YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KU-CEBİRLERİNDE TÜREVLER

Ömer YILDIRIM

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Matematik Bölümü

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof.Dr.Alev FIRAT

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç.Dr. Esra DALAN YILDIRIM

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

KU CEBİRLERİNDE TÜREVLER

YILDIRIM, Ömer

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Şubat 2016, 23 sayfa

Bu tez esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış ve ikinci bölümde tezi anlamada kolaylık sağlayacak olan bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde KU cebirlerinde türev tanımı verilerek günümüze kadar bu konuda yapılmış olan çalışmanın kısa bir özeti verilmiştir.Dördüncü bölümde simetrik ikili türev tanımından esinlenerek KU cebirlerinde simetrik ikilitürev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri KUve integralKU cebirlerinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: KU cebri, integral KU cebri, ideal, türev, simetrik ikli türev.

ABSTRACT

ON DERIVATIONS OF INCLINE ALGEBRAS

YILDIRIM, Ömer

MSc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Asist.Prof.Dr. Şule AYAR ÖZBAL

February 2016, 23 pages

Thisthesisconsists of exactly four parts. Inthefirstpartsubject of thethesis is introduced. In the second part KU algebras is introduced and related definitions and properties that will make easier to understand the thesis are given. In the third part notions of derivation on KU algebras are given and a short summary of the study which until now has been made on these issues are mentioned. Inthefourthpart the definition of symmetricderivation on KUalgebra is given on consideringthedefinition of symmetric derivationandrelatedpropertiesare studied on aKUand integral KUalgebra.

Keywords: (sub)KU, integral KU, ideal, derivation, symmetric bi-derivations.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, konuyla ilgili gerekli kaynakları sağlayan, çalışmalarım boyunca ufkumu genişleterek sürekli gelişmemi sağlayan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyendeğerli hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL' a ve yine çalışmalarım boyunca sabırla beni destekleyen eşim SabriyeYILDIRIM'a ve biricik oğlumuz EmreYILDIRIM' a teşekkür ederim.

Ömer
YILDIRIM
İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "KU CebirlerindeTürevler" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Ömer
YILDIRIM

19.02.2016

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

BCK ve BCI cebirleri lojik cebrinin iki önemli sınıfıdır. BCK ve BCI cebirlerinin tanımı ilk olarak Imai ve Iseki (Y. Imai and Iseki K., 1966; Iseki K., , 1966; Iseki K. and Tanaka S., 1978) tarafından verilmiştir ve bir çok araştırmacı tarafından yoğun bir şekilde araştırılmıştır. BCK cebrilerinin sınıfı BCI cebirlerinin uygun bir alt sınıfıdır. Tüm BCK cebirlerinin sınıfı yarı çeşittir. Iseki BCK cebirleri sınıfının bir çeşit olup olmadığı sorusunu ortaya atmıştır. Bu problem ile bağlantılı olarak Komori (Y. Komori, 1984) BCC-cebirleri tanımlamış ve Dudek (W. A. Dudek, 1992) Komori anlamında tanıtılan tanımın dual bir formunu kullanarak BCC- cebirlerinin tanımını yeniden vermiştir. Dudek ve Zhang (W. A. Dudek and X. H Zhang, 1998) BCC cebirlerinde ideal tanımını vermiş ve idealler ile kongrüans arasındaki bağlantıları tanımlamıştır. C. Prabpayak and U. Leerawat (C. Prabpayak and U. Leerawat, 2009) KU- cebri olarak isimlendirilen yeni bir cebirsel yapı tanımlamıştır. C. Prabpayak and U. Leerawat (C. Prabpayak and U. Leerawat, 2009) KU cebirlerinde homomorfizma kavramını incelemiş ve bazı özelliklerini elde etmişlerdir.

