YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BOOLE CEBİRLERİ VE BOOLE HOMOMORFİZMALARI

Bahadır ÇAMLI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2016

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BOOLE CEBİRLERİ VE BOOLE HOMOMORFİZMALARI

Bahadır ÇAMLI

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra Dalan YILDIRIM

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ABSTRACT

BOOLEAN ALGEBRA AND BOOLEAN HOMOMORPHISMS

Bahadır ÇAMLI

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

June 2016, 37 pages

In this thesis; we give fundamental notions on Boolean algebras and Boolean homomorphisms, and we prove some main theorems. In order to understand the subject and to illustrate it, several interesting exercises are solved in great details.

ÖZET

BOOLE CEBİRLERİ VE BOOLE HOMOMORFİZMALARI

Bahadır ÇAMLI

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Haziran-2016, 36 sayfa

Bu tezde; Boole Cebirleri ve Boole Homomorfizmaları ile ilgili genel bilgiler verilerek bazı temel teoremler kanıtlanıyor. Konunun iyi anlaşılması için birkaç soru ayrıntılı biçimde çözülüyor.

TEŞEKKÜR

"Boole Cebirleri ve Boole Homomorfizmaları" konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof.Dr. Mehmet TERZİLER'e teşekkür ederim.

Bahadır ÇAMLI

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Boole Cebirleri ve Boole Homomorfizmaları" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

21/06/2016

Bahadır ÇAMLI

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Bu bölümde Boole halkaları ve Boole cebirleri ele alınıyor. Tanım, özellik ve örnekler konu ile ilgili kitaplarda, örneğin (Birkhoff, 1967) , (Halmos, 1974), (Sikorski, 1969) da bulunabilir. Burada yer alan bilgiler genellikle (Givant and Halmos, 2009) den esinlenilmiştir. Bazı sorular (Givant and Halmos, 2009) den alınmış ve çözümleri ayrıntılı olarak verilmiştir.

BÖLÜM 2. BOOLE HALKALARI VE BOOLE CEBİRLERİ

2.1.Boole Halkaları

Bir Boole halkası, klasik halka kavramının özel bir türüdür ve göreceğimiz üzere, eşgüçlü birimli bir halka olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.1.

R boştan farklı bir küme; +, . ve (negatifleri oluşturmak için) -, R üzerinde sırasıyla ikili, ikili ve birli işlemler ve 0,1 R nin seçkin elemanları olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan <R, +, ., 0, 1> yapısına bir birimli halka denir.

Her a, b, c ∈ R için

R1. a+ (b+c) = (a+b)+c (+ işleminin birleşmeliliği)

R2. a+b= b+a (+ işleminin değişmeliliği)

R3. a+0= a (0,+ işleminin sıfırı)

R4. a+(-a)= 0 (toplamsal ters)

(<R,+,0> değişmeli bir gruptur.)

R5. a.(b.c) = (a.b).c (. işleminin birleşmeliliği)

R6. a.(b+c)= a.b+a.c

R7. (b+c).a = b.a+c.a (.işlemi + işlemi üzerine dağılmalıdır)

R8. a.1= a (1, .işleminin birimi)

Açıklama 2.1.2.

Bir halkada, çarpma işlemi değişmeli olmayabilir ve bir birim elemana, 1, sahip olmayabilir. Çarpma işlemi değişmeli ve birime sahip ise halkaya değişmeli, birimli denir.

Örnek 2.1.3.

Sadece {0} dan oluşan halkaya yozlaşmış (dejenere) cebir denir ve ilginçliği yoktur. En basit, en temel, birimli halka sıfır ve bir elemanlarından oluşan halkadır.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

çizelgelerinden bu halkanın iki önemli özelliği ortaya çıkar:

(i) Her eleman kendisinin toplamsal tersidir:

$$a + a = 0$$

(ii) Her eleman kendisinin karesine eşittir

$$a . a = a$$

Bu gözlemlerden ilki değilleme işleminin (-) gereksizliğini gösteriyor. Öte yandan (ii) özelliğini sağlayan elemanlara eşgüçlü adı verilir. Buradan bir Boole halkasının tanımını yapabiliriz.

Tanım 2.1.4.

Bir Boole halkası birimli eşgüçlü bir halkadır.

Eşgüçlülük koşulu böyle halkaların yapısı üzerinde çok güçlü bir etkiye sahiptir. (i) özelliğini sağlayan bir halkaya 2 karakteristikli denir.

Önerme 2.1.5.

(1) Bir Boole halkası 2 karakteristiğine sahiptir.

(2) Bir Boole halkası her zaman değişmelidir.

Kanıt

(1) Bundan sonra a.b yerine ab yazacağız.

Boole halkası tanımına göre, $a^2=a$, $b^2=b$ ve $(a+b)^2= a+b$ dir. Öte yandan $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= (a+b)a + (a+b)b = a^2+ab+ba+ b^2 = a+ab+ba+b= a+b$ ve sadeleşmeden sonra $ab+ba=0$ bulunur. a ve b halkanın keyfi elemanları olduğu için $b=1$ alabiliriz; o zaman $a.1+ 1.a=0$, yani $a + a = 0$ elde edilir. O halde $2a = 0$ yani Boole halkasının karakteristiği 2 dir.

(2) (1) e göre ab, ab nin toplamsal tersidir; ama (1) de $ab+ba=0$, ab nin ba nın da toplamsal tersi olduğu görülür. O halde $ab=ba$ sonucu çıkar. □

İki elemanlı Boole halkasını bundan sonra $\mathit{2} = \{0,1\}$ile göstereceğiz.

Örnek 2.1.6.

$\mathit{2}\times\mathit{2}= \mathit{2}^2= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$,

$$(a,b)+ (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) .(c,d) = (ac, bd)$$

işlemleri altında bir Boole halkasıdır; bu halkada (0,0) sıfır elemanı ve (1,1) birim elemandır. $n>2$ için bu örnek 2^n ye genelleştirilebilir. Elemanları n terimli $(a_1,\ldots,a_n)$ diziler ve sıfır $(0,\ldots,0)$ ve birim $(1,\ldots,1)$ dizileridir. Ancak bu halkayı daha ileri genelleştirebiliriz.

Örnek 1.1.7.

$\mathit{2}^n$ yi tanım kümesi $\{0,1,\ldots,n-1\}$ ve değer kümesi $\{0,1\}$ olan tüm fonksiyonların kümesi olarak ele alabiliriz.

X boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\mathit{2}^X := \{f| \ f: X \rightarrow \{0,1\}\}$$

tanımını yapalım. $\mathit{2}^X$ in elemanlarına X üzerinde 2 – değerli fonksiyonlar denir. Şimdi $f,g\in \mathit{2}^X$ için $(f+g)(x)= f(x)+g(x)$ ve $(f.g)(x)= f(x).g(x)$ tanımlarını yapalım. 0 ve 1, her $x \in X$ için $0(x)=0$ ve $1(x)=1$ sabit fonksiyonlarıdır.

Bu durumda $(\mathit{2}^X, +,., 0, 1)$ in bir Boole halkası oluşturduğunu göstermek, notasyon dışında $\mathit{2}^2$ nin bir Boole halkası olduğunu gerçeklemekle aynıdır. Örneğin, çarpma (.) işleminin birleşmeli olduğunu gösterelim.

$$[f.(g.h)](x)= f(x).(g.h)(x) \qquad (\text{. işleminin tanımı})$$

$$= f(x).[g(x).h(x)] \qquad (\text{. İşleminin tanımı})$$

$$= [f(x).g(x)].h(x)$$

çünkü eşitliklerin her birinin sağ tarafı $\mathit{2}$ nin bir elemanıdır ve $\mathit{2}$ de **.** işlemi birleşmelidir;

$$=(f.g)(x).h(x) \qquad (\text{. İşleminin tanımı})$$

$$=((f.g).h)(x) \qquad (\text{. İşleminin tanımı})$$

olur. Bu eşitlik her $x \in X$ için geçerli olduğundan

$$f.(g.h)= (f.g).h,$$

yani **.** işleminin birleşmeli olduğu gösterilmiş olur.

Bu kesimin son örneği olarak (Givant and Halmos, 2009) deki (sayfa 6, soru 7) ilgili bir soruyu çözeceğiz.

