YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

d-CEBİRLERİNDE TÜREV

Tamer FIRAT

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof.Dr.Alev FIRAT

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç.Dr. Esra DALAN YILDIRIM

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

d-CEBİRLERİNDE TÜREV

FIRAT, Tamer

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Şubat 2016, 18 sayfa

Bu tez esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış ve tezi anlamada kolaylık sağlayacak olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. İkinci bölümde d-cebirlerinde türev tanımı verilerek yapılmış olan çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir. Üçüncü bölümde d-cebirlerinde çarpan dönüşüm tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri d-cebirlerinde incelenmiştir. Dördüncü bölümde simetrik ikili çarpan dönüşüm tanımı önceki çalışmalardan esinlenerek verilmiş ve ilgili özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: d-cebri, türev, çarpan dönüşüm, simetrik ikili çarpan dönüşüm.

ABSTRACT

ON DERIVATIONS OF d-ALGEBRAS

FIRAT, Tamer

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asist. Prof. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

February 2016, 18 pages

This thesis mainly consists of four parts. In the first part, the thesis subject is introduced and some basic definitions and characteristics that will make it easier to understand the thesis are given. In the second part, notions of derivation and derivation on d-algebras are given and a short summary of the studies which until now has been made on these issues are mentioned. In the third part, the notion of multiplier on d-algebra is given and related properties that have been hold up to now are mentioned. In the fourth part, the definiton of symmetric bi-multipliers on d-algebra is given and related properties are studied in d-algebras .

Key words: d-algebras, derivation, multipliers, symmetric bi-multipliers.

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlamam için bana yardımcı olan, vaktini, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL'a yüksek lisans eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım tüm değerli hocalarıma, yine çalışmalarım boyunca sabırla beni destekleyen eşim Deniz FIRAT'a, biricik kızım Nehir FIRAT'a, oğlum Ali Tuna FIRAT'a teşekkür ederim.

Tamer FIRAT

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "d-CEBİRLERİNDE TÜREV" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Tamer FIRAT

19.02.2016

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Mantık cebirlerinin iki sınıfı olan BCK ve BCI cebirleri ilk olarak Imai ve Iseki (1966) tarafından tanımlanmıştır ve pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. BCK cebirleri BCI cebirleri sınıfının uygun bir alt sınıfıdır. Bu kavram iki farklı konudan doğmuştur. Birincisi, küme teorisi; ikincisi, matematiksel lojik. Küme teorisinde Kantorovinç ve Livenson (1975) tarafından temel üç işlem; kesişim, birleşim ve fark işlemleri tanımlanmış ve bu işlemlerin özelliklerinin genelleştirilmesi yapılarak Boole cebiri kavramı çalışılmıştır. Birleşim ve kesişim işlemleri yardımıyla kafes kavramı ortaya çıkmıştır.

BCK cebirlerinin bir başka genellemesi olan d-cebirleri ise Neggers ve Kim (1999) tarafından tanımlanmıştır. Bu çalışmalarında bu cebirsel yapının bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonrasında birçok araştırmacı bu cebirsel yapılarda çalışmalarına devam etmiştir. d-cebirlerinde türev kavramı ilk olarak M. Chandramouleeswaran ve K. Kandaraj (2011) tarafından verilmiş ve ilgili özellikler aynı kişiler tarafından yapılan çalışmalarda verilmiştir. Yine bu yapıda çarpan dönüşümü tanımı Muhammad Anwar Chaudhry and Faisal Ali (2012) tarafından verilmiş ve ilgili özelliklerine yine aynı çalışmada yer verilmiştir.

Bu çalışma da d-cebirleri, d-cebirlerinde türev ve çarpan dönüşümleri üzerine bilgiler verilmiş ve bu alanlarda yapılan çalışmalarda elde edilenlerden bahsedilmiştir. Daha sonra d-cebirlerinde simetrik ikili çarpan dönüşümü tanımı verilmiş, bu dönüşüme d-cebirlerinde örnek verilmiş ve bu dönüşüme ait özellikler çalışılmıştır.

2.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile yapılacak kanıtlarda çok sık kullanılacak olan d-cebirlerinin bazı özellikleri alındıkları kaynaklarla birlikte verilmiştir. Ayrıca bu bölümün tamamı **M.Chandramouleeswaran** ve **N.Kandaraj** nın 2011 yılında yaptıkları "DERIVATIONS ON d-ALGEBRAS" başlıklı çalışmalarından alınmıştır.