Analitik teoriden bilindiği gibi türev kavramı, cebirsel sistemde yapı ve özelliklerin araştırılmasına yardımcı olur. Halka ve yakın halkalarda türev Posner, E.C. , Herstein, I.N. , Bell, H.E. and Martindale, III, W.S. , Lee, P.H. and Lee, T.K. , Chuang, C.L. , Chang, J.C. , Bresar, M. , Liu, Y. H. , Bell, Howard E., Mason, G. gibi pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. KU cebirlerinde türev tanımı ilk olarak S. M. Mostafa, R.A.K. Omar ve A. Abd-eldayem (S. M. Mostafa, R.A.K. Omar ve A. Abd-eldayem, 2015) tarafından verilmiştir.

Bu çalışmada önce KU-cebirleri, KU-cebirlerinde türev üzerine bilgiler verilmiş bu alanlarda yapılan çalışmalarda elde edilenlerden bahsedilmiştir. Sonra KU cebirlerindeki simetrik ikili türev tanımlanmış ve ilgili özelliklerine yer verilmiştir.

2.ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için bazı temel tanımlar ile yapılacak kanıtlarda çok sık kullanılacak olan KU cebirlerinin bazı özellikleri başvuru kolaylığı sağlamak amacıyla alındıkları kaynaklarla birlikte verilmiştir.

2.1 KU Cebirlerinde Temel Tanımlar

Tanım 2.1 X üzerinde tanımlı $*$ ikili işlemi ve 0 sabiti ile verilen bir küme olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(X, *, 0)$ üçlüsüne bir **KU-cebri** denir.

$(KU_1)(x * y) * [(y * z) * (x * z)] = 0,$

$(KU_2)\ x * 0 = 0,$

$(KU_3)\ 0 * x = x,$

$(KU_4)\ x * y = 0 = y * x$ ise $x = y$ dir.

X üzerinde "$\leq$" bağıntısı her $x, y, z \in X$ için $x \leq y \Leftrightarrow y * x = 0$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman $(X, \leq)$ in kısmi sıralı bir küme olduğu kolayca gösterilebilir.

"$\leq$" bağıntısı kullanılarak aşağıdaki aksiyomlar yazılabilir;

$(KU'_1)\ (y * z) * (x * z) \leq x * y,$

$(KU'_2)\ 0 \leq x,$

$(KU'_3)\ x \leq y \Leftrightarrow y * x = 0,$

$(KU'_4)\ x \leq y$ ve $y \leq x$ ise o zaman $x = y$ dir.

(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Örnek 2.2 $X = \{0,1,2,3,4\}$ kümesi $*$ işlemi ile aşağıdaki gibi tanımlanan bir küme olsun:

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	0	0	2	3	4
2	0	0	0	3	3
3	0	0	2	0	2
4	0	0	0	0	0

$(X,*,0)$ in bir KU-cebri olduğu kolayca görülür.

Sonuç2.3 Bir X KU-cebrinde her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır:

(i) $z * z = 0$,

(ii) $z * (x * z) = 0$,

(iii) $x \leq y$ ise o zaman $y * z \leq x * z$ dir,

(iv) $z * (y * x) = y * (z * x)$,

(v) $y * [(y * x) * x] = 0$ dir.

Tanım 2.4 R bir KU-cebri olsun. Her $x, y \in R$ için $D(x, y) = D(y, x)$ oluyorsa $D(.,.) : R \times R \rightarrow R$ dönüşümüne **simetriktir**, denir.

Tanım 2.5 R bir KU-cebri olsun. $D(.,.) : R \times R \rightarrow R$ simetrik dönüşümü için$d(x) = D(x, x)$ şeklinde tanımlanan $d : R \rightarrow R$ dönüşümüne $D(.,.)$ nin **izi** denir.

Tanım 2.6 S, KU-cebrinin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $x * y \in S$ ise S ye X in bir **alt cebri** denir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Tanım 2.7 X, KU-cebrinin boştan farklı bir A alt kümesi için aşağıda koşullar sağlanıyorsa A ya X in bir **ideali** denir.

