



**YAŞAR ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**GRAFLARDA ZEDELENEBİLİRLİK VE KOMŞU  
AYRIT KOPMA DERECESESİ**

**Dilek POLAT**

**Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT**

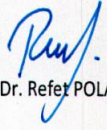
**Matematik Bölümü**

**Sunum Tarihi: 28.01.2016**

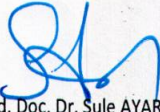
**Bornova-İZMİR**

**2016**

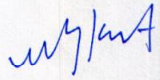
Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

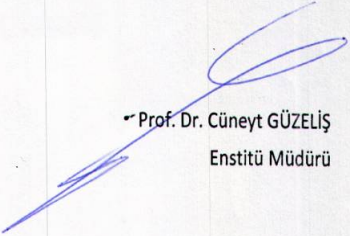
  
Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

  
Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

  
Yrd. Doç. Dr. Mehmet KURT

  
Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

# GRAFLARDA ZEDELENE BİLİRLİK VE KOMŞU AYRIT KOPMA DERECESİ

POLAT, Dilek

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT

Ocak 2016, 25 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu olan graflar tanıtılmıştır. İkinci bölümde tezi anlamada kolaylık sağlayacak olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde graflarda zedelenebilirlik tanımı verilmiş ve günümüze kadar çalışılmış zedelenebilirlik parametrelerinin kısa bir özeti yapılmış, graflarda kopma derecesi ve komşu kopma derecesi tanımları ve bu parametrelerin özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde graflarda komşu ayrıt kopma derecesi ile ilgili tanımlar ve özellikler incelenmiş, özel grafların middle grafının komşu ayrıt kopma derecesiyle ilgili yeni teoremler bulunmuş ve ispatları verilmiştir. Son olarak beşinci bölümde tartışmalar ve sonuç kısmı yer almaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Zedelenebilirlik, middle graf, komşu ayrıt kopma derecesi.

## ABSTRACT

# VULNARABILITY AND THE DEGREE OF THE NEIGHBOUR EDGE RUPTURE ABOUT THE GRAPHS

POLAT, Dilek

M.Sc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Refet POLAT

January 2016, 25 pages

This thesis is mainly consist of five sections. In the first part the graphs which are the subject of this thessis has been introdiced. In the second some fundemental descriptions and properties have been presented to understand the thesis easily. In the third part, the description of the vulnarability of graphs has been introduced and the brief summary of the vulnarability of the parameters which has been studied so far has been presented. In the third par, the degree of the rupture and the descriptions of the degree of neighbour rupture and the properties of these parameters have been introduced. In the fourth part, the degree of the neighbour edge rupture and the descriptions and properities about neighbour edge rupture of the middle graphs have been examined. The middle graphs have been defined and the theories about neighbour edge rupture about middle graphs of spesific graphs have found and proved. Finally; in the fifth part, discussion and conclussion part is given.

**Key words:** Vulnarability, middle graph, neighbour edge rupture degree.

**TEŞEKKÜR**

Tezimi hazırlarken bana rehberlik eden saygıdeğer tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT' a, yüksek lisans eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım tüm değerli hocalarıma, tez yazımında bana destek olan Zeynep ÖRS YORGANCIOĞLU ve Saadet ESKİİZMİRLİLER' e, anneme ve babama, kardeşlerime, yüksek lisansa başlamam konusunda bana en büyük desteği veren arkadaşım Fatma KAYRAKLI' ya ve diğer arkadaşlarıma, hazırlık aşamasında bana yardımcı olan herkese çok teşekkür ederim.

Dilek POLAT

İzmir, 2016

**YEMİN METNİ**

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “GRAFLARDA ZEDELENEBİLİRLİK ve KOMŞU AYRIT KOPMA DERECEŚİ” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

**İÇİNDEKİLER**

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
TEŞEKKÜR .....	v
YEMİN METNİ .....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	viii
1 GİRİŞ .....	1
2 ÖN BİLGİLER .....	2
3 GRAFLARDA ZEDELENEBİLİRLİK KAVRAMI .....	4
3.1 Bazı Zedelenebilirlik Parametreleri .....	5
3.2 Graflarda Kopma Derecesi .....	9
3.3 Graflarda Komşu Kopma Derecesi .....	12
4 GRAFLARDA KOMŞU AYRIT KOPMA DERESESİ .....	15
4.1 Komşu Ayrıt Kopma Derecesi .....	15
4.2 Middle Graf .....	17
4.3 Middle Graflarda Komşu Ayrıt Kopma Derecesi .....	18
5 TARTIŞMALAR VE SONUÇ .....	21
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	23
ÖZGEÇMİŞ .....	25

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
3.1 7 tepeli $G$ grafi .....	10
3.2 7 tepeli bir $G$ grafi .....	13
3.3 $K_{3,3}$ iki parçalı tam grafi .....	13
4.1 4 tepeli bir $G$ grafi .....	17
4.2 $M(G)$ , $G$ grafinin middle grafi .....	17



## 1 GİRİŞ

1736 yılında ünlü matematikçi Leonhard Euler tarafından Königsberg köprüleri problemine çözüm ararken ortaya çıkan graf teori, 20. yüzyılın başında König ve Kuratowski 'nin, Cayley 'in ve daha yakınlarda Berge, Erdős ve Harary'nin çalışmalarıyla matematiğin bir dalı haline geldi. Bilgisayar alanında özellikle algoritmalar üzerinde yapılan araştırmalar graf teorisine yeni bir yön kazandı. Graflarda bir problem, nokta ve çizgiler ile temsil edildiğinden fizik, kimya gibi temel bilimlerde, mühendislik uygulamalarında ve tıp alanında ayrıca birbirinden son derece bağımsız olan ekonomi, yönetim bilimi, satış ve pazarlama, psikoloji gibi birçok alanda problemin modellenmesinde ve çözümünde kullanılmaktadır (Beseri Sevim, 2010).

Basitçe bir graf, tepe olarak adlandırılan noktalar ve bu noktaları birleştiren ayrıtlardan oluşan ve geometrik bilgi vermeyip, sadece tepeler arasındaki ilişkiyi gösteren çizgiler topluluğudur. Pek çok problem, nesnelere ve onlar arasındaki ilişkiler kullanılarak biçimlendirilir. Örneğin telefon hatlarının haberleşme ağları, şehirlerarası uçuş rotaları, karayolu sistemi, bilgisayar ağları bir grafla modellenabilir (Vatansever, 2008).

Graf teorisinin gerçek hayatta mektup dağıtımı, yol bakımı, kar temizleme, çöp toplama, devriye araçları ve yol tuzlama gibi pek çok konuda uygulaması vardır. Gerek hükümetler gerek işletmeler her yıl bu işlemler için önemli harcamalar yapmaktadırlar. Fakat planlamanın etkin olarak yapılamaması durumunda önemli miktarlarda kaynak israfı söz konusudur (Vatansever, 2008).

Tezin izleyen bölümleri şu şekilde planlanmıştır; ikinci bölümünde graf teorisine ilgili tanımlar yapılmış, bu tanımlardan ve özelliklerden yararlanılarak yeni tanımlanan ölçümlerle ilgili teoremler bulunmuştur. Üçüncü bölümünde graflarda zedelenebilirlik ve bazı zedelenebilirlik parametreleri tanıtılmış, bu parametrelerden graflarda kopma derecesi ve graflarda komşu kopma derecesiyle ilgili örnekler ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde graflarda komşu ayrıt kopma derecesiyle ilgili tanım, teoremler ve örnekler verilmiş, bazı özel grafların middle grafiyle ilgili yeni teoremler önerilmiş ve ispatları yapılmıştır.

Bu çalışmada yönsüz ve bukle içermeyen basit birleştirilmiş graflar ele alınmıştır.

## 2 ÖN BİLGİLER

Çalışmanın bu bölümünde graf teoriyle ilgili temel tanımlar verilmiştir.

