YAŞAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STURM-LIOUVILLE FARK DENKLEMLERİ

Simten KAHRAMAN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Sunum Tarihi: 13.07.2016

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Şahlar MEHERREM

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç. Dr. Burcu Silindir YANTIR

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

STURM-LIOUVILLE FARK DENKLEMLERİ

Simten KAHRAMAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Temmuz 2016, 48 sayfa

Sturm-Liouville problemleri literatürde birçok bilim insanı tarafından çalışılmış, çözümlerinin varlıkları, çözüm özelliklerine dair bir çok sonuç elde edilmiştir. Bu tezde $p(t)$ $[a, b+1] = \{a, a+1, \dots, b, b+1\}$ aralığında pozitif tanımlı bir fonksiyon, $g(t)$ $[a+1, b+1]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\Delta(p(t-1).\Delta y(t-1)) + g(t).y(t) = 0$$

y-eşlenik Sturm-Liouville fark denklemini ele alacağız.

Anahtar Kelimeler: Lineer fark denklemi, y-eşlenik problemleri, Sturm-Liouville problemleri, Cauchy fonksiyonu

ABSTRACT

STURM-LIOUVILLE DIFFERENCE EQUATIONS

KAHRAMAN, Simten

M.Sc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Ahmet YANTIR

June 2016, 48 pages

Sturm-Liouville problem has been studied by many scientist in the literature and the existence and properties of solutions of Sturm-Liouville problem have been obtained.

In this thesis, we study the self adjoint Sturm-Liouville difference equation

$$\Delta(p(t-1).\Delta y(t-1)+g(t).y(t)=0$$

Where $p(t)$ is positive defined function defined on $[a,b+1]=\{a,a+1,\dots,b,b+1\}$ and $p(t)$ is a function defined on$[a+1,b+1]$

Key words: Linear differne equations, self-adjoint problems, Sturm-Liouville equation, Cauchy function.

TEŞEKKÜRLER

Tezimi hazırlarken bana destek olan herkese, özellikle de erken uyuyarak bana çalışma firsatı tanıyan kızım Alize KAHRAMAN'a ve tezimde rehberlik eden saygıdeğer tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR' a, çok teşekkür ederim.

Simten KAHRAMAN

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**STURM-LIOUVILLE FARK DENKLEMLERİ**"adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynaklar dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Simten KAHRAMAN

01.07.2016

İÇİNDEKİLER

1 FARK DENKLEMLERİ

Fark denklemleri diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin yanında; aynı zamanda biyoloji, ekonomi, mühendislik, savunma v.b. alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde de doğrudan ya da dolaylı olarak yer alırlar. Fark denklemleri daha çok sürekli olmayan problemleri ortaya koyar.

Bu bölümde fark denklemlerini genel hatlarıyla tanıtacağız ve kavramların anlaşılabilmesi için açıklayıcı örnekler vereceğiz. Bu bölümde ele alınan genel kavramlar, tanım ve teoremler için [1-6] kaynakları incelenebilir.

1.1 Temel Kavramlar

Tanım 1.1. Bir $x: N \to R$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya x in birinci dereceden fark türevi

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N = \{0,1,2,\dots\}$ doğal sayılar kümesi ve R de reel sayılar kümesidir [9] .

Benzer şekilde x in ikinci derece fark türevi

$$\Delta^2 x(n) = \Delta\left(\Delta\big(x(\mathrm{n})\big)\right) = \Delta\big(x(\mathrm{n}+1) - x(\mathrm{n})\big) = \Delta\big(x(\mathrm{n}+1)\big) - \Delta\big(x(\mathrm{n})\big)$$

$$= x(n+2) - x(n+1)[x(n+1) - x(n)]$$

$$= x(n+2) - 2x(n+1) + x(n)$$

olarak bulunur.

Bu şekilde devam ederek x in k. dereceden fark türevi

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \tag{1.1}$$

şeklinde buluruz.

Burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{j!}$$

ile tanımlanır.

Fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara da uygulanabilir. Δ operatörünün sağ alt köşesine konulan bir indis, kısmi fark türevin hangi değişkene göre olduğunu belirtir.

Örneğin;

$$\Delta_n n e^t = (n+1)e^t - ne^t = e^t(n+1-n) = e^t \text{ veya}$$

$$\Delta_n n e^t = ne^{t+1} - ne^t = ne^t.e - n.e^t = ne^t(e-1)$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. Δ fark operatörü doğrusal operatördür. Yani a ve b sabitler olmak üzere

$$\Delta\big((ax+by)(n)\big) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$$

şeklindedir [9].

İspat:

$$\Delta\big((ax+by)(n)\big) = ax(n+1) + by(n+1) - ax(n) - by(n)$$

$$= a\big(x(n+1) - x(n)\big) + b(y(n+1) - y(n))$$

$$= a\Delta x(n) + b\Delta y(y)$$

Örnek 1.3. $x(n) = 4n^2 - 3n + 1$ olmak üzere

$$\Delta x(n) = \Delta(4n^2 - 3n + 1) = 4\Delta(n^2) - 3\Delta(n) + \overbrace{\Delta(1)}^{0}$$

$$= 4[(n+1)^2 - n^2] - 3(n+1-n)$$

$$= 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 - 3n - 3 + 3n$$

$$= 8n + 1$$

Tanım 1.4. E öteleme operatürü

$$Ex(n) = x(n+1)$$

$$E^k x(n) = x(n+k)$$

şeklinde tanımlanır [9].

Bu durumda a ve b sabitleri için

$$E\big(ax(n) + by(n)\big) = aEx(n) + bEy(n)$$

olduğundan E operatörü lineer bir operatördür.

Δ fark operatörü ve E öteleme operatörü arasında

$$\Delta = E - \mathrm{I}$$

ilişkisi vardır. Burada I birim operatörüdür. ($\mathrm{I}x(n) = x(n)$ dir).

Sık kullanılan bazı özel fonksiyonların fark türevleri şu şekildedir;

1) $x(n) = a^n \Rightarrow \Delta x(n) = (a-1)a^n, (n \in N)$
2) $x(n) = \sin an \;\Rightarrow\; \Delta x(n) = 2\sin\frac{a}{2}\,\cos a\left(n+\frac{1}{2}\right), n \in N$
3) $x(n) = \cos an \;\Rightarrow\; \Delta x(n) = 2\sin\frac{a}{2}\,\sin a\left(n+\frac{1}{2}\right), n \in N$
4) $x(n) = \log an \;\Rightarrow\; \Delta x(n) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right), n \in Z^+$
5) $x(n) = \log\Gamma(n),\; \Delta x(n) = \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt,\; \log n, n \in Z^+$

Teorem 1.5. k. dereceden

$$p(n) = a_o n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$$

polinomu için

$$\Delta^k p(n) = a_0 . k! \tag{1.2}$$

ve

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \qquad i \geq 1 \tag{1.3}$$

dir. ($a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_k$ katsayıları reel sabitlerdir) [9].

İspat: $p(n) = a_o n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k$ polinomunun birinci basamaktan türevi

$\Delta p(n) = [a_o(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \cdots + a_k]$-[$a_o n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_k]$

$= a_o k n^{k-1} +$ derecesi $k-1$ den küçük terimler ve ikinci basamaktan türevi

$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1)n^{k-2} +$ derecesi $k-2$ den küçük terimler

$\vdots$
$\vdots$
$\vdots$

$\Delta^k p(n) = a_0 k(k-1) \ldots 1 n^{k-k}$

$= a_0 k!$

şeklinde bulunur. Her $i \geq 1$ için $\Delta^{k+i}\, p(n) = 0$ olur.

