YAŞAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Sirelgün ALBAY

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Sunum Tarihi: 13.07.2016

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Burcu Silindir YANTIR

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

q-LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Sirelgün ALBAY

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Temmuz 2016, 47 sayfa

Laplace dönüşümü lineer sabit katsayılı diferansiyel denklemleri ve belli integral denklemlerini çözmek için etkili bir metottur. Z-dönüşümü ise Laplace dönüşümünün ayrık formudur ve lineer fark denklemleri ve belli toplam denklemlerinin çözümünde kullanılır.

q-Laplace dönüşümü Laplace ve $\mathbb{Z}$ dönüşümlerinin tek çatı altında toplanarak genellenmesi durumudur. $q \to 0$ limit durumunda Laplace dönüşümüne ve $q \to 1$ limit durumunda ise Z-dönüşümüne indirgenir. q-Laplace dönüşümü q-diferansiyel denklem çözümlerinde kullanılır.

Bu tezde q-Laplace dönüşümünün temel özelliklerini ve q-diferansiyel denklemlerin çözümünde nasıl kullanıldığını çalıştık.

Anahtar Kelimeler: q-analiz, q-üstel fonksiyon, laplace dönüşümü, q-Laplace dönüşümü.

ABSTRACT

q-LAPLACE TRANSFORM

ALBAY, Sirelgün

M.Sc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Ahmet YANTIR

June 2016, 47 pages

The Laplace transform provides on effective method for solving linear differential equations and certain integral equations. The Z-transform can be considered as a discrete version of Laplace transform and suitable for linear difference equations and certian summation equations.

q-Laplace transform is unfied form of Laplace and Z-transform and reduces to Laplace transform as $q \to 0$ and reduces to Z-transform as $q \to 1$ and is used for solving linear q-differential equations.

In this thesis we study basic properties of q-Laplace transform and we show how it is used for solving q-differential equations.

Key words: q-calculus, q-exponential functions, Laplace transform, q-Laplace transform.

TEŞEKKÜRLER

Tezimin yazımında bana yardımcı olan Enver ÇİLENGİROĞLU'na, aileme, dostlarıma ve tezimi hazırlarken bana rehberlik eden saygıdeğer tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR' a, çok teşekkür ederim.

Sirelgün ALBAY

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**q-LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ**"adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynaklar dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Sirelgün ALBAY

01.07.2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1 GİRİŞ

q-diferansiyel denklemler üzerine çalışanlar geçen yüzyılın başlarında özellikle F.H. Jackson [13], R.D. Carmic [8], T.E. Mason [16], C.R. Adams [2], W.J. Trijizinsky [18] tarafından başlatılmış ve Poincere, Picerd ve Ramanujan gibi ünlü matematikçilerin de ilgisini çekmiştir [5].

80'li yıllarda ise yoğun ve biraz da şaşırtıcı ilgi bu yeni fark analizi, ortogonal polinomlar, q-kombinatorikler, q-aritmetik ve q-integrallenebilir sistemler ve q-verqasqonel sistemler gibi matematiğin bir çok alanında konularında toplanmıştır [9].

q-analizin tarihi aslında 18. yüzyıla Leonard Euler'e dayanır. Euler "q" terimini ünlü kitabı Introductio de tanımlamıştır. q kuvvet serileri ise Cristoph Gudermann ve Karl Weierstraß tarafından tanımlanmıştır. Oliver Heaviside da q analizin kurulmasına katkıda bulunan bir diğer ünlü matematikçidir.

Biz bu tezde q-Laplace Dönüşümü üzerinde çalıştık. q-Laplace dönüşümü ve özellikleri tanıtılmıştır. q-türevin q-Laplace dönüşümü verilerek q-differansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü yardımı ile çözümleri için bir adım atılmıştır. Bu amaçla q-analizin temel konuları 2. ve 3. bölümde özet olarak verilmiştir. q-analiz ile ilgili daha detaylı bilgiler için okuucular [1, 3, 6, 7, 9, 12, 13, 21] numaralı referansları inceleyebilirler.

2 q – ANALİZ

Tezin bu bölümünde q-Laplace dönüşümü için gerekli olan q-analizi tanımlarını vereceğiz. Bu bölümde sırasıyla q-türev, polinomlar için q-Taylor formulü, q-üstel fonksiyonlar, q-trigonometrik fonksiyonlar, q-integral, q-gamma ve q-beta fonksiyonlarının tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. Bu bölümde [21] referanslarından faydalanılmıştır. q-Analiz ile ilgili detaylı bilgiler [7, 9, 11, 16, 21] nolu referanslarda bulunabilir.

2.1 q- TÜREV

Tanım 2.1. $f(x)\colon R \to R$ herhangi bir fonksiyon ve $q > 0$ ve $q \neq 1$ bir reel sayı olmak üzere,

$$d_q\ f(x) = f(qx) - f(x) \tag{2.1}$$

ifadesine q-diferansiyel denir [21].

2.1.1 İki Fonksiyonun Çarpımının q-Diferansiyeli

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere iki fonksiyonun çarpımının q diferansiyeli

$$\begin{aligned} d_q\ \big(f(x)g(x)\big) &= f(qx).g(qx) - f(x).g(x) \\ &= f(qx).g(qx) - f(x).g(x) + f(qx).g(x) - f(qx).g(x) \\ &= f(qx).\big(g(qx) - g(x)\big) + g(x).(f(qx) - f(x)) \\ &= f(qx).d_q\ g(x) + g(x).d_q\ f(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

ile verilir.

Tanım 2.2. $f(x): R \to R$ herhangi bir fonksiyon ve $q > 0$ ve $q \neq 1$ bir reel sayı olmak üzere, f fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır [21].

Tanım 2.3. $n \in Z^+$ olmak üzere $[n] = \frac{q^n - 1}{q-1}$ ifadesine n 'nin q-benzeri denir.

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \tag{2.4}$$

biçiminde de ifade edilir [21].

2.1.2 İki Fonksiyonun Çarpımının ve Bölümünün q-Türevi

Herhangi iki fonksiyon $f(x)$ ve $g(x)$ olmak üzere, (2.3) denkleminden yararlanarak $(f.g)(x)$ fonksiyonunun q-türevi

$$\begin{aligned} D_q\big(f(x)g(x)\big) &= \frac{d_q\big(f(x)g(x)\big)}{d_q x} \\ &= \frac{f(qx).d_q g(x) + g(x).d_q f(x)}{x(q-1)} \\ &= f(qx)\frac{d_q g(x)}{d_q x} + g(x)\frac{d_q f(x)}{d_q x} \\ &= f(qx).D_q g(x) + g(x).D_q f(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklinde elde edilir. Simetriden dolayı,

$$D_q\big(f(x)g(x)\big) = g(qx).D_q f(x) + f(x).D_q g(x) \tag{2.6}$$

eşitliği de sağlanır.