$i)$ $0 \in A$,

$ii)$ *her* $y, z \in A$ *için* , $y * z \in A$, $y \in A$ *olduğunda* $z \in A$ *dır.*

(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Tanım 2.8 $(X,*,0)$ KU-cebrinin x, y elemanları için $x \wedge y = (x * y) * y$ olarak gösterilecektir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 2.9 $(X,*,0)$ bir KU-cebri olsun. O zaman her $x,y,z \in X$ için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

$(i)(x*y)*(x*y) \leq y*z$,

(ii) $x \leq y$ ise $z*x \leq z*y$ dir,

(iii) $z*(x*y) \leq (z*x)*(z*y)$,

(iv) $x \wedge y \leq x*y$, (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 2.10 A, X KU-cebrinin bir ideali olsun. O zaman A, X in bir alt cebridir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

3. KU–CEBİRLERİNDE TÜREVLER

Bu bölümde KU-cebirlerinde türevle ilgili bugüne kadar yapılmış olan çalışmanın kısa bir özeti verilmiş ve ilgili özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1. X, bir KU-cebri olsun. $d: X \to X$ dönüşümü her $x,y \in X$ için,

$$d(x*y) = (d(x)*y) \wedge (x*d(y))$$

koşulunu sağlıyorsa d ye X in bir (sol,sağ) türevi denir. Benzer şekilde her $x,y \in X$ için,

$$d(x*y) = (x*d(y)) \wedge (d(x)*y)$$

koşulunu sağlıyorsa d ye X in bir (sağ,sol) türevi denir. Ayrıca d, X in hem (sol,sağ) hem de (sağ,sol) türevi ise d ye X in bir türevi denir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Tanım 3.2. d, X KU-cebrinin bir türevi olsun. Eğer $d(0) = 0$ ise d ye **regüler** denir. (Mostafa, S.M, Omar, R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 3.3 $d: X \to X$ bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdakiler sağanır:

(1) d, X in bir (sol,sağ) türevi ise o zaman her $x \in X$ için $d(x) = x \wedge d(x)$ tir.

(2) d, X in bir (sağ,sol) türevi ise o zaman her $x \in X$ için $d(x) = d(x) \wedge x$ tir.

(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 3.4. $X \leq$ KU-cebri ve d, X in bir türevi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için, aşağıdakiler sağlanır:

$(i)\ d(x) \leq x$,

$(ii)\ d(x * y) \leq d(x) * y$,

$(iii)\ d(x * y) \leq x * d(y)$,

$(iv)\ d\big(x * d(x)\big) = 0$,

$(v) d^{-1}(0) = \{x \in X | d(x) = 0\}$ X in bir alt cebridir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Tanım 3.5. *d, X* KU-cebrinin bir türevi olsun. *X* in A ideali için

$d(A) = \{d(x) | x \in A\}$ olmak üzere $d(A) \subseteq A$ ise *X* e *d*-invaryant denir.

(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 3.6. *d, X* KU-cebrinin türevi olsun. O zaman:

$(i)\ x \leq y\ ise\ d(x) \leq y$,

$(ii)\ y \leq x\ ise\ d\big((y * z) * (x * z)\big) = 0$,

(iii) I, X in ideali ise o zaman *X* in her *I* ideali *d*-invaryanttır.

Başka bir değişle;

$d(I) = \{d(x) | x \in I\}$ olmak üzere $d(I) \subseteq I$ dir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Lemma 3.7. d, X KU-cebrinin (sol, sağ) türevi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$d(x * y) \leq d(x) * d(y)$ dir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Teorem 3.8. d, X KU-cebrinin bir türevi olsun. Eğer $y \in ker(d)$ ve $x \in X$ ise o zaman $x \wedge y \in ker(d)$ dir.(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Tanım 3.9. d, X KU-cebrinin bir türevi olsun. $Fix_d(X) = \{x \in X: d(x) = x\}$ olacak şekilde tanımlanır.(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 3.10. d, X KU-cebrinin bir türevi olsun. O zaman, $Fix_d(X)$ kümesi X in bir alt cebridir.(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 3.11. d, X KU-cebrinin bir türevi olsun. Eğer $x, y \in Fix_d(X)$ ise o zaman $x \wedge y \in Fix_d(X)$ tir.(Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

