomorfizmasının çekirdeği
Ker(h)=$h^{-1}(0) = \{x \in$ M: $h(x) = 0\}$ kümesidir (Mundici, 2007).

Tanım 2.2.2 M bir MV-cebri ve I , M nin bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlandığında I ya M nin bir ideali denir.

I1) 0∈ I ,

I2) $x \in$ I , y ∈M ve $y \leq x$ ise $y \in$ I dır.

I3) $x \in$ I ve $y \in$ I ise $(x \oplus y) \in$ I dır.

I4) M deki her bir x ve y için $(x \ominus y) \in$ I ve $(y \ominus x) \in$ I

Koşulları sağlanıyorsa I ya bir asal idealdir denir. M nin hiçbir öz ideali tarafından kapsanmayan bir idealine maksimal ideal denir (Mundici, 2007).

Önerme 2.2.3 M ve X MV-cebirler olsun ve h:M→ X bir homomorfizma olsun. O zaman aşağıdakiler vardır :

i) X in her J ideali için h^{-1}(J)={$x \in$ M : $h(x) \in$ J} M nin bir idealidir. Özellikle Ker(h), M nin bir idealidir ;

ii) $h(x) \leq h(y) \Leftrightarrow (x \ominus y) \in$ Ker(h) ;

iii) h injektiftir ⟺ Ker(h)={0} ;

iv) Ker(h)$\neq$ M $\Leftrightarrow$ X aşikar değildir ;

v) Ker(h) M nin bir asal idealidir ancak ve ancak X aşikar değildir ve X in bir alt cebiri olarak h(M) bir MV-cebridir (Cignoli ve Mundici ,2000).

Önerme 2.2.4 M bir MV-cebri ise M nin tüm öz idealleri asaldır (Cignoli ve Mundici ,2000).

Sonuç Teorem 2.2.5 Bir MV-cebrinin her öz ideali asal ideallerinin bir kesişimidir (Cignoli ve Mundici ,2000).

Sonuç Teorem 2.2.6 Her aşikar olmayan MV-cebrinin bir maksimal ideali vardır (Cignoli ve Mundici ,2000).

Önerme 2.2.7 M ve X MV-cebirler ve M , X in bir maksimal ideali olsun. O zaman aşağıdakiler vardır :

1) Her h: M $\rightarrow X$ bir homomorfizması için h^{-1}(M) ters görüntüsü M nin bir maksimal idealidir.

2) X in herhangi bir S alt cebiri için S$\cap$M , S nin bir maksimal idealidir (Cignoli ve Mundici, 2000).

3. MV-CEBİRLERİNDE TÜREV

Türev kavramı cebirsel sistemlerin yapısının ve özelliğinin araştırılmasını kolaylaştırır. Burada halkalardaki türev kavramını MV-cebirlerine uygulanmış ve özelliklerinden bazıları araştırılmıştır.

Tanım 3.1 M bir MV-cebri ve d:M→M bir fonksiyon olsun.
Eğer her $x, y \in$ M için
$d(x \odot y) = (d(x) \odot y) \oplus (x \odot d(y))$ ise
d:M→M fonksiyonuna M nin bir türevi denir (Alshehri , 2010).

Örnek 3.2 M=$\{0, a, b, 1\}$ ve $\oplus, *$ işlemleri Tablo1 ve Tablo2 deki gibi verilsin. O zaman (M, $\oplus$, $*$,0) bir MV-cebridir.

d: M → M dönüşümü $d(x) = \begin{cases} 0\,; & x = 0, a, 1 \; ise, \\ a\,; & x = b \quad\;\; ise, \end{cases}$ tanımlansın.

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

(Tablo 1)

$*$	0	a	b	1
	1	b	a	0

(Tablo 2)

$d(a \odot b) = 0$ ve

$d(a \odot b) = (d(a) \odot b) \oplus (a \odot d(b)) = (0 \odot b) \oplus (a \odot a)(0 \oplus a) = a$

olduğundan d , M nin bir türevi değildir (Alshehri ,2010).

Örnek 3.3 M bir MV-cebri ve d:M→M , $x \to d(x) = 0$ olarak tanımlansın. O zaman d , M üzerinde bir türevdir ve d ye sıfır türev denir (Lia-Xia ve Kun-Lun ,2008).

Örnek 3.4 M=$\{0, x_1, x_2, x_3, 1\}$ olsun ve Tablo3 ve Tablo4 ele alındığında (M, $\oplus$, $*$,0) bir MV-cebridir. d: M $\rightarrow$ M dönüşümü

$d(x) = \begin{cases} 0\,; & x = 0, x_1, x_3 \ ise, \\ x_2\,; & x = x_2, x_4, 1 \ ise\,, \end{cases}$ olacak şekilde tanımlandığında d nin M nin

bir türevi olduğu kolayca görülebilir (Lia-Xia ve Kun-Lun ,2008).

$\oplus$	0	x_1	x_2	x_3	x_4	1
0	0	x_1	x_2	x_3	x_4	1
x_1	x_1	x_3	x_4	x_3	1	1
x_2	x_2	x_4	x_2	1	x_4	1
x_3	x_3	x_3	1	x_3	1	1
x_4	x_4	1	x_4	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

(Tablo 3)

$*$	0	x_1	x_2	x_3	x_4	1
	1	x_4	x_3	x_2	x_1	0

(Tablo 4)

Önerme 3.5 M bir MV-cebri olsun. Her x, y ∈M için aşağıdakiler denktir:

i) $x \leq y$,

ii) $y \oplus x^* = 1$,

iii) $x \odot y^* = 0$ (Alshehri , 2010).

Aşağıdaki önermede M üzerinde bir türevin özellikleri ele alınmıştır.

Önerme 3.6 M bir MV-cebri ve d, M nin bir türevi olsun. O zaman her x∈M için aşağıdakiler sağlanır:

i) $d(0) = 0$,

ii) $d(x) \odot x^* = x \odot d(x^*) = 0$,

iii) $d(x) = d(x) \oplus (x \odot d1)$,

iv) $d(x) \leq x$,

v) Eğer I ,M MV-cebrinin bir ideali ise o zaman $d(\mathrm{I}) \subseteq$ I dır (Alshehri , 2010).

Kanıt :

i) Tanım 3.1 de $x = 0$ yazılırsa

$d(0) = d(0 \odot 0) = (d(0) \odot 0) \oplus (0 \odot d(0)) = 0 \oplus 0 = 0$ elde edilir.

ii) $x \in$M olsun . O zaman

$0 = d(0) = d(x \odot x^*) = (d(x) \odot x^*) \oplus (x \odot d(x^*))$ Teorem 2.1.13 iii) den $d(x) \odot x^*$=0= $x \odot d(x^*)$ elde edilir.

iii) $x \in$M olsun. O zaman

$d(x) = d(x \odot 1) = (d(x) \odot 1) \oplus (x \odot d1) = d(x) \oplus (x \odot d1)$

iv) Önce $x \odot x^*$=0 olduğunu anımsatalım.

Şimdi $d(0) = d(x \odot x^*) = (d(x) \odot x^*) \oplus (x \odot d(x^*))$ yazılır .

ii) den $d(x) \odot x^*$=0 ve $d(x) \leq x$ elde edilir.

v) $y \in d$(I) olsun. O zaman bir $x \in$ I için $y = d(x)$ dir.

iv) uyarınca $y = d(x) \leq x$ sonuçlanır. I bir ideal olduğu için $y \in$ I ve dolayısıyla d(I) $\subseteq$ I elde edilir.