Tanım 2.1

X, üzerinde " $*$ " ikili işlemi, 0 (sıfır) sabiti ile verilen bir küme olsun. O zaman her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında $(X, *, 0)$ e bir BCI-cebri denir:

(i) $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$,

(ii) $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$,

(iii) $(x * x) = 0$,

(iv) $(x * y) = 0$ ve $(y * x) = 0$ ise $x = y$ dir.

(Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 2.2

X, bir BCI-cebri olsun. $\theta: X \to X$ bir dönüşümü her $x, y, \in X$ için $\theta(x * y) = (\theta(x) * y) \wedge (x * \theta(y))$ koşulunu sağlıyor ise θ ya X in bir (sol-sağ) türevi denir. Her $x, y \in X$ için $\theta(x * y) = \big(x * \theta(y)\big) \wedge (\theta(x) * y)$ koşulunu sağlanıyor ise θ ya X in bir (sağ-sol) türevi denir. Eğer θ hem (sol-sağ) hem de (sağ-sol) türev ise θ ya X BCI-cebrinin bir türevi denir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 2.3

X, üzerinde " $*$ " ikili işlemi ve 0 (sıfır) sabiti ile verilen boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y \in X$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında $(X, *, 0)$ e bir *d-cebri* denir:

(i) $(x * x) = 0,$

(ii) $(0 * x) = 0,$

(iii) $(x * y) = 0$ ve $(y * x) = 0$ ise $x = y$ dir.

(Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Örnek 2.4

Reel sayılar kümesi her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x * y = x(x - y)$ olacak şekilde tanımlı $*$ işlemi ile bir d-cebridir . (Neggers, J. And Kim, H.S., 1999)

Tanım2.5

X bir d-cebri ve S, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $x * y \in S$ oluyorsa S ye X in bir alt cebri denir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 2.6

X bir d-cebri ve I, X in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa I ya X in bir ideali denir:

(i) $0 \in I$,

(ii) Her $x, y \in I$ için $x * y \in I$ ve $y \in I$ olduğunda $x \in I$,

(iii) Her $x \in I$ ve $y \in X$ için $x * y \in I$ dır.

Tanım 2.7

$(X, *, 0)$ bir d-cebri ve $x \in X$ olsun. Eğer herhangi bir $x \in X$ için $x * X = \{0, x\}$ oluyorsa X e bir kenar d-cebri denir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 2.8

$(X, *, 0)$ bir kenar d-cebri ise herhangi bir $x \in X$ için $x * 0 = x$ dir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 2.9

X bir kenar d-cebri olsun. O zaman her $x, y \in X$ için $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$ dır. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

3. d-CEBRİ ÜZERİNDE TÜREV

Bu bölüm **M.Chandramouleeswaran** ve **N.Kandaraj'** nın 2011 yılında yaptıkları "DERIVATIONS ON d-ALGEBRAS" başlıklı çalışmasından alınmıştır. Bu bölümde d-cebirlerinde türev ve özellikleri incelenmiştir.

Gösterim:

Bir $(X,*,0)$ d-cebri üzerinde herhangi $x,y \in X$ için $x * y$ işlemi kısaca xy şeklinde yazılacaktır. X, d-cebri üzerindeki x,y elemanları için $x \wedge y = y(yx)$ ile gösterilecektir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 3.1

X bir d-cebri olsun. $\theta: X \to X$ bir dönüşümü her $x,y \in X$ için $\theta(xy) = (\theta(x)y) \wedge (x\theta(y))$ koşulunu sağlıyor ise θ ya X in bir (sol-sağ) türevi denir. Her $x,y, \in X$ için $\theta(xy) = \left(x\theta(y)\right) \wedge ((\theta(x)y)$ koşulunu sağlıyor ise θ ya X in bir (sağ-sol) türev denir. Eğer θ, X in bir hem (sol-sağ) hem de (sağ-sol) türev ise θ ya X d-cebrinin bir türevi denir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Örnek 3.2

$X = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde bir $*$ işlemi aşağıdaki gibi verilsin:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	5	3	1	0

O zaman X bir d-cebridir. $\theta_1: X \to X$ ve $\theta_2: X \to X$

$$\theta_1(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,3,5 \\ 2, & x = 2,4 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \theta_2(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,3 \\ 2, & x = 2,4,5 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanan iki dönüşüm olsun. θ_1 dönüşümü hem (sol-sağ) hem de (sağ-sol) türevdir; fakat θ_2 (sağ-sol) türev olup (sol-sağ) türev değildir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 3.3