Önerme 3.12. $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, X KU-cebrinin bir türevi olsun. O zaman, her $x \in X$ ve her için $d_n\left(d_{n-1}\left(\ldots\left(d_2(d_1)\right)\right)\ldots\right) \leq X$ tir. (Mostafa, S.M, Omar,R.A.K, Abd-Eldayem,A,2015)

4. KU–CEBİRLERİNDE SİMETRİK İKİLİ TÜREVLER

Bu bölümde KU cebrinde simetrik ikili türev tanımı verilmiş ve ilgili özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca tezin bu bölümünde elde edilenler JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS adlı dergide yayınlanmıştır.

Tanım 4.1. X bir KU-cebri ve $D(.,.): X \times X \to X$ simetrik bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in X$için $D(x * y, z) = (D(x, z) * y) \wedge (x * D(y, z))$ ise D ye (sol, sağ) simetrik ikili türev denir. Eğer her $x, y, z \in X$ için $D(x * y, z) = (x * D(y, z)) \wedge (D(x, z) * y)$ sağlanıyor ise D ye bir (sağ, sol) simetrik ikili türev denir.

Örnek 4.2. $X = \{0,1,2,3,4\}$ cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen bir KU-cebri olsun:

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	0	0	2	2	4
2	0	0	0	1	4
3	0	0	0	0	4
4	0	1	1	1	0

$D(.,.) : X \times X \to X$ simetrik dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$D(x,y) = \begin{cases} 4, & x = y = 4 \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. O zaman D hem $(sol, sağ)$ hem $(sağ, sol)$ simetrik ikili türevdir.

Örnek 4.3. $X = \{0,1,2,3,4\}$ cayley tablosu aşağıdaki gibi verilen bir KU-cebri olsun.

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	0	0	2	3	4
2	0	1	0	3	3
3	0	0	2	0	2
4	0	1	0	0	0

$D(.,.) : X \times X \to X$ simetrik dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$D(x,y) = \begin{cases} 3, & x = y = 4 \\ 0, & aksi\ halde \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlansın. D X üzerinde bir $(sol, sağ)$ simetrik ikili türevdir. Ancak,

$$D(1 * 4,4) = D(4,4) = 3$$

$$1 * D(4,4) \wedge D(1,4) * 4 = (1 * 3) \wedge (3 * 4) = 3 \wedge 2 = (3 * 2) * 2 = 2 * 2 = 0$$

olduğundan D, X üzerinde bir $(sağ, sol)$ simetrik ikili türev değildir.

Önerme 4.4. D, X KU-cebri üzerinde bir simetrik ikili türev olsun. O zaman her $x \in X$ için $D(0, x) = 0$ dır.

Kanıt: D, X KU-cebri üzerinde bir simetrik ikili türev olsun. $x \in X$ olsun. O zaman $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev tanımı kullanarak

$$D(0,x) = D(x * 0, x) = (D(x,x) * 0) \wedge (x * D(0,x))$$

$$= 0 \wedge (x * D(0,x))$$

$$= \big(0 * (x * D(0,x))\big) * (x * D(0,x))$$

$$= \big(x * D(0,x)\big) * \big(x * D(0,x)\big)$$

$$= 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $(sağ, sol)$ simetrik ikili türev tanımı kullanılarak $D(0,x) = 0$ elde edilir. Yani D, X in simetrik ikili türevi olmak üzere her $x \in X$ için $D(0,x) = 0$ dır.

Sonuç 4.5. KU-cebri üzerinde her simetrik ikili türev regülerdir.

Kanıt: Önerme 4.4 den açıktır.