Örnek 1.6. $p(n) = 3n^3 - 2n + 1$ polinomunun dördüncü basamağa kadar farklarını hesaplayalım.

$p(n)$ k. dereceden bir polinom olmak üzere

$$\Delta^k p(n) = a_0 . k!$$

idi. Bu durumda

$$\Delta^3 p(n) = 3 \,.\, 3! = 18$$

$$\Delta^4 p(n) = 0$$

Örnek 1.7. $p(n) = 4n^3 - 2n + 1$ polinomunun üçüncü basamağa kadar farkını hesaplayalım.

$p(n)$ k. dereceden bir polinom olmak üzere

$$\Delta^k p(n) = a_0 (k!)$$

idi.

Bu durumda

$$\Delta^3 p(n) = 4\,.\,3! = 24$$

olarak elde edilir.

Fark analizinde karşılaşılan bir diğer fonksiyon $x^{(k)}$ ile gösterilen faktöriyel polinom veya faktöriyel kuvvetir. Bu fonksiyon x in k. faktöriyel polinomu veya faktöriyel kuvveti olarak okunur ve tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 1.8. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

a) $k \in Z^+$ için $x^{(k)} = x\,.(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)$;
b) $k = 0$ için $x^{(0)} = 1$;
c) $k \in Z^-$ için $x^{(k)} = \frac{1}{(x+1).(x+2)\ldots(x-k)}$;
d) $k \notin Z$ için $x^{(k)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}$

Örnek 1.9.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{(3)} = \frac{3}{4}\,.\left(\frac{3}{4}-1\right).\left(\frac{3}{4}-2\right) = \frac{3}{4}\,.\left(-\frac{1}{4}\right).\left(-\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{15}{64}\right),$
b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{(-3)} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}+1\right)\left(\frac{3}{4}+2\right)\left(\frac{3}{4}+3\right)} = \frac{1}{\frac{7}{4}.\frac{11}{4}.\frac{15}{4}} = \frac{64}{1155}$
c) $3^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)} = \frac{I(4)}{I\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{3!}{\frac{1.3.5.\sqrt{\pi}}{2^3}} = \frac{48}{15\sqrt{\pi}}$

elde edilir.

Burada Γ fonksiyonunun

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\,.\sqrt{n}$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-1)^n.2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,.\sqrt{n}$$

özellikleri kullanılmıştır.

Örnek 1.10.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{(2)} = \frac{2}{3}\,.\left(\frac{2}{3}-1\right) = \frac{2}{3}\,.\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{(-2)} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}+1\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)} = \frac{1}{\frac{5}{3}.\frac{8}{3}} = \frac{9}{40}$

e) $4^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma\left(4-\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{(5-1)!}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+4\right)} = \frac{4!}{\frac{1.3.5.7\sqrt{\pi}}{2^4}} = \frac{4.3.2.1.16}{105\sqrt{\pi}} = \frac{384}{105\sqrt{\pi}}$

Şu ana kadar $x(n)$ dizileri için tanımladığımız Δ ve E operatörleri, sürekli fonksiyonlara da uygulanabilir. Yani; sürekli bir $f(x), x \in R$, fonksiyonu için

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

ve

$$Ef(x) = f(x+1)$$

dir. Eger $f(x) = x^{(k)}$ ise

$$\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - x^{(k)}$$

ve

$$Ex^{(k)} = (x+1)^{(k)}$$

yazılabilir.

Yardımcı Teorem 1.11.

a) $\Delta x^{(k)} = k.x^{(k-1)}$ (1.4)

b) $\Delta^l x^{(k)} = k.(k-1)\ldots(k-l+1)x^{(k-l)}$ (1.5)

c) $\Delta^k x^{(k)} = k!$ (1.6)

Burada Δ, x'e göre fark türevini ifade eder.

İspat:

a) $\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - (x)^{(k)}$

$$= (x+1).x(x-1)\ldots(x-k+2) - x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+2)(x-k+1)$$

$$= (x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-k+2)[(x+1)-(x-k+1)]$$

$$= k.x^{(k-1)}$$

b) $\Delta^l x^{(k)} = \Delta^{l-1}(\Delta x^{(k)})$

$= \Delta^{l-1}(k.x^{(k-1)})$

$= \Delta^{l-2}(\Delta(k.x^{(k-1)}))$

$= \Delta^{l-2}(k(k-1)x^{(k-2)})$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$= k.(k-1)\ldots(k-l+1)x^{(k-l)}$

c) (1.5) den $l = k$ alınırsa,

$$\Delta^k x^{(k)} = k.(k-1)\ldots(k-k+1)x^{(k-k)} = k!$$

elde edilir.

Bu yardımcı teoremden, diferansiyel analizdeki x^k polinomunun türevi için bilinen kuvvet kuralının, fark analizinde ancak $x^{(k)}$ faktöriyel kuvveti için geçerli olduğu görülmektedir.

Örnek 1.12. (1.6) $\Delta = \Delta_x$ veriliyor.

a) $\Delta\left(6x^{(4)}\right) = 4.6x^{(3)} = 24x^{(3)} = 24(x)(x-1)(x-2)$ (Tanım 1.8 (a) dan)

b) $\Delta\left(5x^{(3)}\right) = 3.5x^{(2)} = 15x(x-1)$ (Tanım 1.8 (a) dan)

c) $\Delta\left(10x^{(-2)}\right) = 2.10x^{(-3)} = -20x^{(-3)} = \frac{-20}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ (Tanım 1.8 (c) den)

d) $\Delta\left(-4x^{(-3)}\right) = (-3).(4)x^{(-4)} = 12x^{(-4)} = \frac{12}{(x+1)(x-2)(x-3)(x-4)}$

(Tanım 1.8 (a) den)

2 GENEL FARK DENKLEMLERİ

2.1 Temel Bilgiler

Tanım 2.1. $n \in N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon ve $F: N \times R^{k+1} \to R$ bir fonksiyon olmak üzere

$$F\big(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k)\big) = 0 \tag{2.1}$$

eşitliğine k. mertebeden bir fark denklemi denir. (2.1) denklemi

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k-1)) \tag{2.2}$$

yazılabiliyor ise bu forma (2.1) denkeminin normal şeklinde formu denir [7, 9].

Örnek 2.2. Bir S cümlesi üzerinde tanımlı olan

$\Delta x(n) + 5x(n) = 0$ fark denkleminin eşdeğerini

$$x(n+1) - x(n) + 5x(n) = 0$$

$$x(n+1) + 4x(n) = 0$$

şeklinde buluruz.

$\Delta^2 x(n) + 2\Delta x(n) + x(n) = 0$ fark denkleminin eşdeğerini

$$x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) + 2x(n+1) - 2x(n) + x(n) = 0$$

$$x(n-2) = 0$$

şeklinde buluruz.

$x(n)\Delta^3 x(n) = \frac{1}{2}$ fark denkleminin eşdeğerini

$$x(n).x(n+3) - 3.x(n).x(n+2) + 3x(n).x(n+1) - x^2(n) = \frac{1}{2}$$

şeklinde buluruz.

Tanım 2.3. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun var olan en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin basamağı denir [9].

Örneğin; $x(n+4) - 4x(n+2) + 5x(n+1) = 0$ denkleminin basamağı

$$(n+4) - (n+1) = 3 \text{ tür.}$$

Tanım 2.4. N üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu her $n \in N$ için (2.1) denklemini sağlıyorsa, o zaman $x(n)$ fonksiyonuna N üzerinde (2.1) denkleminin bir çözümü denir. k. basamaktan bir fark denkleminin

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \tag{2.3}$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne genel çözüm denir. Genel çözümden elde edilen çözümlerede özel çözüm denir.