Tanım 3.7 M bir MV-cebri olsun . Önerme 2.1.11 de belirlenen dağılmalı kafese 0, 1 ekleyelim ve bunu L(M) ile gösterelim. L(M) nin tüm tümlenmiş elemanlarının kümesine M nin Boole merkezi denir. B(M) ile gösterilir (Alshehri , 2010).

Önerme 3.8 M bir MV-cebri olsun. O zaman her $x \in$ M için aşağıdaki koşullar denktir :

1) $x \in B$(M),
2) $x \vee x^*$=1,
3) $x \wedge x^*$=0,
4) $x \oplus x = x$,
5) $x \odot x = x$,
6) Her $y \in$ M için $x \oplus y = x \vee y$,
7) Her $y \in$ M için $x \odot y = x \wedge y$ (Cignoli ve Mundici ,2000).

Önerme 3.9 M bir MV-cebri ve d, M nin bir türevi olsun. O zaman

i) $d(B(\mathrm{M})) \subseteq B(\mathrm{M})$,

ii) Her $x, y \in B(\mathrm{M})$ için $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ (Cignoli ve Mundici ,2000).

Kanıt:

i) $y \in B(\mathrm{M})$ olsun. O zaman $y = d(x)$ olacak şekilde $x \in B(\mathrm{M})$ vardır. Önerme 3.8 5) den $d(x) = d(x \odot x) = (d(x) \odot x) \oplus (x \odot d(x))$ yazabiliriz. $x \in B(\mathrm{M})$ ve $d(x) \leq x$ olduğundan $x \odot d(x) = x \wedge d(x) = d(x)$ dir.

O halde $d(x) = d(x) \oplus d(x)$, yani $y = d(x) \in B(\mathrm{M})$ elde edilir.

ii) $x , y \in B(\mathrm{M})$ olsun. O zaman önerme 3.8 7) den

$d(x \wedge x) = d(x \odot y) = (d(x) \odot y) \oplus (x \odot d(y))$=($d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$

yine Önerme 3.8 6) nın sonucudur.

Sonuç Teorem 3.10 M bir MV-cebri ve B(M)={0,1} olsun. d , M üzerinde bir türev ise o zaman $d(1) = 0$ ya da $d(1) = 1$ dir (Cignoli ve Mundici ,2000).

Kanıt:

$B = \{0,1\}$ ise önerme 3.9 i) den $d(1) \in B$ dir. O halde $d(1) \in \{0,1\}$, $d(1) = 0$ ya da $d(1) = 1$ verir.

Teorem 3.11 d , M bir MV-cebri üzerinde bir türev olsun. O zaman $x \wedge d(1) \wedge (d(x))^* = 0$ ve dolayısıyla $x \wedge d(1) \wedge x^* = 0$ dır (Davvaz , 2012).

Teorem 3.12 d bir M MV-cebri üzerinde bir türev olsun.
O zaman aşağıdakiler vardır:

1) $x \leq d(1)$ ise $d(x) = x$ ve $x \in B(\mathrm{M})$ dır.

2) $d(1) \leq x$ ise $d(1) \leq d(x)$ dir.

3) $d(d1) = d(1)$ dir (Cignoli ve Mundici ,2000).

Tanım 3.13 M bir MV-cebri ve d:M→M bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in$ M için $x \leq y$, $d(x) \leq d(y)$ yi gerektiriyorsa d ye bir izoton veya monoton ya da sıra koruyan fonksiyon denir (Alshehri , 2010).

Örnek 3.14 M , Örnek3.4 teki gibi verilen bir MV-cebri olsun. Buradan d , M nin bir izoton türevidir (Alshehri , 2010).

Önerme 3.15 d , MV-cebrinin bir türevi ve $x, y \in$ M olsun. Eğer $x \leq y$ ise o zaman aşağıdakiler sağlanır:

i) $d(x \odot y^*)=0$,

ii) $d(y^*) \leq x^*$,

iii) $d(x) \odot d(y^*)=0$ (Alshehri , 2010).

Önerme 3.16 M bir MV-cebri ve d M nin bir türevi olsun. O zaman her $x \in$ M için aşağıdakiler sağlanır:

i) $d(x) \odot d(x^*) = 0$,

ii) $d(x^*) = (dx)^*$ olması için gerek ve yeter koşul d nin M üzerinde birim dönüşüm olmasıdır (Alshehri , 2010).

Önerme 3.17 M bir MV-cebri ve d M nin bir türevi olsun. Eğer her $x \in$ M için $d(x^*) = d(x)$ ise aşağıdakiler sağlanır :

i) $d(1) = 0$,

ii) $d(x) \odot d(x) = 0$,

iii) Eğer d M nin bir izoton türevi ise o zaman d sıfır dönüşümüdür. Yani her $x \in$M için $d(x) = 0$ dir (Alshehri , 2010).

Kanıt :

i) $d(x^*) = d(x)$ olduğundan $d(1) = d(0^*) = 0$ ise $d(1) = 0$ dır.

ii) Önerme 3.16 i) den $d(x) \odot d(x^*) = 0 \Longrightarrow d(x) \odot d(x) = 0$ dır.

iii) $x \leq 1 \wedge d(1) \geq 0 \Longrightarrow d(x) \leq d(1) = 0 \Longrightarrow d(x) \leq 0 \wedge 0 \leq d(x) \Longrightarrow d(x) = 0$ dır.

Aşağıdaki teorem M üzerinde izoton bir türevin temel özelliklerini vermektedir.

Teorem 3.18 d bir M MV-cebri üzerinde bir türev olsun.

O zaman her $x, y \in$ M için aşağıdakiler denktir :

1) izoton ,
2) $d(x) \leq d(1)$,
3) $d(x) = d(1)\odot x$,
4) $d(x \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$,
5) $d(x \vee y) = d(x) \vee d(y)$,
6) $d(x\oplus y) = d(x)\oplus d(y)$,
7) $d(x\odot y) = d(x)\odot d(y)$ (Davvaz, 2012).

Kanıt :

1) $\Longrightarrow$ 2) : Açıktır.

2) $\Longrightarrow$ 3) : $d(x) \leq x$ nedeniyle $d1\odot d(x) \leq d1\odot x$ dir. Öte yandan $d(x) \leq d1$ ve $d1 \in B$(M) olduğundan $d1\odot d(x) = d1 \wedge d(x) = d(x)$ elde edilir. Böylece $x\odot d1 \leq d(x)\oplus(x\odot d1) = d(x) \leq x\odot d1$ ve buradan her $x \in$M için $d(x) = x\odot d1$ e ulaşılır.

1) : $x \leq y$ olsun. O zaman $x\odot d1 \leq y\odot d1$ dir ve 3) den $d(x) \leq d(y)$ elde edilir.

3) $\Longrightarrow$ 4) : $d1 \in B$(M) olduğundan

$d(x \wedge y) = d1\odot(x \wedge y) = d1 \wedge (x \wedge y) = (d1 \wedge x) \wedge (d1 \wedge y) = d(x) \wedge d(y)$ elde edilir.

4) $\Longrightarrow$ 1) : $x \leq y$ olsun. O zaman $x \wedge y = x$ ve buradan da $d(x \wedge y) = d(x)$ ve 4) den $d(x) \wedge d(y) = d(x)$ yani $d(x) \leq d(y)$ elde edilir.

3) $\Longrightarrow$ 5) : L(M) dağılmalı bir kafes ve $d1 \in B$(M) olduğu için

$d(x \vee y) = d1\odot(x \vee y) = d1 \wedge (x \vee y) = (d1 \wedge x) \vee (d1 \wedge y) = d(x) \vee d(y)$ elde edilir.