**Tanım 2.1:** Bir  $G = (V, E)$  grafi, tepeler (vertices) denilen boş olmayan bir  $V$  sonlu objeler kümesi ile birlikte, ayrıtlar (edges) denilen  $G$  nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir  $E$  (boş olabilir) kümesidir (Buckley and Harary, 1990). Tepe sayısı  $n$ , ayrıt sayısı  $m$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2:** Bir  $G$  grafında  $u$  ve  $v$  tepeleri ile tanımlı  $e$  ayrıtı,  $e = (u, v)$  biçiminde gösterilir.  $u$  ve  $v$ 'ye  $e$  ayrıtının uç tepeleri denir.  $u$  ve  $v$  tepelerine “bitişik tepeler (adjacent vertices)” denir (West, 2001).

**Tanım 2.3:** Bir  $G = (V, E)$  grafında herhangi  $v \in V$  tepesinin derecesi, o tepenin bitişik olduğu ayrıtların (tepelerin) sayısıdır ve  $deg(v)$  ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.4:**  $r \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere bir  $G = (V, E)$  grafında  $\forall v \in V$  için  $deg(v) = r$  ise  $G$  grafi “ $r$  –regüler” dir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.5:** Bir  $G = (V, E)$  grafının tepe derecelerinin en küçüğüne grafın “minimum tepe derecesi” denir ve  $\delta(G)$  ile gösterilir (Cozzens, 1994).

**Tanım 2.6:** Bir  $G = (V, E)$  grafının tepe derecelerinin en büyüğüne grafın “maksimum tepe derecesi” denir ve  $\Delta(G)$  ile gösterilir (Cozzens, 1994).

**Tanım 2.7:** Bir  $G$  grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa  $G$  grafına “birleştirilmiş (connected) graf” adı verilir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.8:** Bir  $G$  grafının bir tepesinden farklı bir tepesine varışta kullanılan her tepe ve her ayrıtı farklı olan yürüyüşe “yol (path)” denir.  $n$  tepeli bir yol grafda ayrıt sayısı  $n - 1$  dir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.9:**  $n + 1$  tepeli birleştirilmiş bir  $G = (V, E)$  grafında  $n$  tepe 1 dereceli ve bir tepe  $n$  dereceli ise bu grafa “yıldız (star) graf” denir ve  $K_{1,n}$  ile gösterilir (West, 2001).

**Tanım 2.10:**  $n + 1$  tepeli birleştirilmiş bir  $G = (V, E)$  grafında, bir tepenin derecesi  $n$ , geri kalan  $n$  tepenin her birinin derecesi 3 ise bu grafa “tekerlek graf” denir ve  $W_{1,n}$  ile gösterilir (West, 2001).

**Tanım 2.11:** Bir  $G$  grafinin tüm tepelerinin derecesi iki ise bu grafa “çevre (cycle) graf” denir.  $n$  tepeli bir çevre grafi  $C_n$  ile gösterilir ve ayrıt sayısı da  $n$  dir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.12:**  $G = (V, E)$  grafinin her tepe çifti bitişikse bu graf “tam graf (complete graph)” olarak adlandırılır ve  $K_n$  ile gösterilir. Tepe sayısı  $n$  iken ayrıt sayısı da  $\frac{n(n-1)}{2}$  dir (Chartrand and Lesniak, 2005).

**Tanım 2.13:** Bir  $G = (V, E)$  birleştirilmiş grafinin tepeler kümesi için  $V = V_1 \cup V_2$  iken  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ve  $E$  ayrıtlar kümesinin her bir  $e = (u, v)$  ayrıtı  $\exists u \in V_1$  ve  $\exists v \in V_2$  den oluşuyorsa  $G$  grafi “iki parçalı (bipartite) graf” olarak adlandırılır (West, 2001).

**Tanım 2.14:** İki parçalı bir  $G = (V, E)$  grafinin tepeler kümesi için  $V = V_1 \cup V_2$  iken  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  ve  $E$  ayrıtlar kümesinin her bir  $e = (u, v)$  ayrıtı  $\forall u \in V_1$  ve  $\forall v \in V_2$  den oluşuyorsa ve  $G = (V, E)$  grafi “iki parçalı tam (complete bipartite) graf” olarak adlandırılır ve  $K_{p,q}$  ile gösterilir (West, 2001).

**Tanım 2.15:** Bir  $k$  – tam parçalı grafa (complete  $k$  – partite graph) tepeler kümesi, her bir kümesindeki herhangi iki tepesi bitişik olmayan  $k$  tane ayrık kümeye parçalanmıştır. Grafin bu  $k$  kümeleri arasındaki her tepe çifti bitişiktir. Eğer grafin tepeler kümesinin  $k$  kümelerindeki tepeleri  $p, q, \dots, r$  olarak gösterilirse, bir  $k$  – tam parçalı grafi  $K_{p,q,\dots,r}$  ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.16:** Eğer bir  $G$  grafi birleştirilmiş ve hiçbir çevreye sahip değilse bu graf “çevre içermeyen (acyclic)” bir graftır. Birleştirilmiş ve çevre içermeyen graflara “ağaç” denir (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.17:**  $G = (V, E)$  grafinde, herhangi bir tepe ile diğer tepelerle arasında ayrıt bulunmuyorsa “aşık (trivial) graf” aksi halde “aşık olmayan (nontrivial)” denir. Tepe derecesi 0 olan tepeye “izole tepe (isolated vertex)” denir. Sadece izole tepelerden oluşan grafa “sıfır (null) graf” denir (West, 2001).

**Tanım 2.18:**  $G_1$  ve  $G_2$  graflarının toplamı  $G_1 + G_2$  ile gösterilir.  $G_1 + G_2$ ’nin tepe kümesi  $G_1 \cup G_2$ ’nin tepe kümesine eşittir.  $G_1$ ’in her bir tepesinin  $G_2$ ’nin her bir tepesiyle birleştirilmesiyle elde edilen ayrıtlar  $G_1 + G_2$ ’nin ayrıtlar kümesini oluştururlar (Buckley and Harary, 1990).

**Tanım 2.19:**  $G$  bir graf ve  $G$  grafının tepeler kümesi  $V(G)$  olmak üzere  $S \subset V(G)$  olsun.  $S$  kümesindeki hiçbir tepe çifti  $G$  grafında herhangi bir ayırıt ile birleştirilmemiş ise  $S$  kümesinin  $G$  grafının bir bağımsız kümesi denir. Bir  $G$  grafının birden fazla bağımsız kümesi olabilir. Bu bağımsız kümeler içerisinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına  $G$  grafının bağımsızlık sayısı denir ve  $\beta(G)$  ile gösterilir (Cozzens,1994).

**Tanım 2.20:**  $G$  bir graf ve  $G$  grafının tepeler kümesi  $V(G)$  olmak üzere  $S \subseteq V(G)$  olsun.  $G$  grafının her bir ayırıtının en az bir uç noktası  $S$  kümesinde ise bu kümeye  $G$  grafının bir örtü kümesi denir. Bir  $G$  grafının birden fazla örtü kümesi olabilir. Bu örtü kümeleri içerisinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına  $G$  grafının örtü sayısı denir ve  $\alpha(G)$  ile gösterilir (Cozzens, 1994).

**Tanım 2.21:** Bir  $G$  grafının her bir ayırıtının üzerine yeni bir tepe ekleyerek ve  $G$  grafının bitişik ayırıtı üzerinde bulunan bu yeni tepe çiftlerini bir ayırıt ile birleştirerek elde edilen grafa  $G$  grafının middle grafi denir ve  $M(G)$  ile gösterilir (Nihei, 2001).

