



YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BOYAMA YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI

AHMET SİNAN PEKCAN

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RAFAİL ALİZADE

MATEMATİK BÖLÜMÜ

SUNUM TARİHİ: 26.12.2016

BORNOVA / İZMİR
ARALIK 2016

Bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri:

İmza:

Prof. Dr. Rafail ALİZADE (Danışman)

Yaşar Üniversitesi



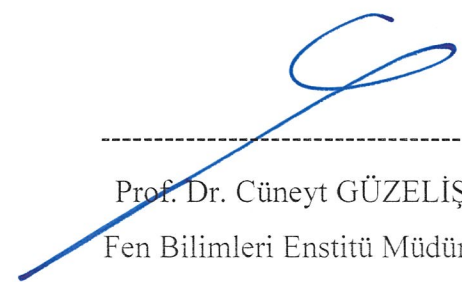
Prof. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü



Yrd. Doç. Dr. Şule Ayar ÖZBAL

Yaşar Üniversitesi



Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

BOYAMA YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI

Pekcan, Ahmet Sinan

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Aralık 2016

Bu çalışmada; boyama yönteminin değişik matematik sorularının çözümünde nasıl uygulanabileceği gösterilmiştir. Ayrıca ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarında boyama yöntemi ile ilgili çıkmış soruların çözümü verilmiştir.

Tezin matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrenciler ve bunları çalıştıracak öğretmenler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

ABSTRACT

THE COLORING METHOD AND APPLICATIONS

Pekcan, Ahmet Sinan

MSc in Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

December 2016

In this thesis we show how to apply the coloring method for solving various mathematical problems. Furthermore we give the solution of the problems in national and international mathematical olympiads by coloring method.

We hope that this thesis will be helpful for high school students that take part in the mathematical olympiads.



TEŞEKKÜR

Bu tez alıőmasının planlanmasında, araőtırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalıőmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Prof. Dr. Rafail ALİZADE sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte bana yardımcı olan annem Kadiriye PEKCAN, kardeşim Alper PEKCAN ve Yaşar Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Ahmet Sinan Pekcan
İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “BOYAMA YÖNTEMİ VE UYGULAMALARI” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Ahmet Sinan Pekcan

İMZA

.....
26 Aralık 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
YEMİN METNİ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR.....	viii
BÖLÜM BİR GİRİŞ.....	1
BÖLÜM İKİ İKİ RENK KULLANILARAK BOYAMA YAPILMASI	3
BÖLÜM ÜÇ İKİDEN FAZLA RENK KULLANILARAK BOYAMA YAPILMASI	11
BÖLÜM DÖRT DEĞİŞİK BOYAMA YÖNTEMLERİ İLE BOYAMA YAPILMASI.....	16
BÖLÜM BEŞ ÖZEL ŞEKİLLER İLE KAPLAMA YAPILMASI.....	41
KAYNAKÇA	59
ÖZGEÇMİŞ.....	60

KISALTMALAR

Kısaltma

Açıklama

IMO

International Mathematical Olympiad

VMEO

Vietnam Mathematical Olympiad

UMO

Ulusal Matematik Olimpiyatı

UİMO

Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı

BÖLÜM BİR

GİRİŞ

Ortaokul ve lise öğrencileri için yapılan Matematik Olimpiyatları dört ana daldan oluşmaktadır: Analiz, Sayılar Teorisi, Sonlu Matematik ve Geometridir. Sonlu Matematik sorularının etkili çözüm yöntemlerinden biride Boyama Yöntemidir. Bu yöntemin nasıl çalıştığını basit bir örnek üzerinde gösterelim.

Örnek. 3×3 boyutlu tablonun hanelerine şekildeki gibi 1, 2, 3, . . . 9 rakamları yazılıyor. Herhangi bir haneden başlayarak, ortak kenarı bulunan başka bir haneye geçilerek, bir haneye birden fazla kez uğramadan bir sayı oluşturuluyor. Verilen koşullarla oluşturulabilecek en büyük sayı nedir?

4	9	3
8	6	5
2	1	7

Çözüm. En büyük sayıyı elde etmek için 9 veya 8 ile başladığımızda, ilk bakışta anlaşılmayan bir nedenle 9 basamaklı bir sayıya ulaşamadığımızı, en fazla 8 basamaklı bir sayı oluşabildiğini görüyoruz. Bunu nedenini anlamak, ciddi kanıtını vermek ve en büyük sayıya nasıl ulaşabileceğimizi görmek için tabloyu satranç tahtası şeklinde boyayalım.

4	9	3
8	6	5
2	1	7

Kurallara uygun şekilde sayı oluşturmak için haneleri dolaştığımızda siyah haneden beyaz haneye, beyaz haneden de siyah haneye geçiyoruz. Siyah hanelerin sayısı beyazlardan bir fazla olduğu için 9 basamaklı bir sayı elde etmek için siyah haneyle başlayıp siyah haneyle bitirmemiz gerekiyor. O halde başlayabileceğimiz en büyük rakam 7'dir. Sayının en büyük olması için bundan sonra 5 ve 6 alırız. Fakat bundan

sonraki hamlede 9 veya 8 alırsak tablo iki parçaya bölünür ve sadece bir parçaya ulaşabiliriz ve dokuz basamaklı bir sayı elde edemeyiz. Böylece tek seçenek kalıyor: 756128493.

Bu çözümde basit bir boyamayla durum tamamen netleşti, kanıt ve doğru çözüme ulaştık. Genelde, tezde vereceğimiz örneklerden de görüleceği gibi boyama yöntemi düzlem üzerinde bir çokgenin belli bir şekillerle kaplanamayacağını veya nasıl kaplanabileceğini göstermek için kullanılıyor ve daha çok satranç tahtası şeklinde boyamak yeterli oluyor. Fakat bazı problemlerin çözümünde ikiden fazla renk veya daha karışık bir boyama şekli gerekebilir.

Bu tezde boyama yöntemiyle çözülebilen soruların çözümlerini inceledik ve değişik boyama şekillerine yer verdik. Tezden özellikle matematik olimpiyatlarına çalışan öğrencilerin, bununla beraber matematik öğretmenleri ve düşünme yeteneğini geliştirmek isteyen ilk ve orta öğretim ve lise öğrencilerinin yararlanacağını umuyoruz.

Tezin ikinci bölümünde satranç tahtası şeklinde iki renk boyamayla çözülen sorular anlatılmıştır. Üçüncü bölümde ikiden fazla renk kullanıldığı sorular ele alınmıştır. Dördüncü bölümde değişik boyama yöntemleriyle çözülen problemler incelenmiştir. Beşinci bölümde özel şekiller yardımıyla kaplama yapılan sorular ele alınmıştır.

BÖLÜM İKİ

İKİ RENK KULLANILARAK BOYAMA YAPILMASI

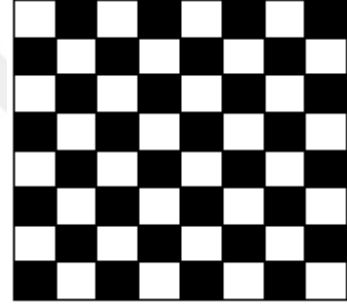
Bu bölümde verilen şekilleri iki renk yardımıyla satranç tahtası biçiminde boyayıp soruların çözümüne ulaşacağız.

Örnek 1:

Bir satranç tahtasını domino taşları ile kaplamak mümkün müdür?

Çözüm:

Bir satranç tahtası 64 adet kareden (sekiz karelik sekiz satır) oluşmaktadır. 32 tane domino her satırda 4 adet yatay domino olmak üzere kaplayabiliriz.

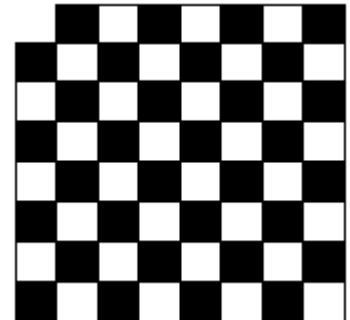


Örnek 2:

Bir satranç tahtasının bir köşesini çıkardığımızda domino taşları ile kaplamamız mümkün müdür?

Çözüm:

Satranç tahtasından bir köşe aldığımızda geriye kalan sayısı tektir. Domino taşları 2 kareden oluştuğu için geri kalan satranç tahtasını ikili domino taşları ile kaplayamayız.

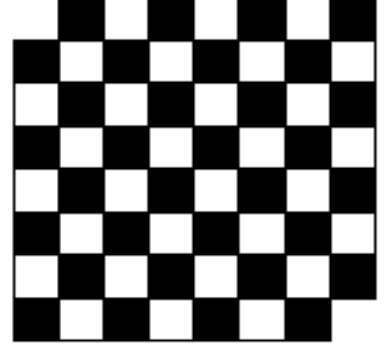


Örnek 3:

8×8 boyutlu bir satranç tahtasının karşılıklı zıt iki köşesinden birer birim kare çıkartılıyor. Kalan 62 birim kareyi 31 adet 1×2 boyutlu domino ile kaplamak mümkün müdür?

Çözüm:

Aynı renge sahip karşılıklı zıt olan iki birim kare satranç tahtasından çıkartılmıştır. Bir domino taşı bir siyah birim kare ve bir beyaz birim kare kaplamaktadır. Şekilde görüldüğü gibi 30 beyaz birim kare ve 32 siyah birim karemiz vardır. Dominolarla kapatılabilen beyaz ve siyah hanelerin sayısı eşit olacağından kaplama yapılamaz.

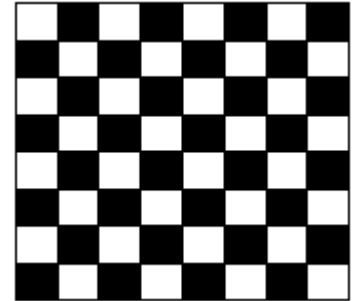


Örnek 4:

8×8 boyutlu tablonun sol alt köşesindeki hanede bir dama bulunmaktadır. Her adımda dama bulunduğu hanenin komşusundaki haneye götürülebilir. (Bir ortak kenarı bulunan birim karelere komşu iki hane denir.) 2017 adım sonucu dama sağ üst köşedeki hanede bulunabilir mi?

Çözüm:

Tabloyu satranç tahtası şeklinde düşündüğümüzde dama her adımda siyah haneden beyaz haneye, beyaz haneden siyah haneye geçmektedir. Başlangıçta siyah hanede bulunan dama çift sayıda adım atarak siyah hanelere ulaşabilir. 2017 adım sonucu dama beyaz hanede kalır. Siyah renkli hanemiz sağ üst köşeyi kapattığı için damamız oraya ulaşamaz.



Örnek 5:

Bir çember 6 eş parçaya ayrılıyor. Saat yönünün tersi olarak eş parçalara sırasıyla 1, 0, 1, 0, 1, 0 yazılıyor. Her bir adımda komşu eş parçalar 1 artıyor. Birbiri ardına yapılan adımlar sonucunda bütün sayılar birbirine eşit olur mu?

Çözüm:

Çemberin eş parçalarını sırasıyla siyah ve beyaz renge boyayalım. Siyah ve beyaz parçalara yazılan sayıların toplamalarını bulalım. Siyah parçalardaki sayıların toplamı 3 ve beyaz parçalardaki sayıların toplamı 0 olur. Aradaki fark 3'tür.



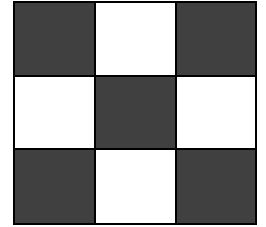
Komşu eş parçalar 1 arttığında aynı anda siyah ve beyaz parçalardaki sayılar 1 artar. Aradaki fark aynı kalır. Bundan dolayı birbiri ardına yapılan adımlar sonucunda eşitlik sağlanamaz.

Örnek 6:

3×3 boyutlu bir tablonun herhangi bir karesinden (A hanesinden) çıkan çekirge her adımda bulunduğu haneden, bununla ortak kenarı bulunan bir diğer haneye sıçrayarak ve tüm hanelerde bir kez bulunarak sonunda $B \neq A$ olmak üzere B hanesine geliyor. Tüm mümkün (A, B) sıralı ikililerin sayısı kaçtır?

Çözüm:

Tabloyu yandaki şekildeki gibi boyayalım. Çekirge her adımda siyah haneden beyaz haneye veya beyaz haneden siyaha sıçrar. 5 siyah ve 4 beyaz hane olduğundan, çekirge tüm hanelere uğramak için, siyah haneden başlayıp siyah hanede bitirmesi gerekir. Herhangi iki siyah hane A ve B olarak alındığında A'dan çıkıp B ye gelen bir rota kolayca bulunur. O halde, A hanesi 5, B hanesi de 4 yolla seçilebilir, yani (A, B) sıralı ikililerin sayısı $5 \cdot 4 = 20$ dir.

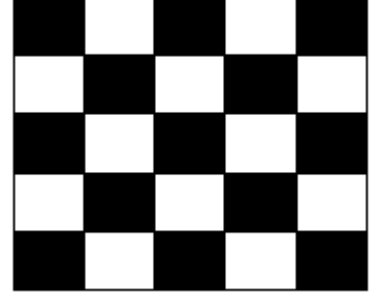


Örnek 7:

5×5 boyutlu bir levhanın hanelerine 1, 2, 3, ... 25 sayıları yazılarak yerleştirilmiştir. Ardışık sayılar ortak bir kenarı paylaşan birim hanelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

Çözüm:

Levhayı yanda gördüğümüz sol alt köşe siyah olacak şekilde satranç tahtası boyama biçiminde boyayalım. Tablonun 13 hanesi siyah 12 hanesi beyaz renkte olmuştur. En küçük asal sayımız 2 ve ondan başka çift asal sayı olmadığı için siyah hanelere tek sayıları yerleştirdiğimizde bir satırda en fazla asal sayıya ulaşabiliriz.



Yandaki şeklimizde görüldüğü gibi en az iki beyaz karemiz var ve bir tane çift asal sayımız var. Dolayısıyla bir satırda en çok dört asal sayı olabilir.

21	20	11	10	9
22	19	12	1	8
23	18	13	2	7
24	17	14	3	6
25	16	15	4	5

Örnek 8: (UMO-2011)

1, 2, 3, ... 4022 sayıları 2×2011 bir satranç tahtasının birim karelerine, iki sayı aynı birim karede olmamak ve ardışık olan sayılar ortak bir kenarı olan birim karelerde yer almak koşuluyla kaç farklı biçimde yerleştirilebilir?

Çözüm:

Tahtayı satranç tahtası şeklinde siyah ve beyaz renklere boyarsak 1 ve 4022 sayıları farklı renklerde olan karelerde yer alacak.

1	2	...	2011
4022	4021	...	2012

Şekil 1

Şekil 1’de görüldüğü 1 beyaz karedeyse 4022 siyah karede olacak. 1 ile 4022’yi tahtaya yerleştirdiğimizde diğer sayıları tek bir şekilde yerleştirebiliyoruz. 1 ile 4022’nin birlikte ilk ve birlikte son sütunda olduğu 4 durum var.

1 ve 4022 aynı sütunda değilse 1 ile 4022’nin aynı sütunda olmadığı durumları hesaplayalım:

1’i 4022 kareden her birine koyabiliriz, 4022 ile 1 farklı renklerdeki karelerde yer alacağı için, 4022’ye $2011-1 = 2010$ farklı sütun kalıyor. Yine rota tektir: Örneğin aşağıdaki tabloda gibi: $4022 \times 2010 = 8084220$ durum vardır.

$k+1$...	$2k-1$...	$2k+1$...	$n+1$
...	1	4021	$t+1$

Şekil 2

Toplam: $8084220+4 = 8084224$

Örnek 9: (UIMO1996)

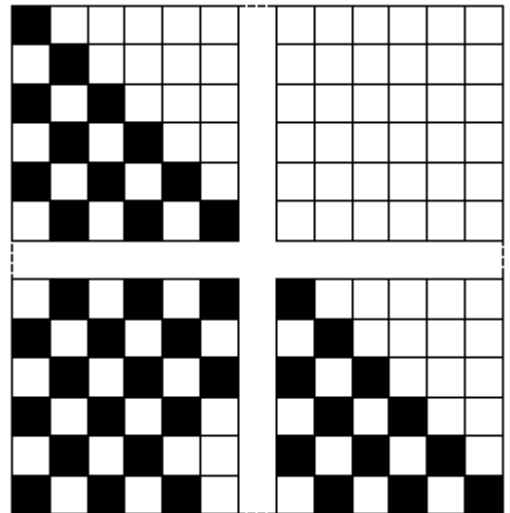
101×101 kareden oluşan kare şeklindeki bir tablonun üzerindeki bir taşı bir hamlede bulunduğu kareden bu karenin sağındaki, solundaki, üstündeki ve altındaki bitişik karelerden herhangi birine götürebiliyoruz. Tahtanın sol alt köşesindeki karede bulunan bir taşın tam 100 ardışık hamle sonunda ulaşabileceği karelerin sayısı kaçtır?

Çözüm:

Tabloyu satranç tahtası şeklinde siyah ve beyaz renklere boyyalım.

0. Hamlede Siyah kareye
1. Hamlede Beyaz kareye
2. Hamlede Siyah kareye

...



100. Hamlede siyah kareye ulaşır.

$2n$ sayıda ardışık hamlelerin sonunda siyah karelere ulaşıldığı görülmüştür.