İki fonksiyonun bölümünün q-türevi ise

$$D_q\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_q\, f(x)$$

$$g(qx)\, D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)}\, D_q\, g(x) = D_q\, f(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_q\, f(x) - \frac{f(x)}{g(x)} D_q\, g(x)}{g(qx)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).D_q\, f(x) - f(x).D_q\, g(x)}{g(x).g(qx)} \tag{2.7}$$

şeklindedir.

q-Türev de genelde zincir kuralı yoktur. Ancak $\propto, \beta$ sabitler ve $u(x) = \propto x^{\beta}$, olmak üzere $f(u(x))$ bileşke fonksiyonunun q-türevi için zincir kuralı

$$D_q\, (f(u(x)) = D_q\, \left(f(\propto x^{\beta})\right) = \frac{f(\propto x^{\beta} q^{\beta}) - f(\propto x^{\beta})}{x(q-1)}$$

$$= \frac{f(\propto x^{\beta} q^{\beta}) - f(\propto x^{\beta})}{\propto x^{\beta} q^{\beta} - \propto x^{\beta}} \cdot \frac{\propto x^{\beta} q^{\beta} - \propto x^{\beta}}{x(q-1)}$$

$$= \frac{f(q^{\beta} u) - f(u)}{q^{\beta} u - u} \cdot \frac{u(qx) - u(x)}{x(q-1)}$$

$$D_q\, (f(u(x)) = \left(D_{q^{\beta}} f\right)(u(x)) D_q\, u(x) \tag{2.8}$$

elde edilir.

2.2 POLİNOMLAR İÇİN GENEL TAYLOR FORMULÜ

Teorem 2.4. $\propto$ herhangi bir sayı, D'de polinomlar uzayında lineer (doğrusal) bir dönüşüm olsun.

$(P_0(x), P_1(x), \ldots)$ polinomlar dizisi,

1. $\mathrm{P_0(a) = 1}$ ve $\mathrm{P_n(a) = 0}$, $\quad \mathrm{n} \geq 1$
2. $\mathrm{der\ P_n(x) = n}$
3. $\mathrm{D(x) = P_{n-1}(x)}$ $\quad \forall_{\mathrm{n}} \geq 1$ için $\mathrm{D(1) = 0}$

koşullarını sağlasın. Derecesi N olan herhangi bir $f(x)$ polinomu için genel Taylor formülü

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) P_n(x) \tag{2.9}$$

biçiminde tanımlanır [21].

İspat: V derecesi N'den büyük olmayan polinomların bir uzayı olsun. $boyV = N + 1$ olacaktır. $(P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x))$ polinomları lineer bağımsızdırlar. Herbir $P_i(x), 0 \leq i \leq N$ polinomlarının derecesi farklıdır (koşul 2).

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(x) \tag{2.10}$$

Buradaki c_k katsayıları tek türlü belirlenir.

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_N P_N(x)$$

$x = a$ için,

$$f(a) = c_0 P_0(a) + c_1 P_1(a) + \cdots + c_N P_N(a)$$

elde edilir.

(Koşul 1)'den dolayı $f(a) = c_0$ olur.

(2.10) eşitliğinin her iki tarafına n defa D lineer operatörünü uygularsak

$$(D^n f)(x) = \sum_{n=0}^{N} c_k P_{k-n}(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x = a$ yazarsak $0 \leq n \leq N$ için

$$(D^n f)(a) = c_n P_0(a) + c_{n+1} P_1(a) + \cdots + c_n P_{N-n}(a) = c_n$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeyi (2.10) da yerine koyarsak,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} (D^k f)(a) P_k(x)$$

elde edilecektir.

Örnek 2.5. $D = \frac{d}{dx}, P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$ eşitliklerini genel Taylor formülü (2.9)'da yerine yazarsak

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} (D^k f)(a) P_k(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k f(a)}{dx^k} . \frac{(x-a)^k}{k!}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f^k(a) . \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Böylece $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ etrafındaki genel Taylor formülünü elde etmiş oluyoruz.

2.3 POLİNOMLAR İÇİN q-TAYLOR FORMÜLÜ

Tanım 2.6. c herhangi bir sayı ve $f(x)$ mertebesi N olan bir polinom olmak üzere, Taylor formülünün q-benzeri

$$f(x)=\sum_{j=0}^{N}(D_q^j f)(c)\frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{2.11}$$

biçiminde ifade edilir [21]. Burada $[n]!=\begin{cases}1 & n=0\\ [n][n-1]\ldots[1] & n=1,2,3\ldots\end{cases}$ ve $(x-a)_q^n=\begin{cases}1 & n=0\\ (x-a)(x-qa)\ldots(x-q^{n-1}a) & n\geq 1\end{cases}$ ile tanımlanır.

2.3.1 Gauss Binom Formülü

n, negatif olmayan bir tam sayı ve a herhangi bir sayı olsun.

$f(x)=(x+a)_q^n$ fonksiyonunun $x=0$ etrafındaki q-Taylor formülünden

$$f(x)=\sum_{j=0}^{N}(D_q^j f)(c)\frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

elde edilir.

$j\leq n$ için j. mertebeye kadar q-türevler aşağıdaki gibidir.

$D_q\ f(x)=[n].(x+a)_q^{n-1}$

$D_q^2\ f(x)=[n].[n-1].(x+a)_q^{n-2}$

$\vdots$

$D_q^j\ f(x)=[n].[n-1].[n-2]\ldots[n-j+1].(x+a)_q^{n-j}$

$x=0$ için j. mertebeden q-türev değeri

$$D_q^j\ f(0)=[n].[n-1].[n-2]\ldots[n-j+1].(a)_q^{n-j}$$

şeklinde elde edilir.

$$(x+a)_q^m = (x+a).(x+qa)\ldots(x+q^{m-1}(a)_q^{n-j})$$

açılımında $x=0$ yazılırsa,

$$a_q^m = aqa\ldots q^{m-1}a = a^m q^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

olacaktır. Buna göre,

$$D_q^j f(0) = [n].[n-1].[n-2]\ldots[n-j+1].a^{n-j}q^{(n-j)(n-j-1)/2}$$

elde edilir. Sonuç olarak $f(x)=(x+a)_q^n$ fonksiyonunun q-Taylor formülü

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n].[n-1].[n-2]\ldots[n-j+1]}{[j]!}.q^{(n-j)(n-j-1)/2}.a^{n-j}.x^j \tag{2.12}$$

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{(n-j)(n-j-1)/2}.a^{n-j}.x^j$$

şeklindedir. j yerine $n-j$ yazarsak

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2}.a^j.x^{n-j} \tag{2.13}$$

elde edilir.

Bu formüle Gauss Binom Formülü adı verilir.

2.3.2 Kuvvet Serileri İçin q-Taylor Formülü ve Heine'nin Binom Formülü

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığının merkezi $c=0$ noktasıdır. Yakınsaklık yarıçapı R olmak üzere $|x|<R$ de seri yakınsaktır. Bu kuvvet serisi $x=0$ noktası etrafında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsamaktadır. $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktası etrafındaki genel Taylor formülünü (2.9) ifadesinden yararlanarak yazılabilir.

$$Df(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1}$$

$$D^2 f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) x^{k-2}$$

$$\vdots$$

$$D^n f(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1) x^{k-n}$$

$$= c_n n! + c_{n+1} \frac{(n+1)!}{1!} x + c_{n+2} \frac{(n+2)!}{2!} x^2 + \cdots$$

Yukarıdaki ifadede $x = 0$ alınırsa c_n katsayıları

$$D^n f(0) = c_n n! \;\Rightarrow\; c_n = \frac{D^n f(0)}{n!} \qquad (n = 0,1,2 \dots)$$

ile bilirlenir. O halde

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (D^k f)(0) \frac{x^k}{k!}$$

Taylor serisi elde edilir.

Bu ifadenin $x = 0$ etrafindaki Taylor açılımının q-formu ise

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_q^k f)(0) \frac{x^k}{k!} \qquad (2.14)$$

şeklindedir.