### 3 GRAFLARDA ZEDELENEBİLİRLİK KAVRAMI

Bir sistemde zedelenebilirlik, sistemin belirli bir konudaki işlevselliğinin azalmasına ya da tamamen kaybolmasına yol açabilecek bir hasar karşısında, sistemin gösterdiği dayanıklılığın ölçümüdür. Benzer şekilde, bir iletişim ağında zedelenebilirlik ise bu iletişim ağının merkezlerinin ya da merkezler arasındaki bağlantıyı temsil eden hatların gördüğü herhangi bir hasar karşısında ağın gösterdiği dayanma gücünün ölçümüdür. Bir iletişim ağında veri akışının devam etmesinin temel prensip olduğu düşünülürse, ağı tasarlarırken herhangi bir hasardan sonra ağın ne durumda olacağı, ne kadarının hasar alacağı ya da yeniden eski haline getirilmesinin maliyetinin ne olacağı gibi araştırmalar yapılmalıdır. Örnek olarak bir ülkenin şehirlerarası ulaşım ağını düşünelim. Bu durumda, şehir merkezlerindeki duraklar (otogarlar) ağın merkezlerini, duraklar arasındaki yollar da merkezler arasındaki hatları oluşturur. Herhangi bir sebepten oluşacak duraklar ve/veya bazı yollar zarar gördüğünde, oluşan hasarı araştırırken; “Zarar gören durakların sayısı nedir?”, “Zarar gören yolların sayısı nedir?”, “Zarar gören duraklardan ve yollardan sonra aralarından ulaşım devam eden durakların sayısı nedir?”, “En fazla kopukluk olmadan devam eden durakların sayısı nedir?” gibi birçok soru akla gelebilir. Bu ancak ağın gördüğü zararın büyüklüğünün ölçülmesi ya da başlangıçtaki ağın ne kadar dayanıklı olduğunun analizi ile mümkündür. Bu analizler, ağ tasarımı yapılırken yapılırsa, daha tasarım aşamasındayken amaca en uygun ağ modeli seçilebilir (Boruzanlı, 2010).

İsviçreli Matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) 'in 1736'da Königsberg'in yedi köprüsü üzerine ortaya atılan soruyu çözmesiyle birlikte, graf teorisinin ilk teoremi ispatlanmıştır. Bu çözümden sonra, birçok problemin modellenmesinde ve çözülmesinde graf teorisi etkin biçimde kullanılmaya başlanmıştır. İletişim ağları; merkezleri grafın tepeleri, merkezler arasındaki bağlantıları da grafın ayrıtları olacak şekilde graflar modellenen bildiğinden, iletişim ağlarının zedelenebilirlik değerlerini araştırmak için graflarda çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. (Boruzanlı, 2010)

### 3.1 Bazı Zedelenebilirlik Parametreleri

Bir  $G$  grafının zedelenebilirlik değerini araştırmak için ilk akla gelen parametrelerden biri, "Grafın birleştirilmemiş bir graf haline gelmesi için en az kaç tepenin zarar görmesi ile mümkündür?" sorusuna cevap veren bağlantılılık sayısı (connectivity number)'dır (Boruzanlı, 2010).

**Tanım 3.1.1:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafını birleştirilmiş bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın bağlantılılık sayısı denir ve  $\kappa(G)$  ile gösterilir. Bir  $G$  grafının bileşenlerinin sayısı  $w(G)$  olmak üzere bağlantılılık sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\kappa(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| : w(G) \geq 2\} \quad (\text{Harary, 1972}).$$

Bağlantılılık sayısı geriye kalan grafın yapısının nasıl olduğu hakkında hiçbir bilgi vermez. İletişim ağlarının zedelenebilirliği incelenirken, hasardan sonra geriye kalan ağdaki bileşen sayısı, kalan en büyük boyutlu alt ağın eleman sayısı gibi sorulara da cevap aradığından çeşitli zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Bu parametrelerden bazıları dayanıklılık (toughness) değeri, bütünlük (integrity), scattering sayısı (scattering number) ve bağlayıcı (binding) sayısı ve tenacity değeridir (Boruzanlı, 2010).

**Tanım 3.1.2:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafi ve  $G$ 'nin tepelerinin herhangi bir kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafının bileşenlerinin sayısı  $w(G - S)$  olmak üzere bu grafın dayanıklılık (toughness) sayısı, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$t(G) = \min_s \left\{ \frac{|S|}{w(G-S)} : S \subset V(G) \text{ ve } w(G-S) \geq 2 \right\} \quad (\text{Chvatal, 1973}).$$

**Tanım 3.1.3:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafi ve  $G$ 'nin tepelerinin herhangi bir kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafinin en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere,  $G$  grafinin tepe bütünlük (integrity) değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G - S)\} \quad (\text{Barefoot et al., 1987}).$$

**Tanım 3.1.4:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafi ve  $G$ 'nin tepelerinin herhangi bir kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafinin bileşen sayısı  $w(G - S)$  olmak üzere,  $G$  grafinin scattering sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$sc(G) = \max_S \{w(G - S) - |S| : S \subset V(G), w(G - S) \geq 2\} \quad (\text{Jung, 1978}).$$

**Tanım 3.1.5:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafi ve  $G$ 'nin tepelerinin herhangi bir kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafinin en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı  $m(G - S)$  ve  $G - S$  grafindeki kalan bileşen sayısı  $w(G - S)$  olmak üzere  $G$  grafinin tenacity değeri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T(G) = \min \left\{ \frac{|S| + m(G - S)}{w(G - S)} : S \subset V \text{ ve } w(G - S) \geq 2 \right\} \quad (\text{Cozzens et al., 1992}).$$

Bir  $G$  grafinin bağlantılılık sayısı ve scattering sayısının tanımında, graftan sadece, zarar gören tepeler ve dolayısıyla bu tepelere bağlı olan ayrıtlar silinmektedir. Ancak gerçek dünya problemlerinde, bir ağda zarar gören birim her zaman merkez/ merkezler (tepelerden bir yada birkaçı) olmayabilir. Zarar gören birim, merkezler arasındaki hat/hatlar (ayrıtlardan bir ya da birkaçı) da olabilir. Bu sebeple, graflarda çeşitli ayrıtlı-zedelenebilirlik parametreleri de tanımlanmıştır. Ayrıtlı bağlantılılık sayısı (edge-connectivity), ayrıtlı-bütünlük değeri (edge integrity) bunlara örnek olarak verilebilir (Boruzanli, 2010).

**Tanım 3.1.6:** Bir  $G$  grafini bağlantısız yapmak için graftan çıkarılması gereken en az ayrıtlı sayısına ayrıtlı bağlantılılık sayısı (edge connectivity number) denir ve  $\kappa'(G)$  ile gösterilir.

$$\kappa'(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| : w(G - S) \geq 2\} \text{ dir} \quad (\text{Beineke et al., 2002}).$$

**Tanım 3.1.7:**  $G$  bir graf ve  $G$ 'nin ayrıklarının bir alt kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafının en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere,  $G$  grafının ayrık bütünlüğü (edge integrity) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$I'(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| + m(G - S)\} \text{ (Bagga iet al., 1994).}$$

Zedelenebilirlik ölçümlerinde (seçilen ağa bağlı olarak) zarar gören birimler merkezler ise, sadece bu merkezlere bağlı olan hatlar değil, bitişik olan merkezler de zarar görüyor olabilir. Benzer şekilde, zarar gören birimler hatlar ise, sadece bu hatların bağlı olduğu merkezler değil, komşu olduğu diğer hatlar da zarar görüyor olabilir. Yani, graflar üzerinde düşünülürse, bir grafın bazı tepeleri zedelendiğinde bu tepelere komşu olan tepeler de zarar görüyor olabilir. Bu durumlar için, graflarda çeşitli komşu-zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Komşu-bütünlük değeri (vertex-neighbor-integrity) ve komşu scattering sayısı (vertex-neighbor-scattering number) buna örnek olarak verilebilir (Boruzanlı, 2010).

Komşu-scattering sayısı, grafta bazı merkezler hasar gördüğünde, bu merkezlerin kapalı komşuluğunun da hasar gördüğünü kabul ederek, geriye kalan grafın bileşen sayısı ile hasar gören merkezlerin sayısı arasındaki farkın araştırılmasına dayanır (Boruzanlı, 2010).