Dolayısıyla taşın 100 hamle sonucu ulaşabileceği kareler, taşın

$2n \leq 100$ olmak üzere

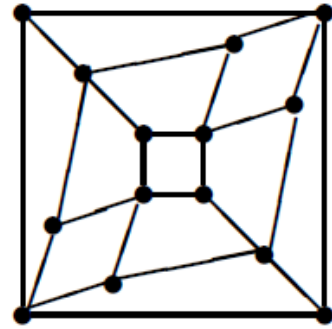
$2n$ adıma ulaşabileceği siyah kareler olacak. Bu da köşegenin sol altındaki siyah karelerin sayısıdır (Köşegendeki kareler dâhil).

Bu karelerin sayısı $n=0$ için 1, $n=1$ için 3 vs. $n=50$ için 101'dir.

$$\text{Bu da, } 1+3+5+\dots+101 = \frac{(1+101) \times 51}{2} = 51^2 = 2601$$

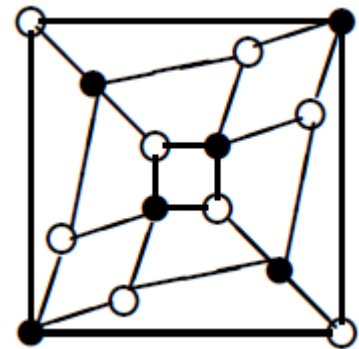
Örnek 10:

Yandaki şekil, 14 şehri bağlayan bir yol haritasını gösteriyor. Her şehirden tam bir kez geçen bir yol var mı?



Çözüm:

Satranç tahtasında olduğu gibi şehirlerimizi sırasıyla siyah ve beyaza boyayalım. Komşu şehirlerin renkleri birbirinin zıddı olduğu şekilde görülmektedir. 14 şehirden geçen her yolun S-B-S-B-S-B-S-B-S-B-S-B-S-B-S-B veya B-S-B-S-B-S-B-S-B-S-B-S-B-S renklerini almaktadır. Böylece yol yedi siyah ve yedi beyaz şehirden geçer. Fakat haritamızda altı siyah ve sekiz beyaz şehrimiz boyalı olduğu görülmektedir. Bundan dolayı her şehirden tam bir kez geçen bir yol bulamayız.

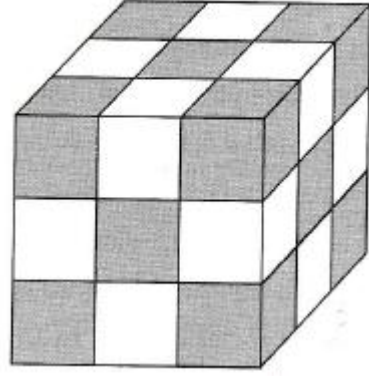


Örnek:11

Fare, $3 \times 3 \times 3$ boyutlu (27 küçük küpten oluşan) küp şeklindeki bir peynir parçasını yiyor. Fare bir küçük küpü yiyip bitirdikten sonra komşu (ortak yüzü bulunan) küçük küpü yiyor. Fare merkezdeki küpün dışında tüm küpleri yiyebilir mi?

Çözüm

Küçük küpleri, ortak yüzü bulunan küpler farklı renkte olacak şekilde, beyaz ve siyah renklere boyayalım.



Küçük küpleri sırasıyla beyaz ve siyah renklere boyadığımızda 14 tane siyah ve 13 tane beyaz küçük küpe sahip olduğumuzu görüyoruz. En son merkezdeki küp kalacağı için bunu yok sayabiliriz. O halde 14 tane siyah ve 12 tane beyaz küçük küp olacak. Fare komşu küçük küplere gideceği için siyah küpten sonra beyaz, beyaz küpten sonra siyah küp yemek zorunda. Bu durumda siyah ve beyaz küp sayısı arasındaki fark en fazla 1 olur. Siyah ve beyaz küpler arasındaki fark 2 olduğu için istenen sağlanamaz.



Ön Yüz



Orta Yüz



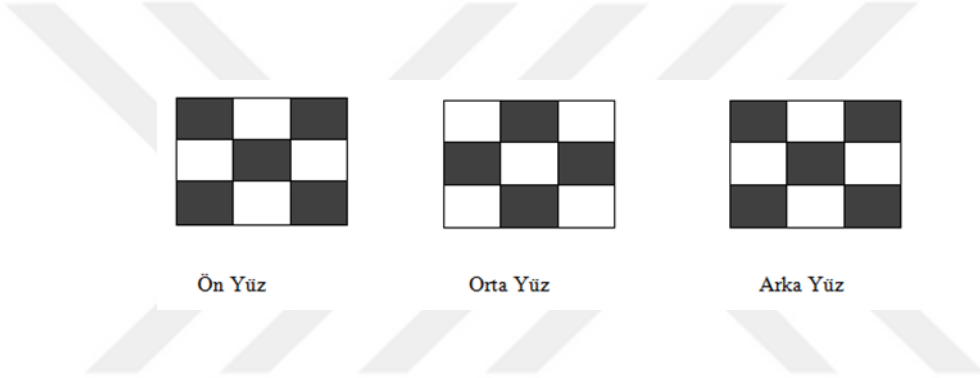
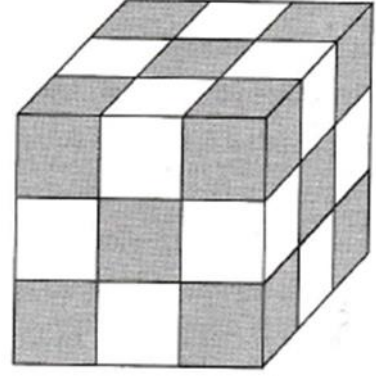
Arka Yüz

Örnek 12:

$1 \times 1 \times 4$ boyutundaki 54 tuğlayı $6 \times 6 \times 6$ 'lık kutuya doldurabilir misiniz? Tuğlaların yüzleri kutunun yüzlerine paraleldir.

Çözüm:

6×6×6 boyutlu bir küp 2×2×2 boyutundaki 27 alt küpten oluşur. Onları satranç tahtası boyama şeklinde sırasıyla siyah ve beyazla renklendirelim. Sonra 14 küçük küp siyaha, 13 küçük küp de beyaza boyanacak, yani, 112 siyah ve 104 beyaz birim küp olacak. Herhangi bir 1×1×4 tuğla, 2 siyah ve 2 beyaz birim küpü kaplar. 54 tuğla 108 beyaz birim küp ve 108 siyah birim küp kaplar. Fakat sadece 104 beyaz birim küp mevcut.



BÖLÜM ÜÇ

İKİDEN FAZLA RENK KULLANILARAK BOYAMA YAPILMASI

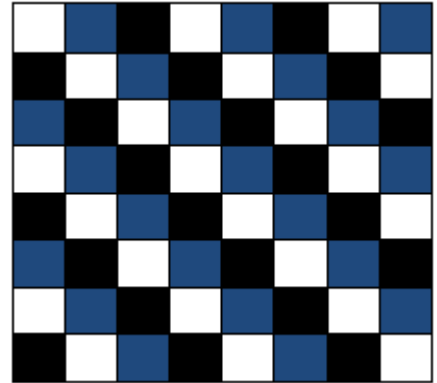
Bu bölümde bir zeminin ikiden fazla renk kullanılarak boyanması ile soru çözümüne ulaşılacak.

Örnek 1:

8×8 boyutlu bir satranç tahtasında birim karelerden birinde bulunan bir böcek her adımında yukarı komşu, sağ komşu veya köşegen boyunca sol aşağıdaki birim kareye gidebiliyor. Böcek başlangıçta sol aşağı köşedeyse, her birim karede tam olarak bir kere bulunmak şartıyla tüm birim kareleri dolaşabilir mi?

Çözüm:

Böceğin yönü üç farklı yön olduğundan Tahtayı şekildeki gibi Siyah (S), Beyaz (B) ve Mavi (M) renklere boyayalım. Böceğin hareket yönüne göre, siyah birim karede bulunan bir böcek, beyaz birim kareye, beyaz birim karede bulunan bir böcek, mavi birim kareye ve mavi birim karede bulunan da siyah birim kareye gidebiliyor.



$$S \rightarrow B, B \rightarrow M, M \rightarrow S$$

O halde böcek nasıl giderse gitsin uğrayacağı hanelerin renkleri hep SBMSBMSBM... şeklinde sıralanacak.

Siyah hanelerin sayısı 21, beyaz hanelerin sayısı 22 ve mavi hanelerin sayısı da 21 olduğundan böcek bütün haneleri dolaşmak istiyorsa beyaz haneden başlaması gerekir. Sol alt köşe siyah olduğu için böceğin bu köşeden çıkıp bütün haneleri dolaşması mümkün değildir.

Örnek 2:

9×9 satranç tahtasının birim karelerine 65 tane karınca yerleştirilmiştir. Aynı anda ve aynı hızla yapılan her hamlede her karınca, bulunduğu birim karenin yatay veya dikey komşularından birisine geçmektedir. Birim karenin merkezine gelen her karınca 90 derecelik dönme açısı ile satranç tahtasının dışına çıkmadan hareketine devam eder. Karıncalar sonlu hamle sonunda en az bir karede en az iki karıncanın bulunacağını ispatlayınız.

Çözüm:

Tabloyu yandaki şekilde gibi 4 farklı renk ile boyayalım. Tahtada 25 tane A karesi, 20 tane C karesi, 20 tane B ve 16 tane de D karesi vardır. Güvercin yuvası prensibine göre $65=32 \times 2 + 1$ olduğundan A ve D’de en az 33 tane karınca ya da B ve C de en az 33 karınca vardır. İkinci durumda bir adım

A	C	A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B	D	B
A	C	A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B	D	B
A	C	A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B	D	B
A	C	A	C	A	C	A	C	A
B	D	B	D	B	D	B	D	B
A	C	A	C	A	C	A	C	A

sonra A ve D’de en az 33 karınca vardır. Her hamlede karıncalar yönünü değiştirdiğinden A’daki her karınca iki hamle sonra D’ye gider. Güvercin yuvası prensibine göre A’da 17 karınca ya da D’de 17 karınca olmalıdır. Bu ise bize aynı karede iki karınca olacağını ispatlar. Çünkü D’nin kare sayısı 16’dır

Örnek 3:

16 tane 1×4 karo ile 8×8 boyutlu bir zemin kaplanabilir mi?

Çözüm:

8×8 boyutlu zemini 1, 2, 3, 4 diye tablodaki gibi dört farklı renkle boyayalım. Bu durumda 1×4’lük karoyu nasıl yerleştirirsek yerleştirelim dört kare de farklı rengi kaplayacaktır. Dolayısıyla her renkten 16 karo olmalıdır. Her renkten 16 karemuz bulunduğu için kaplama yapılabilir.

4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4

1	2	3	4
---	---	---	---

Örnek 4:

Bir kenarı n birim olan bir kare, n^2 tane birim kareye bölünüyor ve her kare kırmızı, beyaz ya da maviye boyanıyor. Böyle bir boyamada, bu karenin bir satır veya sütununda aynı renkte en az üç tane birim kare olmasının kaçınılmaz olması için, n değeri en küçük kaç olmalıdır?

Çözüm:

$n = 6$ için boyama tabloda görülmektedir.

Bu durumda n 'in 6 ve daha küçük değerleri için istediğimiz boyamayı elde edemedik.

Güvercin yuvası prensibinden yardım alarak $n=7$ değerini deneyelim. 7×7 'lik tabloda $49=16 \times 3+1$ olduğundan aynı renkte en az 17 birim kare bulunmaktadır.

K	M	B	K	M	B
M	B	K	M	B	K
B	K	M	B	K	M
K	M	B	K	M	B
M	B	K	M	B	K
B	K	M	B	K	M

Buradan yola çıkarak, $17=7 \times 2+3$ olduğundan, aynı prensip bize elimizdeki 7 satırdan en az birinde, en az üç tane aynı renkte birim kare olması gerektiğini söyler

Örnek 5:

250 adet $1 \times 1 \times 4$ tuğlanın, $10 \times 10 \times 10$ kutuya doldurmanın bir yolu var mı?

Çözüm:

Kutunun hücrelerine verilen değerler (x, y, z) , $1 \leq x, y, z \leq 10$ dur. Hücreleri 0, 1, 2 ve 3 tarafından belirtilen 4 renge boyayalım.

Eğer $x+y+z \equiv i \pmod{4}$ ise, (x, y, z) hücresine i rengi seçilir.

Bu boyama, $1 \times 1 \times 4$ 'lük bir tuğlanın kutuya nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin daima her renkten bir hücreyi doldurma özelliğine sahiptir.

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

Şekil 1

Nitekim eğer kutu 250 tane $1 \times 1 \times 4$ 'lük tuğlalarla doldurulsaydı, sırasıyla 0, 1, 2 ve 3 hücrelerinde her renkten 250 tane olmak zorunda olurdu. Bu gerekli doldurmanın olabilirliğini görelim.

Şekil 1'de rengeyle karşılığı olan en düşük seviyede hücreleri gösterir. Sırasıyla 0, 1, 2 ve 3 renkleriyle 26, 25, 24 ve 25 hücreleri mevcuttur. Sonraki katmanın rengi, mod 4'te 1 ekleyerek ilerleyen katmandan elde edilir. Böylece ikinci katman sırasıyla 1, 2, 3 ve 0 renklerinden 26, 25, 24, 25 hücrelerine sahiptir. Üçüncü katman ise sırasıyla 2, 3, 0 ve 1 renklerinden 26, 25, 24 ve 25 hücrelerine sahiptir. Dördüncü katman sırasıyla 3, 0, 1 ve 2 renklerinden 26, 25, 24, 25 hücrelerine sahiptir ve böyle devam eder.

Böylelikle, 0 renginden $(26+25+24+25) \cdot 2 + 26 + 25 = 251$ kadar hücre mevcuttur.

Nitekim $1 \times 1 \times 4$ 'lük tuğlalarla $10 \times 10 \times 10$ 'luk kutu doldurulamaz.

Örnek 6:

7×7 boyutlu kare 16 tane 3×1 ve bir tane 1×1 boyutlu karo ile döşenmiştir. 1×1 boyutlu karo hangi hanelerde bulunabilir?

Çözüm:

Haneleri çapraz biçimde 0, 1 ve 2 renkleriyle boyayalım. O zaman her 3×1 'lik karo her rengi bir kez doldurur. Şekil 1 de 17 "0", 16 "1" ve 16 "2" mevcuttur. 1×1 boyutlu karo, "0" olarak boyanan karelerden birini doldurmalıdır. Ayrıca, tahtayı 90 derecelik açı ile döndürürsek bir "0" renkli hane yine o renkli haneye denk gelmelidir. O halde mümkün pozisyonlara gelince, Şekil 1 de sadece merkez kare, dört köşe ve dış kenarların merkezi kalacaktır. Bunların olabileceği kolayca kontrol edilir.

0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2	0
2	0	1	2	0	1	2
1	2	0	1	2	0	1
0	1	2	0	1	2	0

Şekil 1

Farklı bir boyama farklı bir çözüm sağlayacaktır. Şekil 2'de olduğu gibi 0, 1 ve 2 olarak 3 rengi kullanırız. Yani, 0 rengindeki haneler merkez, dört köşe ve dış kenarların merkezi olacaktır. 3×1 'lik karolar iki türdür, "0" renginin bir hanesini ve "1" renginin iki hanesini dolduranlar; "1" renginin bir hanesini ve "2" renginin iki hanesini dolduranlar. "0" renginin tüm hanelerinin 3×1 karolarla doldurulduğunu varsayalım.

0	1	1	0	1	1	0
1	2	2	1	2	2	1
1	2	2	1	2	2	1
0	1	1	0	1	1	0
1	2	2	1	2	2	1
1	2	2	1	2	2	1
0	1	1	0	1	1	0

Şekil 2

1.türden 9 karo ve 2.türden 2 karo olacaktır.

“1” renginden $9 \cdot 2 + 7 = 25$ hane ve “2” renginden $7 \cdot 2 = 14$ hane dolduracaklardır. Bu çelişki, 0 rengine ait hanelerden birinin 1×1 karo ile doldurulduğunu kanıtlar.

1×1 'lik karo, merkez kare ve köşedeki dört kareyi dolduracaktır. Buna göre 1×1 'lik karoyu 5 farklı durumda yerleştirebiliriz. Aşağıdaki şekillerde 2 durum gösterilmiştir.

—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	1x1

—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	1x1	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

BÖLÜM DÖRT

DEĞİŞİK BOYAMA YÖNTEMLERİ İLE BOYAMA YAPILMASI

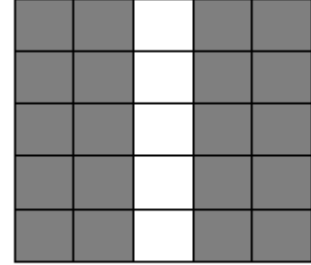
Bu bölümde satranç tahtası boyama şeklinde çözemediğimiz soruları değişik boyama yöntemleri yardımıyla çözeceğiz.

Örnek 1:

5×5 boyutlu satranç tahtasının bir karesine -1 ve diğer 24 kareye $+1$ yazarız. Her adımda $a > 1$ olmak üzere $a \times a$ boyutlu bir kare alınarak bu karedeki tüm sayıların işaretleri tersine çevrilebilir. Başlangıçta -1 sayısı hangi hanelerde bulunduğu durumda bu işlemlerle tüm sayılar $+1$ yapılabilir?

Çözüm:

Tahtayı Şekil 1 gibi boyayalım. Alınan kareler çift sayıda siyah kareyi barındırıyor. Eğer -1 siyah karede olursa, siyah karelerde daima -1 'li tek sayılar olur.

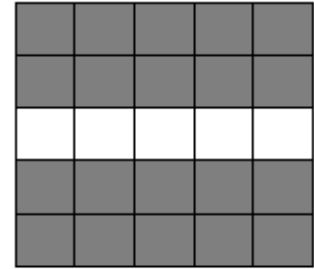


Şekil 1

Tahtayı Şekil 2 deki gibi 90° döndürdüğümüzde -1 'in sadece merkez kare üzerinde olabileceğini gösterir.