Örnek 2.7. $f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$ fonksiyonunun q-Taylor formülünü bulalım. $f(x)$ bir formal kuvvet serisidir. Bu seri $x = 0$ noktası etrafinda yakınsak olduğu için q-Taylor serisinide $x = 0$ noktası etrafinda göstermeliyiz.

$$f(x) = (D_q^j f)(0)\frac{x^j}{[j]!}$$

$$D_q f(x) = D_q \frac{1}{(1-x)_q^n}$$

$$= \frac{-D_q.(1-x)_q^n}{(1-x)_q^n.(1-qx)_q^n}$$

$$= \frac{[n].(1-qx)_q^{n-1}}{(1-x)_q^n.(1-qx)_q^n}$$

$$= \frac{[n].(1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^{n-2}qx)}{(1-x)_q^n.(1-qx)(1-q^2x)\dots(1-q^{n-1}qx)}$$

$$= \frac{[n]}{(1-x)_q^n.(1-q^n x)}$$

$$= \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}}$$

Bu şekilde devam ettiğimizde j. mertebeden q-türev

$$D_q^j f(x) = \frac{[n].[n+1]\dots[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+1}}$$

olarak elde edilir.

$x = 0$ için

$$D_q^j f(0) = [n].[n+1]\dots[n+j-1] \qquad (j \geq 1)$$

bulunur. Sonuç olarak, $f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$ fonksiyonunun q-taylor açılımı

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n].[n+1]...[n+j-1]}{[j]!} x^j \tag{2.15}$$

şeklindedir.

Bu ifade $\frac{1}{(1-x)_q^n}$ fonksiyonunun Taylor formülünün q-benzeridir. Bu formüle Heine'nin Binom Formülü denir.

2.4 q-ÜSTEL FONKSİYONLARI

Gauss ve Heine binom formüllerinin $n \to \infty$ için limitlerini alırsak

$$(1+x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{(1-q).(1-q^2)...(1-q^j)} \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q).(1-q^2)...(1-q^j)} \tag{2.17}$$

İki ifade sonsuz çarpımdan sonsuz toplama gitmektedir. $q = 1$ için toplamlardaki her bir terim tanımsız olacaktır. Bu yüzden $q = 1$ için bir q-benzer değildir. İki ifade Gauss ve Heine'den daha önce yaşamış olan Euler tarafından bulunmuştur. Bu ifadelere (2.16) ve (2.17) sırasıyla Euler'in birinci ve ikinci benzerlikleri denir ve E_1 ve E_2 olarak adlandırılır. (2.17) denkleminden,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q).(1-q^2)...(1-q^j)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right).\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)...\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!} \tag{2.18}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade üstel fonksiyonun Taylor formülüne benzemektedir.

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{2.19}$$

Tanım 2.8. e^x üstel fonksiyonunun q-benzeri,

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} \tag{2.20}$$

biçiminde tanımlanır [9, 21].

(2.16) ve (2.17) denklemlerinden

$$e_q^{\frac{x}{1-q}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} \tag{2.21}$$

bulunabilir. (2.17) denkleminden yararlanarak,

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} \tag{2.22}$$

sonucuna ulaşılır.

Üstel fonksiyonun bir başka q-benzeri ise,

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty} \tag{2.23}$$

şeklindedir.

Üstel fonksiyonun q-türevi de kendisine eşittir.

$$D_q\, e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q\, x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j].x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

ve

$$D_q\, E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q\, x^j}{[j]!}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{[j]\, x^{j-1}}{[j]!}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2} q^{(j-1)} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j\ x^j}{[j]!} = E_q^{qx}$$

Sonuç olarak,

$$D_q e_q^x = e_q^x \text{ ve } D_q E_q^x = E_q^{qx} \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.22) ve (2.23) yararlanarak

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \tag{2.25}$$

elde edilir. (2.16) ve (2.17) ifadelerini kullanarak,

$$e_{\frac{1}{q}}^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j.\left(1-\frac{1}{q}\right)^j}{\left(1-\frac{1}{q}\right).\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{q^j}\right)}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j.(1-q)^j(-1)^j.q.q^2.q^3\dots q^{j-1}.q^j}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^j).(-1)^j.q^j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q).x^j.q^{j(j-1)/2}}{(1-q).(1-q^2)\dots(1-q^j)}$$

$$= E_q^x \tag{2.26}$$

özellikleri elde edilir. [9, 21]

2.5 q-TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

q-trigonometrik fonksiyonlar

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \qquad \text{SİN}_q\, x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \tag{2.27}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \qquad\qquad \mathrm{COS}_q\, x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \tag{2.28}$$

ile tanımlanır. (2.26) denklemi kullanılarak sin ve SİN (benzer şekilde cos ve COS) fonksiyonları arasında

$$\mathrm{SİN}_q\, x = \frac{e_{1/q}^{ix} - e_{1/q}^{-ix}}{2i} = \sin_{1/q} x$$

ve

$$\mathrm{COS}_q\, x = \frac{e_{1/q}^{ix} + e_{1/q}^{-ix}}{2} = \cos_{1/q} x$$

ilişkileri kurulabilir [9, 21].

Tanım yardımı ile q-trigonometrik fonksiyonların q-türevleri aşağıdaki gibi elde edilir.

1. $$\begin{aligned} D_q \sin_q x &= D_q\left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(D_q\, e_q^{ix} - D_q\, e_q^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie_q^{ix} + ie_q^{-ix}\right) \\ &= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \\ &= \cos_q x \end{aligned} \tag{2.29}$$

   Benzer şekilde,

2. $D_q \cos_q x = -\sin_q x$ (2.30)
3. $D_q\, \mathrm{SİN}_q\, x = \mathrm{COS}_q\, x$ (2.31)
4. $D_q\, \mathrm{COS}_q\, x = -\mathrm{SİN}_q\, x$ (2.32)

2.6 q-ANTİTÜREV

Eğer $D_q\, F(x) = f(x)$ ise $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$'in q-antitürevi denir ve

$$F(x) = \int f(x)\, d_q x \tag{2.33}$$

ile gösterilir.

Bilinen analizde antitürev tek değildir. Analizde antitürevinin tekliği sabitlerin eklenmesine kadardır. Çünkü bir fonksiyonun türevinin sıfır olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun sabit olmasıdır. Bu durum q-analizde daha karışıktır. Çünkü $D_q\, \varphi(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi(qx) = \varphi(x)$ olmasıdır ki burda $\varphi(x)$ fonksiyonun sabit olması gerekmez. Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise $x = 0$ noktasında sürekli olacaktır. Bir fonksiyona $\varphi(x)$ fonksiyonunu eklersek bu fonksiyonun q-türevi değişmeyecektir. Eğer $\varphi(x)$'in bir kuvvet serisi olarak almak istersek, $\varphi(qx) = \varphi(x)$ şartının sağlanması için $n \geq 1$ ve c_n, x^n nin katsayısı olmak üzere $c_n = q^n c_n$ olmalıdır. $c_n = 0, n \geq 1$ olduğu zaman $\varphi(qx) = \varphi(x) = c_0$ =sabit olacaktır. Eğer,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

bir kuvvet serisi ise $f(x)$ in sabit terime kadar tek bir tane q-antitürevi vardır.

$$\int f(x)\, d_q\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{[n+1]} + c \tag{2.34}$$

$[qA, A]$ aralığında $\varphi(x)$ sabit bir fonksiyon ise

$$F_1(x) - F_2(x) = c \qquad\qquad F_1(x) = F_2(x) + c$$

$f(x)$ fonksiyonun q-antitürevin tek olması için, q-antitürevin $x = 0$ noktasında sürekli olmalıdır. Aksi taktirde q-antitürev $x = 0$ noktasında sürekli değilse, $f(x)$ fonksiyonun birçok q-antitürevi olacaktır.