**Tanım 3.1.8:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafının tepeler kümesi  $V(G)$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi  $S$  olsun.  $G$  grafının,  $S$  deki en az bir tepeye bitişik olan tüm tepeleri  $S$ 'nin  $N(S)$  komşuluğunu oluşturduğunda  $N(S) \neq V(G)$  iken grafın bağlayıcı (binding) sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$b(G) = \min_S \frac{|N(S)|}{|S|} \text{ (Woodall, 1973; Michalak, 1994).}$$

**Tanım 3.1.9:** Bir  $G$  grafında  $u$  tepesinin açık komşuluğu (open neighborhood of a vertex),  $N(u) = \{v \in V(G) : (u, v) \in E(G)\}$ 'dir.  $u$  tepesinin kapalı komşuluğu (closed neighborhood of a vertex) ise  $N[u] = \{u\} \cup N(u)$ 'dur. Benzer şekilde; herhangi bir  $S \subseteq V(G)$  altkümesi için, açık komşuluk  $N(S) = \bigcup_{u \in S} N(u)$ ; kapalı komşuluk ise  $N[S] = \bigcup_{u \in S} N[u]$ 'dur.  $G$  grafının bir  $u$  tepesinin graftan çıkarılmış olması (subversion),  $N[u]$ 'nun graftan silinmesi (deletion)'dir.  $S \subseteq V(G)$  olmak üzere bir tepe kümesinin kapalı komşuluğu graftan siliniyorsa bu kümeye,  $G$ 'nin tepe çıkarma stratejisi (vertex subveersion strategy) denir. Geriye kalan graf ise  $G/S$  ile gösterilir ve  $G/S = G - N[S]$ 'dir.

Eğer geriye kalan graf  $G/S$ , birleştirilmemiş ya da clique ya da  $\emptyset$  ise, bu ayrıt çıkarma stratejisi  $S$ 'ye,  $G$ 'nin kesim stratejisi (cut-strategy) denir (Li and Li, 2005).

Gunther ve Hartnell, çalışmalarında (Gunther and Hartnell, 1978,1980; Gunther,1986), bir casus ağını (spy network), tepeler ajanları, ayrıtlar ise aradaki iletişimi gösterecek şekilde graflar ile modelledi. Bir casus ağında, bir ajan yakalandığında, bu ajanın ve onun direkt bağlantıya geçebildiği diğer ajanların artık güvenilmez olduğu açıktır. Bu sebeple, ihbar edilen ajanlar da ağ için işlevsiz hale gelmiş olur. Böyle bir ihbar durumu,  $v$  yakalanan ajanı temsil eden tepe olmak üzere,  $v$ 'nin kapalı komşuluğunun model graftan silinmesi ile aynı durumdur (Li and Li, 2005).

Komşu bağlantılık ve komşu-scattering sayısının tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

**Tanım 3.1.10:** Birleştirilmiş bir  $G$  grafının komşu bağlantılılık sayısı,  $S$  bir tepe subversion stratejisi olmak üzere, komşu bağlantılılık sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S|\} \quad (\text{Gunther, 1985}).$$

**Tanım 3.1.11:**  $S \subseteq V(G)$  ve  $S$ , birleştirilmiş bir  $G$  grafının herhangi bir kesim stratejisi olsun.  $S$ 'in kapalı komşuluğundaki tepeler  $G$  grafindan silinirse geriye kalan  $G - S$  grafının bileşen sayısı  $w(G - S)$  olmak üzere,  $G$  grafının komşu-scattering sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S| : w(G - S) \geq 1\} \quad \text{dir (Wei, 2003)}.$$

Benzer şekilde, bir grafın ayrıtları zedelendiğinde, zedelenen ayrıtlara komşu olan ayrıtlar da zedeleniyor olabilir. Bu durumlar için, graflarda çeşitli ayrıt-komşu-zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Ayrıt-komşu-bağlantılılık sayısı (edge-neighbor-connetivity), ayrıt-komşu-bütünlük değeri (edge-neighbor-integrity) ve ayrıt-komşu-scattering sayısı (edge-neighbor scattering number) buna örnek olarak verilebilir (Boruzanlı, 2010).

**Tanım 3.1.12:**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $e$ 'de  $G$  grafının bir ayrıtı olsun.  $N(e) = \{f \in E(G) | f \neq e, e \text{ ve } f \text{ bitişik ayrıtlar}\}$ ,  $e$  ayrıtının açık komşuluğu (open-edge-neighborhood)'dur.  $N[e] = N(e) \cup \{e\}$ ,  $e$  ayrıtının kapalı ayrıt komşuluğu (closed-edge-neighborhood)'dur.  $G$  grafının bir  $e$  ayrıtının graftan çıkarılmış olması (subversion),  $N[e]$ 'nin graftan silinmesi (deletion)'dir. Başka



bir deyişle, eğer  $e = [u, v]$  ise  $G - N[e] = G - \{u, v\}$ 'dir.  $S \subseteq V(G)$  olmak üzere bir ayrıt kümesinin bütün ayrıtları graftan çıkarılıyorsa bu kümeye,  $G$ 'nin ayrıt çıkarma stratejisi (edge subversion strategy) denir. Geriye kalan graf ise  $G - S$  ile gösterilir. Eğer geriye kalan graf  $G - S$ , birleştirilmemiş ya da tek bir izole tepe ya da  $\emptyset$  ise, bu ayrıt çıkarma stratejisi  $S$ 'ye,  $G$ 'nin ayrıt kesim stratejisi (edge-cut-strategy) denir.  $G$  grafının bütün ayrıt- kesim stratejileri arasında boyutu en küçük olanın boyutuna,  $G$  grafının ayrıt-komşu-bağlantılılık sayısı  $\Lambda(G)$  (edge-neighbor-connectivity) denir. Eğer  $\Lambda(G) = m$  ise,  $G$  grafına  $m$ -ayrıt-komşu-bağlantılı ( $m$ -edge-neighbor-connected) denir (Wei et al., 2007).

**Tanım 3.1.13:**  $S \subseteq V(G)$ ,  $G$ 'nin herhangi bir ayrıt-kesim-stratejisi ve  $G - S$ 'in bileşenlerinin sayısı  $w(G - S)$  olmak üzere, bir  $G$  grafının ayrıt-komşu-scattering sayısı (edge-neighbor-scattering number) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ENS(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{w(G - S) - |S|\} \quad (\text{Wei et al., 2007}).$$

**Tanım 3.1.14:**  $S \subseteq V(G)$ ,  $G$ 'nin herhangi bir ayrıt-kesim-stratejisi ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere, bir  $G$  grafının ayrıt-komşu-bütünlük sayısı (edge-neighbor-integrity number) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$ENI(G) = \max_{S \subseteq E(G)} \{|S| + m(G - S)\} \quad (\text{Cozzens and Wu, 1994}).$$

### 3.2 Graflarda Kopma Derecesi

Bu bölümde kopma derecesi tanımlanmış ve bir örnek verilmiş, özel grafların kopma dereceleri hesaplanmış ardında çeşitli graf parametreleri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

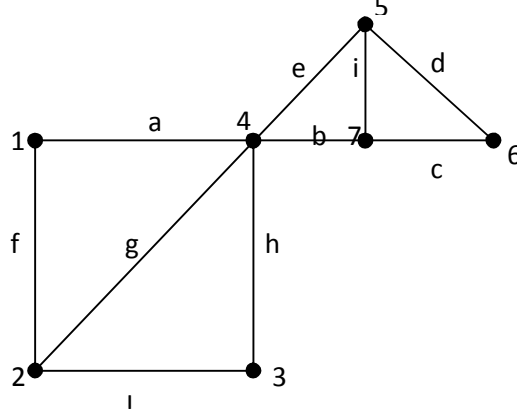
**Tanım 3.2.1 :**  $G$  birleştirilmiş bir graf ve  $G$  grafının tepelerinin herhangi bir kümesi  $S$  olsun.  $G - S$  grafının bileşen sayısı  $w(G - S)$  ve  $G - S$  grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere, tam graf olmayan bir  $G$  grafının kopma sayısı (rupture number) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$r(G) = \max \{w(G - S) - |S| - m(G - S) : S \subset V(G), w(G - S) > 1\} \quad (\text{Li and Li, 2005}).$$

$K_n$  tam grafının kopma sayısı  $r(K_n) = 1 - n$  olarak tanımlanmıştır.

Bu kısımda, kopma derecesi bir örnek üzerinde ele alınmıştır.

**Örnek 3.2.1:** Şekilde verilen grafın kopma derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır.



$G$

Şekil 3.1 7 tepeli  $G$  grafi

$S \subseteq V(G)$ ,  $G$  grafının bir kesim kümesi olsun. Görüldüğü gibi  $G$  grafının bazı alt kümeleri aşağıdaki gibidir.