Eğer -1 merkez hanede ise 5 hamlede tahtadaki bütün sayıları aşağıdaki hamlelerle $+1$ yapabiliriz.

- 3×3 boyutlu sol alttaki kare
- 3×3 boyutlu sağ üstteki kare
- 2×2 boyutlu sol üstteki kare
- 2×2 boyutlu sağ alttaki kare
- 5×5 boyutlu kare



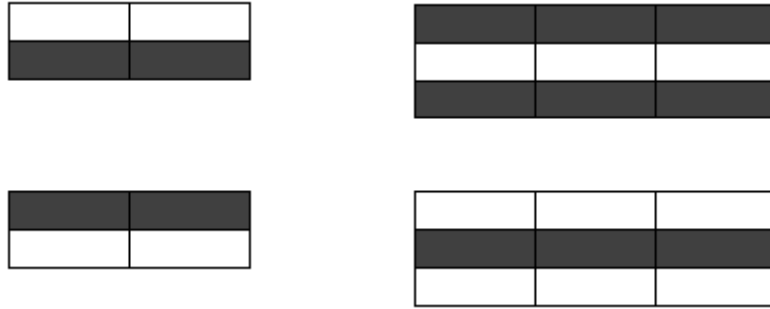
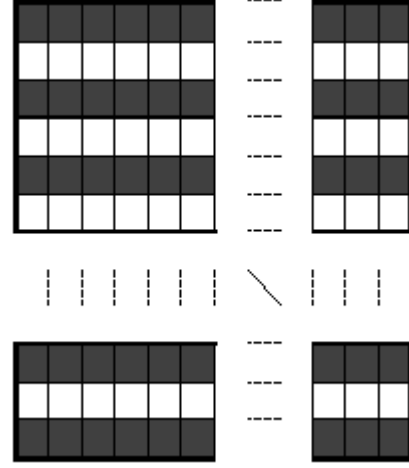
Şekil 2

Örnek 2: (AUO 1989)

23×23 boyutlu bir zemin 1×1, 2×2 ve 3×3 lük karolarla kaplanmak isteniyor. En az sayıda gereken 1×1'lik karo sayısını bulunuz.

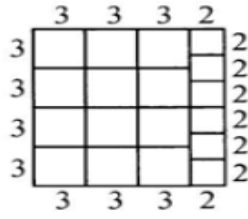
Çözüm:

1×1'lik karolara ihtiyaç duyulmadığını varsayalım. Kare satırlarını yandaki şekildeki gibi dönüşümlü olarak siyah ve beyaz renk ile boyayalım. Siyah birim kareler beyaz birim karelerden 23 fazla olacaktır. 2×2'lik bir karo birçok siyah ve beyaz birim kareyi eşit olarak dolduracaktır. 3×3'lük bir karo ise bir renkteki birim kareyi diğer renkten 3 fazla dolduracaktır. Dolayısıyla siyah ve beyaz birim karelerin farkı 3 ile bölünebilir. Fakat 23, 3'e bölünemez. Dolayısıyla varsayım yanlıştır. O zaman en az bir tane 1×1'lik karoya ihtiyaç vardır.

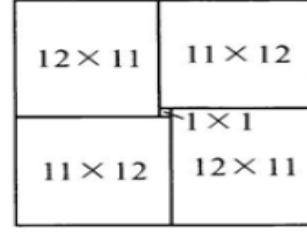


Şekil 1'de 12×11'lik dikdörtgen 2×2 ve 3×3'lük karolarla kaplama örneği verilmiştir. Şekil 2 de, 23×23'lük zeminin 1 tane 1×1'lik karo ve 4 tane 12×11'lik dikdörtgenden oluşmaktadır. Her dikdörtgeni 6 tane 2×2 lik karo ve 12 tane 3×3'lük karolar oluşturur.

Gerçek bir uygulamada en az sayıda gereken 1×1'lik karo sayısının 1 olduğunu göstermiş oluruz.



Şekil 1



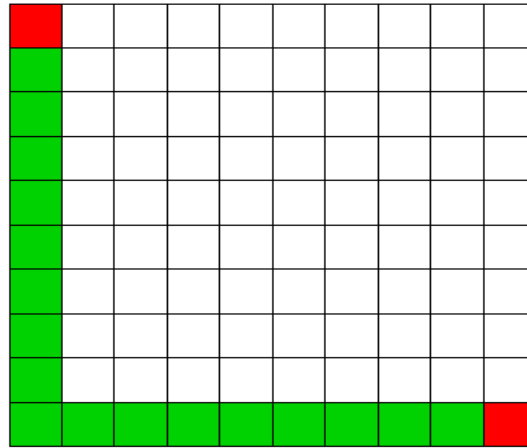
Şekil 2

Örnek 3:

10×10 boyutlu karenin birim karelerine rastgele 1, 2, 3... 100 sayıları yazılıyor. İçerdikleri sayıların farkının 5'ten büyük olduğu iki komşu karenin bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Farz edelim ki yukarıdaki durum geçerli değildir. İki komşu birim kareye yazılan sayıların farkı en fazla 5'dir. Tahta üzerindeki en küçük ve en büyük sayı 1 ve 100'dür. Bu sayılar aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi 19 tane komşu birim kare olarak dizilebilir.



Her bir komşu birim kareye yazılan sayıları aşağıdaki gibi belirtelim.

$$a_1 = 1, a_2, a_3, \dots, a_k = 100, k \leq 19$$

Üçgen eşitsizliğini kullandığımızda çelişkiyi görmüş oluruz.

$$99 = |a_k - a_1| = |(a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + \dots + (a_2 - a_1)|$$

$$\leq |a_k - a_{k-1}| + |a_{k-1} - a_{k-2}| + \dots + |a_2 - a_1|$$

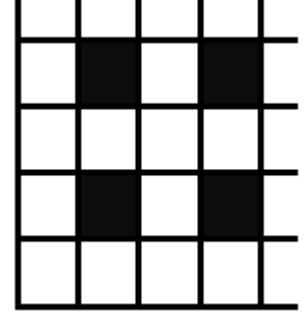
$$\leq 5(k-1) \leq 5 \cdot 18 = 90$$

Örnek 4:

Dikdörtgen şeklindeki bir zemin, her biri 2×2 veya 1×4 boyutunda olan karolarla kaplanmıştır. 2×2 boyutlu karolardan biri kırıldı. Kırılan karo yerine 1×4 boyutlu karo alınarak oda yeniden döşenebilir mi?

Çözüm:

Dikdörtgen zemini yandaki şekilde olduğu gibi boyarsak herhangi bir durumda 1×4 'lük karo yerleştirildiğinde her zaman 0 veya 2 siyah haneyi kapatacak. 2×2 boyutlu karo her zaman 1 tane siyah haneyi kapatacak. Dolayısıyla aynı miktarda aynı kaplama yapılamıyor. Bu sebeple 2×2 'lik ya da 1×4 'lük karolar birbirinin yerine kullanılamaz.

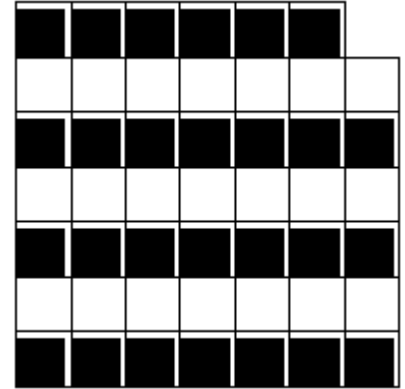


Örnek 5:

$(2n+1) \times (2n+1)$ boyutlu satranç tahtasının bir köşesi çıkarılır. Hangi n değerleri için kalan kareleri 2×1 dominolarla öyle doldurabilirsiniz ki dominoların yarısı yatay olsun?

Çözüm:

Satranç tahtamızı yandaki şekilde boyayalım. Satranç tahtamızda $2n^2 + n$ beyaz kare, $2n^2 + 3n$ siyah kare ve toplamda $4n^2 + 4n$ tane kare vardır. $2n^2 + 2n$ tane domino kareleri kaplamak için yeterlidir. Dominoların yarısı yatay olacağı için $n^2 + n$ tane yatay ve $n^2 + n$ tane dikey dominomuz olacaktır. Her dikey domino bir siyah ve bir beyaz kareyi kaplar.



Bütün dikey dominoları yerleştirdiğimizde $n^2 + n$ beyaz kare ve $n^2 + n$ siyah kareyi kaplar. Kalan n^2 beyaz kare ve $n^2 + 2n$ siyah kare yatay dominolar ile kaplanmak zorundadır. Yatay domino sadece aynı renk kareleri kaplar. n^2 tane beyaz kareyi kaplamamız için n 'in çift sayı olması gereklidir. Kolayca görüldüğü gibi kaplamayı yapmak için gerekli olan bu durum yeterlidir.

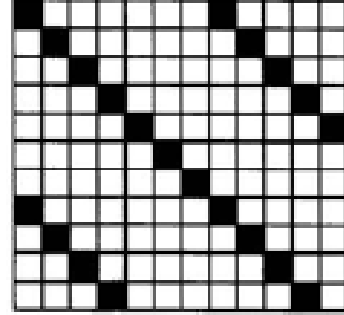
Bundan dolayı gerekli kaplama $(4n+1) \times (4n+1)$ tahta için mümkün ve $(4n-1) \times (4n-1)$ tahta için mümkün değildir.

Örnek 6:

11×12 boyutlu bir dikdörtgen 19 tane 1×6 veya 1×7 boyutlu dikdörtgenler ile kaplanabilir mi?

Çözüm:

11×12 boyutlu bir dikdörtgeni yandaki şekilde gösterildiği gibi siyah ve beyaz renklere boyayalım. Öyle ki aynı anda iki siyah birim kare 1×6 veya 1×7 boyutlu dikdörtgen ile kaplanmasın. Şekilde 20 tane siyah birim kare vardır. Siyah kareler 19 tane 1×6 veya 1×7 boyutlu dikdörtgenler ile kaplanamaz.



Örnek 7:

Birçok 1×1 kareye sahipsiniz. Kenarlarını 4 renkten biriyle boyayabilir ve aynı rengin kenarları boyunca yapıştırarak birleştirebilirsiniz. Amacınız bir $m \times n$ dikdörtgenine sahip olmaktır. Hangi m ve n için bu mümkündür?

Çözüm:

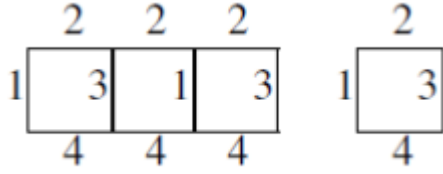
Sonuç: $m \equiv n \pmod{2}$ ise, onları $m \times n$ dikdörtgeninde birleştirebiliriz.

(a) m ve n ikisi de tek sayıdır. Şekil 1 de olduğu gibi bir $1 \times n$ dikdörtgeni yapabiliriz. Bu şeritlerden Şekil 2 deki gibi bir dikdörtgen oluşturabiliriz.

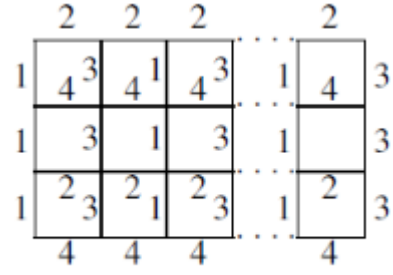
(b) m ve n çift sayıdır.

Dikdörtgenleri sırasıyla $(m-1) \times (n-1)$, $1 \times (n-1)$, $(m-1) \times 1$ ve 1×1 boyutlarının tek sayı kenar uzunluklarıyla düşünün. Bunlar $m \times n$ dikdörtgeninde toplanabilirler.

(c) m çift sayıdır ve n tek sayıdır. Problemin koşullarını karşılayacak bir $m \times n$ dikdörtgeni oluşturmayı başardığımızı varsayalım. Dikdörtgen kenarlarından birini tek sayı uzunluğunda olduğunu düşünelim. Kırmızıya boyandığını varsayalım. Karelerin kırmızı kenarlarının toplam sayısını sayalım. Dikdörtgenin çevresinde n 'ler vardır, içinde ise bir çift sayı vardır çünkü bir diğer kırmızı komşu, karenin kırmızı bir kenarına aittir. Böylelikle kırmızı kenarların toplam sayısı tek sayıdır. Karelerin toplam sayısı kırmızı kenarların toplam sayısıdır, örneğin tek sayıdır. Diğer yandan, bu sayı $m \cdot n$ 'dir, yani, bir çift sayıdır. Çelişki!



Şekil 1



Şekil 2

Örnek 8:

Her birinde $+1$ ve -1 yazılan 200 adet 1×2 boyutlu kartla 4×100 boyutlu dikdörtgeni, her satırdaki ve her sütundaki sayıların çarpımı pozitif olacak şekilde kapatmak mümkün müdür?

Çözüm:

Mümkündür. 4×5 boyutlu dikdörtgen yandaki şekildeki gibi kapatılabilir. 4×100 boyutlu dikdörtgen de 25 tane 4×5 boyutlu dikdörtgene bölünerek kapatılabilir

-1	+1	+1	+1	-1
-1	-1	-1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1

Örnek 9:

$n \times m$ boyutlu bir dama tahtasının bazı karelerini siyaha, geri kalan karelerini ise beyaza boyamak istiyoruz. Öyle ki, boyama işlemi tamamlandığında her siyah karenin çift sayıda siyah komşusu, her beyaz karenin çift sayıda beyaz komşusu olsun (Bir kareye çaprazdan da olsa temas eden karelere o karenin komşuları diyelim ve karenin kendisini de komşuları arasında sayalım). Bu işlemin hangi (m, n) ikilileri için yapılabileceğini belirleyiniz.

Çözüm:

nm 'nin çift olduğu durumlarda çözüm vardır. Genelliği kaybetmeden satır sayısı olan n 'nin çift olduğunu varsayalım 1. ve 2. satırları siyaha, 3. ve 4. satırları beyaza, 5. ve 6. satırları siyaha... boyarsak istenilen türden bir boyama elde ederiz. nm tek ise böyle bir boyama mümkün değildir: Eğer mümkün olsaydı siyah kare sayısı veya beyaz kare sayısı tek olurdu. Genelliği kaybetmeden beyaz kare sayısının tek olduğunu varsayalım. Her beyaz kare için bir köşe ve komşu olmayan her iki beyaz

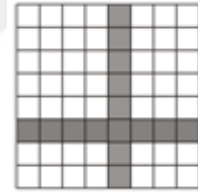
kareye tekabül eden köşeler arasında bir kenar barındıran çizgeyi oluşturalım. Bu çizgenin tek sayıda köşesi ve her köşeden çıkan tek sayıda kenar olacaktır. Bu mümkün olmadığı için çelişki elde ederiz.

Örnek 10:

Başlangıçta tüm birim kareleri beyaz olan $n \times n$ boyutlu satranç tahtasının birim karelerinden k tanesi siyaha boyanmıştır. Boyama işlemi nasıl yapılırsa yapılsın, köşeleri siyah karelerin merkezinde bulunacak şekilde bir paralel kenar bulunmasını garanti edebilmek için k 'nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

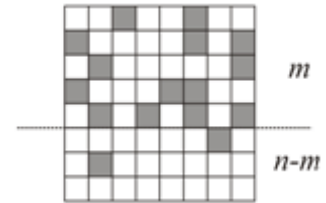
Çözüm:

Satranç tahtasının herhangi bir satır ve herhangi bir sütununda yer alan tüm kareler siyaha boyandığında, istenen türde bir paralelkenarın çizilemeyeceği açıktır. Bu durumda, toplam $2n-1$ siyah kare vardır ve $k < 2n$ iken, paralelkenarın varlığını garanti edemeyiz.



Şimdi, herhangi bir şekilde $2n$ karenin siyaha boyanmış olduğunu kabul edelim. İki veya daha fazla sayıda siyah kare bulunduran satırların sayısını m ile gösterelim. Genelliği bozmadan, bu tür satırların, ilk m satırı olduğunu kabul edebiliriz. Bu satırların her birisi için, satırdaki siyah kare ile diğer siyah kareler arasındaki ölçülen uzaklıkları bir listeye kaydedelim.

Örneğin, yandaki şekilde, birinci satır için 3, ikinci satır için 5;7;üçüncü satır için 6; dördüncü satır için 4,5 ve beşinci satır için 2, 4, 6 değerleri kaydedilmiş olacaktır. Tanım gereği, kaydedilen bu değerler 1 ve $n-1$ arasında değerler olabilir.



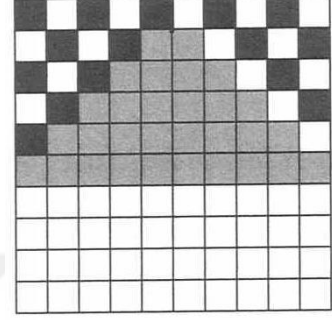
Her birisi en fazla bir tane siyah kare bulunduran satırlardaki siyah karelerin toplamı en fazla $n-m$ olduğundan, üst m sırada yer alan siyah karelerin sayısı en az $2n-(n-m)=n+m$ olur. Bu karelerin m tanesi her sıradaki siyah kare olup, diğer karelerin her birisi için, listemizde kaydedilmiş bir sayı bulunur. Sonuç olarak liste kayıtlı en az n tane sayı yer alır. Bu sayılar 1 ile $n-1$ arasında değer alabildiğinden, en az ikisi eşittir. Böylece, iki farklı satırda, satırın ilk siyah karesinden eşit uzaklıkta iki siyah kare bulunduğu anlaşılır. Bu siyah kareler bu karelerin bulunduğu satırların ilk siyah karelerinin merkezleri bir paralelkenar tanımlar.