$5) \Longrightarrow 3)$: Kanıt $4) \Longrightarrow 1)$ in kanıtına benzerdir.

Teorem 3.19 M bir MV-cebri ve $a \in B$(M) ve her $x, y \in$ M olsun. O zaman aşağıdakiler vardır :

i) $a \wedge (x \oplus y) = (a \wedge x) \oplus (a \wedge y)$

ii) $a \vee (x \oplus y) = (a \vee x) \oplus (a \vee y)$ (Jun ,1998).

$3) \Longrightarrow 6)$: Şimdi Teorem 3.15 i) den

$d(x \oplus y) = d(1) \odot (x \oplus y) = (d(1) \odot x) \oplus (d(1) \odot y) = d(x) \oplus d(y)$ sonuçlanır.

$6) \Longrightarrow 2)$: MV3') $x \oplus 1 = 1$ den $d(1) = d(x \oplus 1) = d(x) \oplus d(1)$ yazılır. O halde $x \in$ M için $d(x) \leq d(1)$ elde edilir.

$3) \Longrightarrow 7)$:

$d(x \odot y) = d1 \odot (x \odot y) = d1 \odot d1 \odot x \odot y = (d1 \odot x) \odot (d1 \odot y) = d(x) \odot d(y)$ elde edilir.

$7) \Longrightarrow 2)$: $d(x) = d(x \odot 1) = d(x) \odot d(1) \leq d(1)$ elde edilir.

Teorem 3.20 d:M→M bir MV-cebrinin bir izoton türevi olabilmesi için d nin bir kafes türevi yani $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ ve d(M)⊆ B(M) olması için gerek ve yeter koşuldur. Teoremdeki d(M)⊆ B(M) koşulu kaldırılırsa izoton bir d MV-cebri türevi bir kafes türevidir. Fakat d izoton olmazsa bir kafes türevi bir MV-cebri türevi olmayabilir (Davvaz , 2012).

Sonuç Teorem 3.21 d bir M MV-cebri türevi olsun. Eğer d izoton ise her $x \in$ M için $d\big(d(x)\big) = d(x)$ dir. Ayrıca d(M)⊆ d(B) dir .

Bu sonucun tersi genelde doğru değildir (Cignoli ve Mundici ,2000).

Tanım 3.22 M bir MV-cebri ve d M nin bir türevi olsun. Eğer her $x, y \in$ M için $d(x \oplus y) = d(x) \oplus d(y)$ ise d ye bir toplamsal türev denir (Alshehri , 2010).

Kanıt

i) $x \in \mathrm{M}$ $için$

$d(0) = d(x \odot 0) = (d(x) \odot f(0)) \oplus (f(x) \odot d(0)) = f(x) \odot d(0)$

$x = 0$ alınırsa $d(0) = f(0) \odot d(0) = 0$ ise $d(0) = 0$ elde edilir.

ii) $x \in \mathrm{M}$ olsun. O zaman

$0 = d(0) = d(x \odot x^*) = (d(x) \odot f(x^*)) \oplus (f(x) \odot d(x^*))$

Buradan $(d(x) \odot f(x^*)) = 0$ ve $(f(x) \odot d(x^*)) = 0$ elde edilir.

iii) $x \in \mathrm{M}$ olsun. O zaman

f homomorfizma olduğundan ii) den $(d(x) \odot f(x^*)) = 0$ ise $d(x) \leq f(x)$ dir.

(iv) $x \in \mathrm{M}$ olsun. O zaman

$d(x) = d(x \odot 1) = \big(d(x) \odot f(1)\big) \oplus (f(x) \odot d1) = d(x) \oplus (f(x) \odot d1)$ olur.

Teorem 4.5 M bir MV-cebri ve d, M üzerinde f izomorfizma olacak şekilde f-türev ve I M nin bir ideali olsun. O zaman $d(\mathrm{I}) \subseteq f(\mathrm{I})$ dır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

$y \in d(\mathrm{I})$ ise $y = d(x)$olacakşekilde $x \in \mathrm{I}$ vardır.

Teorem 5.4 iii) den $y = d(x) \leq f(x) \in f(\mathrm{I})$ elde edilir. $f(\mathrm{I})$ idealdir.

O halde $y \in f(\mathrm{I})$ dır. Yani $d(\mathrm{I}) \subseteq f(\mathrm{I})$ dır.

Teorem 4.6 d, M MV-cebri üzerinde f-türev ve $x, y \in \mathrm{M}$ olsun.

Eğer $x \leq y$ o zaman

i) $d(x \odot y^*) = 0$,

ii) $d(x) \leq f(y)\ ve\ d(y^*) \leq f(x)^*$,

iii) $d(x) \odot d(y^*) = 0$ dır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

i) $x \leq y\ ise\ x \odot y^* = 0$ dır. $d(x \odot y^*) = d(0) = 0$ olur.

5) $\Rightarrow$ 3) : Kanıt 4) $\Rightarrow$ 1) in kanıtına benzerdir.

Teorem 3.19 M bir MV-cebri ve $a \in B(\mathrm{M})$ ve her $x, y \in \mathrm{M}$ olsun. O zaman aşağıdakiler vardır :

i) $a \wedge (x \oplus y) = (a \wedge x) \oplus (a \wedge y)$

ii) $a \vee (x \oplus y) = (a \vee x) \oplus (a \vee y)$ (Jun ,1998).

3) $\Rightarrow$ 6) : Şimdi Teorem 3.15 i) den $d(x \oplus y) = d(1) \odot (x \oplus y) = (d(1) \odot x) \oplus (d(1) \odot y) = d(x) \oplus d(y)$ sonuçlanır.

6) $\Rightarrow$ 2) : MV3$'$) $x \oplus 1 = 1$ den $d(1) = d(x \oplus 1) = d(x) \oplus d(1)$ yazılır. O halde $x \in \mathrm{M}$ için $d(x) \leq d(1)$ elde edilir.

3) $\Rightarrow$ 7):
$d(x \odot y) = d1 \odot (x \odot y) = d1 \odot d1 \odot x \odot y = (d1 \odot x) \odot (d1 \odot y) = d(x) \odot d(y)$ elde edilir.

7) $\Rightarrow$ 2) : $d(x) = d(x \odot 1) = d(x) \odot d(1) \leq d(1)$ elde edilir.

Teorem 3.20 d:M$\rightarrow$M bir MV-cebrinin bir izoton türevi olabilmesi için d nin bir kafes türevi yani $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ ve $d(\mathrm{M}) \subseteq B(\mathrm{M})$ olması için gerek ve yeter koşuldur. Teoremdeki $d(\mathrm{M}) \subseteq B(\mathrm{M})$ koşulu kaldırılırsa izoton bir d MV-cebri türevi bir kafes türevidir. Fakat d izoton olmazsa bir kafes türevi bir MV-cebri türevi olmayabilir (Davvaz , 2012).

Sonuç Teorem 3.21 d bir M MV-cebri türevi olsun. Eğer d izoton ise her $x \in \mathrm{M}$ için $d(d(x)) = d(x)$ dir. Ayrıca $d(\mathrm{M}) \subseteq d(\mathrm{B})$ dir .

Bu sonucun tersi genelde doğru değildir (Cignoli ve Mundici ,2000).

Tanım 3.22 M bir MV-cebri ve d M nin bir türevi olsun. Eğer her $x, y \in \mathrm{M}$ için $d(x \oplus y) = d(x) \oplus d(y)$ ise d ye bir toplamsal türev denir (Alshehri , 2010).