- $S = \{1\}$ ,  $S = \{2\}$ ,  $S = \{3\}$ ,  $S = \{5\}$ ,  $S = \{6\}$  ve  $S = \{7\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 6$  olduğundan  $r_1(G) = 1 - 1 - 6 = -6$
- $S = \{4\}$  için  $w(G - S) = 2$  ve  $m(G - S) = 3$  olduğundan  $r_2(G) = 2 - 1 - 3 = -2$
- $S = \{1,2\}$ ,  $S = \{1,3\}$ ,  $S = \{1,5\}$ ,  $S = \{1,6\}$ ,  $S = \{1,7\}$ ,  $S = \{2,3\}$ ,  $S = \{2,5\}$ ,  $S = \{2,6\}$ ,  $S = \{2,7\}$ ,  $S = \{3,5\}$ ,  $S = \{3,6\}$ ,  $S = \{3,7\}$ ,  $S = \{5,6\}$  ve  $S = \{6,7\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 5$  olduğundan  $r_3(G) = 1 - 2 - 5 = -6$
- $S = \{5,7\}$  için  $w(G - S) = 2$  ve  $m(G - S) = 4$  olduğundan  $r_4(G) = 2 - 2 - 4 = -4$
- $S = \{4,5\}$ ,  $\{4,6\}$ ,  $\{4,7\}$ ,  $\{4,1\}$ ,  $\{4,3\}$  için  $w(G - S) = 2$  ve  $m(G - S) = 3$  olduğundan  $r_5(G) = 2 - 2 - 3 = -3$
- $S = \{4,2\}$  için  $w(G - S) = 3$  ve  $m(G - S) = 3$  olduğundan  $r_6(G) = 3 - 2 - 3 = -2$
- $S = \{4,2,5\}$ ,  $\{4,2,6\}$ ,  $\{4,2,7\}$  için  $w(G - S) = 3$  ve  $m(G - S) = 2$  olduğundan  $r_7(G) = 3 - 3 - 2 = -2$
- $S = \{2,4,5,7\}$  için  $w(G - S) = 3$  ve  $m(G - S) = 1$  olduğundan  $r_8(G) = 3 - 4 - 1 = -2$

Tanım gereği bulunan sonuçların maksimumu alındığında  $G$  grafının kopma derecesi,

$r(G) = \max\{r_1(G), r_2(G), r_3(G), r_4(G), r_5(G), r_6(G), r_7(G), r_8(G),\} = -2$  bulunur.

Bu kısımda bilinen bazı özel grafların kopma derecesi ve kopma derecesi için bazı alt ve üst sınırlar verilmiştir.

**Teorem 3.2.1:**

(a)  $n \geq 3$  olmak üzere  $n$  tepeli  $P_n$  yol grafi için

$$r(P_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ çift ise,} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases} \text{ dir (Li and Li, 2005).}$$

(b)  $C_n$  çevre grafi için

$$r(C_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ çift ise,} \\ -2, & n \text{ tek ise} \end{cases} \text{ dir (Li and Li, 2005).}$$

(c)  $k$ - parçalı  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  grafi için

$$r(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 2 \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - \sum_{i=1}^k n_i - 1 \text{ dir (Li and Li, 2005).}$$

(d)  $K_{1, n-1}$  ( $n \geq 3$ ),  $n$  tepeli yıldız grafının kopma değeri

$$r(K_{1, n-1}) = n - 3 \text{ dir (Li and Li, 2005).}$$

**Teorem 3.2.2:**  $G_1$  ve  $G_2$ , sırasıyla  $n_1$  ve  $n_2$  tepeli, birleştirilmiş iki graf olmak üzere

$$r(G_1 + G_2) = \max\{r(G_1) - n_2, r(G_2) - n_1\} \text{ dir (Li et al., 2005).}$$

**Teorem 3.2.3:**  $G$ ,  $n$  tepeli, tam olmayan bir graf olsun.

(a)  $r(G) \leq n - 2\delta(G) - 1$ ,

(b)  $3 - n \leq r(G) \leq n - 3$ ,

(c)  $2\alpha(G) - n - 1 \leq r(G) \leq \frac{[\alpha(G)]^2 - \kappa(G)[\alpha(G) - 1] - n}{\alpha(G)}$  dir

(Li and Li, 2005).

**Teorem 3.2.4:**  $G$ , tenacity değeri  $T(G)$  olan, tam olmayan bağlantılı bir graf olsun. O halde,

$$r(G) \leq \alpha(G)(1 - T(G)) \text{ dir (Li and Li, 2004).}$$

**Teorem 3.2.5:**

(a)  $G$ , tenacity değeri  $T(G)$  olan bir graf ise  $r(G) \leq n\left(\frac{1}{T(G)} - 1\right)$  dir

(Kirlangic, 2009).

(b)  $G$ , toughness değeri  $t(G)$  olan bir graf ise  $r(G) \leq \frac{\beta(G)}{t(G)} - \kappa(G) - 1$  dir

(Kirlangic, 2009).

**Teorem 3.2.6:**  $n \geq m > 1$  için

$$r(K_m \times K_n) = n - mn + m - \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \text{ dir (Li and Li, 2004).}$$

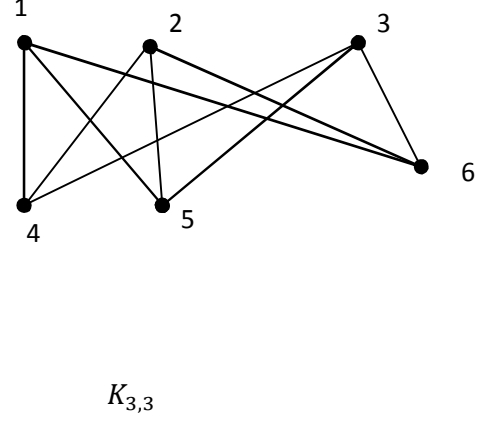
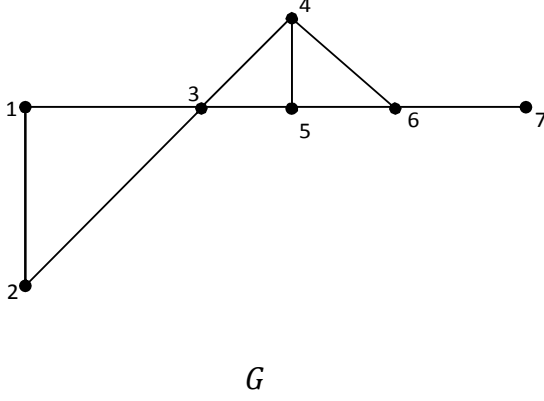
### 3.3 Graflarda Komşu Kopma Derecesi

Bu bölümde komşu kopma derecesi tanımlanmış ve bir örnek verilmiş, özel grafların komşu kopma dereceleri hesaplanmış ardından çeşitli graf parametreleri ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Komşu bütünlük ve komşu scattering parametrelerinde geriye kalan ağda iletişime devam eden en büyük bileşenin tepe sayısı ile ilgilenilmemesi, kopma

derecesinde de iletişime devam eden en büyük tepe sayısı ile ilgilenilmesine rağmen bazı graflarda ayırt edici zedelenebilirlik parametresi olmadığını bir örnekle gösterelim.

**Örnek 3.3.1:** Aşağıdaki grafların kopma dereceleri;



Şekil 3.2 7 tepeli bir  $G$  grafi

Şekil 3.3  $K_{3,3}$  iki parçalı tam grafi

$r(G) = -1$  ve  $r(K_{3,3}) = -1$  bulunur. En son bulunan zedelenebilirlik parametrelerden biri olan kopma derecesi eşit olduğundan yeni bir zedelenebilirlik parametresine ihtiyaç duyulmuştur.

**Tanım 3.3.1:** Bir  $G$  grafinin komşu kopma derecesi (neighbour rupture number),  $S$  bir tepe subversion stratejisi,  $G - S$  grafindaki bileşen sayısı  $w(G - S)$  ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere,

$$Nr(G) = \max_{S \subseteq V(G)} \{w(G - S) - |S| - m(G - S) : w(G - S) \geq 1\} \text{ ' dir (Bacak, 2010).}$$

Bu kısımda, komşu kopma derecesi bir örnek üzerinde ele alınmıştır.