α, β sabitler olmak üzere $u = u(x) = \alpha x^{\beta}$ ve $D_q F(x) = f(x)$ olsun.

$$\int f(u) d_q\, u = F(u) = F\big(u(x)\big)$$

Herhangi bir q' için zincir kuralı (2.8) yardımıyla

$$F\big(u(x)\big) = \int D_{q'}F\big(u(x)\big)d_{q'}x$$

$$= \int \left(D_{q'^{\beta}}\, F\right)\big(u(x)\big)\, D_{q'}u(x)d_{q'}x$$

$$= \int \left(D_{q'^{\beta}}\, F\right)\big(u(x)\big)\; d_{q'}(x)$$

$q' = q^{1/\beta}$ olarak seçersek $D_{q'^{\beta}}\, F = D_q F = f$ olacaktır.

$$\int f(u)d_q\; u = F\big(u(x)\big) = \int f(u(x))d_{q^{1/\beta}}\; u(x) \qquad (2.35)$$

Bu formülün anlamı ise, $f(u)$'nun q-türevlerinden birinin $f(u(x))D_{q^{1/\beta}}\; u(x)$ olduğunu göstermesidir [21].

2.7 JACKSON İNTEGRAL

$f(x)$ herhangi bir fonksiyon olsun. $f(x)$'in q-antitürevini elde etmek için $M_q\big(F(x)\big) = F(qx)$ şeklinde tanımlanan M_q operatörünü ele alalım. Bu durumda q-türev M operatörü cinsinden

$$\left(\frac{1}{(q-1)\,x}\left(M_q - I\right)\right)F(x) = \frac{F(qx)-F(x)}{x(q-1)} = f(x) \qquad (2.36)$$

formülü ile ifade edilir. Bu eşitlikten

$$\frac{\left(1 + M_q + M_{q^2} + \cdots\right)}{(q-1)x}\left(M_q - I\right)F(x) = \left(1 + M_q + M_{q^2} + \cdots\right)f(x)$$

$$\frac{-F(x)}{(q-1)x} = \left(1 + M_q + M_{q^2} + \cdots\right)f(x)$$

$$F(x) = (1-q)xf(x)\left(1 + M_q + M_{q^2} + \cdots\right)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\int f(x)d_q x = F(x) = (1-q)xf(x) + qxf(qx) + q^2xf(q^2x) + \cdots$$

$$F(x) = \int f(x)d_q x = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) \tag{2.37}$$

Bu seriye $f(x)$'in Jackson İntegrali denir.

Daha genel formülü

$$\int f(x)D_q g(x)d_q x = (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\, D_q g(q^j x)$$

$$= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\frac{g(q^j x) - g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x}$$

$$\int f(x)d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x)\big(g(q^j x) - g(q^{j+1}x)\big) \tag{2.38}$$

Tanım 2.9. [21] $0 < a < b$ ise q-integral

$$\int_0^b f(x)d_q x = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{2.39}$$

veya

$$\int_a^b f(x)d_q x = \int_0^b f(x)d_q x - \int_0^a f(x)d_q x \tag{2.40}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

2.7.1 q-İntegralin Geometrik Anlamı

q-integralin geometrik anlamı; $[a,b]$ aralığını sonsuz çoklukta aralıklara bölünmüş dikdörtgen alanlarının toplamıdır. Belirli integralin tanımına benzemektedir.

Eğer $q \to 1$ için limit alırsak,

$$\lim_{q\to 1}(1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b)$$

İfadesinde dikdörtgenlerin genişliği sıfıra yaklaşacak ve bu durumda bu limit Riemann toplamına yakınsayacaktır. $f(x), [a,b]$ aralığında sürekli ise,

$$\lim_{q\to 1}\int_0^b f(x)d_q x = \int_0^b f(x)dx \tag{2.41}$$

(2.39) ifadesinde $b \to \infty$ için

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_q x = \int_0^{q^j} f(x)d_q x - \int_0^{q^{j+1}} f(x)d_q x$$

$$= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f(q^{j+k}) - (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f(q^{j+k+1})$$

dir.

Sonuç olarak,

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_q x = (1-q)\ q^j f(q^j) \tag{2.42}$$

elde edilecektir.

Tanım 2.10. [21] $f(x)$'in $[0,\infty)$ aralığındaki has olmayan q-integrali

$$\int_0^{\infty} f(x)d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)d_q x \qquad 0 < q < 1$$

$$\int_0^{\infty} f(x)d_q x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)d_q x \qquad q > 1$$

biçiminde tanımlanırlar.

2.7.2 q-Analiz'in Temel Teoremi

Teorem 2.11. [21] Eğer $D_q F(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)d_q x = F(b) - F(a) \qquad 0 \le a < b \le \infty \tag{2.43}$$

İspat: $D_q F(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olsun. O halde $F(x)$ fonksiyonu Jackson formülü ile sabit bir terim eklenene kadar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F(x) = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) + F(0)$$

(2.39) ifadesinden yararlanarak,

$$\int_0^a f(x)d_q x = (1-q)a \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j a\right) = F(a) - F(0)$$

elde edilecektir. Benzer şekilde sonlu bir b için,

$$\int_0^b f(x)d_q x = (1-q)b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j b\right) = F(b) - F(0)$$

elde edilecektir. Sonuç olarak,

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx = F(b) - F(a)$$

olacaktır.

Teorem 2.12. [21] $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon ve bilinen türevleri $x = 0$ noktasının komşuluğunda tanımlı ve $x = 0$ noktasında sürekli olsun. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)d_q f(x) \tag{2.44}$$

elde edilir. Bu formüle parçalı q-integrasyonu denir.

İspat. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpmımının q diferansiyeli

$$D_q\big(f(x)g(x)\big) = f(x)(D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x))$$

idi. Eşitliğin her iki tarafını a'dan b'ye integrallediğimizde

$$\int_a^b D_q\big(f(x)g(x)\big) = \int_a^b f(x)D_q g(x)\, d_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x))\, d_q x$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x)d_q g(x) + \int_a^b g(qx)d_q f(x)$$

sonucuna ulaşılır.

2.8 q-GAMMA ve q-BETA FONKSİYONLARI

Gamma fonksiyonu aşağıdaki interpolasyon probleminin çözümü olarak görülebilir:

"$y = (x - 1)!$ bağıntısı ile verilen (x, y) (x'in tamsayı değerleri için) noktalarını birleştiren düzgün eğri nedir? "

İlk birkaç faktöriyel ile elde edilen noktaların çizimi böyle bir eğrinin çizilebileceğini ortaya koymaktadır. Fakat eğriyi açıkça belirleyen ve işlem sayısının x'in büyüklüğüne bağlı olmadığı bir formüle ihtiyaç vardır. En basit formül faktöriyel

$x! = 1 \times 2 \times ... \times x$ formülüdür ancak x'in tamsayı olmayan değerleri için kullanılamaz. Fakat böyle değerler için de integral ve limit kullanarak bir faktöriyel formülüne ulaşmak mümkündür. Bu problemin çözümü ise Gamma fonksiyonudur.

Tanım 2.13: Gamma ve Beta fonksiyonlarını sırayla

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \qquad (t > 0) \tag{2.45}$$

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1} dx \qquad (s, t > 0) \tag{2.46}$$

biçiminde tanımlanır. [1]

Tanım 2.14 Herhangi bir $t > 0$ için,

$$\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \tag{2.47}$$

fonksiyonuna q-Gamma fonksiyonu denir [21].