X d-cebri üzerinde tanımlanan bir θ dönüşümü için $\theta(0) = 0$ oluyorsa θ ya regülerdir denir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 3.4

$(X,*,0)$ bir d-cebri olsun. Eğer $\theta: X \longrightarrow X$ dönüşümü bir (sol-sağ) türev ise θ regülerdir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Sonuç 3.5

θ, X d-cebrinin bir türevi ise θ regülerdir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 3.6

X bir d-cebri olsun, eğer her $x \in X$ için $x0 = x$ ise her sağ-sol türev regülerdir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Uyarı 3.7

Bir kenar d-cebrinde her sağ-sol türev regülerdir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 3.8

X, her $x \in X$ için $x0 = x$ olacak şekilde bir kenar d-cebri olsun.

(1) Eğer θ, X in bir sol-sağ türevi ise her $x \in X$ için $\theta(x) = \theta(x) \wedge x$ dir.

(2) Eğer θ, X in bir sağ-sol türevi ise her $x \in X$ için $\theta(x) = x \wedge \theta(x)$ dir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 3.9

X, her $x \in X$ için $x0 = x$ olacak şekilde bir d-cebri ve θ, X d-cebrinin bir türevi olsun. O zaman her $x \in X$ için $(x(x\theta(x)))x = (\theta(x)(\theta(x)x))x$ dir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Uyarı 3.10

θ, X kenar d-cebrinin bir türevi ise her $x \in X$ için $[x(x(\theta(x))]x = [\theta(x)(\theta(x)x)]x = 0$ dır. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 3.11

X bir kenar d-cebri olsun. X üzerinde " $\leq$ " bağıntısı her $x, y \in X$ için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x \leq y \Leftrightarrow xy = 0$$

O zaman $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı kümedir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 3.12

X, kenar d-cebri ve θ , X in bir türevi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdaki özellikler vardır:

(1) $\theta(x) \leq x$,

(2) $\theta(xy) \leq x\,\theta(y)$,

(3) $\theta(xy) \leq \theta(x)y$,

(4) $\theta\big(x\theta(x)\big) = 0$,

(5) $\theta\big(\theta(x)\big) \leq x$,

(6) $\theta^{-1}(0) = \{x \in X | \theta(x) = 0\}$ X bir d-alt cebridir.

(Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Önerme 3.13

X bir kenar d-cebri ve $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots \theta_n$, X in türevleri olsun. O zaman her $x \in X$ için $\theta_n\Big(\theta_{n-1}\big(\theta_{n-2} \ldots. (\theta_2\, (\theta_1\,(x)))\big) \ldots\Big) \leq x$ olur. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Tanım 3.14

θ, X kenar d-cebrinin bir türevi olsun. X in bir I ideali için $\theta(I) = \{\theta(x) |\, x \in I\}$ olmak üzere $\theta(I) \subseteq I$ oluyor ise I ya θ-invaryant denir. (Chandramouleeswaran and Kandaraj 2011)

Örnek 3.15

$X = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde " $*$ " işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	1	0	0	0
4	4	2	1	1	0	0
5	5	5	5	3	1	0

X kenar d-cebrinin θ türev dönüşümü $\theta: X \longrightarrow X$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x = 0,1,3 \\ 2 & x = 2,4 \end{cases}$$

olarak verilsin.

$I = \{0,2\}$ d-ideali, θ-invaryantır.

(Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Örnek 3.16

$X = \{0,1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde " $*$ " işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0
3	3	3	3	0	0	0
4	4	4	4	4	0	0
5	5	5	5	5	5	0

X kenar d-cebrinin θ türev dönüşümü $\theta: X \longrightarrow X$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x = 0,1,2,3,4 \\ 5 & x = 5 \end{cases}$$

olarak verilsin. $I = \{0,1,2,3,4\}$ d-ideali, θ-invaryantır.

(Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

Teorem 3.17

θ, X kenar d-cebrinin bir türevi olsun. O zaman X in her ideali θ-invaryanttır. (Chandramouleeswaran and Kandaraj, 2011)

4 . d-CEBİRLERİNDE ÇARPAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölüm **Muhammad Anwar Chaudhry** ve **Faysal Ali'** nin 2012 yılında yaptıkları "**Multipler in d-algebras**" isimli çalışmalarından alınmıştır. Bu bölümde çarpan dönüşümler incelenmiştir.