Soru 2.1.8.

Birimli değişmeli bir R halkasındaki tüm eşgüçlü elemanların kümesi A olsun. A üzerinde $\oplus$ toplamı işlemini her a, b $\in$ A için

$$a \oplus b = a+b-2ab$$

olarak tanımlayalım (eşitliğin sağındaki terim R ye aittir ve ab, a.b yi gösterir). A nın sıfır ve birim elemanları R dekilerle aynıdır ve ayrıca A üzerindeki çarpma işlemi R deki çarpma işleminin A ya kısıtlanışıdır. Buna göre A nın bir Boole halkası olduğunu kanıtlayın.

Kanıt

A üzerindeki çarpma işlemini $\oplus$ ile uyumlu olsun diye $\odot$ ile gösterelim. O halde $(A, \oplus, \odot, 0, 1)$ in bir Boole halkası olduğunu kanıtlayacağız. Aşağıda yapılan kanıtlarda R nin kullanılan aksiyomlarını açık açık belirtmek çok yer kaplayacağı için bu kullanımlar kapalı geçiştirilecektir.

Önce 0.0=0 ve 1.1=1 olduğu için 0 ve 1 eşgüçlü elemanlardır ve A ya aittirler.

A kümesinin $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine kapalı olduğunu gösterelim. Her a,b $\in$ A için

$$\begin{aligned}(a\oplus b)(a\oplus b) &= (a+b-2ab)(a+b-2ab)\\ &= aa+ab-2ab+ba+bb-2abb-2aab+2abb+4abab\\ &= a+ab-2ab+ba+b-2ab-2ab-2ab+4ab\\ &= a+b-2ab\\ &= a\oplus b\end{aligned}$$

dir ve

$$(a\odot b)(a\odot b) = (ab)(ab) = aabb = ab = a\odot b$$

dir. Şimdi Boole halkaları aksiyomlarının A da geçerli olduğunu gösterelim.

R1. $$\begin{aligned}a\oplus(b\oplus c) &= a\oplus(b+c-2bc)\\ &= a+b+c-2bc-2a(b+c-2bc)\\ &= a+b+c-2bc-2ab-2ac+4abc\\ &= a+b+c-2ab-2ac-2bc+4abc\end{aligned}$$

dir. Benzer bir hesaplama

$$(a\oplus b)\oplus c = a+b+c-2ab-2ac-2bc+4abc$$

aynı sonucu verir. O halde $\oplus$ işlemi birleşmelidir.

R2. $$\begin{aligned}a\oplus b &= a+b-2ab\\ &= b+a-2ba\\ &= b\oplus a\end{aligned}$$

dir, dolayısıyla $\oplus$ işlemi değişmelidir.

R3. $a \oplus 0 = a$

aksiyomunu gerçeklemek için bir sonuca gereksinim vardır. □

Lemma 2.1.9.

Keyfi bir halkada her a elemanı için $a.0 = 0.a = 0$ dır.

Kanıt

$a.0 = a.(0+0) = a.0 + a.0$ ve $a.0 = a.0+0$, $a.0+a.0 = a.0+0$ ı gerektirir, o halde $a.0=0$ dır.

Bu lemma kullanılarak

$$a \oplus 0 = a+0-2a0 = a+0+0 = a$$

elde edilir.

R4. $a \oplus (-a) = 0$

Bunun kanıtı için de bir sonuca ihtiyaç vardır. □

Lemma 2.1.10.

Keyfi bir halkada her a,b elemanları için $a.(-b) = (-a).b = -(ab)$ dir.

Kanıt

Lemma 1.1.9. dan $0=a.0$ dır.Şimdi $0=a.0 = a.(b+(-b)) = ab+a(-b)$, $a(-b)$ nin ab nin bir toplamsal tersi olduğunu gösterir. Oysa bir halkada toplamsal ters eleman tektir, dolayısıyla $a(-b) = -(ab)$ dir. □

Bu lemma kullanılarak R4 ispatlanır:

$$\begin{aligned} a \oplus (-a) &= a+(-a)-2a(-a) \\ &= a+(-a)+2aa \\ &= a+(-a)+2a \\ &= a+(-a)+a+a \\ &= a+a \\ &= 0 \end{aligned}$$

R5. $$\begin{aligned} a \odot (b \odot c) &= a \odot (bc) \\ &= a(bc) \\ &= (ab)c \end{aligned}$$

$= (a\odot b)\odot c$

olduğu için $\odot$ işlemi birleşmelidir.

R6. $a\odot(b\oplus c) = (a\odot b)\oplus(a\odot c)$ olduğunu görmek için işlemler yapıldıktan sonra her iki tarafın aynı sonucu verdiğini görmek yeterlidir.

$$\begin{aligned} a\odot(b\oplus c) &= a\odot(b+c-2bc) \\ &= a(b+c-2bc) \\ &= ab+ac-2abc \\ (a\odot b)\oplus(a\odot c) &= (ab)\oplus(ac) \\ &= ab+ac-2aabc \\ &= ab+ac-2abc \end{aligned}$$

O halde R6 gerçeklenmiş olur.

R7, R6 gibi gerçeklenir. R8, $1 \in A$ olduğu için açıktır. R değişmeli olduğu için A değişmelidir. Böylece A değişmeli birimli bir halkadır; geriye A nın 2 karakteristikli olduğunu göstermek kalıyor:

$a\oplus a = a+a-2aa = a+a-2a = 2a-2a = 0$ □

2.2.Boole Cebirleri

X boştan farklı bir küme ve **P(X)**, X in kuvvet kümesi olsun. $\cup$, $\cap$, $'$, **P(X)** üzerinde sırasıyla küme birleşim, kesişim ve tümleyen işlemleri olmak üzere $\langle P(X), \cup, \cap, ', \emptyset, X\rangle$ kuvvet kümesi cebirini göz önünde bulunduralım. Bu cebirin aritmetiği Boole halkalarının aritmetiği ile çarpıcı benzerlik taşır. Kümeler kuramından aşağıdaki elemanter eşitlikler iyi bilinmektedir.

A, B, C $\in$ **P(X)** için

(1) $\emptyset^c = X$,	$X^c = \emptyset$
(2) $A\cap\emptyset = \emptyset$,	$A\cup X = X$
(3) $A\cap X = A$,	$A\cup\emptyset = A$
(4) $A\cap A^c = \emptyset$,	$A\cup A^c = X$
(5) $(A^c)^c = A$	
(6) $A\cap A = A$,	$A\cup A = A$
(7) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$,	$(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$
(8) $A\cap B = B\cap A$,	$A\cup B = B\cup A$
(9) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$,	$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$
(10) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$,	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

Uyarılar 2.2.1.

Bu denklemlerin tamamı Boole halkaları aksiyomlarına çok benzerlik gösterse de önemli farklılıklar vardır. Boole halkalarında toplama işlemi eşgüçlü değilken birleşim işlemi eşgüçlüdür. Toplama işlemi Boole halkalarında çarpma işlemi üzerine dağılmalı değilken birleşim kesişim üzerine dağılmalıdır. Boole halkaları *2* halkasının bir soyutlamasıdır. **P(X)** in karşılık gelen soyutlamasına bir Boole cebiri denir. Formel bir tanım şudur.

Tanım 2.2.2.

B boştan farklı bir küme; $\wedge$, $\vee$ ve $'$, B üzerinde sırasıyla ikili, ikili, birli işlemler ve 0, 1, B nin seçkin elemanları olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $< 2, 2, 1, 0, 0 >$ tipli $< B, \vee, \wedge, ', 0,1 >$ yapısına bir Boole cebiri denir.

Her a, b, c $\in$ B için

B1. $0' = 1, \qquad 1' = 0$

B2. $a \wedge 0 = 0, \qquad a \vee 1 = 1$

B3. $a \wedge 1 = a, \qquad a \vee 0 = a$

B4. $a \wedge a' = 0, \qquad a \vee a' = 1$

B5. $(a')' = a$

B6. $a \wedge a = a, \qquad a \vee a = a$

B7. $(a \wedge b)' = a' \vee b', \qquad (a \vee b)' = a' \wedge b'$

B8. $a \wedge b = b \wedge a, \qquad a \vee b = b \vee a$

B9. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (a \wedge c), \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

B10. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Düalite İlkesi 2.2.3.