Örnek 11:

$2n \times 2n$ 'lik bir tahtanın her i . satırında ortadaki $2(i-1)$ tane birim kareyi siliyoruz. Tahtanın geri kalanına üst üste gelmeden veya tahtanın dışına çıkmadan en fazla kaç tane 2×1 ve 1×2 'lik dikdörtgen yerleştirilir?

Çözüm:

$2n \times 2n$ 'lik tahtadan geri kalan kareleri şekildeki gibi siyah ve beyaz renk ile boyayalım. Gri renkli kareler silinen kareler olsun. 1×2 ve 2×1 'lik dikdörtgenler nasıl yerleştirilirse yerleştirilsinler bir siyah ve bir beyaz kareyi kaplayacaktır. Bu dikdörtgenlerin sayısı en fazla kalan karelerdeki siyah veya beyaz karelerin sayısı kadardır.



Kalan karelerin oluşturduğu şekli iki parçaya bölelim. Sağ taraftaki siyah karelerin sayısı 6 beyaz karelerin sayısı 9 olduğundan en fazla 6 dikdörtgen kullanabiliriz. Bu dikdörtgenleri ilk satırın ortasındaki 2 kareyi boş bırakarak yerleştirebiliriz. Sol taraf içinde aynısı söz konusu olduğu için $2 \times 6 = 12$ dikdörtgen yerleştirebiliriz.

Yani $n=2k+1$ için

$$2 \sum_{t=0}^k (2k+1) = 2k(k+1) + 1 = 2k^2 + 2k + 1$$

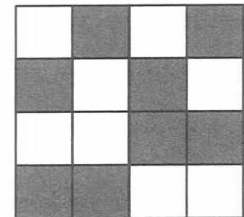
Aynı şekilde $n=2k$ için $2k^2 + 1$ elde edilir.

Örnek 12:

4×4 'lük satranç tahtasının herhangi iki satır ve herhangi iki sütun kesişiminde bulunan dört karenin aynı renkte olmayacak şekilde iki renk ile boyanabileceğini gösteriniz. 5×5 'lik satranç tahtası için inceleyiniz.

Çözüm:

Yandaki boyama 4×4 için yapılmıştır.



5×5 için inceleyelim. Genelliği bozmadan siyah karelerin sayısı beyaz karelerin sayısından fazla olsun. S ile siyah karelerin sayısı, B ile beyaz karelerin sayısı ifade edilmek üzere; $S > B$ ve $S \geq 13$ dür.

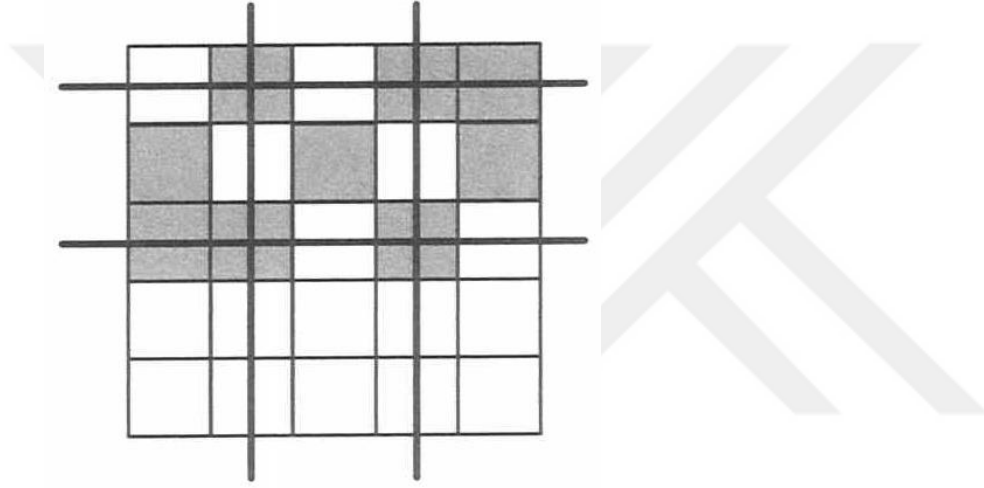
1. satırdaki siyah karelerin sayısı x_1 , 2. satırdaki siyah karelerin sayısı x_2, \dots ve 5.

satırdaki siyah karelerin sayısı x_5 olmak üzere; genelliği bozmadan

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_5 \geq \dots \geq 0 \text{ olsun.}$$

$5x_1 \geq S \geq 13$ ise $x_1 \geq 3$ elde edilir. Benzer şekilde $x_1 + 4x_2 \geq S \geq 13$ ise $4x_2 \geq 10$ ve $x_2 \geq 3$ elde edilir.

Benzer şekilde $x_3 \geq 3$ dolayısıyla $x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$ olur. Bu üç satırı inceleyelim $x_1, x_2, x_3 \geq 3$ olduğunda ilk satırı nasıl boyarsak boyayalım alt satırdaki bir siyah kare ile üst satırdaki bir siyah kare alt alta gelecektir. Diğer siyah karelerden ikisi daha alt alta gelirse istenen şartlarda boyanamayacağı anlaşılır. Bu sebeple ikinci satırdaki diğer siyah kareler beyaz karelerin altına gelsin.



2. satırdaki siyah karelerin sayısı 3. satırdaki siyah karelerin sayısından büyük eşit olduğundan 3 tane siyah nereye gelirse gelsin kesişimler farklı olmaz.

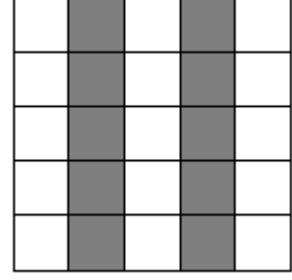
$x_1 = 4$ ve $x_1 = 5$ içinde istenen şartlarda boyanamayacağı görülür.

Örnek 13:

5×5 'lik bir satranç tahtasının bütün birim karelerine 0 yazılıyor. Her hamlede iki komşu birim kare seçilip bu karedeki sayıların her biri 1 artırılıyor veya 1 azaltılıyor. n hamleden sonra her satırdaki ve her sütundaki sayıların toplamları aynı olduğuna göre n in çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Satranç tahtamızın karelerini yandaki gibi boyayalım.



n tane hamleden sonra her sütun ve satırdaki sayıların toplamı a olsun. Toplam $5a$ olmak üzere, siyah sütundaki sayıların toplamı $2a$ 'dır.

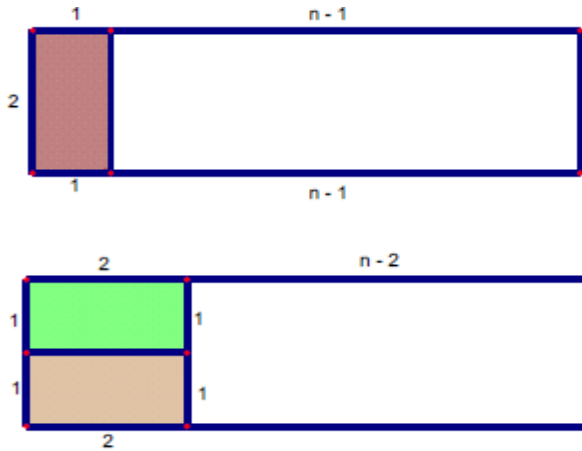
İlk olarak yatay komşu kareler ile yapılan hamlelerin sayısını düşünelim. Her bir yatay hamle sonucunda siyah sütunlardaki bir karede yazan sayı 1 artar veya azalır. Dolayısıyla iki siyah sütundaki sayıların toplamının çift olması için çift sayıda yatay hamle yapılması gerekmektedir.

Boyama işlemini yatay şekilde yaparak dikey hamleler içinde aynı şekilde çift hamle yapılması gerektiği anlaşılır.

Örnek 14: (Akdeniz Mat. Olimpiyat 1998)

Bir koridorun, boyutları 2×11 m^2 olan koridorun 1×2 m^2 olan dikdörtgen biçimindeki tabanı, boyutları 1×2 m^2 olan aynı tür halılarla, halılar birbirinin herhangi bir kısmını örtmeksizin, kaplanmak isteniyor. Bu iş kaç farklı biçimde yapılabilir?

Çözüm:



Koridoru kaplarken, birinci şekildeki gibi 1×2 boyutlarındaki halılardan a tane ve ikinci şekildeki gibi 2×2 kare biçimindeki halılardan b tane kullandığımızı varsayalım. Bu durumda $a+2b=11$ olmalıdır.

Bu denklemin negatif olmayan tam sayılardaki (a, b) çözümleri $(11,0)$, $(9,1)$, $(7,2)$, $(5,3)$, $(3,4)$, $(1,5)$ dir.

$(11,0)$ durumunda tek türlü örtülebilir.

Bunu $\binom{11}{0} = 1$ ile gösterelim.

$(9,1)$ durumunda 9 tane birinci tür halı ve 1 tane ikinci tür(kare) halı kendi arasında

$\frac{10!}{9!1!} = \binom{10}{1} = 10$ yollu yer değiştirebilir.

$(7,2)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\frac{9!}{7!2!} = \binom{9}{2} = 36$ farklı kaplama yapılabilir.

$(5,3)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\frac{8!}{5!3!} = \binom{8}{3} = 56$ farklı kaplama yapılabilir.

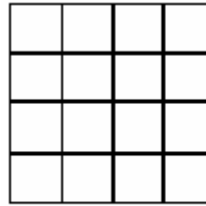
$(3,4)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\frac{7!}{3!4!} = \binom{7}{4} = 35$ farklı kaplama yapılabilir.

$(1,5)$ durumunda yer değiştirmelerle birlikte $\frac{6!}{1!5!} = \binom{6}{5} = 6$ farklı kaplama yapılabilir.

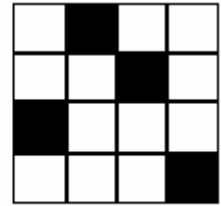
Toplam $1+10+36+56+35+6=144$ farklı kaplama yapılabilir.

Örnek 15: (2000 ÖSS)

16 küçük kareden oluşan I. şeklin her satır ve her sütununda bir ve yalnız bir küçük kare karalanarak II. şekildeki gibi desenler elde edilmektedir. Bu kurala göre, en çok kaç farklı desen elde edilebilir?



I. Şekil



II. Şekil

Çözüm:

1. sütundan bir kare, 4 satırdan 4 farklı biçimde seçilebilir.

2. sütundan bir kare, aynı satırda birde fazla kare olmayacağı için kalan 3 satırdan 3 farklı şekilde seçilebilir.

3.sütundan bir kare kalan 2 satırdan 2 farklı biçimde seçilebilir.

4.sütundan bir kare kalan 1 satırdan 1 farklı biçimde seçilebilir.

Çarpma kuralına göre $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ farklı desen elde edilir.

Örnek 16: (Oyak Matematik 2003)

Tüm birim kareleri beyaz olan $n \times n$ 'lik bir satranç tahtasının bazı birim kareleri siyaha boyanacaktır. Boyama sonrasında, satranç tahtası üzerinde alınabilecek her 3×3 'lük karenin en fazla 5 beyaz birim kare içermesi isteniyor. Böyle bir boyamanın gerçekleşmesi için

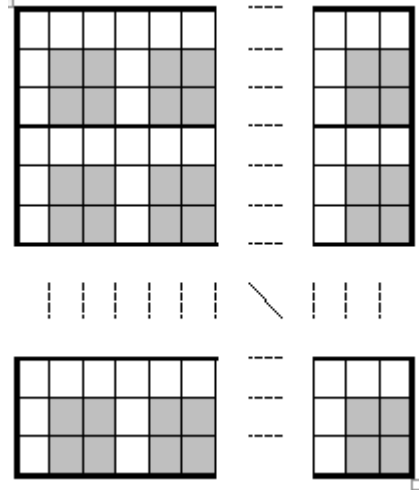
a) $n = 300$

b) $n = 100$

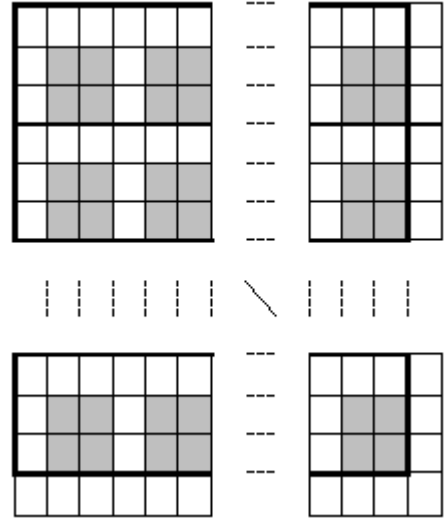
durumlarında en az kaç birim kare siyaha boyanmalıdır?

Çözüm:

- a) 300×300 'lük kareyi 3×3 'lük 10.000 ayrı alt kareye ayırdığımızda, bu alt karelerin her birisinde en az 4 birim kare siyah olacağından, tahtanın tamamında, siyaha boyanmış olan karelerin sayısı 40.000'den az olamaz. Yandaki şekilde tam 40.000 karenin siyaha boyanması ile istenen türden bir boyamanın gerçekleştirileceği görülür



b) 300×300 'lük karede yapılan işlemlere benzer şekilde 99×99 'lük bir karede siyaha boyanmış olan karelerin sayısı en az $4 \times 33 \times 33 = 4356$ olur. Bu durumda 100×100 lük bir karenin sol üst bölümünde yer alan 99×99 'lük karede en az 4356 birim kare siyaha boyanmış olacaktır. Aşağıdaki şekil 100×100 'lük bir karenin de 4356 birim karenin siyaha boyanması ile istenen türden boyanabileceğini gösterir



Örnek 17: (Oyak Matematik 2008)

Alışıldık şekilde boyanmış $n \times n$ boyutunda bir satranç tahtasının sol üst köşesindeki kare siyahtır. Her hamlede, içinde tam olarak 3 tane beyaz kare bulunan 2×3 ya da 3×2 boyutunda bir dikdörtgen seçilip bu dikdörtgendeki karelerin tamamı siyaha boyanıyor. Bu bilgiler ışığında hangi n tam sayı değerleri için ardışık hamleler sonucu tahtanın tamamen siyaha boyanabileceğini bulunuz.

Çözüm:

(a) n çift ise, ilk durumda satranç tahtasının yarısı siyah yarısı beyaz karelerden oluşmaktadır. Yani tahtada toplam $\frac{n^2}{2}$ adet beyaz kare vardır. Burada sadece tam olarak 3 adet beyaz kare barındıran dikdörtgenlerin tamamını siyaha boyayabildiğimizden, bütün karenin siyaha boyanabilmesi için 3'ün tahtadaki beyaz kare sayısını bölmesi gerekir. Yani

$$3 \mid \frac{n^2}{2} \Leftrightarrow n=6k$$

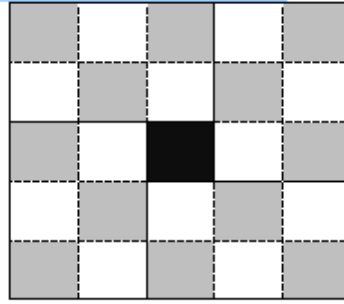
olmalıdır. Dolayısıyla bu formdaki n tam sayıları için tahtanın tamamen siyaha boyanabileceği açıktır. 3×2 boyutunda üç dikdörtgen altına tekrar 3×2 boyutunda iki dikdörtgen eklendiğinde 6×6 boyutunda bir kare oluşturulabilir. Sonra bu kareler bir araya getirilerek $n=6k$ durumları için çözümler bu şekilde oluşturulabilir.

(b) n tek ise, sol üst kare siyah olduğu için tahtada toplam $\frac{n^2}{2}$ adet beyaz kare vardır. Bu durumda önceki durumdaki gibi

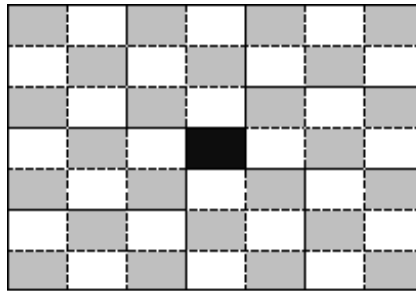
$$3 \mid \frac{n^2-1}{2} \iff n=6k+1 \text{ ya da } n=6k-1 \text{ olur.}$$

Şimdi $n=5$ ve $n=7$ durumları için çözümleri belirtip genel çözüme ($n=6k+1$ ya da $n=6k-1$) nasıl geçileceğini göstereceğiz. Burada dikkat edilecek nokta, n tek olduğu ve sol üst kare siyah olduğu için tahtanın ortasındaki karenin siyah renkte olacağıdır. Dolayısıyla geri kalan kareler için uygun bir bölümlenme bulmamız yeterlidir.

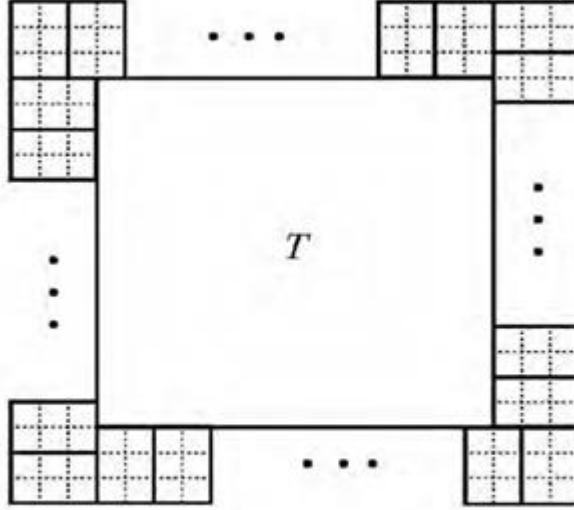
Bu durumda $n=5$ için bölümlenme aşağıdaki gibi yapılabilir.