Önerme 4.6. X bir KU-cebri ve $D(.,.): X \times X \to X$ simetrik bir dönüşüm olsun. O zaman;

(i) Eğer D, X in bir $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev ise o zaman her $x, z \in X$ için $D(x,z) = x \wedge D(x,z)$ dir.

(ii) Eğer D, X in bir $(sağ, sol)$ simetrik ikili türev ise o zaman her $x, z \in X$ için $D(x,z) = D(x,z) \wedge x$ dir.

Kanıt: (i) $x, z \in X$ ve D, X üzerinde bir $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev olsun. O zaman

$$D(x,z) = D(0 * x, z)$$

$$= (D(0,z) * x) \wedge \big(0 * D(x,z)\big)$$

$$= (0 * x) \wedge D(x,z)$$

$$= x \wedge D(x,z) \text{ bulunur.}$$

(ii) $x, z \in X$ ve D, X üzerinde bir $(sağ, sol)$ simetrik ikili türev olsun. O zaman

$$D(x,z) = D(0 * x, z)$$

$$= \big(0 * D(x,z)\big) \wedge (D(0,z) * x)$$

$$= D(x,z) \wedge (0 * x)$$

$$= D(x,z) \wedge x \text{ bulunur.}$$

Önerme 4.7. X bir KU-cebri ve d, D simetrik ikili türevinin bir izi olsun. O zaman her $x, y, z \in X$ için aşağıdakiler elde edilir:

$(i)\ D(x,z) \leq x,$

$(ii)\ d(x) \leq x,$

$(iii)\ D(x * y, z) \leq D(x,z) * y,$

$(iv)\ D(x * y, z) \leq x * D(y,z),$

$(v) d^{-1}(0) = \{x \in X | d(x) = 0\},$ X in bir alt cebridir.

Kanıt: X bir KU-cebri ve d, D simetrik ikili türevinin bir izi olsun.

(i) D, X üzerinde bir $(sağ, sol)$ simetrik ikili türev olsun. Önerme 4.7 (ii) ve Sonuç 2.3 (ii) den

$$x * D(x,z) = x * (D(x,z) \wedge x) = 0 \text{ dır.}$$

O halde $D(x,z) \leq x$ dir.

(ii) (i) den kolayca elde edilir.

(iii) D, X üzerinde bir $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev olsun. Sonuç 2.3(v) kullanılarak

$$(D(x,z) * y) * [D(x * y, z)] = (D(x,z) * y) * \big[(D(x,z) * y) \wedge \big(x * D(y,z)\big)\big]$$

$$= (D(x,z) * y) * \Big[\Big((D(x,z) * y) * \big(x * D(y,z)\big)\Big) * \big(x * D(y,z)\big)\Big]$$

$= 0$ bulunur.

Yani $D(x * y, z) \leq D(x,z) * y$ elde edilir.

(iv) D, X üzerinde bir $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev olsun. Sonuç 2.3(v) kullanılarak

$$\big(x * D(y * z)\big) * [D(x * y, z)] = \big(x * D(y * z)\big) * \big[\big(x * D(y,z)\big) \wedge (D(x,z) * y)\big]$$

$$= \big(x * D(y * z)\big) * \Big[\Big(\big(x * D(y,z)\big) * (D(x,z) * y)\Big) * (D(x,z) * y)\Big]$$

$= 0$ bulunur.

Yani $D(x * y, z) \leq x * D(y,z)$ elde edilir.