Örnek 3.23 M Örnek 3.4 teki gibi verilen bir MV-cebri olsun. Kolayca görülüyor ki d M nin bir toplamsal türevidir (Alshehri , 2010).

Teorem 3.24 d M MV-cebrinin sıfırdan farklı toplamsal dönüşümü olsun. O zaman $d(B(M)) \subseteq B(M)$ dir (Alshehri , 2010).

Kanıt :

$y \in d(B(\mathrm{M}))$, $y = d(x)$ ve $x \in B(\mathrm{M})$ olsun.

$y \oplus y = d(x) \oplus d(x) = d(x \oplus x) = d(x) = y$ ise $y \in B(\mathrm{M})$ dir.

Teorem 3.25 d M doğrusal sıralı MV-cebrinin bir toplamsal sıralı türevi olsun. O zaman $d(x) = 0$ veya $d(1) = 1$ dir (Alshehri , 2010).

Önerme 3.26 M bir doğrusal sıralı MV-cebri ve d_1, d_2 M nin türevleri olsun. Her $x \in \mathrm{M}$ $d_1 d_2(x) = d_1(d_2(x))$ olacak şekilde tanımlansın.
Eğer $d_1 d_2(x) = 0$ ise $d_1(x) = 0$ veya $d_2(x) = 0$ (Alshehri , 2010).

Önerme 3.27 d bir doğrusal sıralı MV-cebrinin sıfırdan farklı toplamsal türevi olsun. O zaman her $x \in \mathrm{M}$ için $d(x \odot x) = x \oplus x$ dir (Alshehri , 2010).

Teorem 3.28 M bir doğrusal sıralı MV-cebri ve d , M nin sıfırdan farklı bir toplamsal türevi olsun. O zaman $d^{-1}(0) = \{x \in \mathrm{M} \,/\, d(x) = 0\}$ kümesi M nin bir idealidir (Alshehri , 2010).

Kanıt :

$d(0) = 0$ dır. O halde $0 \in d^{-1}(0)$ dır. $x, y \in d^{-1}(0)$ olsun.

$d(x \oplus y) = d(x) \oplus d(y) = 0 \oplus 0 = 0$ yani $x \oplus y \in d^{-1}(0)$

$x \in d^{-1}(0)$ ve $y \leq x$ olsun. d izoton bir türev olduğundan $d(y) \leq d(x)$ dir.

O halde $d(y) \leq d(x) = 0$ yani $d(y) \leq 0$ ve $0 \leq d(y)$ yani $d(y) = 0$ dır.

Buradan $y \in d^{-1}(0)$ elde edilir.

4. MV-CEBİRLERİNDE *f*-TÜREVLER

Bu bölümde, MV-cebirlerinde *f*-türev tanımı verilmiş ve ilgili bazı özellikleri MV-cebirlerinde incelenmiştir.

Tanım 4.1 M bir MV-cebri ve $d: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ bir fonksiyon olsun.
Eğer her $x, y \in \mathrm{M}$ için $d(x \odot y) = (d(x) \odot f(y)) \oplus (f(x) \odot d(y))$ olacak şekilde bir $f: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ fonksiyonu varsa d dönüşümüne M üzerinde bir ***f*-türev** denir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Örnek 4.2 M Örnek 3.2 deki gibi verilen bir MV-cebri olsun.
Örnekte verilen d M nin bir türevi değildir.
M üzerinde $f: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ b, & x = a \\ a, & x = b \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$ olacak şekilde tanımlansın.

Görülüyor ki, d M de bir f türevdir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Örnek 4.3 M Örnek 3.4 deki gibi verilen bir MV-cebri olsun. d nin M nin bir türevi olduğu kolayca görülebilir. O zaman $f: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, x_1, x_3 \\ 1, & x = x_2, x_4, 1 \end{cases}$$ şeklinde tanımlansın.

Ayrıca d, M de bir f türevdir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Önerme 4.4 M bir MV-cebri ve , d M nin bir f -türevi olsun. O zaman her $x \in \mathrm{M}$ için aşağıdakiler sağlanır:

i) $d(0) = 0$,

ii) $d(x) \odot f(x^*) = f(x) \odot d(x^*) = 0$,

iii) $d(x) \leq f(x)$,

iv) $d(x) = d(x) \oplus (f(x) \odot d1)$ dir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt

i) $x \in$ M *için*

$d(0) = d(x \odot 0) = (d(x) \odot f(0)) \oplus (f(x) \odot d(0)) = f(x) \odot d(0)$

$x = 0$ alınırsa $d(0) = f(0) \odot d(0) = 0$ ise $d(0) = 0$ elde edilir.

ii) $x \in$ M olsun. O zaman

$0 = d(0) = d(x \odot x^*) = (d(x) \odot f(x^*)) \oplus (f(x) \odot d(x^*))$

Buradan $(d(x) \odot f(x^*)) = 0$ ve $(f(x) \odot d(x^*)) = 0$ elde edilir.

iii) $x \in$ M olsun. O zaman

f homomorfizma olduğundan ii) den $(d(x) \odot f(x^*)) = 0$ ise $d(x) \leq f(x)$ dir.

(iv) $x \in$ M olsun. O zaman

$d(x) = d(x \odot 1) = \big(d(x) \odot f(1)\big) \oplus (f(x) \odot d1) = d(x) \oplus (f(x) \odot d1)$ olur.

Teorem 4.5 M bir MV-cebri ve d, M üzerinde f izomorfizma olacak şekilde f-türev ve I M nin bir ideali olsun. O zaman $d(\mathrm{I}) \subseteq f(\mathrm{I})$ dır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

$y \in d(\mathrm{I})$ ise $y = d(x)$olacakşekilde $x \in$ I vardır.

Teorem 5.4 iii) den $y = d(x) \leq f(x) \in f(\mathrm{I})$ elde edilir. $f(\mathrm{I})$ idealdir.

O halde $y \in f(\mathrm{I})$ dır. Yani $d(\mathrm{I}) \subseteq f(\mathrm{I})$ dır.

Teorem 4.6 d, M MV-cebri üzerinde f-türev ve $x, y \in$ M olsun.

Eğer $x \leq y$ o zaman

i) $d(x \odot y^*) = 0$,

ii) $d(x) \leq f(y)$ *ve* $d(y^*) \leq f(x)^*$,

iii) $d(x) \odot d(y^*) = 0$ dır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

i) $x \leq y$ *ise* $x \odot y^* = 0$ dır. $d(x \odot y^*) = d(0) = 0$ olur.

ii) i) den $0 = d(0) = d(x \odot y^*) = (d(x) \odot f(y^*)) \oplus (f(x) \odot d(y^*))$ $d(x) \odot f(y^*) = 0$ ve $f(x) \odot d(y^*) = 0$ elde edilir.

Buradan $d(x) \leq f(y)$ ve $f(x) \leq dy$ ise $d(y^*) \leq f(x)^*$ elde edilir.

iii) f bir homomorfizma olduğundan $x \leq y$ ise $f(x) \leq f(y)$ dir.
Teorem 5.4 iii) den $d(x) \leq f(x)$ ise $d(x) \leq f(x)) \leq f(y)$ olur.
O halde $d(x) \odot d(y^*) \leq f(y) \odot dy^* \leq f(y) \odot f(y^*) = 0$ dır.
O halde $d(x) \leq d(y)$ ise $d(x) \odot d(y^*) = 0$ olur.