Örnek 2.5. Aşağıdaki fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

a) $x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0$
b) $x(n+2) + 4x(n) = 0$

a) Çözümlerin $x(n) = t^n$ formunda olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$t^{n+3} - 3t^{n+2} + 3t^{n+1} - t^n = 0$$

elde edilir.

Buradan

$$t^n(t^3 - 3t^2 + 3t - 1) = 0$$

bulunur.

$t^n \neq 0$ olduğundan

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$

karakteristik denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerin kökleri $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ ve $t_3 = 1$ bulunur. O halde kökler tekrarlı olduğundan mertebe indirgeme yöntemi ile genel çözüm $x(n) = c_1 + c_2.n + c_3.n^2$ şeklinde elde edilir.

b) $x(n+2) + 4x(n) = 0$ fark denkleminin karakteristik denklemi $t^2 + 4 = 0$'dir.
Bu denklemin kökleri $t_{1,2} = \pm 2i$'dir

$$\begin{aligned}(2i)^n &= 2^n\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n \\ &= 2^n\cos\frac{\pi n}{2} + i\,2^n\sin\frac{\pi n}{2}\end{aligned}$$

olduğundan genel çözüm

$$x(n) = c_1\left(2^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right) + c_2\left(2^n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.6. $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_k(n)$ katsayıları ile $g(n), n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \cdots + a_k(n)x(n) = g(n) \qquad (2.3)$$

biçimindeki denkleme k. mertebeden lineer fark denklemi denir. $g(n) = 0$ ise homojen lineer fark denklemi, diğer durumlarda homojen olmayan lineer fark denklemi adını alır [7, 9].

Örneğin; $\Delta^2 x(n) + 2\Delta x(n) + x(n) = 0$, ikinci basamaktan ve sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemidir.

$$x(n+2) + 2x(n+1) + x(n) = 0$$

formundadır.

Tanım 2.7. $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ fonksiyonlarının $W(n)$ ile gösterilen Casoratyanı

$$W(n) = det\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \dots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \dots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \dots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [7, 9].

Örnek 2.8. Üçüncü basamaktan homojen

$$x(n+3) - 3(n+2) + 4x(n+1) - 12x(n) = 0$$

fark denkleminin $2^n, (-2)^n, (-3)^n$ çözümlerinin kümesi lineer bağımsız küme oluşturur. Çünkü Casoratyanı

$$W(n) = det\begin{pmatrix} 2^n & (-2)^n & (-3)^n \\ 2^{n+1} & (-2)^{n+1} & (-3)^{n+1} \\ 2^{n+2} & (-2)^{n+2} & (-3)^{n+2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $n = 0$ noktasında

$$W(0) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0$$

dır.

Doğrusal fark denklemleri, çözümleri ve çözümlerinin Casoratyan'ı hakkında detaylı bilgileri [1-9] kaynaklarında bulunabilir.

Teorem 2.9.

$$x(n+k)+a_1(n)x(n+k-1)+\cdots+a_k(n)x(n)=0 \tag{2.4}$$

lineer homojen fark denkleminin k tane lineer bağımsız çözümü $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ olsun. Bu durumda fark denkleminin genel çözümü

$$x(n)=c_1x_1(n)+c_2\,x_2(n)+\ \ldots+c_rx_r(n) \tag{2.5}$$

dir, burada $c_1, c_2, \ldots, c_k$ keyfi sabitlerdir.

Örnek 2.10. İkinci basamaktan homojen

$$x(n+2)-4x(n+1)+4x(n)=0, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

fark denkleminin bağımsız çözümleri 2^n ve $n.2^n$ dir.

Genel çözüm;

$$x(n)=c_1 2^n+c_2 n.2^n$$

$$=2^n(c_1+n.c_2), \quad n=0,1,2,\ldots$$

c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Diğer taraftan $x(0)=1, x(1)=6$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü bulmak için

$$x(n)=c_1 2^n+c_2 n.2^n$$

genel çözümünde $n=0$ ve $n=1$ yazılır.

$n = 0$ için

$$x(0) = c_1 2^0 + c_2 0.2^0 = c_1$$

olduğundan $c_1 = 1$ bulunur.

$n = 1$ için

$$6 = x(1) = c_1 2^1 + c_2 1.2^1 = 2c_1 + 2c_2 = 2 + 2c_2$$

olduğunda $c_2 = 2$ elde edilir.

Buradan; soruda verilen başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$x(n) = 2^n(1 + 2n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

dir.

Örnek 2.11. $x(n+2) - x(n) = 0$ fark denklemlerinin genel çözümünü yazıp $x(0) = 0$ ve $x(1) = 2$ başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümü bulalım.

Çözüm: $x(n+2) - x(n) = 0$ karakteristik denklem $t^2 - 1 = 0$ dır. Kökleri ise $t_{1,2} = \pm 1$ dir.

O halde lineer bağımsız çözümler $x_1(n) = 1^n, x_2(n) = (-1)^n$ dir.

Buradan $x(n) = c_1 + c_2(-1)^n$ genel çözümü bulunur.

Başlangıç koşullarına uygulanırsa

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 - c_2 = 2$$

denklemleri elde edilir. Buradan $c_1 = 1$ ve $c_2 = -1$ bulunur. O halde

$x_n = 1 - (-1)^n$ özel çözümdür.

2.2 Birinci Basamaktan Lineer Fark Denklemleri

Bu bölümde birinci basamaktan lineer, homojen olmayan

$$x(n+1) = a(n)x(n) + g(n), \qquad n \geq n_0 \geq 0, \tag{2.6}$$

fark denklemi ve

$$x(n_o) = x_0$$

başlangıç koşulunda meydana gelen başlangıç değer probleminden bahsedeceğiz. Buradan $a(n)$ katsayısı ve $g(n)$ fonksiyonları, $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olup her $n \geq n_0$ için $a(n) \neq 0$ dır.

Örnek 2.12. Bir kuş türünün nüfusu yılda %3 oranında artmaktadır. Bu türün başlangıçtaki ve n. yıldaki nüfusları, sırasıyla, x_0 ve x_n ise, bu durumda

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}03x_n$$

$$= 1{,}03x_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

yazılabilir. Bu birinci basamaktan homojen denklem olup, herhangibir yıldaki ile bir önceki yılın kuş sayısı arasındaki ilişkiyi gösterir. Başlangıçta $x_0 = 100$ kuş varsa, 5 yıl sonraki kuş sayısı:

$$x_1 = 1{,}03x_0 = (1{,}03).100 = 103$$

$$x_2 = 1{,}03x_1 = (1{,}03).103 = 106{,}9$$

$$x_3 = 1{,}03x_2 = (1{,}03).106{,}9 = 109{,}2727$$

$$x_4 = 1{,}03x_3 = (1{,}03).109{,}2727 = 112{,}550881$$

$$x_5 = 1{,}03x_4 = (1{,}03).112{,}550881 = 115{,}927407$$

dir.

Elde edilen sonuç genellenirse genel çözüm

$$x_n = (1{,}03)^n . x_0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde elde edilir.

Hatırlatma: Birinci basamaktan sabit katsayılı (2.6) denklemi ve $x(0) = x_0$ koşulu için çözüm yolu

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r)$$

dir. Diğer bir durumda, g bir sabit olmak üzere $g(n) = g$ olduğunda

$$x(n) = \begin{cases} a^n x_0 + \left(\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right) g, & a \neq 1 \\ x_0 + g(n), & a = 1 \end{cases}$$

olur.