φ, $\wedge$, $\vee$, $'$, 0, 1 sembollerinden oluşan bir formül olsun. φ formülünde $\vee$, $\wedge$ geçtikleri her yerde ve 0 ve 1 geçtikleri her yerde aralarında değiştirilsin ve sonuçlanan formül φ^d ile gösterilsin. O zaman φ doğru ise φ^d de doğrudur ve tersi de geçerlidir. φ ve φ^d formüllerine düal formüller denir.

B1- B10 aksiyomlarının her biri düal ikili olarak veriliyor. O halde düalite ilkesine göre kanıtlarda bu ikililerden birini kullanmak yeterlidir.

Boole cebirini tanımlayan aksiyom sayısı biraz kabarıktır; onların hepsi birbirinden bağımsız değildir. Huntington (Huntington, 1904) ve (Huntington, 1933) de Boole cebirini B3, B4, B8 ve B10 aksiyomları ile tanımlamış ve bu aksiyomların aralarında bağımsız olduğunun bir kanıtını vermiştir. Bununla ilgili olarak (Terziler ve diğerleri, 2013) e bakılabilir.

Örnek 2.2.4.

En basit Boole cebiri iki elemanlı {0,1} kümesidir. $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerinin bilinen doğruluk çizelgeleri yanında $0' = 1$ ve $1' = 0$ dır. Örnek 1.1.3 ile karşılaştırın.

Örnek 2.2.5.

$A, B \in \mathbf{P(X)}$ için $\mathbf{P(X)}$ üzerinde Δ simetrik fark işlemi ve ^{c} tümleyen işlemi olmak üzere,

$$A \Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$
$$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

olarak tanımlanır. O zaman $<\mathbf{P(X)}, \Delta, \cap, \emptyset, X>$ bir Boole cebiridir.

Çözüm

Önce $<\mathbf{P(X)}, \Delta, \emptyset>$ nin bir değişmeli grup olduğunu gösterelim. Bunun için Δ işleminin özellikle birleşmeli olduğunu kolayca göstermek için, Δ nın tanımını mantıksal bağlaç $\not\Leftrightarrow \equiv \sim$ ($\Leftrightarrow$) aracılığıyla vereceğiz. A ve B iki formül olmak üzere $A \Leftrightarrow B$ eğer A ve B aynı doğruluk değerlerini alıyorsa doğrudur. $A \not\Leftrightarrow B$ ise A ve B nin farklı doğruluk değerleri aldığını ifade eder. Şimdi $x \in A \Delta B$ ancak ve ancak $x \in A$ ve $x \in B$ önermelerinden biri doğru ise gerçekleşir. Bundan dolayı $x \in A \Delta B$ ancak ve ancak $x \in A \not\Leftrightarrow x \in B$ dir: $A \Delta B = \{ x \in X : x \in A \not\Leftrightarrow x \in B \}$.

Öte yandan önermeler mantığından $A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C) \equiv (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ olduğunu biliyoruz. Buradan $A \not\Leftrightarrow (B \not\Leftrightarrow C) \equiv (A \not\Leftrightarrow B) \not\Leftrightarrow C$ elde edilir. O halde Δ işlemi birleşmelidir: $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

. Her $A \in \mathbf{P(X)}$ için $A \Delta \emptyset = A$ olduğu iki türlü gösterilebilir.

$$A\Delta\emptyset = (A\backslash\emptyset)\cup(\emptyset\backslash A) = A$$

ya da

$$A \Delta \emptyset = \{ x \in X : x \in A \not\Leftrightarrow x \in \emptyset \} = A .$$

Böylece $\emptyset$, Δ işleminin sıfırıdır.

. $A \Delta A = \emptyset$ olduğu yine iki türlü gösterilebilir:

$$A \Delta A = (A\backslash A) \cup (A\backslash A) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$$

ya da

$$A \Delta A = \{ x \in X : x \in A \not\Leftrightarrow x \in A \} = \emptyset$$

dır, çünkü bir eleman aynı anda A ya ve A nın değiline ait olamaz. Böylece her eleman kendisinin simetrik fark tersidir.

. $A \Delta B = B \Delta A$ olduğu da iki türlü gösterilebilir.

$$A \Delta B = \{ x \in X : x \in A \not\Leftrightarrow x \in B \} = \{ x \in X : x \in B \not\Leftrightarrow x \in A \} = B \Delta A$$

ya da

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A.$$

O halde Δ işlemi değişmelidir. Neticede <**P(X)**, Δ, $\emptyset$> nin bir Abel grup olduğunu gösterdik.

. Küme kesişim işlemi $\cap$ değişmeli, birleşmelidir ve X kümesini birim eleman kabul eder.

. $\cap$ nin Δ üzerine dağılmalı olduğunu gösterirken $\wedge$ (ve) bağlacının değişmeli, birleşmeli ve $\not\Leftrightarrow$ bağlacı üzerine dağılmalı olduğu özelliklerinden yararlanacağız.

$$A \cap (B \Delta C) = \{ x \in X : x \in A \wedge (x \in B \not\Leftrightarrow x \in C) \}$$
$$= \{ x \in X : (x \in A \wedge x \in B) \not\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \}$$

$= \{ x \in X : x \in A \wedge x \in B \} \not\Leftrightarrow \{ x \in X : x \in A \wedge x \in C \}$

$= \{ x \in X : x \in A \cap B \} \not\Leftrightarrow \{ x \in X : x \in A \cap C \}$

$= (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

dir. Şu ana kadar <**P(X)** , Δ, $\cap$ > nin değişmeli birimli bir halka olduğunu gösterdik. Her $A \in$ **P(X)** için $A \cap A = A$ olduğundan halka bir Boole halkasıdır. Aslında Δ ve $\cap$ işlemleri B1-B10 aksiyomlarının tamamını sağlar, yani <**P(X)**,Δ, $\cap$, $\emptyset$, X > bir Boole cebiridir.

2.3. Boole Cebirleri ve Boole Halkaları

Boole cebirleri ve Boole halkalarının teorileri çok yakından bağlantılıdır; aslında bu kuramlar aynı konuya farklı yollardan yaklaşırlar. Daha açık biçimde ifade etmek gerekirse, bir Boole cebiri uygun toplama ve çarpma işlemleri tanımlanarak bir Boole halkasına ve tersine her Boole halkası uygun $\vee$, $\wedge$, ' işlemleri tanımlanarak bir Boole cebirine dönüştürülebilir. Bunu gerçeklemenin en kesin yolu **P(X)** Boole cebiri ile 2^X Boole halkasını karşılaştırmaktan geçer.

Tanım 2.3.1.

X bir küme ve A, X in bir alt kümesi olsun. A nın karakteristik fonksiyonu

$$a(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in A \\ 0 & , \ x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Karakteristik fonksiyonu göstermek için yaygın semboller X_A, 1_A dır; biz 1_A yı kullanacağız.

2.3.2. Boole Cebirinden Boole Halkasına Geçiş

P(X) de toplama ve çarpma işlemleri, sıfır ve birim elemanı nasıl tanımlanmalıdır ki **P(X)** Boole cebiri bir Boole halkası olsun? Bu soruyu yanıtlamak için 2^X deki halka işlemlerinin tanımlarını yakından incelemek ve **P(X)** ile 2^Xarasındaki bire-bir eşlemeyi göz önünde bulundurmak yardımcı olacaktır.

A, B $\in$ **P(X)** ve 1_A, 1_B karakteristik fonksiyonları olsun. **P(X)** de toplama ve çarpmayı tanımlamak istiyoruz. Her $x \in X$ için

$$(1_A + 1_B)(x) = 1_A(x) + 1_B(x) = \begin{cases} 1 & 1_A(x) \neq 1_B(x) \text{ ise} \\ 0 & 1_A(x) = 1_B(x) \text{ ise} \end{cases}$$

$$(1_A \,.\, 1_B)(x) = 1_A(x) \,.\, 1_B(x) = \begin{cases} 1 & 1_A(x) = 1_B(x) \text{ ise} \\ 0 & 1_A(x) \neq 1_B(x) \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Buna göre **P(X)** de halka toplam ve çarpım

$$A + B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \text{ ve } A \,.\, B = A \cap B$$

olarak yazılır. A + B nin A Δ B ile aynı olduğuna dikkat edelim. Ayrıca $1_\emptyset(x) = 0$ ve $1_X(x) = 1$ dir. Bu işlemler altında ve 0, 1 elemanlarıyla **P(X)** i bir Boole halkasına dönüştüğü açıktır.