Tanım 4.1

$f: X \to X$ dönüşümü eğer her $x, y \in X$ için $f(x * y) = f(x) * y$ koşulunu sağlıyorsa f ye X üzerinde bir çarpan dönüşüm denir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Örnek 4.2

$X = \{0, a, b\}$ kümesi üzerinde $*$ ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

*	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	0
b	b	a	0

X d-cebrinde $f: X \to X$ dönüşümü;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, a \\ a, & x = b \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$f: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $f(x * y) = f(x) * y$ koşulunu sağladığından f, X üzerinde bir çarpan dönüşümdür. (Chaudhry and Ali, 2012)

Önerme 4.3

X bir d-cebri ve f, X üzerinde bir çarpan dönüşüm olsun. O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler sağlanır.

(1) $f(0) = 0$,

(2) $f(x) \leq x$,

(3) Eğer $x \leq y$ ise $f(x) \leq y$.

(Chaudhry and Ali, 2012)

Önerme 4.4

X d-cebrinde f ve g çarpan dönüşümler ise $f \circ g$ bir çarpan dönüşümdür. (Chaudhry and Ali, 2012)

Tanım 4.5

X bir d-cebri olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ oluyorsa X e pozitif implikatif denir.

$M(X)$, X üzerindeki tüm çarpan dönüşümlerinin kümesi olsun. Her $x \in X$ için $\boldsymbol{O}: X \to X$, $\boldsymbol{O}(x) = 0$ ve $\boldsymbol{I}(x) = x$ olacak şekilde tanımlanan $\boldsymbol{O}$ ve $\boldsymbol{I}$ dönüşümleri $M(X)$ kümesinin elemanlarıdır. Yani $M(X)$ boştan farklıdır. (Chaudhry and Ali, 2012)

Tanım 4.6

X pozitif implikatif d-cebri ve $M(X)$, X üzerindeki tüm çarpan dönüşümlerinin kümesi olsun. $M(X)$ kümesi üzerinde $*$ ikili işlemi her $x \in X$ ve her $f, g \in M(X)$ için $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$ olacak şekilde tanımlanır. (Chaudhry and Ali, 2012)

Teorem 4.7

X pozitif implikatif d-cebri olsun. O zaman $(M(X), *, 0)$ bir pozitif implikatif d-cebridir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Önerme 4.8

f, X d-cebri üzerinde bir çarpan dönüşüm olsun. Eğer f bire-bir ise f, X üzerinde birim dönüşümdür. (Chaudhry and Ali, 2012)

Tanım 4.9

f, X d-cebrinin bir çarpan dönüşümü olsun. $Çek(f)$ kümesi,

$Çek(f) = \{x \in X | f(x) = 0\}$ olacak şekilde tanımlanır.

Önerme 4.10

X bir d-cebri ve f, X üzerinde tanımlı bir çarpan dönüşüm olsun. O zaman:

(1) $Çek(f)$, X in bir alt cebridir,

(2) Eğer f bire-bir ise $Çek(f) = \{0\}$ dir.

(Chaudhry and Ali, 2012)

Tanım 4.11

X bir d-cebri olsun. Eğer $x, y \in X$ için $x * (x * y) = y * (y * x)$ oluyor ise X e değişmelidir, denir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Önerme 4.12

X, her $x \in X$ için $x * 0 = 0$ olacak şekilde değişmeli bir d-cebri ve f, X üzerinde bir çarpan dönüşüm olsun. Eğer $x \in Çek(f)$ ve $y \leq x$ ise $y \in Çek(f)$ tir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Teorem 4.13

X, her $x \in X$ için $x * 0 = x$ olacak şekilde tanımlı bir d-cebri ve f, X üzerinde endomorfizma olan bir çarpan dönüşüm olsun. O zaman $Çek(f)$, X in bir d-idealidir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Tanım 4.14

f, X d-cebri üzerinde bir çarpan dönüşüm olsun.