Örnek 2.13. $n > 0$ için

$$x(n+1) = n.x(n) + n!\,.3^n, \qquad x(1) = \frac{1}{2}$$

problemini çözelim.

$$x(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) x_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r)$$

$$x(n) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} i + \sum_{r=1}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} i\right) r!\, 3^r$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)! + \sum_{r=1}^{n-1}(n-1)!\,3^r$$

$$= (n-1)!\left(\frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{n-1} 3^r\right)$$

$$= (n-1)!\left(-1 + \frac{3^r}{2}\right)$$

elde edilir.

Örnek 2.14. $x(n+1) = 4x(n) + 5,\ x(1) = 1$ problemini çözelim.

$x(n+1) = ax(n) + g(n)$ denkleminin $x(0) = x_0$ koşulu için çözümü:

$$x(n) = a^n x_0 + \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r-1} g(r)$$

formülü ile bulunur. O halde

$$x(n) = 4^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} 4^{n-r-1} 5^r$$

$$= 4^{n-1} + 4^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{5}{4}\right)^r$$

$$= 5^n - 4^n$$

bulunur.

2.3 İkinci Basamaktan Fark Denklemleri

a_1 ve a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ koşulu ile ikinci basamaktan sabit katsayılı lineer homojen

$$x(n+2) + a_1 x(n+1) + a_2 x(n) = 0 \tag{2.7}$$

fark denklemlerini ele alalım. Bu denklem için λ^n şeklinde bir çözüm aranırsa

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{2.8}$$

bulunur. Bu denklem, 2. basamaktan sabit katsayılı lineer homojen fark denkleminin karakteristik denklemidir. Bu denklemin çözümü olan λ_1 ve λ_2 köklerine karakteristik kökler denir. λ^n seçmemizin sebebi, lineer fark denklemlerinde üstel fonksiyon şeklinde yazılmasından kaynaklanır.

Homojen fark denklemlerinin genel çözümü λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır.

Durum 1. λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve farklı ise;

$$x(n+2) + a_1 x(n+1) + a_2 x(n) = 0 \tag{2.9}$$

farklı denklemlerin genel çözümü;

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n \tag{2.10}$$

şeklindedir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Durum 2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ise mertebe indirgeme yöntemi ile genel çözüm,

$$x(n) = (c_1 + c_2 n)\lambda^n$$

şeklindedir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir [9].

Durum 3. $\lambda_1 = \propto + i.\beta$ ve $\lambda_2 = \propto - i.\beta$ ise $(\propto, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \neq 0)$ fark denkleminin genel çözümü:

$$x(n) = r^n(c_1 \cos n.\theta + c_2 \sin n.\theta) \tag{2.11}$$

veya

$$x(n) = A.r^n \cos(n\theta - \beta) \tag{2.12}$$

şeklindedir. c_1, c_2, A ve β keyfi sabitlerdir [9].

$$\left(r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$$

Örnek 2.15. $x(n+2) + 5x(n+1) + 6x(n) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ şeklinde bulunur. Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = -3$ ve $\lambda_2 = -2$ dir. O halde (2.3) denkleminden gelen çözüm

$$x(n) = c_1(-3)^n + c_2(-2)^n$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.16. $x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = 0$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ şeklinde bulunur.

Bu denklemin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ dür.

O halde (2.3) denkleminden genel çözüm

$$x(n) = (c_1 + c_2)3^n$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.17. Bir çift olgun tavşan her ayın sonunda bir çift yavrulamakta ve bu yavrular iki ayda olgunlaşmaktadır. Buna dayanarak bir çift olgun tavşanla işe başlanırsa bir yılın sonunda kaç tavşan elde edilir?

Ay	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Çift Sayısı	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

1. ayın sonunda bir çift olgun tavşan, bir çift yavru doğuracağından, iki çift tavşan bulunur. İkinci ay sonunda yine ilk olgun çift doğurmaya devam edeceğinden üç çift tavşan elde edilir. 3. ayın sonunda hem ilk hem de ikinci çift doğuracağından beş çift tavşan bulunur.

Tavşan probleminin matematiksel modeli:

$$x(n+2) - x(n+1) - x(n) = 0, x(0) = 1, x(1) = 2, 0 \leq n \leq 12$$

dir. $x(n)$, n. ay sonundaki tavşan çiftlerinin sayısıdır. Bu başlangıç değer probleminin karakteristik denklemi $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ dir. Kökleri ise $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ dir.

$$x(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

$$= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

başlangıç koşulları uygulanırsa;

$x(0) = 1$ den $c_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$x(1) = 2$ den $c_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

elde edilir. O halde

$$x(n) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right).\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, 0 \leq n \leq 12$$

problemimizin çözümünü verir.

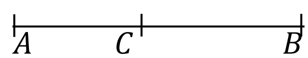
Fibonacci dizisi ile tavşan probleminin ilk 14 terimi birbirinin aynı olduğundan ikisi arasında bir ilişki söz konusudur.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(n+1)}{x(n)} = \alpha \approx 1{,}618$$

dir. Bu sayı altın orandır.

Altın Oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verildiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır.

Eski mısır ve yunanlılar tarafından keşedilmiş, mimaride ve sanatta kullanılmıştır.



doğrusuna bakarsak Altın Oran; $\frac{[CB]}{[AC]} = \frac{[AB]}{[CB]} = 1{,}618033988$...

şeklindedir.

Altın oran, pi (π) gibi irrasyonel bir sayıdır ve ondalık biçimde yazılışı 1,618033988749894… tür. Altın oranın sembolü $\phi(Fi)$ dir.

2.4 k. Basamaktan Fark Denklemleri

Bu bölümde k. basamaktan lineer sabit katsayılı homojen

$$x(n+k)+a_1(n)x(n+k-1)+\cdots+a_k(n)x(n)=0 \tag{2.13}$$

fark denklemini ele almaktayız. Burada $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ reel sabitlerdir ve $a_k \neq 0$ dır.

(2.13) denkleminin genel çözümü için üç durum söz konusudur.

Durum 1:

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{2.14}$$

karakteristik denkleminin k tane $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kökü reel ve birbirinden farklı ise genel çözüm

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n \tag{2.15}$$

şeklindedir.

Durum 2:

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \tag{2.14}$$

karakteristik denkleminin reel kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ olsun. Ayrıca bu kökler sırasıyla $m_1, m_2, \ldots, m_r$ katlı olsunlar.

$$\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = k\right)$$

Bu durumda fark denklemini E operatörü cinsinden

$$(E-\lambda_1)^{m_1}(E-\lambda_2)^{m_2}\dots(E-\lambda_r)^{m_r}x(n)=0$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda genel çözüm

$$x(n)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^n(c_{i_0}+c_{i_1}n+c_{i_2}n^2+\cdots+c_{im_{i-1}}n^{m_{i-1}}) \tag{2.16}$$

şeklinde bulunur.

Durum 3:

$$\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+\cdots+a_k=0 \tag{2.14}$$

karakteristik denklemlerinin bir $\lambda_1=\propto+i.\beta$ kompleks kökü q_1 katlı olsun.

$$(2q_1\leq k)$$

Bu durumda $k.$ dereceden lineer sabit katsayılı homojen fark denkleminin (2.13) $2q_1$ tane gerçel değerli bağımsız çözümünü

$$r^n\cos n\theta\,,r^n\sin n\theta\;;\;nr^n\cos n\theta\,,nr^n\sin n\theta\;;\dots;n^{q-1}r^n\cos n\theta\,,n^{q-1}r^n\sin n\theta \tag{2.17}$$

şeklinde bulabiliriz.

Örnek 2.18. $x(n+3)-3x(n+2)+4x(n+1)-2x(n)=0$ denkleminin çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem $\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$ dır. Denklemin kökleri ise $\lambda_1=1,\lambda_2=1+i,\lambda_3=1-i$ dir.