2.3.3.Boole Halkasından Boole Cebirine Geçiş

2^X halkası da bir Boole cebirine benzer yaklaşımla dönüştürülebilir. A, B $\in$**P(X)** ve $1_A(x)$, $1_B(x)$, A ve B nin karakteristik fonksiyonları olsun.

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\Leftrightarrow x \in A \text{ ya da } x \in B \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \text{ veya } 1_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) \neq 1_B(x) \text{ ya da } 1_A(x) = 1_B(x) \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) + 1_B(x) + 1_A(x) \,.\, 1_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow (1_A + 1_B + 1_A \,.\, 1_B)(x) = 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x \in A^c &\Leftrightarrow x \notin A \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) \neq 1_X(x) \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) + 1_X(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow (1_A + 1_X)(x) = 1 \end{aligned}$$

dir. Bu gözlemler 2^Xde $\vee$ ve ' işlemlerinin

$$a \vee b = a + b + ab \qquad \text{ve} \qquad a' = a + 1$$

olarak tanımlanmasını önerir. Öte yandan

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \text{ ve } 1_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow 1_A(x) \, . \, 1_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow (1_A \, . \, 1_B)(x) = 1 \end{aligned}$$

olması nedeniyle de $a \wedge b = ab$ şeklinde tanımlanır. Sıfır ve birim elemanlarının her iki cebirde çakıştığı görülür. Böylece bu işlemler altında ve sıfır, birim elemanlarıyla 2^X in bir Boole cebiri olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 2.3.3.1.

$\mathbf{B_1}$ ve $\mathbf{B_2}$ iki Boole cebiri ve f: $\mathbf{B_1} \rightarrow \mathbf{B_2}$ bir dönüşüm olsun. Eğer f işlemleri ve seçkin elemanları koruyorsa, f ye bir (Boole) homomorfizması denir. Daha açık olarak

$$f(a \vee b) = f(a) \vee (b)\,,\; f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$
$$f(a') = f(a)'\,,\; f(0) = 0,\;\; f(1) = 1$$

ise f ye $\mathbf{B_1}$ den $\mathbf{B_2}$ ye bir (Boole) homomorfizması denir.

Bu bölümü (Givant and Halmos, 2009) den alınan iki soruyu çözerek sonlandırıyoruz.

Soru 2.3.3.2. ((Givant and Halmos, 2009), Soru 1, Sayfa 18)

P(X) ve 2^XBoole cebirlerinin X in her bir alt kümesini karakteristik fonksiyonuna götüren dönüşüm aracılığıyla izomorf olduklarını kanıtlayın.

Kanıt

φ : **P(X)** $\rightarrow 2^X$ dönüşümünün bir (Boole) izomorfizması olduğunu göstereceğiz. Bu dönüşüm her A$\in$**P(X)** elemanını A nın 1_A karakteristik fonksiyonuna götürsün; 2^X in elemanlarının X üzerinde 2- değerli, yani 0 ya da 1 değerini alan, fonksiyonlar olduğunu anımsayalım.

F = { x $\in$ X : f (x) = 1 } kümesine f nin destek kümesi diyelim ve f fonksiyonunun F kümesini ve F kümesinin f fonksiyonunu tam olarak belirlediğini kaydedelim. Başka bir deyişle f, F kümesinin karakteristik fonksiyonudur.

. φ dönüşümü bire-birdir. Gerçekten A, B $\in$ **P(X)** için φ (A) = φ (B), yani $1_A = 1_B$ varsayalım. O zaman A ve B, 2^X de aynı elemanın destek kümeleridir, dolayısıyla A ve B eşit olmak zorundadır.

. φ dönüşümü örtendir. Bunun için her $f \in 2^X$ için φ (A) = f olacak şekilde en az bir A∈**P(X)** olması gerekir. Oysa 2^X deki her eleman destek kümesinin görüntüsüdür, o nedenle $\varphi(A) = f$ tam buna karşılık gelir.

. $\varphi(\emptyset) = 1_\emptyset = 0$ ve $\varphi(X) = 1_X = 1$ olduğundan φ, **P(X)** deki $\emptyset$ sıfırını 2^X deki 0 sabit fonksiyonuna ve X birimini 2^X deki 1 sabit fonksiyonuna götürür; başka bir ifade ile φ seçkin elemanları korur.

. φ işlemleri korur. A, B ∈ **P(X)** olsun.

- Önce $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$ yi gösterelim. 2^X de $1_A \vee 1_B$, her x ∈ X için

$$(1_A \vee 1_B)(x) = 1_A(x) \vee 1_B(x)$$

olarak tanımlanır. Şimdi

$$\begin{aligned} 1_A(x) \vee 1_B(x) = 1 &\Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \text{ ya da } 1_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ya da } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \end{aligned}$$

olduğu için

$$(1_A \vee 1_B)(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cup B$$

sonuçlandırılır. Başka bir ifadeyle $1_A \vee 1_B$, $A \cup B$ birleşiminin karakteristik fonksiyonudur ve φ dönüşümünün verilişinden

$$\varphi(1_A) \vee \varphi(1_B) = 1_A \vee 1_B = \varphi(A \cup B)$$

elde edilir.

- 2^X de $1_A \wedge 1_B$ fonksiyonu her x ∈ X için

$$(1_A \wedge 1_B)(x) = 1_A(x) \wedge 1_B(x)$$

olarak tanımlanır. Şimdi

$$\begin{aligned} 1_A(x) \wedge 1_B(x) = 1 &\Leftrightarrow 1_A(x) = 1 \text{ ve } 1_B(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \end{aligned}$$

olduğundan

$$(1_A \wedge 1_B)(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cap B$$

sonucu çıkar ve buradan

$$\varphi(A) \wedge \varphi(B) = 1_A \wedge 1_B = \varphi(A \cap B)$$

gerçekleşmiş olur.

-Son olarak $\varphi(A)' = 1_A{}' = \varphi(A')$ olduğunda φ nin bir (Boole) izomorfizması olduğunun kanıtı tamamlanmış olur.

Bu bölümü (Givant and Halmos, 2009) deki bir diğer ilginç soruyu çözerek sonlandırıyoruz.

Soru 2.3.3.3. **((Givant and Halmos, 2009), soru 3, sayfa 19)**

m pozitif bir tamsayı ve A, m nin tüm pozitif bölenlerinin kümesi olsun. A nın Boole yapısını

$$0 = 1$$
$$1 = m$$
$$p \wedge q = \text{ebob}\ \{ p,q \}$$
$$p \vee q = \text{ekok}\ \{p,q \}$$
$$p' = m/p$$

denklemleri ile tanımlayalım. Kanıtlayın : A bir Boole cebiri oluşturur ancak ve ancak m kare bağımsız (yani , m hiçbir asalın karesine bölünmez) dir.

Kanıt

Bu soruyu kanıtlayabilmek için A da her bir Boole aksiyomunun gerçekleşmesini **P(X)** Boole cebirindeki küme- kuramsal eşitliklerin gerçeklenişine dönüştürmek akılcı olacaktır; o nedenle bazı notasyonları kullanacağız. **N** = { 1, 2, 3,... } pozitif tamsayıların kümesini göstersin. P = { p|m: p asal } ⊆A, yani p, m nin asal bölenlerinden oluşsun. Eğer F, **N** nin sonlu bir alt kümesi ise F nin elemanlarının çarpımını f ile gösterelim: $f = \Pi\ F$. Bir uzlaşma olarak $1= \Pi\ \emptyset$ dır. Şimdi n ∈**N** için n| m ⇔ $n= \Pi$ **N** olacak şekilde biricik **N**⊆ P kümesi vardır; aslında böyle bir n için karşılık gelen **N** kümesi n nin tam olarak asal bölenlerini içerir. Bu gözlem sonunda A nın elemanları **Q**⊆ P olmak üzere q = Π **Q** tamsayılarından ibarettir.