$n=7$ için ise bölümlenme aşağıdaki gibi yapılabilir.



T , $t \times t$ bir satranç tahtası olmak üzere $n=t+6$ için ise bölümlenme Şekil 1 gibi yapılabilir.



Şekil 1

Böylece tahtanın $t \times t$ 'lik bölümü T 'nin tamamen siyaha boyanabilmesi durumunda $(t+6) \times (t+6)$ 'lık tahtanın da tamamının boyanabileceği görülmüş olur. Sonuç olarak $n=6k \pm 1$ olmak şartıyla tüm $n \times n$ 'lik tahtalar tamamen siyaha boyanabilir.

Örnek 18: (UMO 2002)

Başlangıçta bütün birim kareleri beyaz olan $m \times n$ bir tahtayı sonuçta ortak kenara sahip herhangi iki kareden biri siyah biri beyaz olacak şekilde boyamak istiyoruz. Boyama işleminin her adımında tahta üstünde 2×2 bir kare seçilerek, beyaz birim kareleri siyaha, siyah birim kareleri beyaza boyanıyor. Aşağıdakilerden hangi (m, n) sıralı ikilisi için, tahta istenilen biçimde boyanabilir?

- A) (3,3) B) (2,6) C) (4,8) D) (5,5) E) Hiçbiri

Çözüm:

Cevap C şıkkıdır. 4×4 'lük bir karenin küçük karelerini numarandıralım.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Şekil 1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Şekil 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Şekil 3

İlk adımda (1, 2, 5, 6) ve (11, 12, 15, 16) karelerini siyaha boyayalım, (**Şekil 1**).

İlk adımda (2, 3, 6, 7) ve (10, 11, 14, 15) karelerinde beyaz kareleri siyaha, siyah kareleri beyaza boyayalım, (**Şekil 2**).

Üçüncü adımda (5, 6, 9, 10) ve (7, 8, 11, 12) karelerinde beyaz kareleri siyaha, siyah kareleri beyaza boyayalım, (**Şekil 3**).

Örnek 19: (UMO 2004)

Sonsuz bir satranç tahtasında 25 kare nasıl seçilirse seçilsin ortak köşesi olmayan n tanesi bulunabiliyorsa, n en çok kaç olabilir?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

Çözüm:

Tüm satır ve sütunları, aşağıdan yukarıya ve soldan sağa, tam sayılarla numaralayalım. Her kare, a , satır numarasını ve b de sütun numarasını göstermek üzere (a,b) koordinatları ile gösterilecek. B seçilen karelerin kümesini aşağıdaki 4 ayrık kümeye ayıralım:

$TT = \{(a, b) \in B: a \text{ tek sayıdır, } b \text{ tek sayıdır}\},$

$TÇ = \{(a, b) \in B: a \text{ tek sayıdır, } b \text{ çift sayıdır}\},$

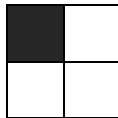
$ÇT = \{(a, b) \in B: a \text{ çift sayıdır, } b \text{ tek sayıdır}\},$

$ÇÇ = \{(a, b) \in B: a \text{ çift sayıdır, } b \text{ çift sayıdır}\}.$

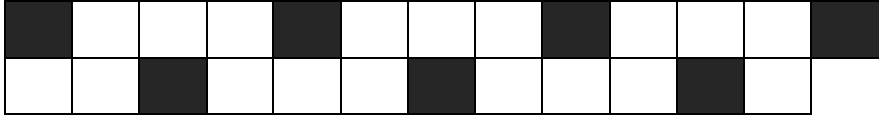
Seçilen kareler 25 tane olduğundan bu kümelerden en az 7 eleman içeren biri bulunacak. Bu kümenin elemanlarının birbiriyle ortak köşesi bulunmadığı açıktır. Diğer taraftan, birbirinden uzak 6 tane 2×2 boyutlu “büyük” kare ve 1 tane 1×1 boyutlu kare seçilirse, her 2×2 boyutlu “büyük” kareden sadece bir kare alabiliriz dolayısıyla ortak noktası bulunmayan en fazla 7 seçilmiş kare bulunur.

Gerçek bir uygulamada en fazla 7 seçilmiş kare olduğunu gösterelim.

a) $2 \times 2 = 4$ kareden ortak köşesi olmayan 1 kare seçilebilir.

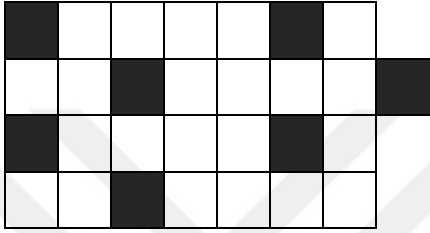


b) 2×2 lik karelerden 6 tanesi yan yana olmak üzere 25 kare seçelim.



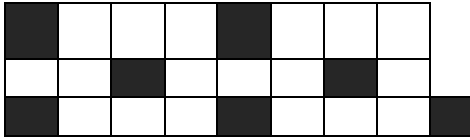
Şekilde ortak köşesi olmayan 7 kare vardır.

c) $(4 \times 6) + 1$ kare seçelim.



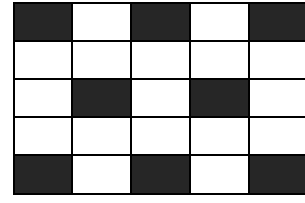
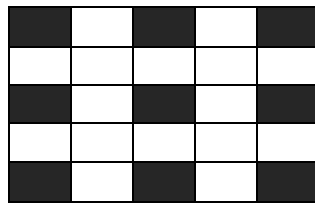
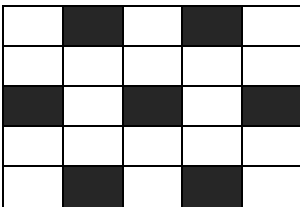
Ortak köşesi olmayan en çok 7 kare var.

d) $(3 \times 8) + 1$ kare seçelim.



7 kare var

e) 5×5 'lik üç kare seçelim.



Soruda 25 kare nasıl seçilirse seçilsin olanağı verildiğinden n en çok 7'dir.

Örnek 20: (UMO 2013)

1, 2, ... 49 sayıları 7×7 bir satranç tahtasının birim karelerine, ardışık sayılar ortak bir kenar paylaşan birim karelerde yer alacak biçimde yazıldığında bir satırda en fazla kaç asal sayı olabilir?

Çözüm:

Satranç tahtasında siyah bir kareye tek sayı yerleştirirsek, bir sonraki(çift) sayı, beyaz kareye gelecek. Yani 1 sayısı hangi renkte karedeyse, diğer tüm tek sayılar o renkte karede olmalı. Bir satırdaki 7 karenin, 4'ü aynı renktedir. O zaman bir satırda en fazla 4 kareye tek sayı gelebilir. Yani bir satıra en fazla 4 tek asal sayı yerleştirilebilir. 2 çift bir asal olduğu için, bir satırda en fazla 5 asal sayı olabilir. Bundan sonrası 5 asal sayının yer aldığı bir örnek bulmak kalıyor.

3	2	11	12	13	18	19
4	1	10	9	14	17	20
5	6	7	8	15	16	21
						22

Örnek 21 : (Rusya Matematik Olimpiyat 2000)

200×200 hücreli bir tablo siyah ve beyaz renklerine boyanmıştır. Tablodaki siyah ve beyaz hücrelerin sayıları farkı 404 'dür. Tablodaki 2×2 boyutlu en az bir karenin tek sayılı siyah birim karelere sahip olduğunu kanıtlayınız.

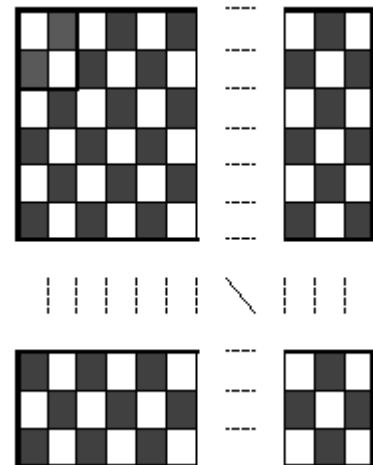
Çözüm:

Tablodaki 2×2 boyutlu bütün karelerin çift sayıda siyah ve beyaz renklere sahip olduğunu varsayalım. Tablodaki ilk sütunda b siyah hücrelerin sayısı ve w beyaz hücrelerin sayısı olsun

$$b+w=200$$

Varsayımımıza göre ikinci sütünü ya aynı şekilde boyayacağız ya da zıt renkli boyayacağız.

Bu boyama yöntemimiz bütün tabloda aynı şekilde devam eder.



Tablodaki boyamamızı ilk sütunun benzer rengi olarak boyadığımız sütun sayısını x ile gösterelim.

Tablodaki boyamamızı ilk sütunun zıt renk olarak boyadığımız sütun sayısını y ile gösterelim.

$$x+y=200$$

Tablodaki siyah hücrelerin sayısı $xb+yw$ ve beyaz hücrelerin sayısı $xw+yb$ olur. Böylelikle

$$(xb+yw)-(xw+yb)=404 \text{ Buradan hareketle}$$

$$(2) \quad (x-y)(b-w)=404$$

Diğer taraftan $x+y=b+w=200$ bize x, y ve ayrı olarak toplamlarını çift kabul ettiğimiz b, w aynı eşitliğe sahiptir.

$$x-y=2m \quad b-w=2n \text{ olarak } m \text{ ve } n \text{ tamsayılar.}$$

$$(2) \text{ eşitliğini kullanırsak } 4mn=404 \text{ elde ederiz. } mn=101$$

$|m|, |n| < 100$ ve 101 asal sayı olduğu için çelişki bulunur.

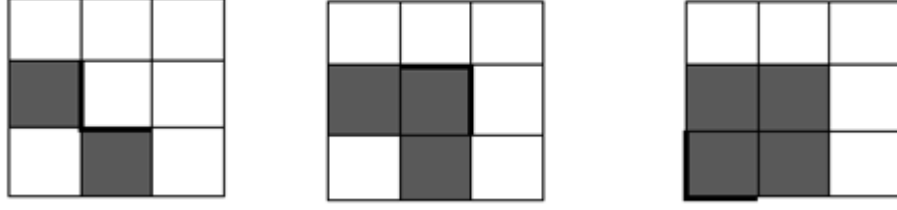
Örnek 22:

10×10 boyutlu bir satranç tahtasının 9 tane hanesi enfeksiyon kapmıştır. Bir zaman biriminde, en az iki enfeksiyon kapmış komşu hanesi (ortak kenarı olan) bulunan hanelerde enfeksiyon kapıyor. Enfeksiyon bütün satranç tahtasına yayılabilir mi?

Çözüm:

Sırasıyla 2, 3 ve 4 tane enfeksiyon kapmış komşu hanesi bulunan bir sağlıklı haneye baktığımızda enfeksiyon kapmış alanın çevre uzunluğunun artmadığını görüyoruz. Enfeksiyon kapmış alanın çevre uzunluğu en fazla $4 \times 9 = 36$ dir. Böylelikle $4 \times 10 = 40$ uzunluğuna ulaşamaz. Bundan dolayı enfeksiyon kapmış alan bütün satranç tahtasını kaplayamaz.





Enfeksiyon kapmış komşu iki haneye sahip normal hane değişimi sonucunda enfeksiyon alan çevre uzunluğu sabit kalmıştır.



Enfeksiyon kapmış komşu üç haneye sahip normal hane değişimi sonucunda enfeksiyon alan çevre uzunluğu 2 azalmıştır.



Enfeksiyon kapmış komşu dört haneye sahip normal hane değişimi sonucunda enfeksiyon alan çevre uzunluğu 4 azalmıştır.

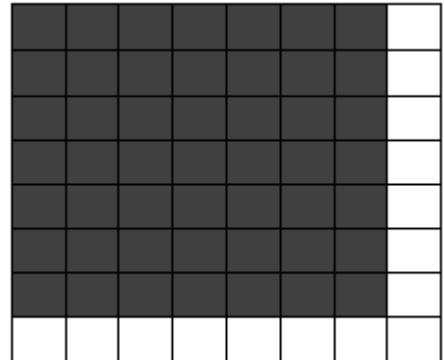
Örnek 23:

1, 2, 3, ... 81 sayıları rastgele olarak 9×9 'luk bir tahtaya yazılıyor. Bu tahtada bulunan 2×2 'lik küçük karelerden en az birinin içindeki sayıların toplamının 137'den büyük olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

Tahtamızda $8 \cdot 8 = 64$ tane 2×2 lik küçük karemiz vardır.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi 2×2 'lik küçük karelerin sol üst birim kareleri siyah karelerin içinde olmak zorundadır.



Küçük karelerin içerisindeki sayıları toplamını sırasıyla $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_{64}$ ile gösterelim.

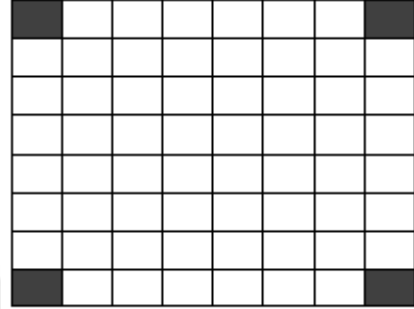
Problemin yargısının doğru olmadığını varsayalım.

Toplamlarının en büyüğünün $S_{64} \leq 137$ olduğunu varsayalım.

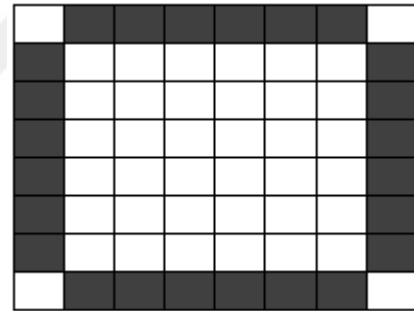
Bu aynı zamanda $S_1 + S_2 + \dots + S_{64} \leq 64 \cdot 137 = 8768$ eşitliğini gösterir.

Yukarıdaki dizilimdeki sayıların toplamı bazen 1, 2 veya 4 defa sayılmaktadır.

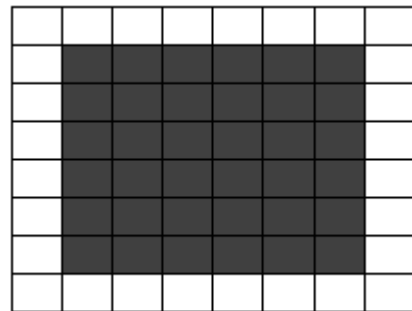
Yanda görülen şekilde siyah karelerde yazılan sayılar bir defa sayılmıştır.



Yanda görülen şekilde siyah karelerde yazılan sayılar iki defa sayılmıştır.



Yanda görülen şekilde siyah karelerde yazılan sayılar dört defa sayılmıştır.



Alt sınırimızı hesapladığımızda

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 + \dots + S_{64} &\geq 1(81+80+79+78)+2(77+76+\dots+50) + \\
 &\quad 4(49+48+\dots+1) \\
 &= 8774
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çelişkiyi elde ettikten sonra en az bir 2×2 'lik küçük kare içine toplamı 137 den büyük sayı elde edilebileceğini göstermiş olduk.

Örnek 24: (OİM 2004)

1001×1001 boyutlu bir tahtamız var. Bazı kareleri aşağıdaki şartlara göre boyamak istiyoruz.

-İki kare ortak kenara sahip ise en az biri boyanacak.

-Eğer 6 kare ardışık ise (dikey ya da yatay) altı kareden en az ardışık iki kare boyanacak.

Bu şartlara göre boyanabilen minimum kare sayısını bulunuz

Çözüm:

5×1 boyutlu parçayı ele alalım.



2 boyalı hane 1. maddeyi sağlar. Ama bu parçaya bir kare daha ekleyip 6×1 boyutlu parça elde ettiğimizde 2. şartın sağlanması için bir karenin daha boyanması gerekir.



O zaman 5×1 boyutlu her parçanın şartları yerine getirmesi için alttaki şekilde boyanması gerekir. Yani her 5×1 boyutlu parçanın 3 hanesi boyanması gereklidir.

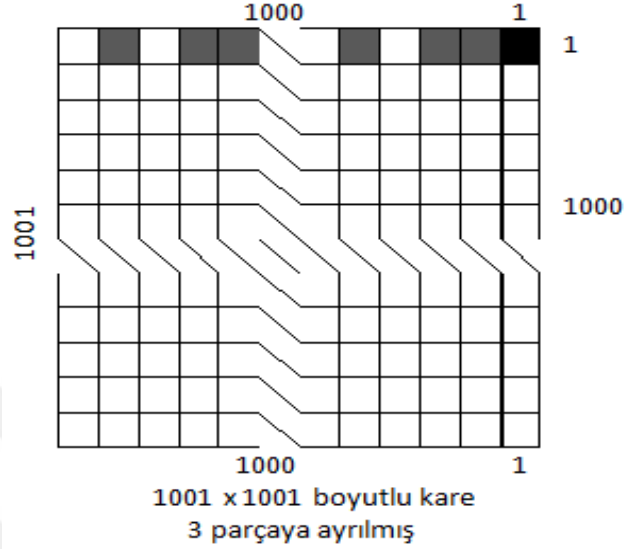


Tahtamızı 1000×1001 boyutlu, 1×1000 boyutlu ve 1×1 boyutlu karelere bölelim. İlk ikisi 5×1 ve 1×5 boyutlu parçalara bölünür, böylelikle boyanan kare sayısı en az $\frac{3 \cdot (1001^2 - 1)}{5}$ olur. Bu sayıda bir boyamanın mümkün olduğunu göstermek için aşağıdaki durumu takip edelim.