**Örnek 3.3.2:** Bkz. Şekil 3.2' de verilen  $G$  grafinin komşu kopma derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

$S \subseteq V(G)$ ,  $G$  grafinin bir alt kümesi olsun. Görüldüğü gibi  $G$  grafinin alt kümeleri aşağıdaki gibidir.

- $S = \{1\}$  ve  $S = \{2\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 4$  olduğundan  $Nr_1(G) = 1 - 1 - 4 = -4$
- $S = \{3\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 2$  olduğundan  $Nr_2(G) = 1 - 1 - 2 = -2$

- $S = \{4\}, \{5\}$  için  $w(G - S) = 2$  ve  $m(G - S) = 2$  olduğundan  $Nr_3(G) = 2 - 1 - 2 = -1$
- $S = \{6\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 3$  olduğundan  $Nr_4(G) = 1 - 1 - 3 = -3$
- $S = \{7\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 5$  olduğundan  $Nr_5(G) = 1 - 1 - 5 = -5$
- $S = \{1,4\}$ ,  $S = \{3,5\}$ ,  $S = \{2,4\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 1$  olduğundan  $Nr_6(G) = 1 - 2 - 1 = -2$
- $S = \{5,6\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 2$  olduğundan  $Nr_7(G) = 1 - 2 - 2 = -3$

Tanım gereği bulunan sonuçların maksimumu alındığında  $G$  grafının komşu kopma derecesi,

$$Nr(G) = \max\{Nr_1(G), Nr_2(G), Nr_3(G), Nr_4(G), Nr_5(G), Nr_6(G), Nr_7(G)\} = -1$$

bulunur.

Sonuç 3.3.1 gereği  $Nr(K_{3,3}) = \max\{3,3\} - 3 = 0$  bulunur. Kopma dereceleri eşit olmasına rağmen komşu kopma derecesi farklı olduğundan zedelenebilirlik parametresi bu grafları karşılaştırmak için uygun olur.

**Teorem 3.3.1:**  $P_n$ ,  $n$  tepeli bir yol graf ve  $n \geq 12$  olmak üzere,

$$Nr(P_n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ dir (Bacak, 2010).}$$

**Teorem 3.3.2:**  $n$  tepeli bir  $C_n$  çevre grafi,  $n \geq 15$  olmak üzere,

$$Nr(C_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ dir (Bacak, 2010).}$$

**Teorem 3.3.3:**  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ,  $k$ - parçalı bir tam graf olmak üzere,

$$Nr(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\} - 3 \text{ dir (Bacak, 2010).}$$

**Sonuç 3.3.1:**  $K_{m,n}$ , iki parçalı bir tam graf ise,

$$Nr(K_{m,n}) = \max\{m, n\} - 3 \text{ dir (Bacak, 2010).}$$

**Sonuç 3.3.2:**  $K_{1,n}$  bir yıldız graf ise,

$$Nr(K_{1,n}) = n - 3 \text{ dir (Bacak, 2010).}$$

**Teorem 3.3.4:**  $W_n$ ,  $n$  tepeli bir tekerlek graf ve  $n > 4$  ise,

$$Nr(W_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -2, & n \equiv 0, 2, 3 \pmod{4} \end{cases} \text{ dir (Bacak, 2010).}$$

#### 4 GRAFLARDA KOMŞU AYRIT KOPMA DERECESİ

Bu bölümde komşu ayrıt kopma derecesi tanımlanmış, komşu ayrıt kopma derecesine örnek verilmiş, özel graflarda komşu kopma dereceleri verilmiş ve middle graflarda komşu ayrıt kopma derecesi ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

##### 4.1 Graflarda Komşu Ayrıt Kopma Derecesi

Grafların komşu kopma derecesi zedelenebilirlik derecesini ayırt etme de yeterli olmayabilir. Komşu kopma derecesi eşit olan iki graf için (Örneğin  $Nr(W_9) = -1$  ve  $Nr(C_{12}) = -1$  olduğundan) yeni bir zedelenebilirlik parametresine ihtiyaç duyulmuştur.

**Tanım 4.1.1:** Bir  $G$  grafının komşu ayrıt kopma derecesi (edge neighbour rupture number),  $S$  bir ayrıt-kesim stratejisi,  $G - S$  grafindaki bileşen sayısı  $w(G - S)$  ve en büyük bağlantılı bileşenin tepe sayısı  $m(G - S)$  olmak üzere,

$$ENR(G) = \max \{w(G - S) - |S| - m(G - S) : S \subset E(G), w(G - S) \geq 1\} \text{ dir}$$

(Aslan, 2013).

**Örnek 4.1.1:** Bkz. Şekil 3.1' de verilen grafın komşu ayrıt kopma derecesi aşağıdaki gibi hesaplanır.

- $S = \{a\}$ ,  $S = \{b\}$ ,  $S = \{e\}$  ve  $S = \{h\}$  için  $w(G - S) = 2$  ve  $m(G - S) = 3$  olduğundan  $ENR_1(G) = 2 - 1 - 3 = -2$
- $S = \{c\}$ ,  $S = \{d\}$ ,  $S = \{f\}$  ve  $S = \{i\}$  için  $w(G - S) = 1$  ve  $m(G - S) = 5$  olduğundan  $ENR_2(G) = 1 - 1 - 5 = -5$
- $S = \{g\}$  için  $w(G - S) = 3$  ve  $m(G - S) = 3$  olduğundan  $ENR_3(G) = 3 - 1 - 3 = -1$

- $S = \{i\}$  için  $w(G - S) = 2$  ve  $m(G - S) = 4$  olduğundan  $ENR_4(G) = 2 - 1 - 4 = -3$
- $S = \{e, g\}$ ,  $S = \{b, g\}$  için  $w(G - S) = 3$  ve  $m(G - S) = 2$  olduğundan  $ENR_5(G) = 3 - 2 - 2 = -1$
- $S = \{i, g\}$  için  $w(G - S) = 3$  ve  $m(G - S) = 1$  olduğundan  $ENR_6(G) = 3 - 2 - 1 = 0$

Tanım gereği bulunan sonuçların maksimumu alındığında  $G$  grafinin komşu ayrıt kopma derecesi 0 (sıfır) bulunur.

**Teorem 4.1.1:** Yol grafin Komşu Ayrıt Kopma Derecesi,

$$ENR(P_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0, 2 \pmod{3} \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \text{ 'dir. (Aslan, 2013).}$$

**Teorem 4.1.2:** Tam grafin Komşu Ayrıt Kopma Derecesi,

$$ENR(K_n) = \begin{cases} n \text{ tek ise, } -\left(\frac{n-1}{2}\right) \\ n \text{ çift ise, } -\frac{n}{2} \end{cases} \text{ 'dir. (Aslan, 2013).}$$

**Teorem 4.1.3:** Tekerlek grafin ( $n \geq 5$ ) Komşu Ayrıt Kopma Derecesi,

$$ENR(W_{1,n}) = \begin{cases} -1, & n \equiv 2 \pmod{3} \\ -2, & n \equiv 0, 1 \pmod{3} \end{cases} \text{ 'dir. (Aslan, 2013).}$$

**Teorem 4.1.4:** Çevre grafin Komşu Ayrıt Kopma Derecesi,

$$ENR(C_n) = \begin{cases} -1, & n \equiv 0 \pmod{3} \\ -2, & n \equiv 1, 2 \pmod{3} \end{cases} \text{ 'dir. (Aslan, 2013).}$$

**Teorem 4.1.5:** Yıldız grafin Komşu Ayrıt Kopma Derecesi,

$$ENR(S_n) = n - 4 \text{ 'dir (Aslan, 2013).}$$



**Teorem 4.1.6:** İki parçalı tam grafin Komşu Ayrıt Kopma Derecesi,

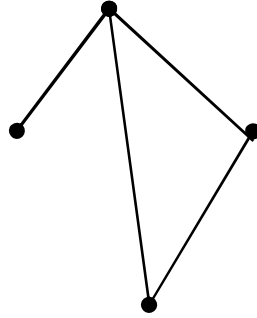
$$ENR(K_{m,n}) = \begin{cases} m-2n-1, & m > n \\ -m, & m = n \end{cases} \text{ 'dir. (Aslan, 2013).}$$

**Teorem 4.1.7:**  $S_n > P_n > C_n = W_n > K_{m,n} \geq K_n$  'dir (Aslan, 2013).

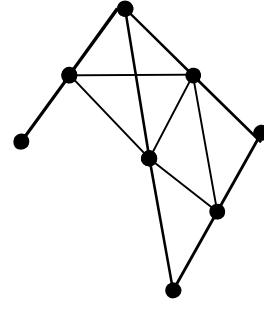
## 4.2 Middle Graf

Bu bölümde middle grafa örnek verilmiş ve bazı özel grafların middle grafiyle ilgili ayrıt sayıları bulunmuştur.