Özellik: (2.23) denkleminden $E_q^0 = 1$ ve (2.20) ve (2.25) ifadelerinden

$$E_q^{-\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e_p^x} = 0$$

olacaktır.

(2.24) ifadesinden ve (2.44) ile tanımlanan parçalı q-integrasyondan,

$$\Gamma_q(t+1) = \int_0^\infty x^t E_q^{-qx} d_q x$$

$$= -\int_0^\infty x^t D_q E_q^{-x} d_q x$$

$$= -\int_0^\infty x^t d_q E_q^{-x}$$

$$= \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x^t$$

$$= \int_0^\infty E_q^{-qx} D_q x^t d_q x$$

$$= [t] \int_0^\infty E_q^{-qx} x^{t-1} d_q x$$

$t > 0$ için $\Gamma_q(t+1) = [t]\Gamma_q(t)$ (2.48)

elde edilir.

Özellik: n negatif olmayan herhangi bir tam sayı için,

$$\Gamma_q(1) = \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x = -E_q^{-x} \Big|_0^\infty = -E_q^{-\infty} + E_q^0 = 1$$

$$\Gamma_q(1+1) = [1]\Gamma_q(1) = 1 = \Gamma_q(2)$$

$$\Gamma_q(2+1) = [2]\Gamma_q(2) = [2] = \Gamma_q(3)$$

$$\Gamma_q(3+1) = [3]\Gamma_q(3) = [3]! = \Gamma_q(4)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_q(n+1) = [n]! \tag{2.49}$$

Tanım 2.15. Herhangi bir $t, s > 0$ için,

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x \tag{2.50}$$

fonksiyonuna q-Beta fonksiyonu denir [21].

Özellik: q-integral ve improper q-integral tanımından yararlanarak $0 < q < 1$ olmak üzere

$$B_q(t,\infty) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{\infty} d_q x$$

$$= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j (q^j)^{t-1} (1-q^{j+1})_q^{\infty}$$

$$= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j (q^j)^{t-1} (1-q^{j+1})_q^{\infty}$$

$$= \int_0^{\infty} x^{t-1}(1-qx)_q^{\infty} d_q x$$

elde edilir.

$\Gamma_q(t)$ ve $B_q(t,s)$ arasındaki ilişkiyi gösterelim.

$E_q^x = (1+(1-q)x)_q^{\infty}$ olduğuna göre $E_q^{-\frac{qx}{1-q}} = (1-qx)_q^{\infty}$ olacaktır.

$$B_q(t,\infty)=\int_0^\infty x^{t-1}(1-qx)_q^\infty d_q x=\int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-\frac{qx}{1-q}}d_q x$$

Bu eşitlikte $x=(1-q)y$ dönüşümü yapılırsa

$$B_q(t,\infty)=\int_0^\infty (1-q)^{t-1}y^{t-1}E_q^{-qy}(1-q)d_q y$$

$$=(1-q)^t\int_0^\infty E_q^{-qy}y^{t-1}d_q y$$

eşitliği ve sonuç olarak,

$$\Gamma_q(t)=\frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t} \tag{2.51}$$

elde edilir.

Önerme 2.16. [9, 21] $t>0$ ve n pozitif tam sayı ise,

$$B_q(t,n)=\frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n} \tag{2.52}$$

İspat: q-gamma fonksiyonunu (2.52) ifadesinin $n\to\infty$ için limitini alırsak

$$B_q(t,\infty)=\frac{(1-q)(1-q)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty}$$

Bulduğumuz bu ifadeyi (2.51)'de yerine koyarsak

$$\Gamma_q(t)=\frac{(1-q)(1-q)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty(1-q)^t} \tag{2.53}$$

elde edilir.

Önerme 2.17. [9,21] $t, s > 0$ ise,

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty} \tag{2.54}$$

Özellik: q-Beta fonksiyonunun t ve s için simetriktir. Yani $B_q(t,s) = B_q(s,t)$ olur.

(2.53) ve (2.54) ifadelerini kullanarak q-Beta fonksiyonunu q-Gamma fonksiyonu cinsinden ifade edebiliriz.

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty}$$

$$= \frac{(1-q)_q^\infty (1-q)_q^\infty (1-q)^{t+s-1} (1-q^{t+s})_q^\infty}{(1-q)^{t-1} (1-q^t)_q^\infty (1-q)^{s-1} (1-q^s)_q^\infty (1-q)_q^\infty}$$

$$= \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)}$$

sonuç olarak,

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \tag{2.55}$$

elde edilir.

3 q-LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

3.1 TEMEL ÖZELLİKLER

Tanım 3.1. $t > 0$ için f, t'nin bir fonksiyonu olsun. f'nin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{3.1}$$

ile tanımlanır ve $\mathcal{L}\{f(t)\}$ veya $F(s)$ biçiminde gösterilir. Eşitliği verilen integralin yakınsak olması gerekir. [4]

Tanım 3.2. q-Laplace dönüşümü $s > 0$ için

$$F(s) = \mathcal{L}_q(f(t)) = \int_0^\infty E_q(-qst) f(t) d_q t \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Özellik: q-Laplace dönüşümü lineer (doğrusal) bir dönüşümdür. α ve β sabit sayılar olmak üzere,

$$\mathcal{L}_q\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) = \int_0^\infty E_q(-qst)\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) d_q t$$

$$= \int_0^\infty E_q(-qst)\big(\alpha f(t)\big) d_q t + \int_0^\infty E_q(-qst)\big(\beta g(t)\big) d_q t$$

$$= \alpha \int_0^\infty E_q(-qst) f(t) d_q t + \beta \int_0^\infty E_q(-qst) g(t) d_q t$$

$$= \alpha \mathcal{L}_q\Big(f(t)\Big) + \beta \mathcal{L}_q\big(g(t)\big) \tag{3.3}$$

elde edilir.

Örnek 3.3 $t > 0$ için $f(t) = 1$ ise

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{s}(1 - e^{-sA}) = \tfrac{1}{s} \tag{3.4}$$

$s > 0$ ise integral yakınsak, $s \leq 0$ ise integral ıraksaktır.

Örnek 3.4. $s > 0$ için $\mathcal{L}_q(1) = \frac{1}{s}$ dir.

$$\mathcal{L}_q(1) = \int_0^\infty E_q(-qst) d_q t$$

$$= \int_0^\infty D_q E_q(-st) d_q t$$

$$= \int_0^\infty d_q E_q(-st)$$

$$= -\frac{1}{s} E_q(-st)\bigg|_0^\infty$$

$$= \tfrac{1}{s} \tag{3.5}$$

Örnek 3.5. $t > 0$ için $f(t) = t$ ise,

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}t\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}t\;dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st}dt\right]$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sA}}{s^2}(sA+1)\right]$$

$$= \frac{1}{s^2} \tag{3.6}$$

elde edilir.

Örnek 3.6. $s > 0$ için $\mathcal{L}_q(t) = \frac{1}{s^2}$

$$\mathcal{L}_q(t) = \int_0^\infty E_q(-qst)td_q t$$

$$= \int_0^\infty tD_qE_q(-st)d_q t$$

$$= \int_0^\infty td_qE_q(-st)$$

$$= -\frac{t}{s}E_q(-st)\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} E_q(-qst)d_q t$$

$$= \frac{1}{s^2} \tag{3.7}$$

Örnek 3.7. $\alpha \in R$ ve $\alpha > -1$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}_q(t^\alpha) = \int_0^{\infty} E_q(-qst)t^\alpha d_q t$$

$$= \int_0^{\infty} E_q(-qu)\frac{u^\alpha}{s^\alpha}\frac{1}{s}d_q u$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^{\infty} E_q(-qu)u^\alpha d_q u$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}}\Gamma_q(\alpha+1)$$

$\alpha = n \in N$ ise,

$$\mathcal{L}_q(t^n) = \frac{1}{s^{\alpha+1}}\Gamma_q(\alpha+1) = \frac{[n]_q!}{s^{n+1}}$$

elde edilir.