Yukarıdaki şekilde olduğu gibi ilk sırayı boyamayı soldan sağa doğru yapalım. Sonra aynı işlemi gelecek sırada yapalım, sola doğru boyamayı kaydıralım. Her 1×5 boyutlu parçada 3 kare boyanmış olur.

Eğer tabloyu belirtilen şekilde bölersek, elimize kalan soldaki kare boyalı olmayacak, bu istediğimiz durumu etkilemez. Böylece istediğimiz sayı $\frac{3 \cdot (1001^2 - 1)}{5}$ olur.

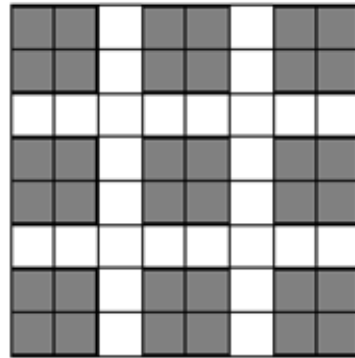


Örnek 25: (OİM Shortlist 2009)

8×8 boyutlu bir tahtanın her hanesinde bir lamba bulunmaktadır. Başlangıçta her lamba kapalıdır. Her hamlede bir lamba ve dikey veya yatay olmak üzere bir doğrultu seçiliyor ve lambanın kendisinin ve iki komşusunun yanıp sönmeye durumu tersine çevriliyor. Belirli sayıda hamle sonucunda tam olarak bir lamba açık kalmaktadır. Bu lambanın bulunabileceği tüm haneleri bulunuz.

Çözüm:

Tahtayı aşağıdaki şekilde olduğu gibi boyyalım.



Her hamle sonucu çift sayılı (0 veya 2) boyalı hanelerdeki lambanın durumu

değişiyor. Bu durumda sadece bir lambanın yanıyor olması bu lambanın beyaz hanede olmasıyla mümkündür.

Beyaz hanede olan her lamba için bunun yapılabilirliğini göstermek için bu haneden kenarlardan birine olan mesafenin 2 hane olduğunu dikkate alalım. Bu hane X ve bununla bahsedilen kenar arasındaki haneler de S ve T olsun.

S	T	X
---	---	---

T hanesini ve uygun doğrultuyu seçerek S , T , X 'deki lambaların durumunu değiştirebiliriz. S ve aynı doğrultuyu seçerek S ve T 'nin durumunu değiştiririz. Böylece sadece X 'i yanık bırakabiliriz.

Örnek 26: (Arjantin 2009)

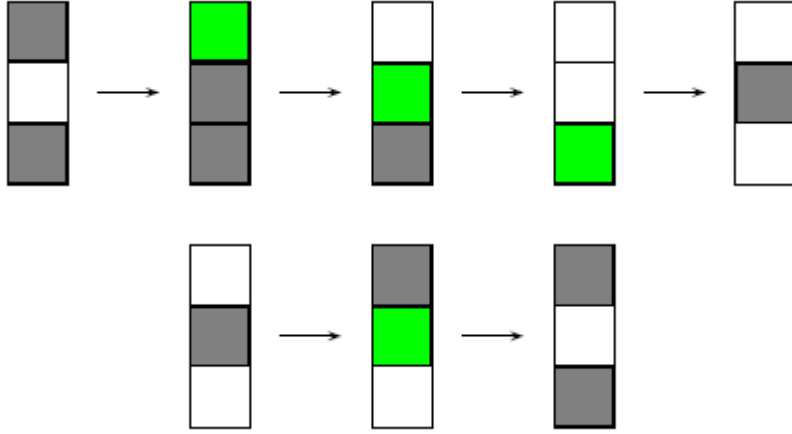
a ve b ikiden büyük veya eşit tamsayılar olmak üzere, $a \times b$ boyutlu satranç tahtası şeklinde boyanmış karelerden oluşan bir tahtada, bir kenarı ortak olacak şekilde seçilen iki kareden beyaz olan siyaha, siyah olan yeşile ve yeşil olan beyaza boyanıyor. Bu şekilde hamleler yaparak a ve b 'nin hangi değerleri için tahtadaki bütün siyahlar beyaza ve bütün beyazlar siyaha boyanabilir?

Not: Başlangıçta tahtada yeşil kare yokken ilk adımdan sonra yeşil kareler oluşacaktır.

Çözüm:

Tahtamızın orijinal halinde beyaz karelerin kümesi X ve siyah karelerin kümesi Y olsun. Her beyaz kareyi 0, her siyah kareyi 1 ve her yeşil kareyi 2 ile gösterelim. İşlemimizi her uyguladığımızda X ve Y kümesinden 1 kare alırsak. Böylece mod 3'te X ve Y 'deki atanmış sayılar 1'er artıyor. Hamlelerin sonunda X 'lerin 1, Y 'lerin 0 olmasını istiyoruz. X 'lerin hepsini 1 yapmak için gerekli hamle sayısı mod 3'te x 'dir. Benzer şekilde Y 'lerin 1 azalması için yapılan hamle sayısı mod 3'te $-y$ 'ye denk olması gerekir. Buradan $x \equiv -y \pmod{3}$, $x + y \equiv 0 \pmod{3}$ düşünülebilir. Fakat $x+y$ toplam kare sayısıdır. Sonuç olarak bunun mümkün olması için a ve b 'de birinin 3'ün katı olması gerekir.

Eğer a veya b 'den biri 3'ün katı ise, tahtayı 3×1 şeritlerle bölebiliriz. Her birinin renklerini Şekil 1 gibi değiştirebiliriz.



Şekil 1

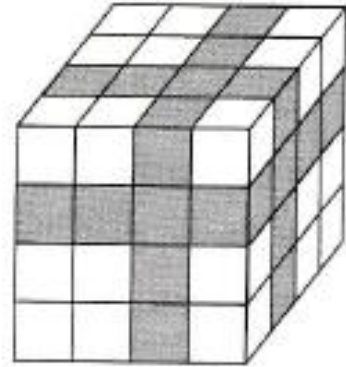
Sonuç olarak istenen değişim ancak ve ancak a ve b 'den birinin 3'ün katı olması ile mümkündür.

Örnek 27: (Güney Afrika 2010)

Ayrıt uzunluğu 4 olan küpün bir köşeden çıkan üç yüzü 16 tane 1×3 boyutlu dörtgenlerle kapatılabilir mi? (Dörtgen ayrıt boyunca katlanabilir)

Çözüm:

Küpü şekildeki gibi boyarsak her 1×3 dikdörtgeni ya 1 ya da 3 siyah hane kapatacak. $\frac{48}{3} = 16$ dikdörtgen kullanılacak, dolayısıyla kapatılan siyah hanelerin sayısı çift olacak. Siyah hanelerin sayısı $3 \times 7 = 21$ olduğu için çelişkiyi göstermiş olduk

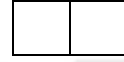


BÖLÜM BEŞ

ÖZEL ŞEKİLLER İLE KAPLAMA YAPILMASI

Bu bölümde aşağıda gösterilen şekiller yardımıyla kaplama yapılan sorular ele alınacaktır.

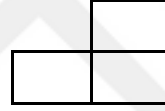
Domino: İki karenin yanyana gelmesinden oluşur.



Tromino: Birbirine sınırdış üç kareden oluşan bir şekle tromino denir. İki cins tromino vardır: Düz tromino ve dik tromino.

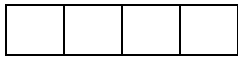


Düz tromino

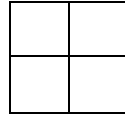


Dik tromino

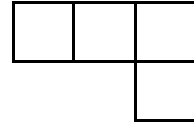
Tetromino: Birbirine sınırdış dört kareden oluşan bir şekle tetromino denir.



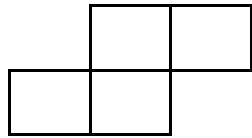
Düz



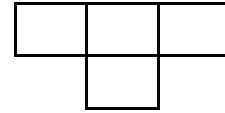
Kare



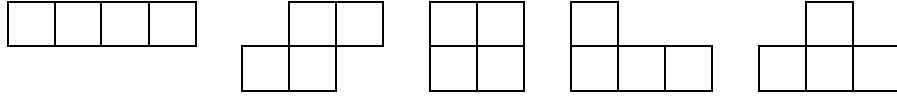
L



Yamuk



T

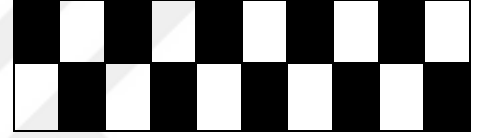
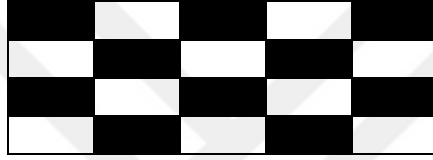
Örnek 1:

Yukarıdaki beş tetramino bir kez kullanılmak şartı ile bir dikdörtgen oluşturulabilir mi?

Çözüm:

Her biri 4 birim kareden oluşan tetraminolar ile bir dikdörtgen oluşturacağımızdan bu dikdörtgen $m \times n = 20$ şeklinde olacaktır.

Bu durumda elde edilecek dikdörtgenler $4 \times 5 = 20$ ve $2 \times 10 = 20$ şeklindedir.



Tetraminolardan ilk dört tanesinden her biri 2 siyah ve 2 beyaz kareyi kaplayabilir. Geriye kalan 2 beyaz ve 2 siyah kareyi T-tetramino ile kaplayamayız.

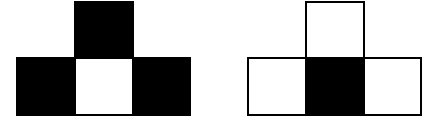
T-tetramino her zaman 3 beyaz 1 siyah ya da 3 siyah

1 beyaz kareyi kaplar.

Toplamda 10 beyaz kare olduğunu unutmayalım.

$$8 + 1 \neq 8 + 3 \neq 10$$

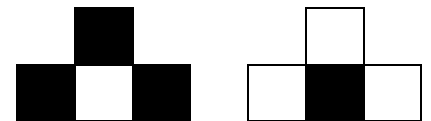
Olduğundan bu beş tetramino ile dikdörtgen oluşturulamaz.

**Örnek 2:**

10×10 boyutlu bir satranç tahtasının 25 tane T-tetramino ile kaplanamayacağını gösteriniz.

Çözüm:

Yandaki şekillerde görüldüğü gibi T-tetramino ile 1 beyaz, 3 siyah ya da 3 beyaz, 1 siyah kare kaplanabilir. 10×10 'luk satranç tahtasında 50 tane beyaz 50 tane siyah kare olacaktır.



Bundan dolayı satranç tahtasının tamamen kapatılması için eşit sayıda beyaz ve siyah tetramino kullanmamız gereklidir. 10×10 boyutlu satranç tahtasını kapatmamız için $100:4=25$ tane tetramino gereklidir. 25 tek sayı olduğundan bu mümkün değildir

Örnek 3:

10×10 boyutlu bir satranç tahtasının 25 tane düz tetramino ile

--	--	--	--

 kaplanamayacağını gösteriniz.

Çözüm:

Tahtamızı şekilde görüldüğü gibi dört renk ile boyyalım.

Düz tetraminoyu tahtaya nasıl yerleştirirsek yerleştirelim her renkten bir kareyi kaplar. 25 tane düz tetraminomuz ve 26 '1' kareimiz olduğu için kaplama gerçekleşemez.

1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1

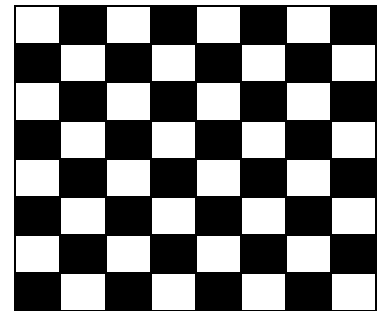
Örnek 4:

8×8 boyutlu bir satranç tahtası 15 tane T-tetramino ve bir tane kare tetramino ile kaplanabilir mi?




Çözüm:

8×8 lik satranç tahtası şekildeki gibi olsun. Şekilde görüldüğü gibi 32 tane beyaz 32 tane siyah kare vardır. Bir kare tetramino iki siyah iki beyaz kareyi kaplayacaktır. Geriye dolayısıyla 30 beyaz 30 siyah kare kalacaktır. Toplam 60 kare için 15 tane T-tetraminoya ihtiyaç vardır. Siyah ve beyaz karelerin birbirine eşit olması için T-tetraminolar çift sayıda olmalıdır. 15 sayısı tek olduğu için kaplama gerçekleştirilemez.

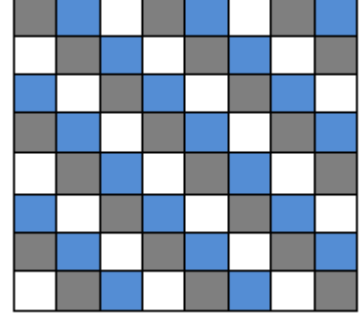


Örnek 5:

8×8 boyutlu satranç tahtasının, düz trombinolar () ile kaplanabilmesinin, birim karelerden hangisinin çıkarılması ile mümkün olacağını belirleyiniz.

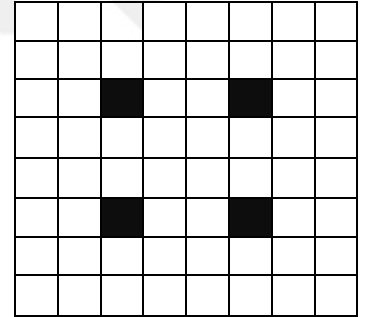
Çözüm:

Satranç tahtasının her birim karesini, yandaki şekilde görüldüğü düzende üç renkten (beyaz, gri, mavi) birisiyle boyayalım. Her düz tromino, bir beyaz, bir gri ve bir mavi kareyi kaplar. Beyaz karelerin sayısı 21, mavi karelerin sayısı 21 ve gri karelerin sayısı da 22 dir. Dolayısı ile kaplama işi nasıl yapılırsa yapılsın, kaplanmayan birim kare, gri karelerden

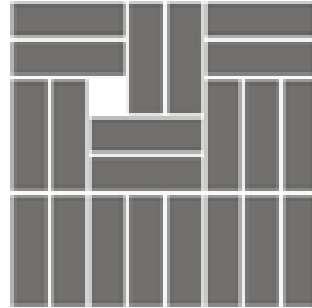
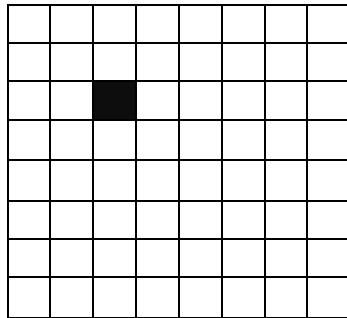


birisi olacaktır. Bir birim kare çıkarıldığı zaman kaplama işi yapılabiliyorsa, satranç tahtasının yatay ve dikey simetri eksenlerine göre bu karenin simetriğinde yer alan kareler çıkarıldığında kaplama işi yapılabilir.

Öte yandan bir kaplama, satranç tahtası 90 derece döndürülse de satranç tahtası kaplanmalı. Doksan derecelik döndürmeyle gene gri bir kareye dönüşen gri karelere siyah kare diyelim. Demek ki sadece siyah karelerden biri çıkartıldığında kaplama yapılabilir. Bu karelerden dört tane vardır.

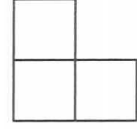


Simetriden dolayı dördü de eşdeğerdir. Sadece birini ele alalım.



Örnek 6:

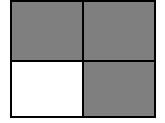
8×8 boyutlu bir satranç tahtasından bir tane kare çıkartılıyor. Geriye kalan kareler yandaki şekilde olduğu gibi yeteri kadar dik trombinolar ile kaplanabilir mi?



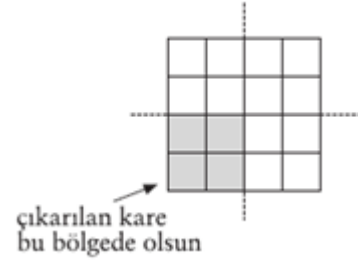
Çözüm:

8'in 2^3 e eşit olduğunu dikkate alıp her $n>0$ doğal sayısı için $2^n \times 2^n$ boyutunda bir satranç tahtasından herhangi bir kare çıkarılırsa, tahtanın geri kalan karelerinin dik trombinolarla kaplanabileceğini kanıtlayacağız.

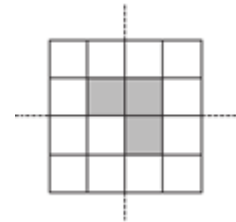
$n=1$ için $2^1 \times 2^1$ lik satranç tahtasının bir karesi çıkartılırsa kalan kareler bir tane dik tromino ile kaplanabilir.



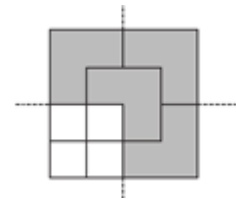
$n=2$ için, yani 4×4 'lük bir satranç tahtasını ele alalım. Önce satranç tahtasının tam ortasından biri yatay biri dikey olmak üzere iki doğru geçirerek satranç tahtasının dört eşit parçaya bölelim. Dört tane 2×2 'lik satranç tahtası elde ederiz. Çıkardığımız karenin sol alt taraftaki 2×2 'lik satranç tahtasında olduğunu varsayalım.