Aşağıda 4 tepeli bir graf ve bu grafin middle grafinin örneği verilmiştir (Nihei, 2001).



$G$



$M(G)$

**Şekil 4.1** 4 tepeli bir  $G$  graf

**Şekil 4.2**  $M(G)$ ,  $G$  grafinin middle grafi

Middle graf, var olan grafin tüm ayrıtları üzerinde bir tepe alınarak komşu olan ayrıtlardaki tepelerin birleştirilmesiyle oluşur. Bir şehir için telefon şirketlerinin kurduğu baz istasyonları ilçe merkezine yakın kurulur. Baz istasyonlarının yakın olduğu ilçe merkezlerinde problem olmaz fakat çevre köylerde ya da beldelerde şebeke problemleri olabilir. Middle graflarda olduğu gibi ayrıt üzerinde alınan tepeyi, iki ilçe arasında yeni kurulacak olan baz istasyonu gibi düşünelim. Cep telefonu operatörleri şebeke problemlerini ortadan kaldırmak veya en aza indirmek için ilçeler arasında uygun olan yerlere yeni baz istasyonları kurarak oluşabilecek herhangi bir problemi en aza indirmiş ve iletişimi kesintisiz devam ettirmiş oluruz.

Özel grafların middle grafinin ayrıt sayısı;

1)  $n$  tepeli  $P_n$  yol grafinin middle grafi  $M(P_n)$ 'nin ayrıt sayısı  $= 3n - 4$

2)  $n$  tepeli  $C_n$  çevre grafinin middle grafi  $M(C_n)$ 'nin ayrıt sayısı  $= 3n$

3)  $n + 1$  tepeli  $W_{1,n}$  tekerlek grafinin middle grafi  $M(W_{1,n})$ 'nin ayrıt sayısı  $= \frac{n \cdot (n+13)}{2}$

4)  $n$  tepeli  $S_n$  yıldız grafinin middle grafi  $M(S_n)$ 'nin ayrıt sayısı  $= \frac{(n-1)(n+2)}{2}$  dir.

### 4.3 Middle Graflarda Komşu Ayrıt Kopma Derecesi

Bu bölümde bazı özel grafların middle grafinin komşu ayrıt kopma derecesiyle ilgili yeni teoremler bulunup, ispatları verilmiştir.

**Teorem 4.3.1:**  $n$  tepeli  $P_n$  yol grafinin middle grafi  $M(P_n)$ 'nin komşu ayrıt kopma derecesi;

$$ENR(M(P_n)) = \begin{cases} n \text{ tek ise, } & \frac{n-1}{2} \\ n \text{ çift ise, } & \frac{n}{2} - 1 \end{cases} \text{ 'dir.}$$

**İspat:**

Ayrıt kesim stratejisi  $|S| = r$  olsun.

**1.durum:**  $r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  ise  $m(M(P_n) - S) \geq 3$ ,  $w(M(P_n) - S) \leq 2r + 1$  olur.

Buradan  $ENR(M(P_n)) \leq 2r + 1 - r - 3 = r - 2$  olur. Fonksiyon artan olduğundan maksimum değerini üst sınırdadır.

$$n \text{ çift ise } ENR(M(P_n)) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) - 2 = \frac{n}{2} - 3,$$

$$n \text{ tek ise } ENR(M(P_n)) = \left(\frac{n-1}{2} - 1\right) - 2 = \frac{n-7}{2}$$

**2.durum:**  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq r \leq 3n - 4$  olsun.

i)  $n$  tek ise  $w(M(P_n) - S) \leq 2n - 1 - 2r$ ,  $m(M(P_n) - S) \geq 1$  olur. Buradan  $ENR(M(P_n)) \leq 2n - 1 - 2r - r - 1 = 2n - 3r - 2$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(P_n)) = 2n - 3\left(\frac{n-1}{2}\right) - 2 = \frac{n-1}{2} \text{ dir.}$$

ii)  $n$  çift ise  $w(M(P_n) - S) \leq 2n - 1 - (2r - 1)$ ,  $m(M(P_n) - S) \geq 1$  olur. Buradan  $ENR(M(P_n)) \leq 2n - 1 - (2r - 1) - r - 1 = 2n - 3r - 1$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(P_n)) = 2n - 3\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = \frac{n}{2} - 1 \text{ dir.}$$

Yukarıdaki iki durum incelendiğinde en iyi durum 2. durumdur. İspat tamamlandı.  $\square$

**Teorem 4.3.2:**  $n$  tepeli  $C_n$  çevre grafinin middle grafi  $M(C_n)$ 'nin komşu ayrıt kopma derecesi;

$$ENR(M(C_n)) = \begin{cases} n \text{ tek ise, } & \frac{n-3}{2} \\ n \text{ çift ise, } & \frac{n}{2} - 1 \end{cases} \text{ 'dir.}$$

**İspat:**

Ayrıt kesim stratejisi  $|S| = r$  olsun.

**1.durum:**  $r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  ise  $m(M(C_n) - S) \geq 3$ ,  $w(M(C_n) - S) \leq 2r$  olur. Buradan  $ENR(M(C_n)) \leq 2r - r - 3 = r - 3$  olur. Fonksiyon artan olduğundan maksimum değerini üst sınırda alır.

$$n \text{ çift ise } ENR(M(C_n)) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) - 3 = \frac{n}{2} - 4,$$

$$n \text{ tek ise } ENR(M(C_n)) = \left(\frac{n+1}{2} - 1\right) - 3 = \frac{n-7}{2}$$

**2.durum:**  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq r \leq 3n$  olsun.

i)  $n$  çift ise  $w(M(C_n) - S) \leq 2n - 2r$ ,  $m(M(C_n) - S) \geq 1$  olur. Buradan  $ENR(M(C_n)) \leq 2n - 2r - r - 1 = 2n - 3r - 1$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(C_n)) = 2n - 3 \left( \frac{n}{2} \right) - 1 = \frac{n}{2} - 1 \text{ dir.}$$

ii)  $n$  tek ise  $w(M(C_n) - S) \leq 2n - (2r - 1)$ ,  $m(M(C_n) - S) \geq 1$  olur. Buradan  $ENR(M(C_n)) \leq 2n - (2r - 1) - r - 1 = 2n - 3r$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(C_n)) = 2n - 3 \left( \frac{n+1}{2} \right) = \frac{n-3}{2} \text{ dir.}$$

Yukarıdaki iki durum incelendiğinde en iyi durum 2. durumdur. İspat tamamlandı.  $\square$

**Teorem 4.3.3 :**  $n$  tepeli  $S_n$  yıldız grafının middle grafi  $M(S_n)$ 'nin komşu ayrıt kopma derecesi;

$$ENR(M(S_n)) = \begin{cases} n \text{ tek ise, } & \frac{n-1}{2} \\ n \text{ çift ise, } & \frac{n}{2} - 1 \end{cases} \text{ 'dir.}$$

**İspat:**

Ayrıt kesim stratejisi  $|S| = r$  olsun.