Bu durumda genel çözümü (2.17) denkleminden

$$x(n) = c_1 1^n + 1^n \left(c_2 \cos n\frac{\pi}{2} + c_3 \sin n\frac{\pi}{2} \right) = c_1 + c_2 \cos n\frac{\pi}{2} + c_3 \sin n\frac{\pi}{2}$$

şeklinde buluruz.

Örnek 2.19. $x(n+3) - 3x(n+2) + 4x(n+1) - 2x(n) = 0$ denkleminin çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ dır. Denklemin kökleri ise $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ dür.

Genel çözümü ise

$$x(n) = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 3^n$$

şeklinde bulunur.

2.5 İkinci Basamaktan Değişken Katsayılı Denklemler

Bu bölümde ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen

$$a_0(n)x(n+2) + a_1(n)x(n+1) + a_2(n)x(n) = 0,\ n \geq n_0 \tag{2.18}$$

fark denklemlerinin genel çözümünü bulmak için gerekli methotları ele alacağız. $(a_0(n) \neq 0, a_2(n) \neq 0)$. Bunun için iki yöntemden söz edeceğiz. Birincisi operatörün çarpanlara ayrılması yöntemi ve diğeri bir çözümün bilinmesi durumunda çözüm yöntemi.

2.5.1 Operatörün Çarpanlarına Ayılması

(2.18) denklemini E öteleme operatörü yardımıyla

$$(a_0(n)E^2 + a_1(n)E + a_2(n))x(n) = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$a_0(n)E^2 + a_1(n)E + a_2(n)$$

operatörü E ye göre çarpanlarına ayrılabilirse bu durumda verilen denklem iki tane birinci basamaktan denklem indirgenebilir.

Örnek 2.20. İkinci basamaktan değişken katsayılı

$$x(n+2) - (n+1)x(n+1) - (n+1)x(n) = 0 \tag{2.19}$$

fark denklemlerini ele alalım. Bu denklemin öteleme operatörü cinsinden

$$(E^2 - (n+1)E - n - 1)x(n) = 0 \tag{2.20}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Bu denklemin çarpanlarını

$$(E+1)(E-n-1)x(n) = 0 \tag{2.21}$$

şeklinde bulabiliriz. Buradan

$$(E-n-1)x(n) = z(n) \tag{2.22}$$

dersek (2.21) denklemini

$$(E+1)z(n) = 0$$

denklemine indirgemiş oluruz.

Bu denklemin çözümünü ise

$$z(n) = (-1)^n c_1 \tag{2.23}$$

biçiminde buluruz. (c_1 keyfi sabittir). (2.23) denklemini (2.22) de yerine yazarsak

$$(E - n - 1)x(n) = (-1)^n . c_1 \tag{2.24}$$

ya da

$$x(n+1) = x(n+1)x(n) + (-1)^n c_1 \tag{2.25}$$

i elde ederiz. Bu da birinci basamaktan homojen olmayan bir denklem olup, genel çözümünü

$$\begin{aligned} x(n) &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1}(i+1)\right) c_2 + \sum_{r=n_0}^{n-1}\left(\prod_{i=r+1}^{n-1}(i+1)\right)(-1)^r c_1 \\ &= c_2 n! + \sum_{r=n_0}^{n-1} n(n-1)\ldots(r+2)(-1)^r c_1 \\ &= c_2 n! + c_1 \sum_{r=n_0}^{n-1} \frac{(-1)^r n!}{(r+1)!} \end{aligned} \tag{2.26}$$

şeklinde buluruz. Burada c_2 keyfi sabittir. Bu durumda (2.19) denkleminin genel çözümünü (2.26) biçiminde buluruz.

2.5.2 Bir Çözümün Bilinmesi Durumu

(2.18) homojen denkleminin aşikar olmayan bir çözümünü bildiğimiz taktirde bununla lineer bağımsız olacak ikinci bir çözüm bulabiliriz. Bunun için Abel Yardımcı Teoremini hatırlatıp, $k = 2$ için yineliyelim.

Abel Yardımcı Teoremi 2.21. $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ fonksiyonları

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \cdots + a_k(n)x(n) = 0 \qquad (2.27)$$

homojen denkleminin çözümleri ve $W(n)$ çözümlerin casoratyanı olsun.

Bu durumda $n \geq n_0$ için $W(n)$

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_k(i)\right)W(n_0) \qquad (2.28)$$

eşitliğini sağlar.

Yardımcı Teorem 2.22. $x_1(n)$ ve $x_2(n)$, (2.18) homojen fark denkleminin $[n_0, \infty)$ üzerinde tanımlı iki çözümü ve $W(n)$ çözümlerin casoratyanı olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için $W(n)$

$$W(n+1) = \frac{a_2(n)}{a_0(n)}W(n) \ldots \qquad (2.29)$$

fark denklemini sağlar.

$x_1(n), [n_0, \infty)$ üzerinde (2.18) in aşikar olmayan bir çözümü ve $x_2(n)$ de aynı denklemin diğer bir çözümü olsun. Açık olarak

$$\Delta\frac{x_2(n)}{x_1(n)} = \frac{x_1(n)\Delta x_2(n) - x_2(n)\Delta x_1(n)}{x_1(n)x_1(n+1)}$$

$$= \frac{W(n)}{x_1(n)x_1(n+1)}$$

yazabiliriz. Eşitliğin her iki yanına Δ^{-1} uygularsak

$$x_2(n) = x_1(n)\sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{W(i)}{x_1(i)x_1(i+1)}$$

(2.30)

eşitsizliğini buluruz. Bu durumda aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.23. (Basamağın İndirgemesi) $x_1(n)$,

$$a_0(n)x(n+2) + a_1(n)x(n+1) + a_2(n)x(n) = 0,\ n \geq n_0 \qquad (2.18)$$

denkleminin her $n \geq n_0$ için sıfırdan farklı bir çözümü olsun $a_0(n)$ ve $a_2(n)$ katsayıları $[n_0, \infty)$ üzerinde sıfırdan farklı ise bu durumda (2.30) ifadesi (2.18) denkleminin ikinci bağımsız çözümüdür. Buradan $W(n)$, (2.29) un aşikar olmayan bir çözümüdür.

Örnek 2.24.

$$x(n+2) - x(n+1) - \frac{1}{n+1}x(n) = 0$$

denklemi verilsin. $x_1(n) = n+1$ ifadesinin bu denklemi sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. O halde Yardımcı Teorem (2.21) den

$$W(n+1) = -\frac{1}{n+1}W(n)$$

buluruz. Buradan

$$W(n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

biçiminde bir çözüme ulaşırız. (2.30) denkleminden

$$x_2(n) = (n+1)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!\,(i+1)(i+2)}$$

$$= (n+1)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(i+2)!}$$

elde ederiz. Böylece verilen denklemin genel çözümünü

$$x(n) = c_1(n+1) + c_2(n+1)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(i+2)!}$$

Şeklinde buluruz. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

2.6 Homojen Olmayan Denklemler İçin Özel Çözümler

Bu bölümde k. basamakta sabit katsayılı lineer homojen olmayan

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n) = g(n) \qquad (2.31)$$

denklemini ele alacağız. Buradan $a_1, a_2, \ldots, a_k$ katsayıları reel sabitler ve $a_k \neq 0$ dır. Bu denklemin bir özel çözümünü bulmak için önce belirsiz katsayılar yöntemini ve devamında operatör yöntemini kullanacağız. Daha sonrada en genel method sayılan parametrelerin değişimi yöntemini ele alacağız.

2.6.1 BelirsizKatsayılar Yöntemi

Belirsiz katsayılar yöntemine göre öncelikle (2.31) denkleminin homojen denkleminin genel çözümünü buluruz.