Şimdi bir dik trominoyu, satranç tahtasının ortasına ve eksik bölgeye girmeyecek biçimde, yandaki şekildeki gibi göbeğe yerleştirelim.

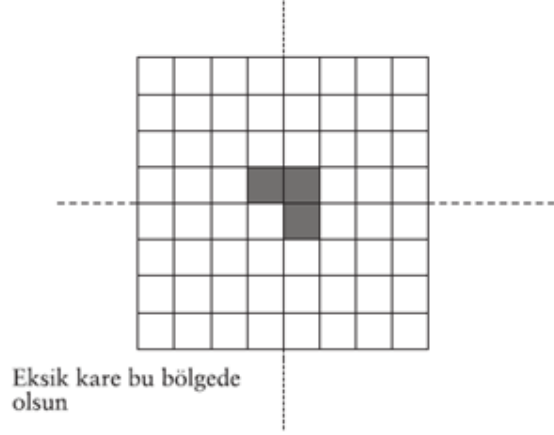


Geriyeye, bir karesi eksik 4 tane 2×2 'lik satranç tahtası kalır. (Bunlardan üçünün birer karesi ilk yerleştirdiğimiz dik trominoyla kaplanmış, diğerinin ise gerçekten çıkmış.) Bu dört eksik kareli 2×2 'lik satranç tahtasının her birini dik trombinolarla kaplayabileceğimizi biliyoruz. Dolayısıyla 4×4 boyutlu satranç tahtasını da trombinolarla kaplayabiliriz. İşte sonuç:

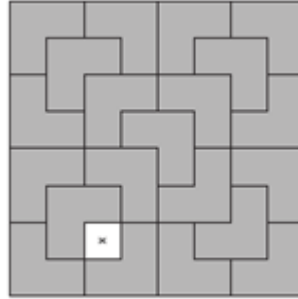


(Sol alt köşedeki 2×2 'lik satranç tahtası çıkarılmış olan karenin konumuna göre dik trominoyla kaplanacak.)

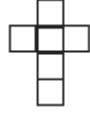
$n=3$ için, yani 8×8 'lik bir satranç tahtasını ele alalım. Önce satranç tahtasını tam ortadan dikey ve yatay doğrularla 4 tane 4×4 'lük satranç tahtasına ayıralım. Eksik kare gene sol alt tarafta olsun (diyelim). Ancak yanda şekilde gösterildiği gibi tam orta kısmına bir tane dik tromino taş yerleştirilirse her birinden bir tane birim kare eksilmiş olur.



Kalan kareler dik tromino şeklinde taş yerleştirilirse her birinden bir tane birim kare eksilmiş olur. Kalan kareler dik tromino taşları ile kaplanabilir.

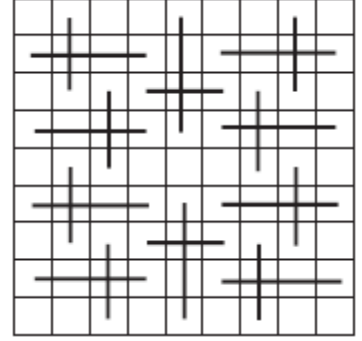


Örnek 7:

9×9 boyutlu satranç tahtası 1×1 boyutlu 6 kareden oluşan  şeklindeki bloklarla kapatılmaya çalışılıyor. Bloklar aralarında kesişmiyor ve tahtanın dışına çıkmıyorlar. Blokların sınırları tahtadaki karelerin kenarları boyunca gidiyor. En fazla kaç kare kapatılabilir?

Çözüm:

Tahtanın kenarındaki iki komşu karenin (ortak kenarları bulunan) aynı zamanda kapatılamayacağı açıktır. Dolayısıyla en az 16 tane kare kapatılamayacağı açıktır. Her blok 6 kare kapattığından ve $10 \cdot 6 < 81 - 16 < 11 \cdot 6$ olduğundan en fazla 10 blok kullanabiliriz. Yandaki şekilde bunun yapılabileceği gösterilmiştir. Dolayısıyla en fazla 60 kare kapatılabilir.



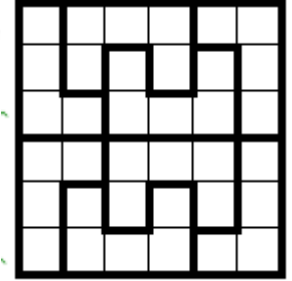
Örnek 8:

Aşağıdaki şekilleri kullanarak $n \times n$ 'lik bir satranç tahtasının şekiller üst üste binmeyecek şekilde kaplanabilmesi için gerekli en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.



Çözüm:

Her iki şekilden de k tane kullandığımızı düşünelim. Bu durumda bu parçalarla $4k+5k=9k$ 'lık bir alanı kaplarız yani $n^2=9k$ olur. Dolayısıyla n^2 sayısı 9 ile n sayısı ise 3 ile bölünebilir. $n=3$ ise 3×3 satranç tahtasını bu şekillerle kaplamamız gerekir ancak bunun olamayacağı açıktır.



Sonuç olarak $n \geq 2 \cdot 3 = 6$ olmalıdır ki zaten 6×6 satranç tahtası için örnek yandaki şekilde verilmiştir. Cevap 6'dır.

Örnek 9:

5×7 'lik bir satranç tahtasını sınırlarını geçmeden, her karede aynı miktarda kat olma koşulu ile birden fazla kat yapılabilmek L-tetraminolar ile kaplayabilir miyiz?

Çözüm:

Bu şekilde kaplamamız imkânsızdır. Her karede k tane kat olacak şekilde tahtayı kaplayabildiğimizi kabul edelim. Satırları 1, ... 5 olarak sütunları 1, ... 7 olarak adlandıralım ve tek sayılı sütun ve satırların kesişimindeki 12 kareyi düşünelim.

Bu karelerden her biri k tane L-tetramino ile kaplanmalı yani en az $12k$ tane L-tetramino kullanılıyor olmalı. Ama bunlar $3 \cdot 12k > 35k$ tane kare kaplar ve bir çelişki elde edilir.

Örnek 10:

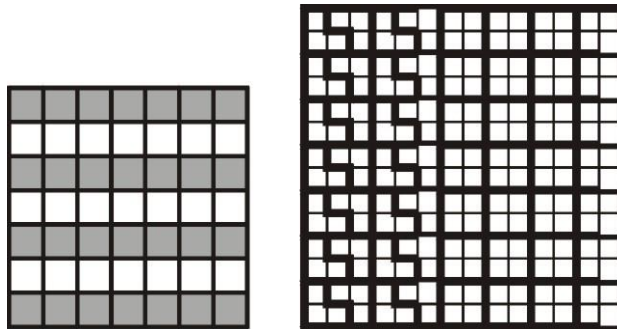
Aşağıdaki şekillerden aynı sayıda kullanarak $n \times n$ bir satranç tahtasının şekiller üst üste binmeyecek şekilde kaplanabilmesi için gerekli en küçük n pozitif tam sayısını bulunuz.



Çözüm:

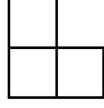
Her iki şekilden de k tane kullandığımızı düşünelim. Bu durumda bu parçalarla $4k+3k=7k$ 'lık bir alanı kaplarız yani $n^2=7k$ olur. Dolayısıyla n^2 sayısı 7 ile yani n sayısı 7 ile bölünebilir. $n=7$ ise 7×7 'lik satranç tahtasını bu şekillerle kaplamamız gerekir ancak bunun mümkün olamayacağı kolayca görülebilir. Eğer 7×7 satranç tahtasını aşağıdaki gibi boyarsak, 4 kutudan oluşan her şekil iki taralı iki de düz kutu kaplayacaktır. Dolayısıyla 3 kutudan oluşan şekillerin $28 - 14 = 14$ taralı $21 - 14 = 7$ düz kutu kaplaması gerekir; yani her 3 kutuluk şeklin, 2 taralı kutu kaplaması gerekir ancak her satırda 7 kutu olduğundan bunun olmayacağı aşikârdır. Bu bilgiler ışığında $n \geq 2 \cdot 7 = 14$ olması gerektiği açıktır.

Dolayısıyla 14×14 satranç tahtasını şekildeki gibi kaplayabileceğimize göre, istenen kaplama türü en küçük $n=14$ için vardır.



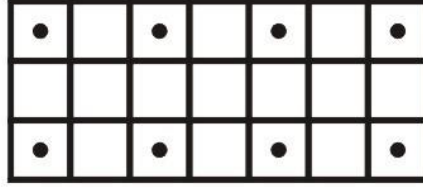
Örnek 11:

m, n tamsayılar olmak üzere $m \times n$ birimlik dikdörtgenler şekildeki 3 birimlik parçalarla kaplanmak istenmektedir. Dikdörtgenlerin tamamen kaplanabilmesi için m ve n hangi değerleri alabilir.

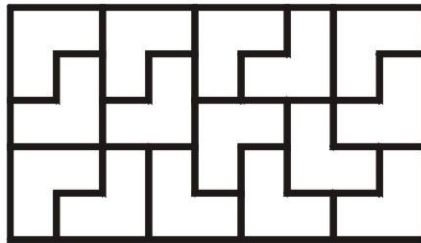
**Çözüm:**

Dikdörtgenlerin 3 birimlik parçalarla tamamen kaplanabilmesi için alanının 3 ün bir tam katı olması gereklidir. $3|mn$ ise $3|m$ veya $3|n$ Aynı zamanda 3 birimlik parçanın şeklinden dolayı $m, n \geq 2$ olmalıdır. Genelliği bozmadan kabul edelim:

n tek sayı olmak üzere $3 \times n$ lik bir dikdörtgen n adet parça ile kaplanmalıdır. Şekilden de görülebileceği gibi tek sayı indeksli, üstteki ve alttaki birim karelerden herhangi ikisi bir parça ile kaplanamaz ve bunların sayısı $n+1$ dir. Dolayısıyla bu dikdörtgen n parça ile tamamen kaplanamaz.



$n=2k$ olmak üzere $3 \times 2k$ 'lık dikdörtgenler k adet $3 \times 2k$ 'lık dikdörtgen ile kaplanabilir. $M > 3$ ve $3|m$ olmak üzere $3l \times 2k$ 'lık dikdörtgenler kl adet 3×2 'lik dikdörtgen ile kaplanabilir. n tek ve $n \geq 3$ ise, $6l \times n$ 'lik dikdörtgenler, $6l \times 3$ 'lük



ve $6l \times (n-3)$ 'lük iki parçaya ayrılır. Bu parçalar ise tamamen kaplanabilir.

Son olarak $n \geq 5$ ve n tek olmak üzere, $(6l+3) \times n$ 'lik dikdörtgenleri inceleyeceğiz.

Bu dikdörtgenleri 9×5 'lik, $9 \times (n-5)$ 'lik ve $6 \times (l-1) \times n$ 'lik üç parçaya ayırır.

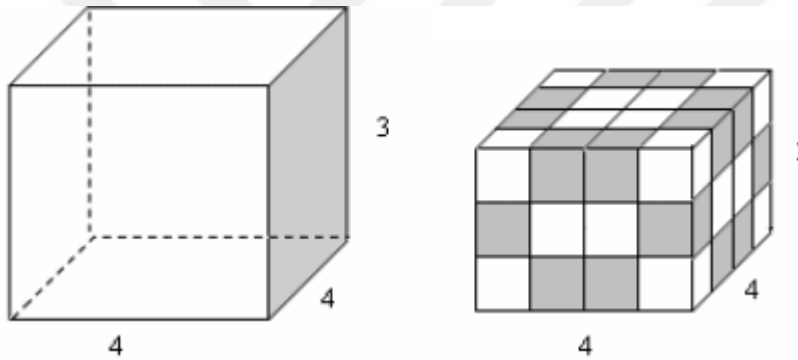
Önceki durumlardan 9×5 'lik haricindekilerin kaplanabileceği aşikârdır. 9×5 'lik bir dikdörtgen ise şekildeki gibi kaplanabilir.

Sonuç olarak $m, n \geq 2$ ve $3/mn$ olmak üzere, m ve n sayılarından biri 3 diğeri ise tek sayı olma durumu dışındaki bütün hallerde dikdörtgenler tamamen kaplanabilir.

Örnek 12: (2012 YGS)

Taban alanı 16 birim kare ve yüksekliği 3 birim olan kare prizma biçimindeki bir tahta blokun tüm yüzeyi boyanıyor. Daha sonra, bu tahta blok kesilerek 48 tane birim küp elde ediliyor. Bu şekilde elde edilen birim küplerden kaç tanesinin yalnızca iki yüzü boyalıdır?

Çözüm:



Kare prizmanın hacmi: $16 \times 3 = 48 \text{ br}^3$

Birim küpün bir kenar uzunluğu: a olsun.

Birim küpün hacmi: a^3 olur

48 tane birim küp elde edildiğinden, $48 = 48 \times a^3$ $a=1$ br olur.

Küpün yüzey alanı $= 2 \times 16 + 4 \times (4 \times 3) = 80 \text{ br}^2$

Kesildikten sonra

3 yüzü boyalı küpün sayısı $= 8$ boyalı alan $= 3 \times 8 = 24 \text{ br}^2$




2 yüzü boyalı küpün sayısı $= k$ olsun boyalı alan $= 2 \times k \text{ br}^2$

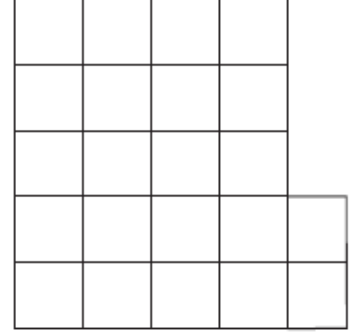
1 yüzü boyalı küpün sayısı $= 2 \times 4 + 4 \times 2 = 16$ boyalı alan $= 1 \times 16 = 16 \text{ br}^2$

$24 + 2k + 16 = 80$ olacağına göre, $k=20$ bulunur.

Buna göre elde edilen birim küplerden 20 tanesinin yalnızca iki yüzü boyalıdır.

Örnek 13: (UIMO-2002KI)

Yandaki şekli keserek  ve  şeklinde parçalara ayırıyoruz. Bunun sonucunda  şeklindeki parçalardan kaç tane oluşabileceğini bulunuz.

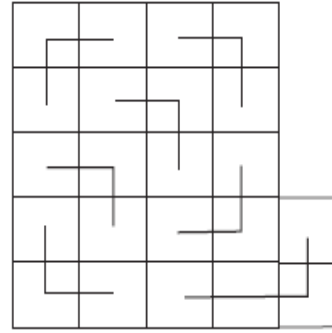
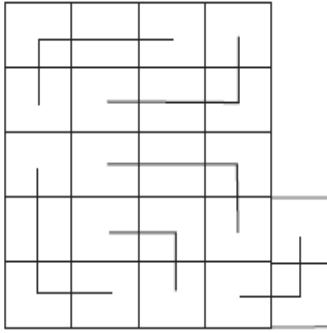


Çözüm:

Birinci parçadan m , ikinciden n tane alınırsa $3m+4n=22$ eşitliği sağlanacak.

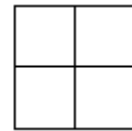
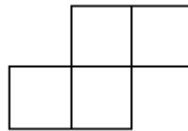
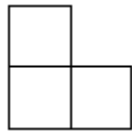
$n = \frac{22-3m}{4}$ pozitif tam sayı olduğundan m sayısı 2 ve 6 dışında başka bir değer

alamaz. Bu durumların gerçekten olabileceği şekilde gösterilmiştir



Örnek 14: (IMO Shortlist 2002)

$(2n-1) \times (2n-1)$ boyutlu bir tahta aşağıdaki şekiller ile kaplanmak isteniyor. Birinci şekilden en az $4n-1$ kullanılacağını ispatlayınız.

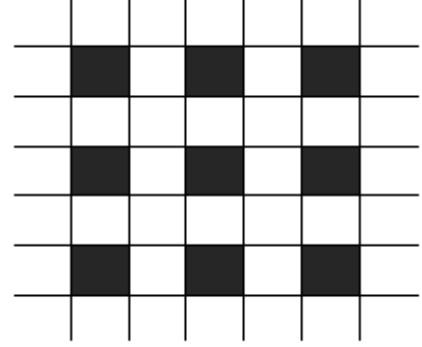


Çözüm:

Satırları ve sütunları 1'den $2n-1$ 'e kadar numaraladığımızı. Tek satır ve tek sütunlar içindeki haneleri siyah renk ile, geri kalan haneleri beyaz renk ile boyayalım. n^2 tane siyah hane ve $3n^2-4n+1$ tane beyaz hanemiz vardır.

Birinci şeklimiz 2 tane beyaz hane ile 1 siyah hane veya 3 tane beyaz hane kaplar. Geri kalan şekiller her zaman 3 tane beyaz hane ve bir siyah hane kaplar.

Bir siyah hane kaplayan birinci şekil sayısı A , 3 beyaz hane kaplayan birinci şekil sayısı B , diğer şekillerin sayısı da C olsun. O halde $A+C=n^2$ olur.



Bir siyah hane kaplayan birinci şekil 2 beyaz hane, diğer şekiller de 3'er beyaz hane kapladığından $2A+3B+3C=3n^2-4n+1$ elde ederiz.

Bu durumda

$4n-1=3n^2-(3n^2-4n+1)=3(A+C)-(2A+3B+3C)=A-B \leq A+B$. Buradan birinci şekilden en az $4n-1$ kullanılacağını görmüş olduk.