**1.durum:**  $r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  ise  $m(M(S_n) - S) \geq 3$ ,  $w(M(S_n) - S) \leq 2r + 1$  olur. Buradan  $ENR(M(S_n)) \leq 2r + 1 - r - 3 = r - 2$  olur. Fonksiyon artan olduğundan maksimum değerini üstsınırdır alır.

$$n \text{ çift ise } ENR(M(S_n)) = \left( \frac{n}{2} - 1 \right) - 2 = \frac{n}{2} - 3,$$

$$n \text{ tek ise } ENR(M(S_n)) = \left( \frac{n-1}{2} - 1 \right) - 2 = \frac{n-7}{2}$$

**2.durum:**  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq r \leq \frac{(n-1).(n+2)}{2}$  olsun.

i)  $n$  tek ise  $w(M(S_n) - S) \leq 2n - 1 - 2r$ ,  $m(M(S_n) - S) \geq 1$  olur. Buradan  $ENR(M(S_n)) \leq 2n - 1 - 2r - r - 1 = 2n - 3r - 2$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(S_n)) = 2n - 3\left(\frac{n-1}{2}\right) - 2 = \frac{n-1}{2} \text{ dir.}$$

ii)  $n$  çift ise  $w(M(S_n) - S) \leq 2n - 1 - (2r - 1) = 2n - 2r$ ,  $m(M(S_n) - S) \geq 1$  olur.

Buradan  $ENR(M(S_n)) \leq 2n - 2r - r - 1 = 2n - 3r - 1$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(P_n)) = 2n - 3\left(\frac{n}{2}\right) - 1 = \frac{n}{2} - 1 \text{ ' dir.}$$

Yukarıdaki iki durum incelendiğinde en iyi durum 2. durumdur. İspat tamamlandı.  $\square$

**Sonuç 4.3.1:**  $ENR(M(P_n)) = ENR(M(S_n))$

## 5 TARTIŞMALAR VE SONUÇ

Bu çalışmada bazı özel grafların middle grafının komşu ayrıt kopma derecesi ile ilgili yeni teoremler önerilmiş ve bu teoremlerin ispatları bulunmuştur. Ayrıca tekerlek grafın middle grafiyle ilgili aşağıdaki gibi bir çalışma yapılmış fakat ispatı konusunda bazı soru işaretleri olduğundan tartışmaya sunulmuştur.

$n + 1$  tepeli  $W_{1,n}$  tekerlek grafının middle grafi  $M(W_{1,n})$ 'nin komşu ayrıt kopma derecesi;

$$ENR(M(W_{1,n}))=0 \text{ ' dir.}$$

**İspat:**

Ayrıt kesim stratejisi  $|S|=r$  olsun.

**1.durum:**  $r < n$  ise  $m(M(W_{1,n}) - S) \geq 3$   $w(M(W_{1,n}) - S) \leq n - 1$  olur. Buradan  $ENR(M(W_{1,n})) \leq n - 1 - r - 3 = n - r - 4$  olur.

$$ENR(M(W_{1,n})) = n - (n - 1) - 4 = -3$$

**2.durum:**  $n \leq r \leq \frac{n(n+13)}{2}$  ise  $w(M(W_{1,n}) - S) \leq n + 1 + 2n - 2r$ ,  $m(M(W_{1,n}) - S) \geq 1$  olur. Buradan  $ENR(M(W_{1,n})) \leq 3n + 1 - 2r - r - 1 = 3n - 3r$ . Fonksiyon azalan olduğundan maksimum değerini alt sınırında alır.

$$ENR(M(W_{1,n})) = 3n - 3n = 0 \text{ dır.}$$

Yukarıdaki önerilen ispatın 1.durumunda bileşen sayısı  $w(M(W_{1,n}) - S)$  sayısını  $r$ 'ye bağlı bir fonksiyon şeklinde yazılamadığından  $ENR(M(W_{1,n}))$ 'i artan fonksiyon oluşturulamadı. İspatı konusunda çalışmalar devam edecektir. Bu ispattaki sorunun ortadan kaldırılmasıyla tam graf ve iki parçalı tam grafın middle grafi için de teorem oluşturulabilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aslan, E.**, 2013, Edge-Neighbor-Rupture Degree of Graphs, Journal of Applied Mathematics, 5pp
- Bacak, G.**, 2010, Graflarda Zedelenebilirlik Ölçümleri Doktora Tezi, 33-40s.
- Bagga, K.S., Beineke L.W. and Pippert, R.E.**, 1994, Edge-integrity, A survey, Discrete Math, 124, 3-12pp.
- Barefoot, C.A., Etringer, R. and Swart, H.**, 1987 , Vulnerability in Graphs-A Comparative Survey, J. Combin. Math. Combin. Comput., 113-123pp.
- Beineke, L. W., Ollerman, O. R. and Pippert, R. E.**, 2002, The Average Connectivity of a Graph, Discrete Math., 252, 31-45pp.
- Beseri Sevim T.**, 2010, Çizgelerde Tepe Birleştirilmişlik Sayısı Üzerine Doktora Tezi, 1s.
- Boruzanlı, G.**, 2010, Zedelenebilirlik Ölçümleri Üzerine Yüksek Lisans Tezi, 1-5s.
- Buckley, F. and Harary, F.**, 1990, Distance in Graphs, Addison Wesley Pub., California.
- Chartrand, G. And Lesniak, L.**, 2005, Graphs and Digraphs, Chapman and Hall, California.
- Chvatal, V.**, 1973 Tough graphs and hamitonian circuits, Discrete Mathematics, 306, 215-218pp.
- Cozzens, M.B.**, 1994, Stability measures and data fusion networks, Graph Teory of Newyork, 26, 8-14pp.
- Cozzens, M.B., Moazzami, D. and Stueckle, S.**, 1992, The tenacity of a graph, Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms., 1111-1122pp.
- Cozzens, M.B. and S.-Wu S.Y.**, 1994, Edge-Neighbor-Integrity of Trees, Australas. J. Combin., 10, 163-174pp.
- Gunther, G.**, 1985, Neigbor connectivity in regular graphs, Discrete Applied Matematics, 11, 233-243pp.
- Gunther, G. and Hartnell, B.L.**, 1978, On minimizing the effects of betrayals in a resistance movement, Proc. Eighth Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, 285-306pp.
- Gunther, G. and Hartnell, B.L.**, 1980, Optimal K-secure graphs, Discrete Appl. Math. 2, 225-231pp.
- Jung, H.**, 1978, On a class of posets and the corresponding comparability graphs, J. Combin. Theory Ser. B., 1124, 125-133pp.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Kirlangic, A.**, 2009, The rupture degree and gear graphs. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 32, 31-36pp.
- Li, Y., and Li, X.**, 2004, Computing the rupture degrees of graphs, 7th Internat. Symp. Parallel Architectures, Algorithms and Networks, Ispan 04.
- Li, Y., Zhang, S. and Li, X.**, 2005, Rupture degree of graphs. International Journal of Computer Mathematics, 82(7), 793-803pp.
- Masakazu, N.**, 2001, On the Toughness of the Middle Graph of a Graph, Ars Combinatoria 60, 55-58pp.
- Michalak, D.**, 1994, The binding numbers of some cartesian products of graphs, Discrete Mathematics, Podgorna 50, 65-246pp, Zielona Gora, Poland, 363-366pp.
- Vatansever, B.**, 2008, Zedelenebilirlik Ölçümleri, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Wei, Z.T.**, 2003, On the reliability parameters of networks, MS Thesis, Northwestern Polytechnical University, 30-40pp.
- West, D.B.**, 2001, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, U.S.A., 588pp.
- Wei, Z., Li, Y. and Zhang J.**, 2007, Edge-neighbor-scattering number of graphs, Ars Combinatoria, 85, 271-277pp.
- Woodall, D. R.**, 1973, The binding of a graph and its Anderson number, J. Combinatorial Theory Ser. B 15, 255pp.



## ÖZGEÇMİŞ

Dilek POLAT, 1984 yılında Tokat'da doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğini 2006 yılında bitirdi. Aynı yıl Özel İzmir Fatih Dershanesi'nde çalışmaya başladı. 2008 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak göreve başladı. 2013 yılında TÜBİTAK'ın düzenlemiş olduğu "Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık" kamplarına katıldı. Halen Soma Cemil Meriç Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.