O zaman $Fix(f) = \{x \in X | f(x) = x\}$ kümesine f nin sabit noktalarının kümesi denir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Önerme 4.15

f, X d-cebri üzerinde bir çarpan dönüşüm olsun. O zaman $Fix(f)$, X in bir alt cebridir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Tanım 4.16

f, X d-cebri üzerinde bir çarpan dönüşüm olsun. Eğer $fof = f$ oluyorsa f ye idempotentir denir. fof işlemi f^2 şeklinde gösterilir. (Chaudhry and Ali, 2012)

Teorem 4.17

X, her $x \in X$ için $x * 0 = x$ olacak şekilde pozitif imlikatif bir d-cebri ve f_1, f_2 ; X üzerinde idempotent çarpan dönüşümler olsun. Eğer $f_1 o f_2 = f_2 o f_1$ ise $f_1 * f_2$, X üzerinde bir idempotent çarpan dönüşümdür. (Kim and Lim, 2013)

Uyarı 4.18

X_1 ve X_2 birer d-cebri olsun. $x_1, y_1 \in X_1$ ve $x_2, y_2 \in X_2$ için, $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 * x_2, y_1 * y_2)$ olacak şekilde tanımlanan ikili işlem ile $X_1 \times X_2$ bir d-cebridir. (Kim and Lim, 2013)

Önerme 4.19

X_1 ve X_2 birer d-cebri olsun. $f: X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$ dönüşümü her $(x, y) \in X_1 \times X_2$ elemanı için $f(x, y) = (x, 0)$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman f, $X_1 \times X_2$ nin bir çarpan dönüşümüdür. (Kim and Lim ,2013)

Uyarı 4.20

X bir d-cebri ve f_1, f_2; X üzerinde birer dönüşümler olsun. Her $x \in X$ için, $(f_1 \wedge f_2)(x) = f_1(x) \wedge f_2(x)$ olacak şekilde tanımlıdır. (Kim and Lim, 2013)

Önerme 4.21

X bir pozitif implikatif d-cebri ve f_1, f_2; X üzerinde birer çarpan dönüşümler olsun. O zaman $f_1 \wedge f_2$ de X üzerinde bir çarpan dönüşümdür. (Kim and Lim, 2013)

Önerme 4.22

X bir d-cebri ve f, X in bir çarpan dönüşümü olsun. Eğer $x \in X$ ve $y \in Fix(f)$ ise o zaman $x \wedge y \in Fix(f)$ tir. (Kim and Lim, 2013)

5. d-CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ ÇARPAN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde d-cebirlerinde simetrik ikili çarpan dönüşümler incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde elde edilenler "*Journal of Mathematical Sciences and Applications*, (2015)" dergisinde yayınlanmıştır.

Tanım 5.1

X bir d-cebri ve $f(.,.): X \times X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için $f(x,y) = f(y,x)$ koşulunu sağlıyorsa f ye X in bir simetrik dönüşümü denir.

Tanım 5.2

X bir d-cebri ve $f(.,.): X \times X \to X$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için,

$$f(x, y * z) = f(x,y) * z$$

koşulunu sağlıyorsa f ye X in bir simetrik ikili çarpan dönüşümü denir.

Örnek 5.3

$X = \{0, a, b\}$ kümesinde $*$ ikili işlemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

*	0	a	b
0	0	0	0
a	a	0	0
b	b	a	0

X d-cebrinde $f(.,.): X \times X \to X \times X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$f(x,y) = \begin{cases} a \;, & x = y = b \\ 0 \;, & diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$f: X \times X \to X \times X$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için $f(x, y * z) = f(x,y) * z$ koşulunu sağladığından f, $X \times X$ üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşümdür.

Önerme 5.4

X bir d-cebri ve f, $X \times X$ üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun. O zaman her $x, y \in X$ için aşağıdakiler sağlanır:

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) Her $x \in X$ için $f(0,x) \leq x$,

(3) Eğer her $x, y, \in X$ için $x \leq y$ ise $f(0,x) \leq y$ dir.

Kanıt

X üzerinde simetrik ikili çarpan dönüşümü tanımı kullanılarak:

(1) $f(0,0) = f(0, f(0,0) * 0) = f(0,x) * f(0,x) = 0$ bulunur.

O halde $f(0,0) = 0$ dır.

(2) $f(0,x) \leq x$ demek $f(0,x) * x = 0$ dır. O zaman

$0 = f(0,0) = f(0, x * x) = f(0,x) * x$ olduğu elde edilir.

(3) $x, y \in X$ *için* $x \leq y$ olsun. O halde $x * y = 0$ dır. O zaman $f(0,x) * y = f(0, x * y) = f(0,0) = 0$ olur. Yani $f(0,x) \leq y$ dir.