Teorem 4.7 d , M MV-cebiri üzerinde f -türev olsun. O zaman

i) $d(x) \odot d(x^*) = 0$,

ii) $d(x^*) = (d(x))^*$ olması için gerek ve yeter koşul $d(x) = f(x)$ olmasıdır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

i) Teorem 4.6 iii) den $d(x) \odot d(y^*) = 0$ dır.
$y = x$ yazılırsa $d(x) \odot d(x^*) = 0$ olur.

ii) $d = f$ olsun.

Her $x \in$ M için f homomorfizma olduğundan $f(x^*) = (f(x))^*$ dır. Yani $d(x^*) = (d(x))^*$ dır. Tersine olarak , $d(x^*) = (d(x))^*$ olsun. $d(x^*) \odot d(x) = 0$, $f(x) \odot (d(x))^* = 0$ gerektirir. O halde $f(x) \leq d(x)$ dir. Bunun yanında $d(x) \leq f(x)$ dir. Sonuç olarak $d(x) = f(x)$ dir.

Önerme 4.8 d, M MV-cebri üzerinde f-türev olsun.
Eğer her $x \in$ M $için$ $d(x^*) = d(x)$ ise o zaman

i) $d(1) = 0$,

ii) $d(x) \odot d(x) = 0$,

iii) d izoton ise $d(x) = 0$ dır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt :

i) $d(1) = d(0^*) = d(0) = 0$ dır.

ii) Teorem 4.7 i) den $d(x) \odot d(x^*) = 0$ ise $d(x) \odot d(x) = 0$ elde edilir.

iii) Her $x \in \mathrm{M}$ için $x \leq 1$ ve d izoton olduğundan her $x \in \mathrm{M}$ için $d(x) \subseteq d1 = 0$ dır. Yani $d(x) = 0$ dır.

Önerme 4.9 d, M MV-cebri üzerinde f-türev olsun.
O zaman $d(B(\mathrm{M})) \subseteq B(\mathrm{M})$ dir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt :

$y \in d(B(\mathrm{M}))$ olsun. O zaman $y = d(x)$ olacak şekilde $x \in B(\mathrm{M})$ vardır. $y \oplus y = d(x) \oplus d(x) = d(x \oplus x) = d(x) = y$ dir. Yani $y \in B(\mathrm{M})$ dir.

Teorem 4.10 d doğrusal sıralı bir MV- cebrinin toplamsal f-türevi olsun. Ozaman $d(0) = 0$ veya $d(1) = 1$ dir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt :

d doğrusal sıralı bir MV- cebrinin toplamsal f-türevi ve $d(1) \neq 1$ olsun. O zaman her $x \in \mathrm{M}$ için $d(1) = d(x \oplus x^*) = d(x) \oplus d(x^*)$ dır. Bunun yanı sıra $d(1) = d(x \oplus 1) = d(x) \oplus d(1)$ dir. MV-cebirlerinin sadeleştirme özelliğinden $d(1) \neq 1$ olduğundan $d(x^*) = d(1)$ dir. $x = 1$ alınırsa $0 = d(0) = d(1)$ dir.

O halde her $x \in \mathrm{M}$ için, $0 = d(1) = (x \oplus 1) = d(x) \oplus d(1) = d(x)$ dir.

Teorem 4.11 M doğrusal sıralı bir MV-cebri ve f bir izomorfizma olsun. Ayrıca d_1, d_2 M nin f-türevleri olsun. Her $x \in \mathrm{M}$ için $d_1 d_2(x) = d_1(d_2(x))$ olacak şekilde tanımlansın.

Eğer $d_1 d_2(x)$=0 ise, o zaman $d_1(x) = 0$ veya $d_2(x) = 0$ dır (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

$d_1 d_2(x)$=0 ve $d_2(x) \neq 0$ olsun.

$0 = d_1\ d_2(x) = d_1\big(d_2(x)\big) = d_1(d_2(x) \oplus (f(x) \odot d_2(1))$ Teorem 5.4 iv) den

$0 = d_1 d_2(x) \oplus d_1(f(x) \odot 1) = d_1 d_2(x) \oplus d_1\big(f(x)\big)$ dır. Buradan

$d_1 d_2(x) = 0$ ve $d_1\big(f(x)\big) = 0$ elde edilir. O halde , f bir izomorfizma olduğundan her $x \in$ M için $d_1\,(x) = 0$ dır. Yani $d_1 = 0$ dir.

Teorem 4.12 Doğrusal sıralı M MV-cebrinin her sıfırdan farklı toplamsal f -türevi izotondur (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

d doğrusal sıralı M MV-cebrinin sıfırdan farklı toplamsal f-türevi ve her $x, y \in$ M olsun.

Eğer $x \leq y$ ise $x^* \oplus y = 1$ dir. Teorem 4.10 den $d \neq 0$ olduğunda $d(1) = 1$ dir.

O halde $1 = d(1) = d(x^* \oplus y) = d(x^*) \oplus d(y)$ ise $(d(x^*))^* \leq d(y)$ dir. Ayrıca Teorem 4.3 iii) den $d(x^*) \leq \big(f(x)\big)^*$ dir. Yani $f(x) \leq \big(d(x^*)\big)^*$ dır.

Bu yüzden $f(x) \leq \big(d(x^*)\big)^* \leq d(y)$ dir. Ayrıca Teorem 4.3 iii) den $d(x) \leq f(x)$ dir. O halde $d(x) \leq f(x) \leq d(y)$ dir.

Yani $d(x) \leq d(y\,)$ dir.

Teorem 4.13 M doğrusal sıralı MV-cebri ve d sıfırdan farklı toplamsal f-türevi olsun. O zaman $d^{-1}(0) = \{x \in \text{M}\colon d(x) = 0\}$ M nin idealidir (L. Kamalı Ardekanı ve B. Davvaz, 2013).

Kanıt:

Teorem 4.3 i) den $d(0) = 0$ dır. O zaman $0 \in d^{-1}(0)$ dır.

$x, y \in d^{-1}(0)$ olsun; o zaman $d(x \oplus y) = d(x) \oplus d(y) = 0 \oplus 0 = 0$ dır.

Yani $x \oplus y \in d^{-1}(0)$ dır.

$x \in d^{-1}(0)$ ve $y \leq x$ olsun. O zaman $d(x) = 0$ dır.

Teorem 4.12 den $d(y) \leq d(x) = 0$ dır. Yani $d(y) = 0$; $y \in d^{-1}(0)$ dır

5. MV-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ TÜREV

Teorem 5.1 M bir MV-cebri olsun. $D: \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to M$ dönüşümü her $x, y \in M$ için $D(x,y) = D(y,x)$ ise D ye simetrik dönüşüm denir (Hasret Yazarlı , 2011).

Tanım 5.2 M bir MV-cebri olsun. $D: \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ simetrik dönüşümü için $d(x) = D(x,x)$ olacak şekilde tanımlı $d: \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ dönüşümüne D nin izi denir (Hasret Yazarlı , 2011).

Tanım 5.3 M bir MV-cebri ve $D: \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ simetrik dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in \mathrm{M}$ için $D(x \odot y, z) = (D(x,z) \odot y) \oplus (x \odot D(y,z))$ ise D ye M üzerinde bir simetrik ikili türev denir (Hasret Yazarlı , 2011).

M üzerinde bir simetrik ikili türevin her $x, y, z \in \mathrm{M}$ için $D(x, y \odot z) = (D(x,y) \odot z) \oplus (y \odot D(x,z))$ yi sağladığı açıktır.