(v) d regüler olduğundan $d^{-1}(0) \neq \emptyset$ dır. $x, y \in d^{-1}(0)$ olsun. O zaman $d(x) = d(y) = 0$ dır. Simetrik ikili türev tanımı ve KU_1, KU_2 ve Sonuç 2.3(i) kullanılarak

$$d(x,y) = D(x*y, x*y) = \big(x * D(y, x*y)\big) \wedge \big(D(x, x*y) * y\big)$$

$$= \big(x * \big[\big(x * D(y,y)\big) \wedge \big(D(y,x) * y\big)\big]\big) \wedge \big(\big[\big(x * D(x,y)\big) \wedge \big(D(x,x) * y\big)\big] * y\big)$$

$$= \big(x * [(x * 0) \wedge (D(y,x) * y)]\big) \wedge \big(\big[\big(x * D(x,y)\big) \wedge (0 * y)\big] * y\big)$$

$$= (x * 0) \wedge \big(\big[\big(x * D(x,y)\big) \wedge (0 * y)\big] * y\big)$$

$$= 0 \wedge \big(\big[\big(x * D(x,y)\big) \wedge (0 * y)\big] * y\big)$$

$= 0$ elde edilir.

Yani $x * y \in d^{-1}(0)$ dır. O halde $d^{-1}(0)$ Xin bir KU-alt cebridir.

Tanım 4.8: X bir KU-cebri olsun. X in boştan farklı bir A kümesi için $D(A,A) = \{D(x,x) | x \in A\}$ olmak üzere $D(A,A) \subseteq A$ ise A ya D-invaryantır, denir.

Önerme 4.9. D, X KU-cebrinin bir simetrik ikili türevi olsun. O zaman Xin her A ideali D-invaryanttır.

Kanıt: $y \in D(A,A)$ olsun. O zaman $y \in D(x,z)$ olacak şekilde $x, z \in A$ vardır. $D(x,z) \leq x$ olduğundan $x * D(x,z) = 0$ dır. $x \in A$ ve A, X in bir ideali olduğundan $D(x,z) = y \in A$ dır. O halde, $D(A,A) \subseteq A$ dır.

Önerme 4.10. X bir KU-cebri ve D, Xin bir simetrik ikili türevi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için:

(i) $x \leq y$ ve $D(x,z) \leq y$,

$(ii) y \leq x$ olduğunda $D\big((y*z)*(x*z), t\big) = 0$ dır.

Kanıt:(i) $x \leq y$ olsun. Sonuç 2.3(iii) den $y * D(x,z) \leq x * D(x,z)$ dir. $0 \leq y * D(x,z)$ ve $x * D(x,z) = 0$ olduğundan $y * D(x,z) = 0$ dır. O halde, $D(x,z) \leq y$ dir.

(ii) $y \leq x$ olsun. O zaman $(y*z)*(x*z) \leq x*y$ dir. Bu durumda $D\big((y*z)*(x*z), t\big) \leq x*y$ dir. O halde $D\big((y*z)*(x*z), t\big) \leq 0$ dır ve $0 \leq D\big((y*z)*(x*z), t\big)$ dir. Yani $D\big((y*z)*(x*z), t\big) = 0$ dır.

Önerme 4.11. D, X KU-cebrinin bir $(sağ, sol)$ simetrik ikili türevi olsun. Her $x, y, z \in X$ için $D(x * y, z) \leq D(x, z) * D(y, z)$ dir.

Kanıt: $x, y, z \in X$ olsun. Sonuç 2.3(iv) ve $(sağ, sol)$ simetrik ikili türev tanımından:

$$\big(D(x,z) * D(y,z)\big) * D(x * y, z)$$

$$= \big(D(x,z) * D(y,z)\big) * \big[\big(x * D(y,z)\big) \wedge \big(D(x,z) * y\big)\big]$$

$$= \big(D(x,z) * D(y,z)\big) * \Big[\Big(\big(x * D(y,z)\big) * \big(D(x,z) * y\big)\Big) * \big(D(x,z) * y\big)\Big]$$

$$= \Big(\big(x * D(y,z)\big) * \big(D(x,z) * y\big)\Big) * \big[\big(D(x,z) * D(y,z)\big) * \big(D(x,z) * y\big)\big]$$

$$\leq \big(D(x,z) * D(y,z)\big) * \big(x * D(y,z)\big)$$

$\leq x * D(x,z) = 0$ dır.