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \cdots + a_k x(n) = 0 \qquad (2.32)$$

Daha sonra $g(n)$ in belli durumları için özel çözüm olabilecek aday $x_p(n)$ çözümlerini buluruz. Aday çözümler ve genel çözümdeki terimleri karşılaştırırız. Varsa benzerlikleri yok etmek için aday çözümleri n'nin en küçük kuvveti ile çarparız. Böylece özel çözüm şeklini kesinleştirmiş oluruz.

Örnek 2.25. İkinci basamaktan

$$x(n+2) - 7x(n+1) + 12x(n) + 12x(n) = 1 + 6n$$

fark denkleminin özel çözümünü bulalım.

Öncelikle soruda verilen fark denkleminin bir özel çözümünü bulabilmek için

$$x(n+2) - 7x(n+1) + 12x(n) = 0$$

homojen denkleminin genel çözümünü buluruz.

Karakteristik denklem $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ dır ve kökleri ise $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3$ dür.

Buradan $x_h(n) = c_1 3^n + c_2 4^n$ dir.

$g(n) = 1 + 6n$ fonksiyonu 1. dereceden bir polinom olduğundan bir aday özel çözümü

$$x_p(n) = A_0 + A_1(n)$$

şeklindedir. Burada A_0 ve A_1 belirlememiz gereken sabitlerdir. $x_p(n)$ ile $x_h(n)$ nin terimleri arasında bir benzerlik bulunmadığından kesin olarak $x_p(n) = A_0 + A_1(n)$ şekinde bir özel çözümümüz var demektir. A_0 ve A_1sabitlerini belirleyebilmemiz için $x_p(n) = A_0 + A_1(n)$ verilen denklemde yerine yazılırsa

$$6A_0 - 5A_1 + 6A_1 n = 1 + 6n$$

özdeşliği elde edilir. Buradan $A_1 = 1$ ve $A_0 = 1$ olup

$$x_p(n) = 1 + n$$

bulunur.

Böylece sorudaki fark denkleminin genel çözümünü

$$x(n) = x_h(n) + x_p(n)$$

$$= c_1 3^n + c_2 4^n + 1 + n$$

olarak bulunur.

2.6.2 $L(E)$ Operatörü Yöntemi

(2.31) denklemi E öteleme operatörü cinsinden

$$L(E)x(n) = g(n) \tag{2.33}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan $L(E)$ operatörü

$$L(E) = E^k + a_1 E^{k+1} + \cdots + a_k \tag{2.34}$$

şeklindedir. Buradan (2.33) veya (2.34) denkleminin bir özel çözümünü

$$x(n) = L^{-1}(E)g(n) \tag{2.35}$$

şeklinde buluruz.

Teorem 2.26. $L(A) = 0$ ve

$$L(E) = (E - a)^m h(E), \;\; h(a) \neq 0$$

olsun Bu durumda

$$\frac{1}{L(E)} a^n = \frac{a^{m-n}.n^m}{h(a)m!} \tag{2.36}$$

dir.

İspat:

$$L^{-1}(E)a^n = (E-a)^{-m}h^{-1}(E)a^n = (E-a)^{-m}\frac{a^n}{h(a)}$$

$$= \frac{a^n}{h(a)}(aE-a)^{-m}(1) = \frac{a^{m-n}}{h(a)}(E-1)^{-m}(1)$$

$$= \frac{a^{m-n}}{h(a)}\Delta^{-m}(m)$$

$$= \frac{a^{m-n}.n^m}{h(a)m!}$$

şeklindedir.

Örnek 2.27. $(E-3)^3x(n) = 3^n$

Denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

$L(E) = (E-3)^3$ için $L(3) = 0$ olur. $m = 3$ ve $h(E) = 1$ dir. Bu durumda Teorem 2.26. den bir özel çözüm yazarsak bu çözüm

$$x_p(n) = \frac{1}{(E-3)^3}3^n$$

$$= \frac{3^{n-3}.n^3}{1.3!}$$

$$= \frac{3^n.n^3}{162}$$

şeklinde bulunur.

Lineer fark denklemleri, genel tanım ve teoremleri, çözüm yöntemleri ve detaylı bilgiler için okuyucular, [1-8] nolu kaynakları inceleyebilirler.

3 İKİNCİ DERECEDEN ÖZEŞLENİK LİNEER FARK DENKLEMLERİ

Bu bölümde 2. mertebeden öz-eşlenik fark denklemlerini ele alacağız. Hangi türde 2. mertebeden öz-eşlenik formda yayılabileceğini göstereceğiz ve öz-eşlenik denklemleri ile ilgili bazı yararlı özdeşlikleri elde edeceğiz.

$p(x)$, $[c, d]$ aralığında pozitif ve $Q(x)$ $[c, d]$ aralığında sürekli olmak üzere

$$\big(P(x)z'(x)\big)'Q(x)Z(x) = 0 \tag{3.1}$$

Öz-eşlenik denklemleri uygulamalı matematiğin en önemli denklemlerinden biridir. Öncelikle (3.1) denkleminin öz-eşlenik fark denklemi ile ilişkili olduğunu görelim

$h = \frac{d-c}{n}$ için

$$z'(x) \approx \frac{Z(x) - Z(x-h)}{h}$$

'dir. O halde

$$\big(P(x)z'(x)\big)' \approx \frac{1}{h}\left\{\frac{P(x+h)[z(x+h) - z(x)]}{h} - \frac{P(x)[z(x) - z(x-h)]}{h}\right\}$$

ve dolayısıyla

$$\big(P(x)z'(x)\big)' \approx \frac{1}{h^2}\{P(x+h)z(x+h) - \big(P(x+h) + P(x)\big)z(x) + P(x)z(x-h)\}$$

elde edilir. x ayrık değişken olmak üzere

$$x = c + th$$

dönüşümünü yapalım. $z(t)$, (3.1) denkleminin çözümü olmak üzere

$$y(t) = z(c + th)$$

dönüşümü ile

$$P(c+(t+1)h)z(c+(t+1)h)$$

$$-[P(c+(t+1)h)+P(c+th)]z(c+th)$$

$$+P(c+th)z(c+(t-1)h)+h^2Q(c+th)z(c+th)\approx 0$$

elde edilir. Sırasıyla $1\le t\le n$ ve $1\le t\le n-1$

için

$$p(t-1)=P(c+th)$$

$$q(t)=h^2Q(c+th)$$

seçersek

$$p(t)y(t+1)-\big(p(t)+p(t-1)\big)y(t)+p(t-1)y(t-1)+q(t)y(t)\approx 0$$

bulunur. Son olarak yukarıdaki eşitlik

$$\Delta(p(t-1)\Delta y(t-1))+q(t)y(t)\approx 0$$

formunda yazılabilir.

Lineer 2. mertebeden özeşlenik fark denklemi

$$\Delta\big(p(t-1)\Delta y(t-1)\big)+q(t)y(t)=0 \qquad (3.2)$$

ile verilir.

Buradan $p(t)$ $[a,b+1]=\{a,a+1,\dots,b+1\}$ üzerinde tanımlı, pozitif ve $p(t)$ $[a+1,\ b+1]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlardır. (3.2) denklemi

$$p(t)y(t+1)+c(t)y(t)+p(t-1)y(t-1)=0 \qquad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir öyle ki $t \in [a+1, b+1]$ için

$$c(t) = q(t) - p(t) - p(t-1) \tag{3.4}$$

dir.

(3.3) denklemi $y(t+1)$ için tek türlü çözülebildiğinden (3.3) denkleminin

$$y(t_0) = A$$

$$y(t_0+1) = B$$

başlangıç koşulları ile tek çözümü vardır.