Uyarı 5.5

$S(X), X$ üzerideki tüm simetrik ikili çarpan dönüşümlerinin kümesi olsun. $\boldsymbol{O}(.,.) : X \times X \to X$ her $(x,y) \in X \times X$ için $\boldsymbol{O}(x,y) = 0$ ve $P(.,.) : X \times X \to X$ her $(x,y) \in X \times X$ için $P(x,y) = x$ olacak şekilde tanımlanan dönüşümlerinin $S(X)$ kümesinin elemanı olduğu açıktır. Yani $S(X)$ boştan farklıdır.

Tanım 5.6

X bir pozitif implikatif d-cebri ve $S(X)$, X üzerindeki tüm ikili çarpan dönüşümlerinin kümesi olsun. $S(X)$ kümesi üzerinde $*$ ikili işlemi her $(x,y) \in X \times X$ için ve her $f, g \in S(X)$ için $(f * g)(x,y) = f(x,y) * g(x,y)$ olacak şekilde tanımlanır.

Teorem 5.7

X bir pozitif implikatif d-cebri olsun. O zaman $(S(X), *, 0)$ bir pozitif implikatif d-cebridir.

Kanıt

X pozitif implikatif d-cebri ve $f, g \in S(X)$ olsun. O zaman

$$
\begin{aligned}
(f * g)\big((x,y) * (z,t)\big) &= (f * g)\big((x * z, y * t)\big) \\
&= \big(g(x * z, y * t)\big) * \big(f(x * z, y * t)\big) \\
&= (g(x * z, y) * t) * (f(x * z, y) * t) \\
&= (\big(g(x * z, y)\big) * (f(x * z, y)) * t) \\
&= (f * g)\big((x * z, y)\big) * t
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde $f * g \in S(X)$ tir.

Şimdi $f \in S(X)$ olsun. $(x,y) \in X \times X$ için, $(\boldsymbol{O} * f)(x,y) = \boldsymbol{O}(x,y) * f(x,y) = 0 * f(x,y) = 0 = \boldsymbol{O}(x,y)$ olur.

O halde her $f \in S(X)$ için $\boldsymbol{O} * f = \boldsymbol{O}$ olur.

Şimdi ise $f \in S(X)$ olsun. Her $(x,y) \in X \times X$ için $(f * f)(x,y) = f(x,y) * f(x,y) = 0 = \boldsymbol{0}(x,y)$ bulunur. O zaman her $(x,y) \in X \times X$ için $f * f = \boldsymbol{0}$ olur.

$f * g = \boldsymbol{0}$ ve $g * f = \boldsymbol{0}$ olacak şekilde $f, g \in S(X)$ olsun. Bu durumda her $(x,y) \in X \times X$ için $(f * g)(x,y) = \boldsymbol{0}$ ve $(g * f)(x,y) = \boldsymbol{0}$ dır. $f(x,y) * g(x,y) = 0$ ve $g(x,y) * f(x,y) = 0$ olur. Yani her $(x,y) \in X \times X$ için $f(x,y) = g(x,y)$ dir. Bu durumda $f = g$ dir. O halde $S(X)$ bir d-cebridir.

Son olarak $S(X)$ in pozitif imlikatif olduğu gösterilmelidir. f, g ve $h \in S(X)$ olsun. Her $(x,y) \in X \times X$ için,

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x,y) &= (f * g)(x,y) * h(x,y) \\
&= (f(x,y) * g(x,y)) * h(x,y) \\
&= \big(f(x,y) * h(x,y)\big) * \big(g(x,y) * h(x,y)\big) \\
&= (f * h)(x,y) * (g * h)\,(x,y) \\
&= \big((f * h) * (g * h)\big)(x,y)
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman her f, g ve $h \in S(X)$ için $(f * g) * h = (f * h) * (g * h)$ olur. Böylece $S(X)$, bir pozitif implikatif d-cebridir.

Tanım 5.8

f, X d-cebri üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun. $Çek(f)$ kümesi $Çek(f) = \{x \in X \mid f(0,x) = 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 5.9

f, X d-cebri üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun. O zaman $Çek(f)$ kümesi X in bir alt cebridir.

Kanıt

f, X d-cebri üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm ve $x, y \in Çek(f)$ olsun. O zaman $f(0,x) = 0$ ve $f(0,y) = 0$ dır.