Ancak $0 \leq \big(D(x,z) * D(y,z)\big) * D(x * y, z)$ olduğundan

$\big(D(x,z) * D(y,z)\big) * D(x * y, z) = 0$ dır.

Yani $D(x * y, z) \leq D(x,z) * D(y,z)$ dir.

Tanım 4.12. D, X KU-cebri üzerinde bir simetrik ikili türev ve d, D nin izi olsun. $Çek_D$ kümesi;

$$Çek_D = \{x \in X | D(x,x) = d(x) = 0\}$$

olacak şekilde tanımlanır.

Teorem 4.13. D, X KU-cebri üzerinde bir simetrik ikili türevi olsun. Eğer $y \in Çek_D$ ve $x \in X$ ise o zaman $x \wedge y \in Çek_D$ dir.

Kanıt: D, X KU-cebri üzerinde bir simetrik ikili türev olsun. $y \in Çek_D$ ve $x \in X$ olsun. $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev tanımı ve (KU_2) özelliği kullanılarak

$$d(x \wedge y) = D(x \wedge y, x \wedge y)$$

$$= D\big((x * y) * y, x \wedge y\big)$$

$$= D(x * y, x \wedge y) * y \wedge (x * y) * D(y, x \wedge y)$$

$= D(x*y, x\wedge y)*y \wedge (x*y)*D(y,(x*y)*y)$

$= D(x*y, x\wedge y)*y \wedge \big((x*y)*[D(y,y)*(x*y)\wedge(x*y)*D(y,y)]\big)$

$= D(x*y, x\wedge y)*y \wedge \big((x*y)*[0*(x*y)\wedge(x*y)*0]\big)$

$= 0$ elde edilir.

Yani $x \wedge y \in Çek_D$ dir.

Tanım 4.14. D, X KU-cebrinin bir simetrik ikili türevi olsun. $a \in X$ sabit elemanı için Fix_D kümesi;

$$Fix_D = \{x \in X | D(x,a) = x\}$$

olacak şekilde tanımlanır.

Önerme 4.15. D, X KU-cebrinin bir simetrik ikili türevi olsun. O zaman Fix_D kümesi X'in bir alt cebridir.

Kanıt: $x, y \in Fix_D$ olsun. O zaman $D(x,a) = x$ ve $D(y,a) = y$ dir. $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev tanımı kullanılarak

$D(x*y,a) = D(x,a)*y \wedge x*D(y,a)$

$= x*y \wedge x*y$

$= x*y$ elde edilir.

Yani $x*y \in Fix_D$ dir.

Önerme 4.16. D, X KU-cebrinin bir simetrik ikili türevi olsun. Eğer $x, y \in Fix_D$ ise $x \wedge y \in Fix_D$ dir.

Kanıt: $x, y \in Fix_D$ olsun. O zaman $D(x,a) = x$ ve $D(y,a) = y$ dir. $(sol, sağ)$ simetrik ikili türev tanımı ve Önerme 4.15 ten

$D(x \wedge y, a) = D\big((x*y)*y, a\big)$

$= D(x*y,a)*y \wedge (x*y)*D(y,a)$

$= \big((x*y)*y\big) \wedge \big((x*y)*y\big)$

$= (x * y) * y$

$= x \wedge y$ dir.

Yani $x \wedge y \in Fix_D$ dir.

5. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı KU-cebirlerinde türev tanımları ile KU-cebirlerinin yapısının incelenmesidir. Bu tezde önce tezi anlamada kolaylık sağlayacak bazı tanım ve özellikler sunulmuştur. Üçüncü bölümde KU-cebirlerinde bugüne kadar yapılmış olan türev konularıyla ilgili çalışmaların özeti verilmiştir. Dördüncü bölümde simetrik ikili türev tanımından esinlenerek KU-cebirlerinde simetrik ikili türev tanımı verilmiş ve ilgili özellikleri KU-cebirlerinde incelenmiştir.