Koşul yeterdir: Şimdi **Q** ve **R**, P nin alt kümeleri ve q= Π **Q** ve r= Π **R** ise o zaman A üzerinde verilen V, Λ, ' işlemleri kümesel olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$1= \Pi\ \emptyset$$
$$m= \Pi\ P$$
$$q \wedge r = \text{ebob}\ \{ q, r \} = \Pi\ (Q \cap R)$$
$$q \vee r = \text{ekok}\ \{ q, r \} = \Pi\ (Q \cup R)$$
$$q'= {}^{m}/q = \Pi\ Q'$$

burada Q' = P\Q küme kuramsal tümleyendir. Artık bundan sonra B1- B10 aksiyomlarını gerçeklemek kolaydır. Bazılarını gösterelim.

B3. $q \wedge 1= \text{ebob}\ \{ q, 1 \} = \Pi\ (Q \cap P) = \Pi\ Q = q$

B7. $(q \wedge r)' = \Pi\ ((Q \cap R)') = \Pi\ ((Q' \cup R')) = q' \vee r'$

B10. $q \vee (r \wedge s) = \Pi\ ((Q \cup (R \cap S)) = \Pi\ ((Q \cup R) \cap (Q \cup S))$

$= (q \vee r) \wedge (q \vee s).$

Böylece m kare- bağımsız ise A bir Boole cebiri oluşturur.

Koşul Gerektir: Karşıt ters kanıt verelim: m kare- bağımsız değilse A bir Boole cebiri değildir.

Bu durumda $p \in P$ için p^2, m yi böler. Şimdi p, hem p yi hem m/p yi böldüğü için p, ebob {p,m/p } yi de böler. Bunun bir sonucu olarak ebob { p, m/p } $\neq 1$ elde edilir. Oysa $1 = \Pi\emptyset$ ve $p \wedge q =$ ebob { p, q } ve tümleyen tanımlarından ebob { p, m/p } $\neq 1$, $p \wedge p' \neq 0$ anlamına gelir ki bu bir çelişkidir; burada 0, A nın sıfır elemanıdır, bir tamsayı değildir. □

BÖLÜM 3: BOOLE HOMORFİZMALARI

Bu bölümde Boole homomorfizmaları ayrıntılı inceleniyor ve (Givant and Halmos, 2009) de yer alan bazı önemli sorular yanıtlanıyor.

3.1. Gerekli Tanım ve Kavramlar

Bu kesimde homomorfizma örnekleri oluştururken gerek duyulan bazı kavramları tanıtıyoruz.

Tanım 3.1.1.

X boştan farklı bir küme ve F, P(X) kuvvet kümesinin bir alt kümesi olsun. Küme birleşim, kesişim ve tümleyene kapalı ise F ye bir kümeler cismi denir.

Bu tanımdan dolaysız olarak aşağıdakiler sonuçlandırılabilir:

. Her kümeler cismi bir Boole cebiridir.

. De Morgan yasaları kullanılarak F nin bir kümeler cismi olduğunu göstermek için birleşim ve tümleyene kapalı olduğunun gerçeklemek yeterlidir.

Tanım 3.1.2.

B bir Boole cebiri ve A, B nin bir alt kümesi olsun. B nin işlemlerine kapalı ve B nin 0,1 elemanlarını içeriyorsa A ya B nin bir alt cebiri denir.

Uyarı 3.1.3.

Birimli bir halkanın bir alt halkası bir birime sahip olabilir de olmayabilir de; sahip olsa bile bu birim halkanın birimi ile aynı olmayabilir.

Boole cebirlerinde bir alt cebir kesinlikle Boole cebirinin 1 birimini içermek zorundadır.

Durumu açıklamak için şöyle bir örnek verilebilir:

B bir küme ve A, B nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bilindiği üzere

$\langle P(B),\cup,\cap,\ {}^{c},\emptyset,B\rangle$ ve $\langle P(A),\cup,\cap,\ {}^{c},\emptyset,B\rangle$ Boole cebirleridir ve B, P(B) nin birimi , A, P(A) nın birimidir. Ancak A$\neq B$ dir. O halde P(A), P(B) nin bir alt cebiri değildir. Bir diğer neden P(A) daki tümleyen işleminin P(B) deki tümleyen işleminin kısıtlaması olmayışıdır.

Tanım 3.1.4.

B bir Boole cebiri ve p, q, B nin elemanları olsun. O zaman B üzerinde bir $\leq$ ikili bağıntısı $p \leq q$ eğer ve yalnız eğer $p \wedge q = p$ ya da denk olarak $p \vee q = q$ olarak tanımlanır.

Boole cebirleri için B1-B10 aksiyomlarından bu bağıntının sıralama bağıntısı olduğu açıktır.

3.2. Homomorfizmalar

Her cebirsel yapıda olduğu gibi bir Boole homomorfizması da yapı koruyan bir dönüşümdür.

Tanım 3.2.1.

A ve B iki Boole cebiri ve bir $f: B \to A$ dönüşümü verilsin. B nin her p,q elemanları için

h1. $f(p \wedge q) = f(p) \wedge f(q)$

h2. $f(p \vee q) = f(p) \vee f(q)$

h3. $f(p') = f(p)'$

ise f dönüşümüne bir (Boole) homomorfizması denir.

Teorem 3.2.2.

B bir Boole cebiri ve A , $\vee$, $\wedge$ *ve* $'$ işlemli keyfi bir cebirsel yapı olsun. Eğer $f: B \to A$

$h1$, $h2$, $h3$ koşullarını sağlayan örten bir dönüşüm ise o zaman A bir Boole cebiridir.

Kanıt

A nın $B1 - B10$ aksiyomlarını sağladığı göstermemiz gerekiyor. $B1 - B10$ aksiyomlarının dual biçimde verildiğini belirtelim , o nedenle sadece her birinin yarısını gerçeklemek yeterli olacaktır. A nın sıfır ve birini f(0) ve f(1) ile yorumlayalım. Öte yandan gerçeklemeler rutin olduğu için bazı aksiyomları yerine getirmekle yetineceğiz.

B1.	$0' = 1$	(B de geçerli)
	$f(0') = f(1)$	(f bir dönüşüm)
	$f(0') = f(0)'$	($h3$)
	$f(0)' = f(1)$	

dir. O halde B1 , A da gerçeklenir.

B3.	$p \wedge 1 = p$	(B de geçerli)
	$f(p \wedge 1) = f(p)$	(f bir dönüşüm)
	$f(p) \wedge f(1) = f(p)$	($h1$)

dir. O halde $B3$, A da gerçeklenir.

B7. $(p \wedge q)' = p' \vee q'$ (B de geçerli)

$f((p \wedge q)') = f(p' \vee q')$ (f bir dönüşüm)

$f(p \wedge q)' = f(p' \vee q')$ ($h3$)

$\left(f(p) \wedge f(q)\right)' = f(p' \vee q')$ ($h1$)

$f(p)' \vee f(q)' = f(p' \vee q')$ ($B7$)

$f(p') \vee f(q') = f(p' \vee q')$ ($h3$)

dir. O halde $B7$, A da gerçeklenir.

B10. f dönüşümü örten olduğu için $f(p) = a$, $f(q) = b$, $f(r) = c$ olacak şekilde B de p , q , r elemanları vardır. Göstermemiz gereken A da $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dağılma aksiyomunun geçerli olduğudur.

$$a \wedge (b \vee c) = f(p) \wedge (f(q) \vee f(r))$$

$= f(p) \wedge f(q \vee r)$ ($h2$)

$= f(p \wedge (q \vee r))$ ($h1$)

$= f((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ ($B10$)

$= f(p \wedge q) \vee f(p \wedge r)$ ($h2$)

$= (f(p) \wedge f(q)) \vee (f(p) \wedge f(r))$ ($h1$)

$= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

dir. O halde $B10$, A da gerçeklenir. □

Uyarı 3.2.3.

Alt cebirlerde olduğu gibi 0 ve 1 elemanları homomorfizmalar için de özel rol oynarlar. Gerçekten f bir Boole homomorfizması ise o zaman $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ koşullarını sağlayan örten bir homomorfizma ise doğal olarak bir Boole cebiridir. Bu durumda $f(B) = A$ dır ve A ya B nin homomorf görüntüsü denir.