Örnek 5.4 M=$\{0, a, b, 1\}$ olsun ve Tablo1 ve Tablo2 ele alınsın. O zaman $(\mathrm{M}, \oplus, *, 0)$ bir MV-cebridir. $D: \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ dönüşümü

$$D(x,y) = \begin{cases} b, & (x,y) = (b,b), (b,1), (1,b) \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$ olacak şekilde tanımlansın.

O zaman D, M nin bir simetrik ikili türevidir (Hasret Yazarlı , 2011).

Önerme 5.5 M bir MV-cebri ve D , M nin bir simetrik ikili türevi ve , d , D nin bir izi olsun. O zaman her $x \in \mathrm{M}$ için

i) $d(0) = 0$,

ii) $d(x) \odot x^* = x \odot d(x^*) = 0$,

iii) $d(x) = d(x) \oplus (x \odot D(x,1))$ dir.

iv) $d(x) \leq x$,

v) Eğer I , MV-cebrinin bir ideali ise $d(\mathrm{I}) \subseteq \mathrm{I}$ dır (Hasret Yazarlı , 2011).

Kanıt :

i) Her $x \in$ M için

$D(x,0) = D(x,0\odot 0) = (D(x,0)\odot 0)\oplus(0\odot D(x,0)) = 0\oplus 0 = 0$ dır.

d , D nin izi olduğundan

$d(0) = D(0,0) = D(0\odot 0,0) = (D(0,0)\odot 0)\oplus(0\odot D(0,0)) = 0\oplus 0$

Yani $d(0) = 0$ dır.

ii) Her $x \in$ M için,

$0 = D(x,0) = D(x, x\odot x^*) = (D(x,x)\odot x^*)\oplus(x \odot D(x,x^*))$

$= (d(x)\odot x^*)\oplus(x\odot d(x^*)) = 0\oplus 0 = 0$ dır.

Ve böylece $d(x)\odot x^* = 0$ ve $x\odot d(x^*) = 0$ elde edilir.

iii) Her $x \in$ M için

$d(x) = D(x,x) = D(x\odot 1, x) = (D(x,x)\odot 1)\oplus(x\odot D(1,x))$

$d(x) = D(x,x) = D(x,x)\oplus(x\odot D(x,1)) = d(x)\oplus(x\odot D(x,1))\ dir.$

iv) Her $x \in$ M için

$1 = 0^* = (d(x)\odot x^*)^* = [(d(x^*)\oplus(x^*)^*)^*]^* = d(x^*)\oplus x$

O zaman , Teorem 2.1.6 i) den $d(x^*)\oplus x = 1 \Rightarrow d(x) \leq x$ dir.

(v) $y \in d(\mathrm{I})$ olsun. O zaman $x \in \mathrm{I}\ için\ d(x) = y$ dir.

iv) den $d(x) \leq x$ dir ve $y \in$ I ve I , M nin bir ideali olduğundan $d(\mathrm{I}) \subseteq$ I dır.

SONUÇ :

Her $x \in$ M için ,

$x\odot D(x,x^*) = 0$ olduğundan $D(x,x^*) \leq x^*$ ve $x \leq [D(x,x^*)]^*$ dır.

Her $x, y \in$ M için ,

$0 = D(0,y) = D(x\odot x^*, y) = (D(x,y)\odot x^*)\oplus(x\odot D(x^*,y))$

Teorem 2.1.6 ii) den

$D(x,y)\odot x^* = 0 \Longrightarrow D(x,y) \leq x$ ve $x\odot D(x^*,y) = 0 \Longrightarrow D(x^*,y) \leq x^*$ dır.

Benzer şekilde , her $x, y \in$ M için $D(x,y) \leq y$ ve $D(x,y^*) \leq y^*$ elde edilir (Hasret Yazarlı , 2011).

Önerme 5.6 M bir MV-cebri , D M nin bir simetrik ikili türevi ve d , D nin izi olsun. Eğer her $x, y \in$ M için $x \leq y$ ise aşağıdakiler elde edilir.

i) $d(x \odot y^*) = 0$,

ii) $d(y^*) \leq x^*$,

iii) $d(x) \odot d(y^*) = 0$ (Hasret Yazarlı , 2011).

Kanıt :

i) Her $x, y \in$ M için $x \leq y$ ise $x \odot y^* = 0$ dır.

(Teorem 2.1.6 ii) den) $x \odot y^* = 0$ ise $d(x \odot y^*) = d(0) = 0$ dır.

ii) $0 = D(0, y^*) = D(x \odot y^*, y^*) = (D(x, y^*) \odot y^*) \oplus (x \odot D(y^*, y^*))$ ise $(D(x, y^*) \odot y^*) = 0$ ve $(x \odot D(y^*, y^*)) = x \odot d(y^*) = 0$ olur. Teorem 2.1.6 ii) den $D(x, y^*) \leq y$ ve $x \leq d(y)$ elde edilir. O zaman $d(y^*) \leq x^*$ dır.

iii) Her $x, y \in$ M için $x \leq y$ ise $d(x) \leq d(y)$ ve $d(x) \odot d(y^*) = 0$ olur.

Önerme 5.7 M bir MV-cebri olsun. D, M nin bir simetrik ikili türevi ve d , D nin izi olsun. O zaman aşağıdakiler elde edilir.

i) $d(x) \odot d(x^*) = 0$,

ii) $d(x^*) = (d(x))^*$ olması için gerek ve yeter koşul d nin bir M üzerinde birim dönüşüm olmasıdır (Hasret Yazarlı , 2011).

Kanıt :

i) $d(x) \leq x$ ise $d(x) \odot d(x^*) \leq x \odot d(x^*) = 0$

O zaman $d(x) \odot d(x^*) = 0$ olur.

ii) $x \odot d(x^*) = x \odot (d(x))^* = 0$

Önerme 3.6 ii) den $x \leq d(x)$ ve $d(x) \leq x$ olduğundan $d(x) = x$ elde edilir. Yani d , M üzerinde birim dönüşümdür. Eğer d , M üzerinde bir birim dönüşüm ise her $x \in$ M için $d(x^*) = (d(x))^*$ dır.

Tanım 5.8 M bir MV-cebri ve D, M üzerinde bir simetrik ikili türev olsun. Eğer her $x, y, z \in$ M için $x \leq y$ olduğunda $D(x, z) \leq D(y, z)$ oluyorsa D ye izoton denir (Hasret Yazarlı , 2011).

d, D nin izi ve D izoton ise her $x, y \in$ M için $x \leq y$ ise $d(x) \leq d(y)$ dir.

Örnek 5.9 M Örnek 5.4 de verilen bir MV-cebri olsun.

D: M × M → M dönüşümü

$$D(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \{(0,0),(a,0),(0,a)(b,0)(0,b),(1,0),(0,1),(a,b),(b,a)\} \\ b, & (x,y) \in \{(b,b),(1,b),(b,1)\} \\ a, & (x,y) \in \{(a,a),(1,a),(a,1)\} \\ 1, & (x,y) \in \{(1,1)\} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın.

D nin M üzerinde bir izoton simetrik ikili dönüşüm olduğu açıktır.

Önerme 5.10 M bir MV-cebri olsun. D, M nin bir simetrik ikili türevi ve d, D nin izi olsun. Eğer her $x \in$ M için $d(x^*) = d(x)$ ise aşağıdakiler sağlanır :

i) $d(1) = 0$,

ii) $d(x) \odot d(x) = 0$,

iii) D üzerinde izoton ise $d(x) = 0$ dır (Hasret Yazarlı , 2011).