Örnek 3.8. $s > 0$ için $\mathcal{L}_q(1+5t) = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$ elde edilir.

Örnek 3.9. $\mathcal{L}_q\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{s^{-\frac{1}{2}+1}}\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)$ bulunur.

Örnek 3.10. $\mathcal{L}_q\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{s^{\frac{1}{2}+1}}\Gamma_q\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right)}{[2]_{q^{\frac{1}{2}}}\sqrt{s^3}}$ bulunur.

Örnek 3.11. $t > 0$ için $f(t) = e^{at}$ ise,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)A}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right] = \frac{1}{s-a} \tag{3.8}$$

elde edilir.

Örnek 3.12.

$$\mathcal{L}_q\left(e_q(at)\right) = \int_0^\infty E_q(-qst) e_q(at)\, d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} \int_0^\infty E_q(-qst) t^n\, d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} \frac{\Gamma_q(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s}\right)^n$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1-\frac{a}{s}}\right) = \frac{1}{s-a} \tag{3.9}$$

Örnek 3.13. $s > -3$ için $\mathcal{L}_q\left(e_q(-3t)\right) = \frac{1}{s+3}$ bulunur.

Örnek 3.14.

$$\mathcal{L}_q\left(E_q(at)\right) = \int_0^\infty E_q(-qst)E_q(at)\,d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} a^n}{[n]_q!} \int_0^\infty E_q(-qst)t^n\,d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n]_q!} q^{\binom{n}{2}} a^n \frac{\Gamma_q(n+1)}{s^{n+1}}$$

$$= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \frac{a^n}{s^{n+1}} \tag{3.10}$$

Örnek 3.15. $t > 0$ için $f(t) = \sin at$ ise,

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\sin at\;dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_0^A - \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\;dt\right]$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\;dt$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left[\frac{e^{-st}\sin at}{a}\bigg|_0^\infty + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\;dt\right]$$

Böylece

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}\{\sin at\}$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad (s > 0) \tag{3.11}$$

elde edilir.

Örnek 3.16.

$$\mathcal{L}_q\left(\sin_q at\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \int_0^{\infty} E_q(-qst)t^{2n+1}\, d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{[2n+1]_q!} \frac{\Gamma_q(2n+2)}{s^{2n+2}}$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{s}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{1}{s}\frac{\frac{a}{s}}{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2} \tag{3.12}$$

Örnek 3.17. $\mathcal{L}_q\left(\sin_q 2t\right) = \frac{2}{s^2+4}$ bulunur.

Örnek 3.18 $t > 0$ için $f(t) = \cos at$ ise,

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} \cos at\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\sin at}{a}\bigg|_0^A + \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\sin at\ dt\right]$$

$$= \frac{s}{a}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_0^\infty - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\ dt\right]$$

$$= \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\ dt\right]$$

Böylece

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{a^2} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}\{\cos at\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad (s > 0) \tag{3.13}$$

elde edilir.

Örnek 3.19.

$$\mathcal{L}_q\left(\cos_q at\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{[2n]_q!}\int_0^\infty E_q(-qst)t^{2n}\,d_q t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{[2n]_q!}\frac{\Gamma_q(2n+1)}{s^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a}{s}\right)^{2n}$$

$$= \frac{1}{s}\frac{1}{1+\left(\frac{a}{s}\right)^2}$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} \tag{3.14}$$

bulunur.

Türev fonksiyonunun q-Laplace dönüşümlerini bulabilmek için aşağıdaki eşitliklere ihtiyaç duyarız:

$$E_q(-qst) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} q^n s^n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} (1 + (q-1)[n]_q) s^n t^n$$

$$= (q-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n-1]_q!} s^n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} s^n t^n$$

$$= -(q-1)st \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} q^n s^n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} s^n t^n$$

$$= -(q-1)st\, E_q(-qst) + E_q(-st) \tag{3.15}$$

Böylece, (3.15) ifadesinden

$$E_q(-st) = E_q(-qst) + (q-1)st\, E_q(-qst)$$

$$E_q(-st) = E_q(-qst)[1 + (q-1)st]$$

$$E_q(-qst) = \frac{1}{1 + (q-1)st} E_q(-st)$$

$$= \frac{1}{(1 + (q-1)st)(1 + (q-1)q^{-1}st)} E_q(-q^{-1}st)$$

$$= \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= \frac{1}{(1+(q-1)st)\,(1+(q-1)\,q^{-1}st)\ldots(1+(q-1)q^{-k}st)} E_q(-q^{-k}st) \tag{3.16}$$

bulunur.

q-Laplace dönüşümünün tanımından yararlanarak türevin q-Laplace dönüşümü hesaplanabilir.

$$D_q\big(f(t)g(t)\big) = \frac{\partial}{\partial_q t}\big(f(t)g(t)\big)$$

$$= \frac{\partial f(t)}{\partial_q t} g(t) + f(qt)\frac{\partial g(t)}{\partial_q t}$$

$$= (D_q f(t))g(t) + f(qt)(D_q g(t)) \tag{3.17}$$

$$D_q\, E_q(-qst) = \frac{\partial}{\partial_q t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n}{[n]_q!} q^n s^n t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n}{[n]_q!} q^n s^n \frac{\partial}{\partial_q t} t^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n q^n s^n}{[n]_q!}[n]_q t^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n q^n s^n}{[n-1]_q!} t^{n-1}$$

$$= -s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n+1}{2}}(-1)^n q^{n+1} s^n t^n}{[n]_q!} \tag{3.18}$$

elde edilir.

O halde

$$\mathcal{L}_q\big(D_q f(t)\big) = \int_0^{\infty} D_q(f(t))\, E_q(-qst)\, d_q t$$

$$= \int_0^\infty D_q(f(t))\, E_q(-qst)\, d_q t - \int_0^\infty f(qt) D_q(\, E_q(-qst))\, d_q t$$

$$= f(t)\, E_q(-qst)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(qt) D_q(\, E_q(-qst))\, d_q t$$

$$= -f(0) - \int_0^\infty -s \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{\binom{n+1}{2}}(-1)^n q^{n+1} s^n t^n}{[n]_q!} f(qt) d_q t$$

$$= -f(0) + s \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{\binom{n+1}{2}}(-1)^n}{[n]_q!} \int_0^\infty q^{n+1} s^n t^n f(qt) d_q t$$

$$= -f(0) + s \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{\binom{n+1}{2}}(-1)^n}{[n]_q!} \int_0^\infty q u^n s^n f(u) \frac{1}{q} d_q u$$

$$= -f(0) + s \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{\binom{n+1}{2}}(-1)^n}{[n]_q!} \int_0^\infty s^n t^n f(t) d_q t$$

$$= -f(0) + s \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{\binom{n}{2}}(-1)^n}{[n]_q!} \int_0^\infty q^n s^n t^n f(t) d_q t$$

$$= -f(0) + s \int_0^\infty f(t)\, E_q(-qst) d_q t$$

$$= -f(0) + s\, \mathcal{L}_q(f(t)) \tag{3.19}$$

elde edilir.