Bundan sonra farklı türev çeşitleri ve bunların özellikleri KU-cebirlerinde çalışılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Y. Imai and Iseki K., On Axiom Systems of Propositional Calculi}, XIV, Proc. Japan Acad. Ser A, MAth Sci., 42(1966),19-22.

Iseki K., An Algebra related with a Propositional Calculi , Proc. Japan Acad. Ser A, MAth Sci., 42(1966),26-29.

Iseki K. and Tanaka S., An Introduction to Theory of BCK-Algebras, Math. Japo., 23, 1978,1-26.

Y. Komori, The Class of BCC-algebras is no variety, Math. Japonica, 29 (1984), 391-394.

W. A. Dudek, The Number of subalgebras of fonite BCC-algebras, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 20 (1992), 129-136.

W. A. Dudek and X. H Zhang, On Ideals and Congruences in BCC algebras, Bull. Czechoslovak Math. J. , 48 (123), (1998), 21-29.

C. Prabpayak and U. Leerawat, On Ideals and Congruence in KU-Algebras, Scientia Magna International Book Series, Vol. 5 (2009), No.1, 54-57.

C. Prabpayak and U. Leerawat, On Isomorphisms of KU-Algebras, Scientia Magna International Book Series, Vol. 5 (2009), No.3, 25-31.

S.M. Mostafa, R.A.K. Omar, A. Abd-eldayem , Propeties of Derivations on KU-Algebras, Journal Of Advances in Mathematics, Vol.9, No 10,3085-3097.

VUKMAN J.,1989, Symmetricbi-derivations On Prime And Semi-Prime Rings, Aequationes Mathematicae 38, 252-254.

Al-Shehri, N. O., 2010, On Derivations of Incline Algebras, Scientia Mathematicae Japonicae, 71 (3):e-2010, 199-205 pp.

Meenakshi, A.R. andAnbalagan, S., 2010, On Regular Elements in an Incline, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2010, Article ID 903063, 12 pages, doi:10.1155/2010/903063.

Özbal, A. Ş. And Fırat, A., 2011-a, On *f*-Derivations of Incline Algebras, International Electronic Journal of Pureand Applied Mathematics, 3(1),83-90 pp.

Özbal, A. Ş. And Fırat, A., 2011-b, On Symmetric Bi-Derivations of Incline Algebras, International Mathematical Forum, 4 (41), 2031-2036 pp.

Özbal, A. Ş., 2011, Kafeslerde Türev ve Genellemeleri Üzerine Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Özbal, A. Ş. And Fırat, A., 2014, On Generalized Derivations of Incline Algebras, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 43 (4), 553-559.

Kim, K. H. And Park, S. Y., 2015, On Symmetric Bi-Derivations of Incline Algebras, International Mathematical Forum, Vol. 10,2015,no. 1, 35-45

Yıldırım, H. And Özbal, A. Ş., 2015, On Generalized f-Derivations of Incline Algebras, International Mathematical Forum, Vol. 10, 2015, no. 6, 273-282

Mostafa, S.M. Omar, R.A.K. Abd-eldayem, A., 2015 Properties of Derivations on KU-Algebras, International Of Advances In Mathematics , Vol. 9,2015,no. 10, 3085-3097

ÖZGEÇMİŞ

Ömer YILDIRIM 1980 yılında Antalya'da doğdu. İlkokulu, ortaokulu ve liseyi Antalya'da bitirdi. 1999 yılında kazanmış olduğu Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2006 yılında mezun oldu. 2008 yılında Kara Kuvvetleri Komutanlığı'nın yapmış olduğu Matematik öğretmeni temini sınavını kazandı ve aynı yıl İstanbul Tuzla Piyade Okul Komutanlığı'ndan Teğmen rütbesiyle mezun oldu. İzmir Maltepe Askerî Lisesi'ne Matematik öğretmeni olarak atandı. 2008 yılından beri İzmir Maltepe Askerî Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.