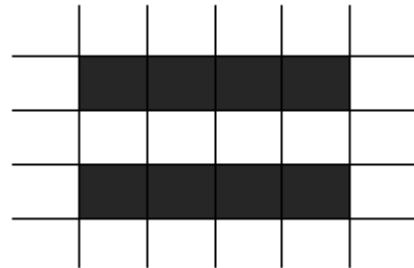
Örnek 15: (VMEO 1993)

Aşağıdaki şekilleri kullanarak 1993×2000 boyutlu bir tahtayı kaplamak istiyoruz. İlk iki şeklin kullanılma sayısı " s " olsun. " s " nin en büyük olası değerini bulunuz.



Çözüm:

Tablonun satırlarını siyah renkten başlayarak dönüşümlü olarak siyah ve beyaza boyayalım. Tabloda siyah birim kareler beyaz birim karelerden 2000 fazla olur. Baştaki iki şekli oluşturan siyah ve beyaz renkli birim karelerin sayısı eşit olur. Üçüncü

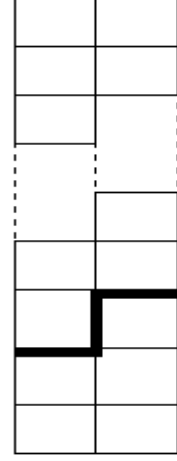


şeklimiz her zaman bir renkten 3 kare ve diğer renkten 2 kare olacak şekildedir. Bunun anlamı üçüncü şekilden en az 2000 parçaya ihtiyacımız olduğudur.

Böylece

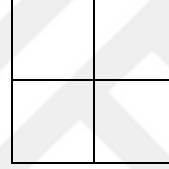
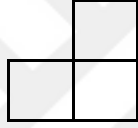
$$s \leq \frac{1993 \times 2000 - 5 \times 2000}{4} = 994000$$

Orijinal tahtamızı 1993×2 boyutlu 1000 parçaya bölerek, üçüncü şekilden 2000 parça kullanarak kaplama yapabiliriz. Bunların her birinin değişik sütunların en uçlarına üçüncü şekilden ikişer tane ve geri kalanları ikinci şekil ile kaplarız.



Örnek 16:

9×7 boyutlarında bir dikdörtgen zemin aşağıda gösterilen iki şekilde olduğu gibi (karolar 3, sırasıyla 4 kareden oluşur ve dik tromino karolar 90 derece dönebilir) karolar ile kaplanabilir.



Kaplamada kullanılan 2×2 karoların sayısı $n \geq 0$ olsun. “ n ” in alabileceği değerleri bulunuz?

Çözüm:

Cevap: 0 ya da 3

Dik trominoların sayısı “ x ” ve 2×2 'lik karelerin sayısı “ y ” olsun. Şekilde gösterildiği gibi dikdörtgenin 20 karesini boyyalım.

Şekilde görüldüğü gibi, her parça en fazla bir boyanmış kareyi kaplar.

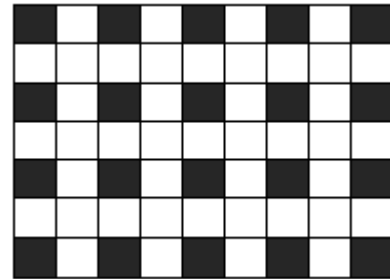
Böylece, $x + y \geq 20$,

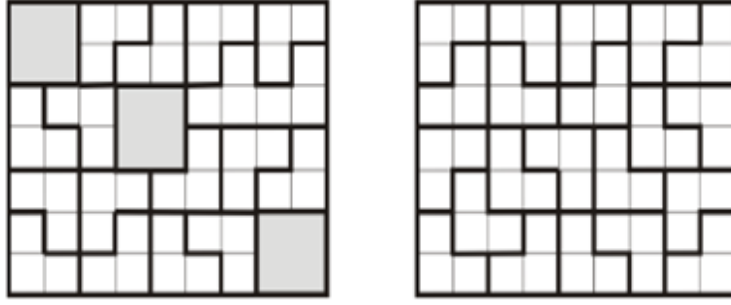
Sonuç olarak $3x + 3y \geq 60$

Dikdörtgenin alanını hesaplırsak $3x + 4y = 63$ sonucu elde ederiz.

(2) ve (3) den $y \leq 3$ ve y sayısı 3 ile bölünebilir.

Gerçek bir kaplamada 3 tane 2×2 'lik karo ve 2×2 'lik karo olmayan kaplama örnekleri verilmiştir.

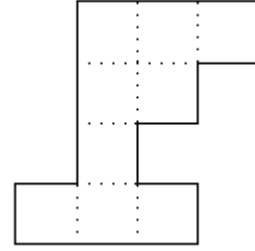




Örnek 17: (OM 1999)

Bütün açıları 90 veya 270 derece olan bir çokgeni ortogonal olarak adlandırırız. Kenarlarının uzunluğu tek tam sayılı olan ortogonal çokgenleri 2×1 domino taşları ile kaplanamayacağını gösteriniz. Not: Çokgenler herhangi bir delik içermemektedir (Şekil 1 bakınız).

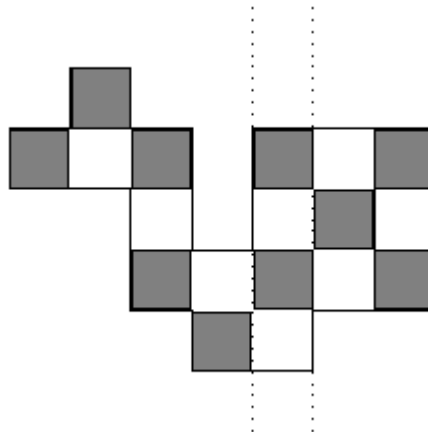
Şekil 1 Ortogonal çokgenin örneği.



Şekil 1

Çözüm:

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi kenar uzunluğu tamsayı olan ortogonal çokgeni satranç tahtası şeklinde boyayalım. Siyah hanelerin sayısı “ s ” ve beyaz hanelerin sayısını “ b ” ile gösterelim.



Beyaz hanelerin sınırdaki bulunan kenar sayısına B ve siyah hanelerin sınırdaki kenar sayısına S diyelim. Buradan $4(s-b) = S - B$ ifadesinin doğru olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için çokgenin herhangi bir dikey şeridini dikkate alalım.

Eğer şeritte aynı sayıda siyah ve beyaz kare var ise, o halde bu şeridin üst ve alt sınırdaki iki yatay bölümü farklı renklerdedir. Eğer bir renkten daha fazla kare var ise (tam olarak yalnızca bir fazla olabilir) o halde bahsettiğimiz üst ve alt yatay sınır kenarı o renge sahiptir. Eğer dikey bir şerit, çokgenin birkaç ayrılmış bölümüyle kesişmiş ise; bu işlem her biri için ayrı ayrı yapılabilir. Üst ve alt sınırdaki beyaz ve siyah kenarların sayısını sırasıyla B_H ve S_H ile gösterirsek, dikey şeritlere göre topladığımızda $2(s-b) = S_H - B_H$ elde ederiz. Aynı durumu yatay şeritler için yaparak ve toplayarak $4(s-b) = S - B$ elde ederiz.

Şimdi tek sayılı kenarı olan bir çokgen düşünelim. Satranç tahtası şeklinde boyadığımız tüm köşelerin rengi aynı olacak. Böylece tüm kenarlar o renkten bir fazla kareye sahiptir. Bu yüzden $S - B \neq 0$ 'dır, dolayısıyla $s - b \neq 0$. Buradan çokgenin domino taşları ile kaplanamadığı elde edilir. Çünkü her domino tam bir beyaz ve siyah hane kapattığından, kaplanabilme durumunda siyah ve beyaz hanelerin sayısı eşit olacaktı.

Örnek 18: (Estonya 2002)

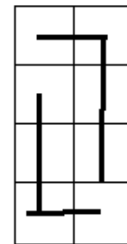
$(2n+1) \times (2n+1)$ şeklindeki satranç tahtasının bir köşesindeki 1×1 'lik parça kesilerek atılıyor. Kalan kısmı, hangi n pozitif tam değerleriyle yandaki şekilde verilen L-tetramino ile kaplamak mümkün olur?



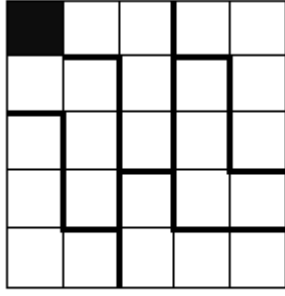
Çözüm:

n çift olduğunda kaplamanın mümkün olduğunu gösterelim.

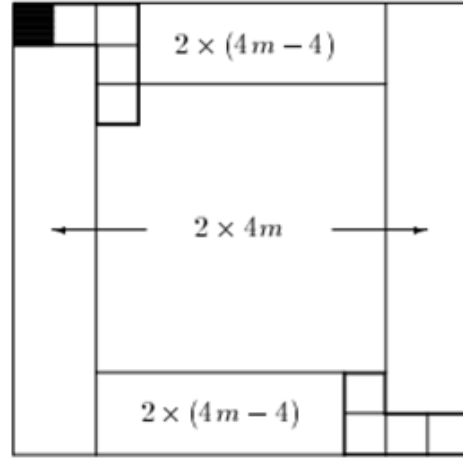
Şekil 1 de görüldüğü gibi $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $2 \times 4n$ tipindeki yapıları L-tetramino ile kaplamak mümkündür.



Şekil 1



Şekil 2

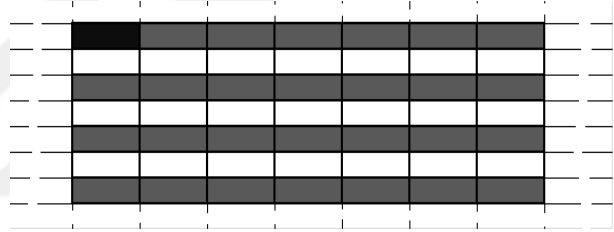


Şekil 3

Şekil 2, $n=2$ için kaplamayı göstermektedir. Şekil 3, $n=2m$ kaplamasını, $n=2(m+1)$ durumuna nasıl genişletileceğini gösterir. (2×4 boyutlu bir dikdörtgeni iki L-tetromino ile kaplayabiliriz.)

Şimdi $n=2m+1$ olsun. Satırları değişimli olarak siyah ve beyaza boyayalım.

Tahta her birimin uzunluğu $4m+3$ olan çift sayıda sütundan ve $2m+1$ beyaz ve $2m+1$ siyah karesi bulunan sütundan oluştuğundan hem siyah hem de beyaz haneler



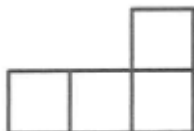
tek sayıdadır. Her L-tetromino, pozisyonuna bağlı olmaksızın, daima, bir renkten üç kareyi ve diğer renkten bir kareyi kaplar. Bundan dolayı, L-tetrominoların toplam sayısı tekil olmalıdır.

Öte yandan, tahta $(4m+3)^2 - 1 = 16m^2 + 24m + 8$ karelerine sahiptir. Bu sayı 8 ile bölünebilir, böylece L-tetrominoların sayısı çift olmalıdır, bir çelişki. O halde n tek sayı olduğunda tahta L-tetrominolar ile kaplanamaz.

Cevap: tüm pozitif çift sayılar.

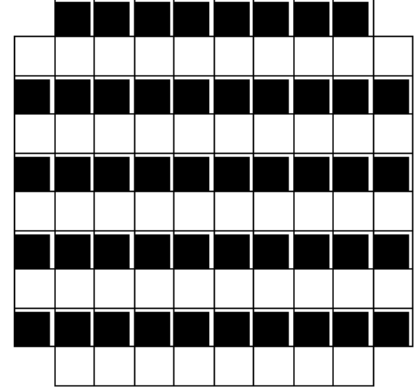
Örnek 19:

$n \times n$ boyutundaki bir satranç tahtasının dört köşesindeki kareler kesip atılmıştır. n 'nin hangi tam sayı değerleri için tahtayı aşağıdaki şekilde verilen L-tetraminolar ile kaplayabiliriz?

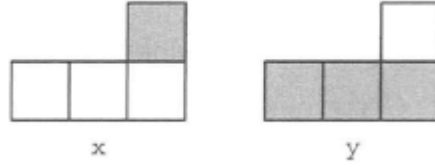


Çözüm:

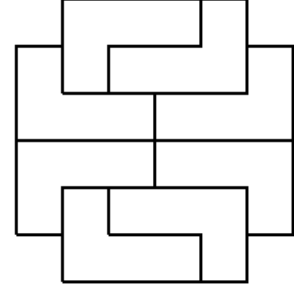
Tahtada n^2-4 tane kare vardır. Tahtayı tetrominolarla doldurmak için n^2-4 'ün 4'ün katı olması gerekir. Dolayısıyla n çift sayı olmak zorundadır. Ama bu yeterli değildir. Bunu görmek için, tahtayı yandaki şekilde olduğu gibi boyayalım.



Bir L-tetromino 3 beyaz ve 1 siyah kareyi ya da 3 siyah 1 beyaz kareyi doldurur.



Tahtada eşit sayıda siyah ve beyaz kare olduğu için tüm tam doldurmalar, her türden eşit sayıda tetromino kullanır. Böylelikle, tahtada çift sayıda tetromino kullanılır, yani, n^2-4 'ün 8'in katı olması gerekir. Bu yüzden n , $4k+2$ biçimine sahip olmalıdır. Gerçek bir uygulamada, $4k+2$ koşulunun aynı zamanda yeterli olduğunu görmek kolaydır.



Örnek 20:

$m \times n$ boyutlu bir dikdörtgen verilmiştir, (1×1 boyutlu karelerden) minimum kaç hanenin boyanması gerekir ki boş kalan hanelere bir L-tromino yerleştirilemesin.

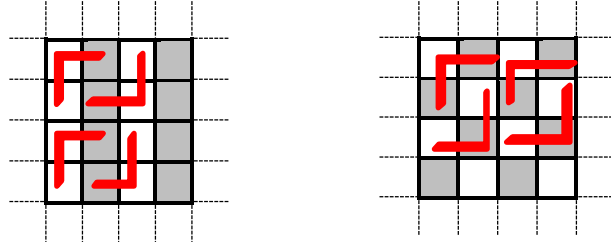
Çözüm:

m ve n 'nin çift sayı olduğunu farz edelim. Her ikinci dikey şeridi boyayalım. Bir L-tromino, kalan kareler üzerinde yerleştirilemez.

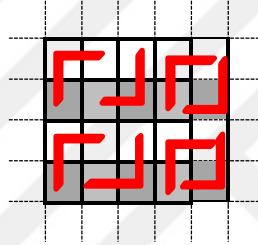
Buradan daha küçük sayıda boyama yapmanın mümkün olmadığını kanıtıyoruz. Gerçekten, dikdörtgeni 2×2 boyutlarında $mn/4$ kareye bölebiliriz.

Her bir karede en az iki haneyi boyamalıyız.

Cevap $mn/2$.



n 'nin çift sayı ve m 'nin tek sayı olduğunu farz edelim. İkinciden başlayarak tek sayı yönünde boyayalım. Daha küçük sayıdaki boyamanın yeterli olmadığını kanıtlarız. Yine de, biz böyle bir dikdörtgenden her birinde en az iki haneyi boyamamız gereken 2×2 boyutlarında $n(m-1)/4$ kareyi çıkarabiliriz. Bu durumda cevap $n(m-1)/2$ dir.



Hem m hem de n 'nin tek sayı ve $n \geq m$ olduğunu farz edelim. . Her iki yönde tek sayı olduğundan, renkli hanelerden en geniş olanı alırız. Böylece $1 \times n$ boyutlu $(m-1)/2$ şeridi boyarız. Böylelikle daha az boyamanın yetmeyeceğini kanıtıyoruz. Problemi daha küçük bir dikdörtgene indirmek yeterlidir. İçinde bir $(n-2)(m-2)$ dikdörtgen bırakan büyük bir L keselim. Büyük L 2×2 boyutlu $(m+n-6)/2$ kareye ve 3×3 'lük bir köşe hanesi eksik olan kareye bölünebilir. Böylelikle küçük L elde etmiş oluruz. Karelerde en az $m+n-6$ sayıda haneyi ve küçük L'de en az üç haneyi boyamalıyız.

Tümevarım ile cevap olarak $n(m-1)/2$ 'yi buluruz.

KAYNAKÇA

Alizade, R.(2013). Ders Notları, Yaşar Üniversitesi, İzmir

Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic.(2006). The Imo Compendium, Springer.

Engel, Arthur (1998). Problem Solving Strategies, Springer Verlag New York.

Ghergu, Marius. Mathematics On the Chessboard pdf.

Gürlü, Ömer (2014). Olimpik Sonlu Matematik, Altın Nokta.

Kaya, Ertan (2012). Kombinatorik, Altın Nokta Yayınevi

Nesin, Ali (2015). Matematiğe Giriş 3 – Sayma, Nesin Matematik Köyü.

Prof. Dr. Refail Alizade, Prof. Dr. Ünal Ufuktepe(2014). Sonlu Matematik, Altın Nokta Yayınevi

Soberon, Pablo(2013). Problem Solving Methods In Combinatorics, Springer Basel.

WEB KAYNAKLARI

<http://www.artofproblemsolving.com/Forum>

<http://www.imomath.com>

<http://matematik.fen.akdeniz.edu.tr>

<http://www.tubitak.gov.tr>

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Manisa’da doğdu, Manisa Demirci’de başladığı okul hayatını Manisa Salihli’de devam etmiştir. 2002 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü’nde yükseköğrenimine devam etti. 2006 yılında mezun olup bir özel öğretim kurumunda görev yaptıktan sonra 2008 yılında Milli Eğitim Bakanlığı’nda öğretmenlik yapmaya başladı. Şırnak Silopi ve Balıkesir’in Balya ilçesinde görev yaptıktan sonra halen çalışmakta olduğu Bozyaka Mevlana İmam Hatip Ortaokuluna atandı.