Eğer $f(t)$ yerine $D_q f(t)$ yazarsak,

$$\mathcal{L}_q\left(D_q^2 f(t)\right) = -\left(D_q f\right)(0) + s \int_0^\infty (D_q f(t))\, E_q(-q(t)) d_q t$$

$$= -\left(D_q f\right)(0) + s\ \mathcal{L}_q(D_q f(t))$$

$$= -\left(D_q f\right)(0) + s\ ((-f(0) + s\, \mathcal{L}_q(f(t)))$$

$$= -\left(D_q f\right)(0) - sf(0) + s^2\, \mathcal{L}_q(f(t)) \tag{3.20}$$

elde ederiz.

Bu işlemin devamında

$$\mathcal{L}_q\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\, \mathcal{L}_q\left(f(t)\right) - \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}\, f^{(i)}(0) \tag{3.21}$$

elde edilir.

$$f^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial_q}{\partial_q t}\right)^n f(t) = D_q^n f(t)$$

$$f^{(n)}(0) = f^{(n)}(t)\Big|_{t\,=\,0} \text{ dır.}$$

Teorem 3.20. $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$, $(0, \infty)$ aralığında üstel sınırlı ve sürekli fonksiyonlar ve $f^{(n)}(t)$ ise $(0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ise

$$\mathcal{L}_q\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\, \mathcal{L}_q\left(f(t)\right) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}\, f^{(i)}(0)$$

eşitliği doğrudur. Burada

$$f^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial_q}{\partial_q t}\right)^n f(t)$$

ile verilir. [9]

Şimdi ise $t^n f(t)$ biçiminde verilen bir fonksiyonun q-Laplace dönüşümünü elde edelim. Bu amaçla aşağıdaki s değişkenine göre q-türevleri ele alalım,

$$\frac{\partial F(q^{-1}s)}{\partial_q s} = \int_0^\infty \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s} E_q(-st) \right) f(t)\, d_q t$$

$$= -t \int_0^\infty E_q(-qst) f(t)\, d_q t = -t\, \mathcal{L}_q\big(f(t)\big)$$

$$= -\, \mathcal{L}_q\big(tf(t)\big) \tag{3.22}$$

Benzer şekilde 2. mertebeden kısmi türev

$$q\left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^2 F(q^{-2}s) = q\left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^2 \int_0^\infty E_q(-q^{-1}st) f(t)\, d_q t$$

$$= q \int_0^\infty \left(\left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^2 E_q(-q^{-1}st) \right) f(t)\, d_q t$$

$$= \int_0^\infty (-1)^2 \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} q^n s^n t^n \right) t^2 f(t) d_q t$$

$$= (-1)^2 \int_0^\infty E_q(-qst) t^2 f(t)\, d_q t = (-1)^2 t^2\, \mathcal{L}_q\big(f(t)\big)$$

$$= (-1)^2\, \mathcal{L}_q\big(t^2 f(t)\big) \tag{3.23}$$

ile bulunur. Bu şekilde devam ettiğimizde genel hali ise

$$\mathcal{L}_q\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^n F(q^{-n}s) \tag{3.24}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.21. $n \in N$ için q-türevlerinin dönüşümünden

$$\mathcal{L}_q\left(t^n e_q(at)\right) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^n \int_0^\infty E_q\left(-q^{-n+1} st\right) e_q(at)\, d_q t$$

$$= (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^n \left(\frac{1}{q^{-n}s - a}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} [n]_q! (-1)^n q^{-n^2}}{(s-a)(q^{-1}s-a)\ldots(q^{-n}s-a)}$$

$$= \frac{q^{-\binom{n+1}{2}} [n]_q!}{(s-a)(q^{-1}s-a)\ldots(q^{-n}s-a)} \tag{3.25}$$

ve

$$\mathcal{L}_q\left(e_q(at)f(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} \mathcal{L}_q\left(t^n f(t)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[n]_q!} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^n F(q^{-n}s)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{[n]_q!} q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^n F(q^{-n}s) \tag{3.26}$$

Sonuç 3.22. $n \in N$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\mathcal{L}_q\left(e_q(at)f(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{[n]_q!} q^{\binom{n}{2}} \left(\frac{\partial_q}{\partial_q s}\right)^n F(q^{-n}s)$$

Özel olarak, $n \in N$ için $f(t) = t^n$ ise

$$\mathcal{L}_q\left(t^n e_q(at)\right) = \frac{q^{-\binom{n+1}{2}} [n]_q!}{(s-a)(q^{-1}s-a)\ldots(q^{-n}s-a)}$$

şeklindedir.

α ve β, $(0,\infty)$ da parçalı sürekli ise, integral tanımını $f*g$ özel bir çarpımla belirtilir.

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\mathrm{s})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{s})\mathrm{ds} \tag{3.27}$$

Bu çarpıma konvolüsyon çarpımı denir.

Şimdi ise f ve g'nin konvolüsyon çarpımının q-benzerini ele alalım.

$\alpha,\beta>0$ olmak üzere $f_1(t)=t^{\alpha}$, $g(t)=t^{\beta-1}$ olsun. f ve g fonksiyonlarının q-konvolüsyonu aşağıdaki integral ile verilir.

$$(f_1*g)(t)=\int_0^t f_1(\mathrm{s})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{qs})\mathrm{d}_q\mathrm{s} \tag{3.28}$$

$\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{qs})=(\mathrm{t}-\mathrm{qs})_q^{\beta-1}$ eşitsizliğini (3.28) de yazarsak

$$(f_1*g)(t)=\int_0^t \mathrm{s}^{\alpha}(\mathrm{t}-\mathrm{qs})_q^{\beta-1}\,\mathrm{d}_q\mathrm{s}$$

elde edilir. $s=rt$ dönüşümü ile

$$(f_1*g)(t)=t\int_0^t (\mathrm{rt})^{\alpha}(\mathrm{t}-\mathrm{qrt})_q^{\beta-1}\,\mathrm{d}_q\mathrm{r}$$

$$=t^{\alpha+\beta}\int_0^t \mathrm{r}^{\alpha}(1-\mathrm{qr})^{\beta-1}\,\mathrm{d}_q\mathrm{r}$$

$$=t^{\alpha+\beta}B_q(\alpha+1,\beta)$$

$$=\frac{\Gamma_q(\alpha+1)\Gamma_q(\beta)}{\Gamma_q(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta} \tag{3.29}$$

bulunur. (3.29) eşitliğinden

$$\mathcal{L}_q(f_1*g)=B_q(\alpha+1,\beta)\int_0^{\infty} E_q(-qst)t^{\alpha+\beta}\,d_qt$$

$$= B_q(\alpha+1,\beta)\,\frac{1}{s^{\alpha+\beta+1}}\Gamma_q(\alpha+\beta+1)$$

$$= \left(\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right)\left(\frac{\Gamma_q(\beta)}{s^{\beta}}\right) \tag{3.30}$$

çarpımında ulaşırız. Ayrıca

$$\mathcal{L}_q(f_1) = \left(\frac{\Gamma_q(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right),\ \mathcal{L}_q(g) = \left(\frac{\Gamma_q(\beta)}{s^{\beta}}\right) \tag{3.31}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}_q(f_1 * g) = \mathcal{L}_q(f_1)\,\mathcal{L}_q(g) \tag{3.32}$$

konvolüsyon çarpımının q-Laplace dönüşümü bağıntısı elde edilir.