Tanım 5.11 M bir MV-cebri ve D, M üzerinde bir simetrik ikili türev olsun. Eğer her $x, y, z \in$ M için $D(x \oplus y, z) = D(x, z) \oplus D(y, z)$ ise D ye ikili toplamsal dönüşüm denir (Hasret Yazarlı , 2011).

Teorem 5.12 M bir MV-cebri , D M üzerinde bir toplamsal simetrik ikili türev ve d, D nin izi olsun. O zaman $d\big(B(M)\big) \subseteq B(M)$ dir (Hasret Yazarlı, 2011).

Kanıt :

$y \in d\big(\mathrm{B(M)}\big)$ olsun. O zaman $x \in$ B(M) için $y = d(x)$ dir. Ayrıca

$$y \oplus y = d(x) \oplus d(x) = D(x,x) \oplus D(x,x) = D(x \oplus x, x) = D(x,x) = d(x) = y$$

O halde $y \in$ B(M) dir. Yani $d\big(B(M)\big) \subseteq$ B(M) dir.

Teorem 5.13 M bir MV-cebri , D M üzerinde bir toplamsal simetrik ikili türev ve d , D nin izi olsun. O zaman $d(0) = 0$ ya da $d(1) = 1$ dir (Hasret Yazarlı , 2011).

Kanıt :

Her $x \in$ M için $x \oplus x^* = 1$ ve $x \oplus 1 = 1$ olduğundan
$d(1) = D(1,1) = d(x \oplus x^*, 1) = D(x,1) \oplus D(x^*,1)$ ve
$d(1) = D(1,1) = D(x \oplus 1,1) = D(x,1) \oplus D(1,1) = D(x,1) \oplus d1$
Eğer $d(1) \neq 1$ Önerme 2.1.14 den $D(x^*,1) = D(1,1) = d(1)$ dir.
x yerine 1 yazılarak $d(1) = 0$ elde edilir. Her $x \in$ M için ,
$0 = d(1) = D(x,1) \oplus d1 = D(x,1)$ ve
$D(x,1) = D(x, x \oplus 1) = D(x,x) \oplus D(x,1)$ .O zaman $D(x,1) = d(x) = 0$ dır.

Teorem 5.14 M bir doğrusal sıralı MV-cebri D_1 *ve* D_2 M üzerinde bir toplamsal simetrik ikili türev ve d_1 , d_2 sırası ile D_1 , D_2 nin izi olsun.
Eğer her $x \in$ M için $(d_1 d_2)(x) = d_1(d_2(x))$ olmak üzere ,
$d_1(d_2(\mathrm{x})) = 0$ ise $d_1(x) = 0$ ya da $d_2(\mathrm{x}) = 0$ dır (Hasret Yazarlı , 2011).

Kanıt :

$d_1 d_2(x) = 0$ ve $d_2(\mathrm{x}) \neq 0$ olsun. Bu yüzden $d_2(1) = 1$ dir.
Her $x \in$ M için $0 = (d_1 d_2)(x) = d_1(d_2(x)) = d_1\left(d_2(x) \oplus (x \odot D(1,1))\right)$
Ayrıca $d_2(1) = 1$ olduğundan
$D_2(x,1) = D_2(x \odot 1,1) = (D_2(x,1) \odot 1) \oplus (x \odot D_2(1,1)) = D_2(x,1) \oplus x$ dir.
Teorem 2.1.13 v) den $x \odot D_2(x,1) = x$ elde edilir.
Böylece $0 = d_1(d_2(x) \oplus x) = D_1(d_2(x) \oplus x, d_2(x) \oplus x)$
$= D_1(d_2(x), d_2(x)) \oplus D_1(d_2(x), x) \oplus D_1(x, d_2(x)) \oplus D_1(x,x)$ den
$D_1(d_2(x), x) = 0$ veya $d(x) = 0$ dır.

Her $x \in$ M için $D_1(d_2(x), x) = 0$ olsun.
x yerine 1 yazılarak $D_1(1,1) = 0$ yani $d_1(1) = 0$ elde edilir.
Her $x \in$ M için ,

$0 = d_1(1) = D_1(x \oplus 1,1) = D_1(x,1) \oplus d_1(1)$ ve $D_1(x,1) = 0$ elde edilir. O halde $0 = D_1(x,1) = D_1(x, x \oplus 1) = d_1(x) \oplus d_1(1) = d_1(x)$

6. MV-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ f-TÜREVLER

Bu bölümde, MV-cebirlerinde simetrik ikili f-türev tanımı verilmiş ve ilgili bazı özellikleri MV-cebirlerinde incelenmiştir.

Tanım 6.1 M bir MV-cebri ve D : M ×M→M bir simetrik dönüşüm olsun. Her $x, y, z \in$ M için

$$D(x \odot y, z) = \big(D(x,z) \odot f(y)\big) \oplus \big(f(x) \odot D(y,z)\big)$$

olacak şekilde bir f: M→M fonksiyonu varsa D:M× M →M dönüşümüne M üzerinde **simetrik ikili f-türev** denir.

M üzerinde simetrik ikili f-türevin her $x, y, z \in$ M için

$D(x, y \odot z) = \big(D(x,y) \odot f(z)\big) \oplus \big(f(y) \odot D(x,z)\big)$ bağıntısını da sağladığı açıktır.

Örnek 6.2 M=$\{0, a, b, 1\}$ olsun ve Tablo1 ve Tablo2 ele alınsın. O zaman (M, ⊕, ∗,0) bir MV-cebridir. D: M × M → M dönüşümü MV-cebri üzerinde

$D(x,y) = \begin{cases} 1; & x \neq y \ ise, \\ 0; & x = y = 1 \end{cases}$; olacak şekilde tanımlandığında

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

(Tablo 1)

$*$	0	a	b	1
	1	b	a	0

(Tablo 2)

$$D(b \odot b, a) = (D(b,a) \odot b) \oplus \big(b \odot D(b,a)\big) = (1 \odot b) \oplus (b \odot 1) = (b \oplus b) = b \neq$$
$$\neq D(b \odot b, a) = D(b,a) = 1$$

olduğundan D, MV-cebri üzerinde bir simetrik ikili türev değildir.

Ancak D, her $x \in$ M için $f(x) = 1$ tanımlanan f dönüşümü ile bir simetrik ikili f-türevdir.

Önerme 6.3 M bir MV-cebri ve d , M nin D simetrik ikili f-türevinin izi olsun. Eğer $f(0) = 0$ ise

i) $d(0) = 0$ dır.

ii) Her $x \in$ M için $d(x) \odot f(x^*) = 0 = f(x) \odot D(x, x^*)$ dır.

iii) Her $x \in$ M için $d(x) = d(x) \oplus (f(x) \odot D(x, 1))$ dir.

iv) Her $x \in$ M için $d(x) \leq f(x^*)^*$ dır.

Kanıt :

i) $x \in$ M ve $f(0) = 0$ olsun. Buradan

$$D(x,0) = D(x, 0\odot 0) = \big(D(x,0)\odot f(0)\big) \oplus \big(f(0)\odot D(x,0)\big)$$
$$= (D(x,0)\odot 0) \oplus \big(0\odot D(x,0)\big) = 0\oplus 0 = 0 \text{ dır.}$$

d , D nin izi olduğundan

$$d(0) = D(0,0) = D(0\odot 0, 0) = \big(D(0,0)\odot f(0)\big) \oplus \big(f(0)\odot D(0,0)\big)$$
$$= (D(0,0)\odot 0) \oplus \big(0\odot D(0,0)\big) = 0\oplus 0 = 0 \text{ elde edilir.}$$

ii) $x \in$ M olsun.