Buradan $f(0, x * y) = f(0,x) * y = 0 * y = 0$ elde edilir. O halde $x * y \in Çek(f)$, yani $Çek(f)$, X in bir alt cebridir.

Önerme 5.10

X, her $x \in X$ için $x * 0 = 0$ olacak şekilde tanımlı bir değişmeli d-cebri ve f, X üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun. Eğer $x \in Çek(f)$ ve $y \leq x$ ise $y \in Çek(f)$ tir.

Kanıt

$x \in Çek(f)$ ve $y \leq x$ olsun.

O zaman $f(0,x) = 0$ ve $y * x = 0$ dır. Buradan

$$f(0,y) = f(0, y * 0) = f\big(0, y * (y * x)\big)$$
$$= f\big(0, x * (x * y)\big)$$
$$= f(0,x) * (x * y)$$
$$= 0 * (x * y) = 0$$

bulunur. Öyleyse $y \in Çek(f)$ tir.

Tanım 5.11

f, X d-cebri üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun. O zaman $Fix(f) = \{x \in X \mid f(0,x) = x\}$ kümesine f nin sabit noktalarının kümesi denir.

Önerme 5.12

f, X d-cebri üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun. O zaman $Fix(f)$, X in bir alt cebirdir.

Kanıt

f, X d-cebri üzerinde bir simetrik ikili çarpan dönüşüm olsun.

$f(0,0) = 0$ olduğundan $0 \in Fix(f)$, yani $Fix(f) \neq \emptyset$ dır. $x, y \in Fix(f)$ olsun. O halde $f(0,x) = x$, $f(0,y) = y$ olur. Buradan $f(0, x * y) = f(0,x) * y = x * y$ bulunur. Yani $x * y \in Fix(f)$ tir. O halde $Fix(f)$, X in bir alt cebridir.

6. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı d-cebirlerinde simetrik ikili çarpan dönüşümleri için yapılan çalışmalardaki boşlukların kapatılması ve türevin genellemesi olan diğer türev tanımları ile d-cebirlerinin yapısının incelenmesidir. Bu çalışmada ilk olarak tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı tanım, özellikler ve örnekler verilmiştir. İkinci bölümde d-cebirleri ve d-cebirlerinde türev özellikleri açıklanmış ve örnekler verilmiştir. Üçüncü bölümde çarpan dönüşümü tanımı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde simetrik ikili çarpan dönüşüm tanımı verilmiş ve d-cebirlerinde bu tanım yardımıyla bazı özellikler bulunmuş ayrıca bu özelliklere doğrulayan örnekler sunulmuştur.

Bundan sonra diğer cebirler için simetrik ikili çarpan dönüşümler ve bunların özellikleri çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Imai, Y. And K. Iseki, 1966. On Axiom Systems of Propositional Calculi. XIV, Proc. Japan Acad. Ser A, Math. Sci., 42:19-22.

Kyung Ho Kim and Hyo Jin Lim, On Multipliers Of BCC-Algebras, Honam Mathematical J. 35 (2013), No. 2, pp. 201-210

M.Chandramouleeswaran and N.Kandaraj, Derivations on d-algebras, International Journal of Mathematical Sciences and applications, Volume 1. Number 1. January (2011), 231 -237.

Muhammad Anwar Chaudhry and Faisal Ali, Multipliers in d-algebras, World Applied Sciences Journal 18 (11): 1649-1653, 2012.

Neggers, J. And Kim, H.S., 1999, On D-algebras, Math.Slovaca,Co.,49:19-26.

Tamer Fırat, Şule Ayar Özbal, Symmetric Bi-multipliers on *d-algebras, Journal of Mathematical Sciences and Applications, 2015, Vol. 3, No. 2, 22-24*

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Erzincan'da doğan Tamer FIRAT, ilkokul, ortaokul ve liseyi Erzincan'da tamamladı. 2000 yılında 18 Mart Üniversitesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2000 yılında Şırnak'ta Matematik öğretmeni göreve başladı. 2003-2011 arası Erzincan'da çeşitli okullarda öğretmen olarak çalıştı. 2011 yılından beri İzmir'de çalışmakta. TÜBİTAK'IN düzenlemiş olduğu üç aşamalı " Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık" kamplarına katıldı. Evli ve iki çocuk babası olan FIRAT, halen Konak Hürriyet Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.