1.3.1 de $\vee, \wedge, '$ açısından tanımlanan $+$, $\Longrightarrow$ gibi Boole işlemleri Boole homomorfizmalarınca korunur.

Önerme 3.2.4.

$p + q = (p \wedge q') \vee (p' \wedge q)$ ve $p \Rightarrow q = p' \vee q$ ile tanımlanan $+$ ve $\Rightarrow$ Boole homomorfizmaları tarafından korunur.

Kanıt

$$p + q = (p \wedge q') \vee (p' \wedge q) \qquad \text{(tanım)}$$

$$f(p + q) = f((p \wedge q') \vee (p' \wedge q)) \qquad \text{(f bir dönüşüm)}$$

$$= f(p \wedge q') \vee f(p' \wedge q) \qquad (\,h2\,)$$

$$= (f(p) \wedge f(q')) \vee (f(p') \wedge f(q)) \qquad (\,h1\,)$$

$$= (f(p) \wedge f(q)') \vee (f(p)' \wedge f(q)) \qquad (\,h3\,)$$

$$= f(p) + f(q) \qquad \text{(+ nın tanımı)}$$

$$p \Longrightarrow q = p' \vee q \qquad \text{(tanım)}$$

$$f(p \Longrightarrow q) = f(p' \vee q) \qquad \text{(f bir dönüşüm)}$$

$$= f(p') \vee f(q) \qquad (\,h2\,)$$

$$= f(p)' \vee f(q) \qquad (\,h3\,)$$

$$= f(p) \Longrightarrow f(q) \qquad (\Rightarrow \text{nin tanımı }) \qquad \square$$

Önerme 3.2.5.

Her Boole homomorfizması sıra koruyandır.

Kanıt

f bir homomorfizma ve $a \leq b$ olsun. O zaman

$$a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a \qquad \text{(Tanım 2.1.4)}$$

$$\Rightarrow f(a \wedge b) = f(a) \qquad \text{(f bir dönüşüm)}$$

$$\Rightarrow f(a) \wedge f(b) = f(a) \qquad \text{(h1)}$$

$$\Rightarrow f(a) \leq f(b) \qquad \text{(Tanım 2.1.4)} \qquad \square$$

3.3 Boole Homomorfizmasına Örnekler

Bu kesimde bazı homorfizma türlerini örneklerle açıklayacağız.

Örnek 3.3.1

B bir Boole cebiri ve p_0 , B nin keyfi bir elemanı olsun.

$A = \{p \in B : p \leq p_0\} = \{p \wedge p_0 : p \in B\}$ kümesi üzerinde $\vee$ *ve* $\wedge$ işlemleri B deki işlemlerle aynı ve $0 \in A$ olsun fakat $1 = p_0$ *ve* $p' = p_0 - p$ olarak tanımlansın. O zaman

$$f : B \to A , p \mapsto f(p) = p \wedge p_0$$

Dönüşümü bir homomorfizmadır.

Kanıt

f nin $h1 - h3$ özelliklerini sağladığını göstereceğiz.

$p, q \in B$ için

h1.

$f(p \wedge q) = (p \wedge q) \wedge p_0$	(f nin tanımı)
$= (p \wedge q) \wedge (p_0 \wedge p_0)$	($B6$)
$= (p \wedge p_0) \wedge (q \wedge q_0)$	
$= f(p) \wedge f(q)$	

dir. Yukarıdaki 3. Eşitlik $\wedge$ işleminin birleşme ve değişme özellikleri kullanılarak yazılmıştır.

h2.

$f(p \vee q) = (p \vee q) \wedge p_0$	(f nin tanımı)
$= (p \wedge p_0) \vee (q \wedge p_0)$	(B6)
$= f(p) \vee f(q)$	

dir.

h3.

$f(p') = p' \wedge p_0$	(f nin tanımı)
$= (p' \wedge p_0) \vee 0$	($B3$)
$= (p' \wedge p_0) \vee (p_0 \wedge p_0')$	($B4$)
$= (p_0 \wedge p') \vee (p_0 \wedge p_0')$	($B8$)
$= p_0 \wedge (p' \vee p_0')$	($B10$)
$= p_0 \wedge (p \wedge p_0)'$	($B7$)
$= p_0 - (p \wedge p_0)$	(A da ' işleminin tanımı)
$= f(p)'$	

dir.

O halde f bir Boole homomorfizmasıdır. Ayrıca $f(0) = 0 \wedge p_0 = 0$ ve $f(1) = 1 \wedge p_0 = p_0$ olduğu için A cebiri f homomorfizması altında B Boole cebirinin görüntüsüdür ve seçkin elemanları 0 ve p_0 olan bir Boole cebiri oluşturur.

A cebirine B Boole cebirinin p_0 elemanlarına görelileşmesi denir ve $B(p_0)$ ile gösterilir. f fonksiyonuna da p_0 tarafından üretilen göreceleştirme homomorfizması denir.

Örnek: 3.3.2 X bir küme; B, X in alt kümelerinin bir cismi ve x_0, X in keyfi bir elemanı olsun. O zaman

$$f: B \to 2(=\{0,1\}),\ P \to f(P) = \begin{cases} 1, & x_0 \in P \ ise \\ 0, & x_0 \notin P \ ise \end{cases}$$

dönüşümü bir 2-değerli homomorfizmadır.

Kanıt

f nin h1 ve h3 koşullarını gerçeklediğini göstermek yeterlidir. P, $Q \in$ B için aşağıdaki denklikler f nin verilişinden, B ve 2 deki işlemlerin tanımlarından açıktır.

h1. $f(P \cap Q) = 1 \iff x_0 \in P \cap Q$

$\iff x_0 \in P \ ve \ x_0 \in Q$

$\iff f(P) = 1$ ve $f(Q) = 1$

$\iff f(P) \wedge f(Q) = 1$

O halde $f(P \cap Q) = f(P) \wedge f(Q)$ dir.

h3. $f(P^c) = 1 \iff x_0 \in P^c$

$\iff x_0 \notin P$

$\iff f(P) = 0$

$\iff f(P)' = 1$

O halde $f(P^c) = f(P)'$ dir. □

Aşağıdaki örnek , örnek 2.3.2 de tanımlanan 2-değerli homomorfizmayı genelleştirmektedir.

Örnek: 3.3.3

X ve Y boştan farklı kümeler ; A ve B sırasıyla X ve Y nin alt kümelerinin cisimleri ve $g: X \to Y$ keyfi bir dönüşüm olsun. f, g nin ters görüntüsü olsun; yani her $P \in B$ için $f(P) = \{x \in X: g(x) \in P\}$ diyelim. Genelde $f(P) \in A$ ise o zaman f dönüşümü B üzerinde A-değerli bir homomorfizmadır.

Kanıt

f nin , önceki örnekte olduğu gibi , h1 ve h3 özelliklerini sağladığını gerçeklemek yeterli olacaktır.

P, Q ∈ B için

h1. $x \in f(P \cap Q) \Leftrightarrow g(x) \in P \cap Q$

$\Leftrightarrow g(x) \in P$ ve $g(x) \in Q$

$\Leftrightarrow x \in f(P)$ ve $x \in f(Q)$

dir. O halde $f(P \cap Q) = f(P) \cap f(Q)$ gerçeklenir.

h3. $x \in f(P^c) \Leftrightarrow g(x) \in p^c$

$\Leftrightarrow g(x) \notin P$

$\Leftrightarrow x \notin f(P)$

$\Leftrightarrow x \in f(P)^c$

dir. Böylece $f(P^c) = f(P)^c$ gerçeklenir. □

f homomorfizmasına g tarafından üretilmiş homomorfizma denir.

Cebirde yapıldığı gibi özel türden Boole homomorfizmaları tanımlanabilir.

Tanım 3.3.4

f bir Boole homomorfizması olsun.

(i) f bire-bir ise f ye bir monomorfizma ya da bir gömme denir.
(ii) f örten ise f ye epimorfizma denir.
(iii) f monomorfizma ve epimorfizma ise f ye bir izomorfizma denir.

İki Boole cebiri arasında bir izomorfizma varsa cebirler izomorftur denir. Bir Boole cebirinden kendisi üzerine bir izomorfizma otomorfizma denir.