$0 = D(x,0) = D(x, x\odot x^*) = \big(D(x,x)\odot f(x^*)\big) \oplus \big(f(x)\odot D(x,x^*)\big)$ dır.

Yani , $0 = d(x)\odot f(x^*) \oplus \big(f(x)\odot D(x,x^*)\big)$ dır. Buradan $d(x)\odot f(x^*) = 0$ ve $f(x)\odot D(x,x^*) = 0$ elde edilir.

iii) $x \in$ M olsun.

$$d(x) = D(x,x) = D(x, x\odot 1) = \big(D(x,x)\odot f(1)\big) \oplus \big(f(x)\odot D(x,1)\big)$$
$$= (d(x)\odot 1) \oplus \big(f(x)\odot D(x,1)\big) = d(x) \oplus \big(f(x)\odot D(x,1)\big) \text{ dir.}$$

Yani , $d(x) = d(x) \oplus \big(f(x)\odot D(x,1)\big)$ elde edilir.

iv) $x \in$ M olsun.

$1 = 0^* = \big(d(x)\odot f(x^*)\big)^* = [(d(x)^* \oplus f(x^*)^*)^*]^* = d(x) \oplus f(x^*)^*$ dır.

Yani , $1 = d(x) \oplus f(x^*)^* = f(x^*)^* \oplus d(x)^*$ dır.

O halde Teorem 2.1.6 i) den $d(x) \leq f(x^*)^*$ dır.

Sonuç 6.4 Her $x \in$ M için ,

$f(x) \odot D(x, x^*)=0$ olduğundan $D(x, x^*) \leq f(x)^*$ ve $f(x) \leq D(x, x^*)^*$ dır.

Aynı zamanda, her $x , y \in$ M için

$0 = D(x \odot x^*, y) = (D(x, y) \odot f(x^*)) \oplus (f(x) \odot D(x^*, y))$ olduğundan

$D(x, y) \odot f(x^*) = 0$ ve $f(x) \odot D(x^*, y) = 0$ elde edilir.

O halde , $D(x, y) \leq f(x^*)^*$ ve $D(x^*, y) \leq f(x)^*$ dır.

Önerme 6.5 M bir MV-cebri , f M üzerinde sıra koruyan bir dönüşüm olmak üzere $f(0) = 0$ ve D, M nin simetrik ikili f-türevi olsun.

Eğer her $x, y \in$ M için $x \leq y$ ise aşağıdakiler sağlanır :

i) $d(f(x) \odot f(y)^*) = 0$,

ii) $d(y)^* \leq f(x)^*$,

iii) $d(x) \odot d(y)^* = 0$ dır.

Kanıt :

i) $x, y \in$ M için $x \leq y$ olsun. f sıra koruyan olduğundan $f(x) \leq f(y)$ dir.

(7) den $f(\mathrm{x}) \odot f(\mathrm{y})^* \leq f(\mathrm{y}) \odot f(\mathrm{y})^* = 0$ dır. O halde $f(\mathrm{x}) \odot f(\mathrm{y})^* = 0$ elde edilir.

$\mathrm{d}(0) = 0$ olduğundan $\mathrm{d}(f(\mathrm{x}) \odot f(\mathrm{y})^*) = 0$ dır.

ii) $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in$ M için $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ olsun. f sıra koruyan olduğundan $f(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{y})$ dir.
(7) den $f(x) \odot d(y)^* \leq f(y) \odot d(y)^* \leq f(\mathrm{y}) \odot f(\mathrm{y})^* = 0$ elde edilir.

Yani $f(x) \odot d(y)^* = 0$ dır ve $\mathrm{d}(\mathrm{y})^* \leq f(\mathrm{x})^*$ dır.

iii) $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in$ M için $\mathrm{x} \leq \mathrm{y}$ olsun. f sıra koruyan olduğundan $f(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{y})$ dir. O halde , $\mathrm{d}(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{x}^*)^* \leq f(\mathrm{y}^*)^*$ dır.

Yani $\mathrm{d}(\mathrm{x}) \leq f(\mathrm{y}^*)^*$ dır.

O halde $d(x) \odot (d(y))^* \leq f(y^*)^* \odot (d(y))^* \leq f(y^*)^* \odot f(y^*)$ dır.

Buradan $d(x) \odot \mathrm{d}(y)^* = 0$ elde edilir.

7. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı MV-cebirlerinde simetrik ikili f-türev için yapılan çalışmalardaki boşlukların kapatılması ve diğer türev tanımları ile MV-cebirlerinin yapısının incelenmesidir. Bu tezde önce tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı tanım ve özellikler sunulmuştur.Üçüncü bölümde MV-cebirlerinde türev, dördüncü bölümde simetrik ikili türev ,beşinci bölümde f-türev konularıyla ilgili bugüne kadar yapılmış olan çalışmaların özeti verilmiştir. Altıncı bölümde MV-cebirlerinde dördüncü bölümde verilen simetrik ikili türev tanımından esinlenerek MV-cebirlerinde simetrik ikili f-türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri MV-cebirlerinde incelenmiştir.

Bundan sonra farklı türev çeşitleri ve bunların özellikleri MV-cebirlerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alshehri, N.O., 2010, ''Derivations of MV-algebras'', Hindawi Publishing Corporation ,International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences , vol, Article ID 312027, 8 pages.

Chang, C. C., 1958, '' Algebraic analysis of many valued logics'', Transactions of the American Mathematical Society, vol. 88, pp. 467-490.

Cignoli, R., Do'Ottaviano, I., Mundici, D., 2000, ''Algebraic foundations of many valued reasoning'', Kluwer Academic, Dotrecht, The netherlands .

Mundici,D., 2007 ,''MV-Algebras'', Department of Mathematics ''Ulisse Dini'', University of Florence,Italy.

Davvaz, B. and Kamalı Ardekanı, L., 2013, '' f derivations of MV-algebras'', Journal of Algebraic Systems, Vol. 1, No. 1, pp 11-31

Davvaz, B. and Rasouli, S., 2010, ''Roughness in MV-algebras'', Information Sciences, vol. 180, no.5, pp.737-747.

Davvaz, B., Zareyan, L., 2012, Leoreanu-Fotea , V. ,(3,3)-ary differential rings , Mediterr.J.Math. 9 , 357-378.

Jun, Y.B., Xu, Y.K.Q., 1998,positive implication and associative fieters of lattice implication algebra, Bull. Korean Math.Soc.,35(1):53-61 .

Lia-Xia, S.D., Kun-Lun, Z., 2008, The equivalent definitions of lattice implication algebras, International seminar on future information technology and management engineering .

Yazarlı, H., 2013,''A Note On Derivations In MV-algebras'',Miskolc Mathematical Notes ,Vol. 14 , No. 1, pp. 345-354.

ÖZGEÇMİŞ

Dilek KESKİN 1971 yılında İzmir'de doğdu. Lise öğrenimini İzmir Kız Lisesi'nde tamamladı. 1989 yılında kazanmış olduğu Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 1993 yılında mezun oldu. Mezun olduğu yıl İzmir'de özel bir dershanede Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 10 yıl boyunca özel okul ve dershanelerde görev yaptıktan sonra Artvin ili Hopa ilçesi Atatürk Anadolu Lisesi'ne atandı. 2012 yılından beri İzmir Nevvar Salih İşgören Eğitim Kampüsü 1 Mesleki Teknik ve Anadolu Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. TUBİTAK'ın düzenlemiş olduğu "Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık" kamplarına katılmıştır. Evli ve bir erkek çocuk annesidir.