$f(x)$'nin (3.28) denklemini sağladığını kabul edelim. Bu durumda $g(t) = t^{\beta-1}$ olmak üzere

$$f * g = \int_0^t (\mathrm{t}-\mathrm{sq})_q^{\beta-1} f(\mathrm{s})\mathrm{d}_q\mathrm{s}$$

$$= t\int_0^t (\mathrm{t}-\mathrm{qrt})_q^{\beta-1} f(\mathrm{rt})\mathrm{d}_q\mathrm{r}$$

$$= \mathrm{T}_q^{\beta}(f(x))$$

burada $\mathrm{T}_q^{\beta}(f) = \int_0^t (\mathrm{t}-\mathrm{qs})_q^{\beta-1} f(\mathrm{t})\mathrm{d}_q\mathrm{s}$ ile tanımlı operatördür. O halde

$$\mathcal{L}_q(\mathrm{T}_q^{\beta}(f(x)) = \mathcal{L}_q(f*g) = \mathcal{L}_q(f)\,\mathcal{L}_q(g) = \frac{\Gamma_q(\beta)}{s^{\beta}}\,\mathcal{L}_q(f) \tag{3.33}$$

eşitliğine ulaşılır.

Eğer $f(t) = \sum_i a_i t^{\alpha_i}$ ise bu durumda

$$\mathcal{L}_q(f * g) = \sum_i a_i\, \mathcal{L}_q(t^{\alpha_i} * g)$$

$$= \sum_i a_i\, \mathcal{L}_q(t^{\alpha_i})\, \mathcal{L}_q(g)$$

$$= \mathcal{L}_q\left(\sum_i a_i t^{\alpha_i}\right) \mathcal{L}_q(g)$$

$$= \mathcal{L}_q(f)\, \mathcal{L}_q(g) \tag{3.34}$$

O halde aşağıdaki teoremi elde etmiş olduk.

Teorem 3.23. Eğer $f(t) = \sum_i a_i t^{\alpha_i}$ ve $g(t) = t^{\beta-1}$

$$\mathcal{L}_q(f * g) = \mathcal{L}_q(f)\, \mathcal{L}_q(g)$$

$\beta = 1$ için $\mathrm{T}_q f(t) = \mathrm{T}_q^1 f(t)$ ile tanımlayalım.

$$\mathcal{L}_q(\mathrm{T}_q \sin_q t) = \mathcal{L}_q(\sin_q t * 1)$$

$$= \mathcal{L}_q(\sin_q t)\ \mathcal{L}_q(1)$$

$$= \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s(s^2+1)} \tag{3.35}$$

ve

$$\mathcal{L}_q(\mathrm{T}_q \sin_q t) = \mathcal{L}_q\left(\int_0^t \sin_q \mathrm{s}\, d_q \mathrm{s}\right) \tag{3.36}$$

olarak bulunur. (3.35) ve (3.36) eşitliklerinden

$$\mathcal{L}_q\left(\int_0^t \sin_q \mathrm{s}\, d_q \mathrm{s}\right) = \frac{1}{s(s^2+1)} \tag{3.37}$$

eşitliği elde edilmiş olur.

$$\mathcal{L}_q\left(\int_0^t (1-\cos_q s) d_q s\right) = \mathcal{L}_q\left(\mathrm{T}_q(1-\cos_q t)\right)$$

$$= \mathcal{L}_q\left((1-\cos_q t) * 1\right)$$

$$= \mathcal{L}_q(1-\cos_q t)\mathcal{L}_q(1)$$

$$= \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right)\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} \tag{3.38}$$

ve

$$\mathcal{L}_q\left(\int_0^t (s-\sin_q t) d_q s\right) = \mathcal{L}_q\left(\mathrm{T}_q(t-\sin_q t)\right)$$

$$= \mathcal{L}_q\left((t-\sin_q t) * 1\right)$$

$$= \mathcal{L}_q(t-\sin_q t)\mathcal{L}_q(1)$$

$$= \left(\frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2+1}\right)\frac{1}{s} = \frac{1}{s^3(s^2+1)} \tag{3.39}$$

eşitliği doğrudur. $u(t-a)$

$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & 0 \leq t \leq a \end{cases} \tag{3.40}$$

ile tanımlanan Heaviside fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{L}_q\left(u(t-a)\right) = \int_0^\infty E_q(-qst)\, u(t-a)\, d_q t = \int_a^\infty E_q(-qst)\, d_q t$$

$$= \int_0^\infty E_q(-qst)\ d_q t - \int_0^a E_q(-qst)\ d_q t$$

$$= \frac{1}{s} - \int_0^a E_q(-qst)\ d_q t$$

$$= \frac{1}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} (qs)^n \int_0^a t^n\ d_q t$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} s^n a^n}{[n]_q!}$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{[n]_q!} (as)^n$$

$$= \frac{1}{s} E_q(-qas) \tag{3.41}$$

elde edilir. Dolayısyla aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 3.24. [9] $u(t-a)$ Heaviside fonksiyonu olmak üzere

$$\mathcal{L}_q\big(u(t-a)\big) = \frac{1}{s} E_q(-qas)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Abromowitz M, Stegun I. A (eds), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, New York, Denver, 1972.

[2] C. R. Adams, Am. Wath Ser 11 (30), 195-205 (1929).

[3] B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, Advance in Difference Equations, 2012, 35, (2012).

[4] Akyıldız E, Akyıldız Y, Alpay Ş, Erkip A, Yazıcı A, Lecture Notes on Differential Equations, $M \ominus V$, Ankara, 1999.

[5] G. E. Andrews, Q-Series: Their Development and Application in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physics and Computer Algebra, Regional Conf Srs in Math, No 6, 1986.

[6] R. Askey, J. Wilson, Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials That Generalize The Jacobi Polynomials, Mem. Am. Math. Soc. 54, 1985, 1-55.

[7] G. Bangerezako, "An Introduction to q-Differnce Equations", Perprint BuJumbura, 2008.

[8] R. D. Carmirhael, Am. J. Math 94, 147-168, 1912.

[9] Chung W. S., Kim T., Kwon H. I., On The q-Analog of the Laplace Transform, Russian Journal of Math. Physics, Vol. 21., No.2, 2014, p.p. 156-168.

[10] M. El-Shahed, M. Gaber, Apply. Math. Comput. 217, 9165-9172, 2011.

[11] Hahn W, Geometric Difference Equations, 1980, (In Germanic, not published).

[12] Jackson H. F., q-Difference Equations, Am J. Math. 32, 1910, 305-314.

[13] Jackson H. F., Quart. J. Math. 41, 63, 1910.

[14] F. Jarod, T. AbdelJawod, D. Baleanu, Nonlinear Analysis: Real World Aplications 14, 780-784, 2013.

[15] S. C. Jmg, H. Y. Fan, Theoret Phys. 23 (1), 117-120, 1995.

[16] T. E. Mason, On Properties of Solution of Linear q-Difference Equation with Entire Function Coefficients, Am. J. Math. 37, 1915, 439-444.

[17] Y. Qim, D. Zeng, Commun. Frac. Calc. 3 (1), 34-37, 2012.

[18] W. J. TrJitzinsky, Analytic. Theory of Linear q-Difference Equations, Acta Matematica, 1933.

[19] G. C. Wu, J. Apply, Math. Article ID: 102850, 2012.

[20] G. C. Wu, Heat Transfer Research 5, 393-398, 2013.

[21] T. Yardımcı, q-Analiz, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilmleri Enstitüsü Matematik, İstanbul, 2005.

ÖZGEÇMİŞ

Sirelgün ALBAY, 1963 yılında İstanbul'da doğmuştur. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamlamıştır. 1986 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğinden mezun olmuştur. Halen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir okulda matematik öğretmenliği yapmaktadır.