(3.3) formunda verilen herhangi bir denklem eğer $[a, b+1]$ üzerinde $p(x) > 0$ şartını sağlıyorsa (3.2) öz-eşlenik formunda yazılabilir. Bunun için

$$q(t) = c(t) + p(t) + p(t+) \tag{3.5}$$

seçmeliyiz.

Örnek 3.1. $2^t y(t+1) + (\sin t - 3.2^{t-1})y(t) + 2^{t-1}y(t-1) = 0$ denklemini öz-eşlenik formda yazalım.

$$p(t) = 2^t, c(t) = \sin t - 3.2^{t-1}$$

dir. (3.5) denkleminden $q(t) = \sin t$ bulunur. O halde

$$\Delta\big(2^{t-1}\Delta y(t+1)\big) + \sin t\, y(t) = 0$$

yukarıdaki fark denkleminin öz-eşlenik halidir.

Genel olarak $[a, b+1]$ üzerinde $\alpha(t) > 0$ ve $[a+1, b+1]$ üzerinde $\gamma(t) > 0$ olmak üzere

$$\alpha(t)y(t+1) + \beta(t)y(t) + \gamma(t)y(t-1) = 0 \tag{3.6}$$

formundaki bir fark denklemi öz-eşlenik hale getirilbilir. Bunu göstermek için (3.6) denklemini pozitif bir $h(t)$ fonksiyonu ile çarpalım:

$$\alpha(t)h(t)y(t+1) + \beta(t)h(t)y(t) + \gamma(t)h(t)y(t-1) = 0$$

Bu denklemin öz-eşlenik olabilmesi için

$$\alpha(t)h(t) = p(t)$$

$$\gamma(t)h(t) = p(t-1)$$

olmalıdır. Yani

$$\alpha(t)h(t) = \gamma(t+1)h(t+1)$$

elde edilir. Buradan

$$h(t+1) = \frac{\alpha(t)}{\gamma(t+1)}h(t)$$

lineer 1. mertebe fark denklemi elde edilir.

Çözümü ise

$$h(t) = A\prod_{s=a}^{t-1}\frac{\alpha(s)}{\gamma(s+1)}$$

şeklindedir.

$$p(t) = A\alpha(t)\prod_{s=a}^{t-1}\frac{\alpha(s)}{\gamma(s+1)}$$

seçersek (3.5) denkleminden

$$q(t) = \beta(t)h(t) + p(t) + p(t-1)$$

şeklinde bulunur ve (3.6) denklemi (3.2) formunda yayılmış olur.

Örnek 3.2.

$$(t-1)y(t+1)+\left(\frac{t^2}{\Gamma(t-1)}-t\right)y(t)+y(t-1)=0 \tag{3.7}$$

fark denklemini öz-eşlenik formda yazalım.

$$h(t)=\prod_{s=2}^{t-1}(s-1)=(t-2)!=\Gamma(\mathrm{t}-1)$$

seçersek bu durumda

$$p(t)=(t-1)\Gamma(\mathrm{t}-1)=\Gamma(\mathrm{t})$$

ve

$$q(t)=\left(\frac{t^2}{\Gamma(\mathrm{t}-1)}-1\right)\Gamma(\mathrm{t}-1)+\Gamma(\mathrm{t})+\Gamma(\mathrm{t}+1)$$

$$=t^2-t\Gamma(\mathrm{t}+1)+(\mathrm{t}-1)\Gamma(\mathrm{t}-1)+\Gamma(\mathrm{t}-1)$$

$$=t^2$$

bulunur. Bu durumda (3.7) denkleminin öz-eşlenik formu

$$\Delta\big(\Gamma(\mathrm{t}-1)\Delta\mathrm{y}(\mathrm{t}-1)\big)+t^2y(t)=0$$

şeklindedir.

$y(t)$ ve $z(t)[a,b+2]$ aralığında denkleminin çözümü olsunlar.

$$w(t)=w[y(t),z(t)]=\begin{bmatrix} y(t) & z(t) \\ y(t-1) & z(t+1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y(t) & z(t) \\ \Delta y(t) & \Delta z(t) \end{bmatrix}$$

idi. $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı $y(t)$ fonksiyonları kümesi üzerinde L operatörünü

$$Ly(t) = \Delta(p(t-1)\Delta y(t-1)) + q(t)y(t)$$

ile tanımlayalım.

Teorem 3.3. (Lagrenge özdeşliği)

$y(t)$ ve $z(t)$ $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar ise $t \in [a+1, b+1]$ için

$$z(t)Ly(t) - y(t)Lz(t) = \Delta\big[p(t-1).w[z(t-1), y(t-1)]\big]$$

özdeşliği doğrudur.

İspat: [7] Lagrange özdeşliğinin her iki tarafını $a+1$ den $b+1$'e kadar toplarsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1. [7] (Green Teoremi) $y(t)$ ve $z(t)$ $[a,b+2]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsunlar.

Bu durumda

$$\sum_{t=a+1}^{b+1} z(x)Ly(t) - \sum_{t=a+1}^{b+1} y(x)Lz(t) = p(t)w(z(t)y(t))\Big|_{t=a}^{t=b+1}$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 2. [7] (Liouville Formülü) $y(t)$ ve $z(t)$ (3.2) denkleminin çözümü olsunlar. Bu durumda $t \in [a, b+1]$ ve c sabit olmak üzere

$$w[y(x), z(t)] = \frac{c}{p(t)}$$

dir.

İspat: Lagrange özdeşliğinden $t \in [a+1, b+1]$ için

$$\Delta p(t-1) w[y(t-1), z(t-1)] = 0$$

elde edilir. Buradan

$$p(t-1) w[y(t-1), z(t-1)] = c$$

bulunur. $t = t-1$ şeklinde öteleme yaparsak

$$w[y(t), z(t)] = \frac{c}{p(t)}$$

bulunur.

Sonuç 2'den) $y(t)$ ve $z(t)$ (3.2) denkleminin çözümleri ise ya

i. $w[y(t), z(t)] = 0$ $\quad \forall t \in [a, b+1]$
ya da
ii. $w[y(t), z(t)]$ $\quad \forall t \in [a, b+1]$ için aynı işaretlidir.

i. durumunda $y(t)$ ve $z(t)$ çözümleri $[a, b+2]$ aralığında lineer bağımlı ii. durumunda ise lineer bağımsızdır [7, Teorem 3.4.].

Teorem 3.4. (Polya Faktörizasyonu) $z(t)$ (3.2) denkleminin bir çözümü olsun ve $[a, b+2]$ aralığında $z(t) > 0$ olsun. Bu durumda $i = 1,2$ için $[a, b+2]$ aralığında $g_1(t) > 0$ ve $[a+1, b+2]$ aralığında $g_2(t) > 0$ olacak şekilde $g_i(t)$ fonksiyonları vardır öyle ki $t \in [a+1, b+1]$ için $[a, b+2]$ üzerinde tanımlı herhangi bir $y(t)$ fonksiyonu için

$$Ly(t) = g_1(t)\Delta\left[g_2(t)\Delta\left(g_1(t-1)y(t-1)\right)\right]$$

dir.[7]

İspat: $z(t)$ (3.2)'nin pozitif çözümü olduğundan Lagrange özdeşliğinden

$$Ly(t) = \frac{1}{z(t)}\Delta\left[p(t-1)w[z(t-1), y(t-1)]\right]$$

dir. O halde

$$\Delta\left\{\frac{y(t-1)}{z(t-1)}\right\} = \frac{z(t-1)\Delta y(t-1) - y(t-1)\Delta z(t-1)}{z(t-1)z(t)}$$

$$= \frac{w[z(t-1), y(t-1)]}{z(t-1)z(t)}$$

bulunur [7, Teorem 2.1. (e)].