Tanım 3.3.5

B bir Boole cebiri ve A , B nin bir alt cebiri olsun. B de bir supremumuna sahip E alt kümesi A da da p supremumuna sahip ise A ya B nin bir regüler alt cebiri denir.

Teorem 3.3.6

B bir boole cebiri ve A , B nin alt cebiri olsun. A nın regüler olması için E , B de Sup E = 1 özellikli bir alt küme ise A da da Sup E = 1 olması bir gerek ve yeter koşuldur.

Bu teoremin bir kanıtı için [3] , sayfa 85 e bakılabilir.

Tanım 3.3.7

A ve B iki Boole cebiri ve $f: A \to B$ bir homomorfizma olsun. Mevcut olduğunda tüm supremumları , dolayısıyla tüm infimumları , koruyorsa f ye bir tam homomorfizma denir.

Başka bir deyişle ; $\{P_i\}$, A nın elemanlarının bir ailesi ve $\mathrm{Sup}\{P_i\} = P$ ise o zaman $\{f(P_i)\}$ ailesi bir supremumuna sahiptir ve $\mathrm{Sup}\{f(P_i)\} = f(P)$ dir.

Aşağıdaki teorem tam homomorfizmalar ve regüler alt cebirler arasında ilginç bir bağlantı olduğunu ifade ediyor.

Teorem 3.3.8

A ve B iki Boole cebiri ve $f: B \to A$ bir monomorfizma olsun. f nin tam olabilmesi için B nin f altındaki görüntüsünün A nın bir regüler alt cebiri olması gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt

Herşeyden önce B nin f monomorfizması altındaki f(B) görüntüsünün A nın bir alt cebiri olduğu açıktır; C=f(B) diyelim.

Koşul Gerektir f nin tam olduğunu varsayalım. $\{q_i\}$, C nin elemanlarının bir ailesi ve $\mathrm{Sup}\{q_i\} = q$, C ye ait olsun. f bire-bir olduğu için

$f(p_i) = q_i$ ve $f(p) = q$ olacak şekilde B de tek biçimde belirlenmiş p_i *ve* p elemanları vardır. Madem ki f , B den C üzerine bir izomorfizmadır , p elemanı $\{p_i\}$ ailesinin B de supremumudur. Hipotezden f tamdır , o halde $f(p)$, $\{f(p_i)\}$ nin A da supremumudur.

Koşul Yeterdir_ C , A nın bir regüler alt cebiri olsun. f nın tam olduğunu kanıtlamak için B de $p = Sup\{p_i\}$ özellikli $\{p_i\}$ ailesini göz önünde bulunduralım.

f , B ile C arasında bir izomorfizma olduğu için $f(p), \{f(p_i)\}$ nin C de supremumudur. Ama C , A nın bir regüler alt cebiridir , öyleyse $f(p)$, $\{f(p_i)\}$ nin A da da supremumdur. □

3.4 Soru Çözümleri

Bu son kesimde [3] deki bazı sorular yanıtlanıyor.

Soru 3.4.1 ([3] , $sayfa$ 100 , $soru$ 9)

Boole cebirleri arasındaki bir f dönüşümü 0 , 1 elemanlarını ve $\vee$, $\wedge$ işlemlerini koruyorsa ille de bir homomorfizma mıdır?

Çözüm

f bir homomorfizmadır. Önce bir sonuca ihtiyaç vardır.

Lemma 3.4.2

B bir Boole cebiri olsun. O zaman

(i) her p için $p \vee q = p$ ise $q = 0$ ve her p için $p \wedge q = p$ ise $q = 1$ dir.
(ii) $p \wedge q = 0$ ve $p \vee q = 1$ ise $q = p'$ dir.

Kanıt

(i) $p \vee q = p$ de $p = 0$ alalım ; o zaman $0 \vee q = 0$ olur ve (B3) den q=0 elde edilir.
$p \wedge q = p$ de $p = 1$ $alalım$; o zaman $1 \wedge q = 1$ olur ve (B3) den q=1 bulunur.

(ii)

$q = 1 \wedge q$	(B3)
$=(p \vee p') \wedge q$	(B4)
$=(p \wedge q) \vee (p' \wedge q)$	(B10)
$=0 \vee (p' \wedge q)$	(hipotez)
$=(p' \wedge p) \vee (p' \wedge q)$	(B4)
$=p' \wedge (p \vee q)$	(B10)
$=p' \wedge 1$	(hipotez)

$=p'$

Bu lemma Boole cebirlerinde tümleyenlerin tek olduğunu kanıtlar.

Hipoteze göre f dönüşümü 0 , 1 , $\wedge$, $\vee$ koruduğundan bir homomorfizma olması için tümleyeni koruduğu gösterilmelidir.

$$f(p) \vee f(p') = f(p \vee p') \qquad (f, \vee \text{ yi koruyor})$$

$$=f(1) \qquad (B4)$$

$$=1 \qquad (f, 1 \text{ i koruyor})$$

ve

$$f(p) \wedge f(p') = f(p \wedge p') \qquad (f, \wedge \text{ yi koruyor})$$

$$=f(0) \qquad (B4)$$

$$=0 \qquad (f, 0 \text{ ı koruyor})$$

olduğundan $\quad f(p') = f(p)'$

dir.

Soru 3.4.3 ([3] , sayfa 100 , soru 11)

Boole cebirleri arasındaki bir f bijeksiyonu

$$p \le q \Leftrightarrow f(p) \le f(q) \qquad (1)$$

sıra-koruyan denkliği sağlıyorsa ille de bir Boole izomorfizması mıdır?

Kanıt

Verilen özelliklere sahip $f: B \to A$ dönüşümünün bir Boole izomorfizması olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için Soru 3.4.1 e göre f nin $\vee$, $\wedge$, 0 *ve* 1 *i* koruduğunu göstermemiz yeterlidir.

Önce bir notasyon uzlaşmasında bulunalım. E , B nin bir alt kümesi ise E nin B deki infimum ve supremumumunu sırasıyla $\wedge_B E$ *ve* $\vee_B E$ ile gösterelim.

- E , B nin bir alt kümesi ve $p = \wedge_B E$ olsun.
  f nin $\wedge$ yi koruduğunu gösterelim : $f(p) = \wedge_A f(E)$
  Dual bir akıl yürütmeyle , $q = \vee_B E$ *ise* $f(p) = \vee_A f(E)$ olduğu gösterilebilir.
  $f(E) = \{f(q): q \in E\}$ diyelim.

$q \in E$ ise $p = \wedge_B E$ nedeniyle $p \leq q$ dur ve (1) uyarınca $f(p) \leq f(q)$ bulunur. Bu $f(p)$ nin $f(E)$ için bir alt sınır olduğunu ifade eder. Şimdi $r, f(E)$ nin her hangi bir diğer alt sınırı olsun. f örten olduğu için $f(s) = r$ olacak şekilde B de bir s elemanı vardır. $f(s)$, $f(E)$ nin bir alt sınırı kabul edildiğinden (1) gereği s , E nin bir alt sınırı olmak zorundadır. $p = \wedge_B E$ E nin en büyük alt sınırı olduğu için $s \leq p$ ve buradan yine (1) uyarınca

$$r = f(s) \leq f(p)$$

elde edilir. r , $f(E)$ nin keyfi bir alt sınırı olduğundan $f(p) = \wedge_A f(E)$ sonuçlandırılır.

- f , B deki 1 elemanını korur. Gerçekten B bir Boole cebiri ise her $p \epsilon B$ için $p \leq 1$, yani 1 , B de tüm elemanların supremumudur , o nedenle f(1) , A daki tüm elemanların kümesinin supremumu olmak zorundadır. Böylece f(1)=1 dir. Dual akıl yürütme ile f(0)=0 sonuçlandırılır.

Soru 3.4.4 ([3] , sayfa 100 , soru 12)

Boole cebirleri arasında bir dual izomorfizma

$$f(p \wedge q) = f(p) \vee f(q)\ ,\ f(p \vee q) = f(p) \wedge f(q)\ ,\ f(p') = f(p)' \quad (2)$$

Koşullarını sağlayan bir f bijeksiyonudur.

Kanıtlayın: Bir f bijeksiyonu bir dual izomorfizmadır ancak ve ancak f

$$p \leq q \Leftrightarrow f(p) \geq f(q) \quad (3)$$

Sıra-tersleyen denkliğini sağlar.