Bu durumda

$$Ly(t) = \frac{1}{z(t)}\Delta\left[p(t-1)z(t-1), y(t-1)\Delta\left(\frac{y(t-1)}{z(t-1)}\right)\right] \tag{3.8}$$

bulunur. $g_1(t) = \frac{1}{z(t)} > 0,$

$$g_2(t) = p(t-1)z(t-1)z(t) > 0, \qquad (t \in [a+1, b+2]$$

seçersek

$$Ly(t) = g_1(t)\Delta\left[g_2(t)\Delta\left(g_1(t-1)y(t-1)\right)\right]$$

eşitliğini sağladığı görülür.

Örnek 3.5.

$$y(t+1) - 6y(t) + 8y(t-1) = 0 \tag{3.9}$$

denklemi için Polya Faktorizasyonunu elde edelim. Açıkça görülebilir ki $z(t) = 2^t$ ve $y(t) = 4^t$ (3.9) denkleminin çözümleridir. (3.9) denklemini öz-eşlenik formda yazılırsa $p(t) = \left(\frac{1}{8}\right)^t$ elde edilir.

Bu durumda (3.8) denkleminden Polya Faktorizasyonu

$$2^{-t}\Delta\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{t-1} 2^{t-1} 2^t \Delta \frac{y(t-1)}{z(t-1)}\right] = 0$$

ya da

$$\Delta[2^{-t}\Delta(2^{-t}y(t-1))] = 0$$

formundadır.

Tanım 3.6. [7] $a \le t \le b+2$ ve $a+1 \le s \le b+1$ olmak üzere her sabitlenmiş $s \in [a+1, b+1]$ için (3.2) denklemini, $y(s,s) = 0$ ve $y(s+1,s) = \frac{1}{p(s)}$ koşullarını sağlayan $y(t,s)$ fonksiyonuna Cauchy Fonksiyonu denir.

Örnek 3.7. $\Delta[p(t-1)\Delta y(t-1)] = 0$ denkleminin $t \ge s$ için Cauchy Fonksiyonunu bulalım.

$y(t,s)$ denklemin çözümü olduğundan

$$\Delta[p(t-1), \Delta y(t-1)] = 0$$

dır. O halde

$$p(t-1)\ \Delta y(t-1,s) = \alpha(s)$$

elde edilir. $t = s+1$ için $\alpha(s) = 1$ bulunur.

$t = t+1$ yazarsak

$$\Delta y(t,s) = \frac{1}{p(t)}$$

elde ederiz. $t \geq s$ olduğunu kabul eder ve s'den $t-1$'e kadar toplama geçersek

$$y(t,s) - y(s,s) = \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}$$

bulunur. O halde Cauchy Fonksiyonu

$$y(t,s) = \sum_{\tau=s}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}$$

olarak bulunur.

Özel olarak $\Delta^2 y(t-1) = 0$ denkleminin Cauchy Fonksiyonu $y(t,s) = t-s$ formundadır.

Teorem 3.8. $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ (3.2) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise (3.2) denkleminin Cauchy Fonksiyonu

$$y(t,s) = \frac{\begin{bmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(t) & u_2(t) \end{bmatrix}}{p(s)\begin{bmatrix} u_1(s) & u_2(s) \\ u_1(s+1) & u_2(s+1) \end{bmatrix}} \tag{3.10}$$

$$a \leq t \leq b+1, a+1 \leq s \leq b+1$$

ile verilir.

İspat: [7]

Örnek 3.9. $\Delta(p(t-1), \Delta y(t-1)) = 0$ denkleminin Cauchy Fonksiyonunu bulalım.

$u_1(t) = 1$ ve $u_2(t) = \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)}$ denklemin lineer bağımsız çözümleridir. O halde Teorem 3.8.'den

$$y(t,s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \sum_{j=a}^{s-1} \frac{1}{p(\tau)} \\ 1 & \sum_{j=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)} \end{bmatrix}}{p(s)\begin{bmatrix} 1 & \sum_{j=a}^{s-1} \frac{1}{p(\tau)} \\ 1 & \sum_{j=a}^{s} \frac{1}{p(\tau)} \end{bmatrix}}$$

$$= \sum_{\tau=a}^{t-1} \frac{1}{p(\tau)} \qquad ,(t \geq s \text{ için})$$

Şimdi ise Cauchy Fonksiyonunun homojen olmayan denklemlerin çözümünde nasıl kullanıldığını görelim.

Teorem 3.10. (Parametrelerin Değişimi Formülü)

$$Ly(t) = h(t)$$

$$y(a) = 0$$

$$y(a+1) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = \sum_{s=a+1}^{t} y(t,s)h(s) \tag{3.11}$$

ile verilir. Burada $y(t,s)$ $Ly(t) = 0$'ın Cauchy Fonksiyonudur.

İspat: [7]

Sonuç 3. $$Ly(t) = h(t) \qquad t \in [a+1],[b+1]$$

$$y(a) = A$$

$$y(a+1) = B$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = u(t) + \sum_{s=a+1}^{t} y(t,s)h(s)$$

ile verilir. Burada $y(t,s), Ly(t) = 0$'ın Cauchy Fonksiyonu ve $u(t)$ de homojen denklemin homojen çözümüdür.

İspat: [7]

Örnek 3.11.

$$\Delta^2 y(t-1) = t$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

Başlangıç değer problemlerini parametrelerin değişimi yöntemi ile çözelim.

Teorem 3.10.'dan çözüm

$$y(t) = \sum_{s=1}^{t} (t-s).s$$

$$= t\sum_{s=1}^{t} s - \sum_{s=1}^{t} s^2$$

Faktoriyel kuvvetler cinsinden çözüm

$$y(t) = t\sum_{s=1}^{t} s^{\underline{1}} - \sum_{s=1}^{t} \left[s^{\underline{2}} + s^{\underline{1}}\right]$$

$$= t\left[\frac{s^{\underline{2}}}{2}\right]_1^{t+1} - \left[\frac{s^{\underline{3}}}{3} + \frac{s^{\underline{2}}}{2}\right]^{t+1}$$

$$= t\,\frac{(t+1)^2}{2} - \frac{(t+1)^3}{3} - \frac{(t+1)^2}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right) - \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t\right) - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t\right)$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Agarwal, R.P., Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekleer, 970, New York, 2000.

[2] Elaydi, S., An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, 428, New York, 1999.

[3] Goldberg, S., Introduction to Difference Equations With Illustrative Examples From Economies, Psychology and Sociology. Dover, 260, New York, 1986.

[4] Kulenovic, M.R.S. and Merino, O., Discrete Dynamical Systems and Difference Equations With Mathematicain, Chapman & Hall, 344, 2002.

[5] Lakshmikantham, V. And Trigiante, D., Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Academic, 242, New York, 1988.

[6] Mickens, R., Difference Equations, Van Nostrand, Reinhold, 448, New York, 1990

[7] Kelly, W.G. and Peterson, A.C., Difference Equations An Introduction With Applications, Academic, 403, New York, 1991.

[8] Spiegel, M.R., Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Mc GRAW Hall, New York, 1971.

[9] Bereketoğlu H, Kutay V, Fark Denklemleri, ISBN 978-605-4562-40-4, Ankara, Ocak, 2012

ÖZGEÇMİŞ

Simtel KAHRAMAN, 1977 yılında Balıkesir'de Doğmuştur. İlk, orta ve lise tahsilini Balıkesir'de tamamlamıştır. 1998 yılında Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matemetik Öğretmenliği bölümünü bitirmiştir. 10.12.1998 tarihinde M.E.B.'de göreve başlamış ve halen görevine devam etmektedir.