Kanıt

A ve B iki Boole cebiri ve $f: B \to A$ bijektif bir dönüşüm olsun.

Koşul Gerektir f nin bir dual izomorfizma olduğunu varsayalım ve (3) denkliğini gösterelim.

$$p \leq q \Leftrightarrow p \vee q = q \qquad \text{(Tanım 2.1.5)}$$

$$\Leftrightarrow f(p \vee q) = f(q) \qquad \text{(f bijeksiyon)}$$

$$\Leftrightarrow f(p) \wedge f(q) = f(q) \qquad \text{((2))}$$

$$\Leftrightarrow f(p) \geq f(q) \qquad \text{(Tanım 2.1.5)}$$

Koşul Yeterdir (3) denkliğinin geçerli olduğunu varsayalım ve f nin (2) koşullarını yerine getirdiğini gösterelim.

Bunun için Soru 2.4.3 deki akıl yürütmenin bir anlamda "duali" gerçeklenecektir.

E , B nin bir alt kümesi ve $p = \bigwedge_B E$ olsun. Göstermemiz gereken , $f(E) = \{f(q): q \in E\}$ olmak üzere , $f(p) = \bigvee_A f(E)$ dir.

$q \in E$ ise o zaman $p = \bigwedge_B E$ nedeniyle $p \leq q$ dir;

Buradan (3) uyarınca $f(p) \geq f(q)$ çıkar ve bu f(p) nin f(E) için bir üst sınır olduğunu gösterir. Şimdi t , f(E) nin keyfi bir üst sınırı olsun. f bir bijeksiyon olduğu için B de f(s)=t olacak şekilde bir s elemanı vardır. F(s) , f(E) nin bir üst sınırı kabul edildiğinden (3) e göre s , E nin en büyük alt sınırı olmak zorundadır. Oysa p , E nin en büyük alt sınırıdır , böylece $s \leq p$ dir. Ve (3) den $t = f(s) \geq f(p)$ elde edilir. Yani $f(p) = \bigvee_A f(E)$ dir.

Dual bir akıl yürütme $p = \bigvee_B E$ *ise* $f(p) = \bigwedge_A f(E)$ olduğunu gösterir. Artık $f(p \wedge q) = f(p) \vee f(q)$, $f(p \vee q) = f(p) \wedge f(q)$ *ve* $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ olduğu yukarıdaki kanıtın bir sonucudur.

Son olarak Lemma 3.4.2 den yararlanarak f nin tümleyeni koruduğunu gösteriyoruz.

$$0 = f(1) = f(p \vee p') = f(p) \wedge f(p')$$

$$1 = f(0) = f(p \wedge p') = f(p) \vee f(p')$$

Eşitliklerini Lemma 2.4.2 uyarınca $f(p') = f(p)'$ anlamına gelir. Böylece f bir dual izomorfizmadır.

Soru 3.4.5 ([3] , sayfa 102 , soru 24)

A tamsayıların sonlu ve tümleyeni sonlu kümelerinin cismi ve B , A nın çift sayılarının sonlu kümelerinin alt cismi olsun. A ve B izomorf mudur?

Kanıt

A ve B nin izomorf olduğunu kanıtlayacağız. T tek tamsayıların kümesini göstersin ve $f: A \to B$ dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f(P) = \begin{cases} \{2n: n \in P\} & , \text{ P sonlu ise} \\ \{2n: n \in P\} \cup T & , \text{ P tümleyeni sonlu ise} \end{cases}$$

Her şeyden önce $P \in A$ *için* $f(P) \in B$ olduğu A ve B nin tanımlarından açıktır.

- f bire-birdir. f(P)=f(Q) varsayalım. P ve Q sonlu ise $\{2n: n \in P\} = \{2m: m \in Q\}$ dir.

Bu kümesel eşitlik ancak m=n ise , yani P=Q ise mümkündür. Eğer P ve Q tümleyenleri sonlu kümeler ise yine tanımdan P=Q elde edilir. O halde f bire-birdir.

- f örtendir. Her hangi bir $C \in B$ $için$ $f(P) = C$ olacak şekilde bir $P \in A$ bulmamız isteniyor. İki durum söz konusudur.
- C sonlu ise o zaman f nin tanımından C tamamen çift sayılardan oluşur, dolayısıyla C=$\{2n: n \in P\}$, yani $f(P) = C$ gerçeklenmiş olur.
- C tümleyeni sonlu ise her tek sayıyı ve yalnız sonlu çoklukta çift sayıyı içerir , o nedenle C ye karşılık gelen $P \in A$ tamsayıların tümleyeni sonlu kümesidir , yani $\{2n: n \in P\} \cup T$ dir.

  Böylece f nin bir bijeksiyon olduğu gösterildi.
- f birleşim işlemini korur. $P, Q \in A$ için dört durum söz konusudur.
- P ve Q sonlu . O zaman $P \cup Q$ sonludur ve

$$\begin{aligned} f(P \cup Q) &= \{2n: n \in P \cup Q\} \\ &= \{2n: n \in P \; ya \; da \; n \in Q\} \\ &= \{2n: n \in P\} \cup \{2n: n \in Q\} \\ &= f(P) \cup f(Q) \end{aligned}$$

- P tümleyeni sonlu ve Q sonlu. O zaman $P \cup Q$ tümleyeni sonludur ve

$$\begin{aligned} f(P \cup Q) &= \{2n: n \in P \cup Q\} \cup T \\ &= \{2n: n \in P\} \cup \{2n: n \in Q\} \cup T \\ &= \{2n: n \in P\} \cup T \cup \{2n: n \in Q\} \\ &= f(P) \cup f(Q) \end{aligned}$$

dir.

- f tümleyeni korur . $P \in A$ için iki durum söz konusudur.
- P sonlu . O zaman P^c tümleyeni sonludur ve

$$\begin{aligned} f(P^c) &= \{2n: n \in P^c\} \cup T \\ &= \{2n: n \notin P\} \cup T \\ &= \{2n: n \in P\}^c \\ &= f(P)^c \end{aligned}$$

- P tümleyeni sonlu . O zaman P^c sonludur ve

$$\begin{aligned} f(P^c) &= \{2n: n \in P^c\} \\ &= (\{2n: n \in P\} \cup T)^c \\ &= f(P)^c \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $f: A \to B$ bir izomorfizmadır.

KAYNAKLAR

Birkhoff, G., 1967, Lattice Theory, third edition, Colloqium Publications, vol. 25, AMS, Providence, R.I.

Cori, R. And Lascar, D., 2002, Mathematical Logic, Part I, Oxford University Press,

Givant,S. And Halmos, P., 2009, Introduction to Boolean alegbras, Springer,

Halmos, P., 1974, Lectures on Boolean algebras, vol.28, Springer-Verlag, New York,

Hrbacek, K. and Jech, T., 1984, Introduction to Set Theory, Marcel Dekker,

Huntington, E. V., 1904, Sets of independent postulats for the algebra 7 logic, Transactions of AMS, vol. 5 pp. 288-309

Huntington, E.V., 1933, New sets of independent postulates for the algebra of logic with special reference to Whitehead and Russell Principia Mathematica, Transactions of AMS, vol .35

Mostowski, A. And Tarski, A., 1939, Boolesche Ringe Mit Geordneter Basis, Fundamenta Mathematica, vol. 32 , pp. 69-86

Sikorski, R., 1969, Boolean algebras, vol. 25, Springer Verlag, Berlin and New York,

Stone, M., 1936, Theory of Representation for Boolean algebras, Transactions of AMS, vol. 40 pp. 37-111

Terziler, M., Öner , T., and Öner, G., 2013, Independent sets of axioms for Boolean algebras, submitted to Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.

ÖZGEÇMİŞ

Bahadır ÇAMLI, 04.12.1979 tarihinde İzmir'de doğmuştur. İlkokulu ortaokulu ve liseyi İzmir'de tamamlamıştır. Uludağ Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun olmuştur. 2006 yılında Ege Üniversitesinde Matematik Öğretimi Tezsiz Yüksek Lisansını tamamlamıştır. Daha sonra dershanelerde matematik öğretmeni olarak görev almıştır. 2010 yılından beri özel okulda matematik öğretmenliği mesleğine devam etmektedir.