T.C.
YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FONKSİYONLARLA İLGİLİ OLİMPİYAT PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Murat UZUN

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. REFAİL ALİZADE

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

SUNUM TARİHİ:27/12/2017

BORNOVA/İZMİR
ARALIK 2017

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri: **İmza:**

Prof.Dr.Refail ALİZADE (Tez Danışmanı)
Yaşar Üniversitesi ....

Prof.Dr.Engin BÜYÜKAŞIK
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü ....

Yrd.Doç.Dr.Şule AYAR ÖZBAL
Yaşar Üniversitesi ....

Prof.Dr.Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

FONKSİYONLARLA İLGİLİ OLİMPİYAT PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

UZUN, Murat
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Refail ALİZADE
Aralık 2017

Bu çalışmada fonksiyonlar konusu lise düzeyinden başlanarak ele alınmış. Fonksiyonel Denklemlerin genel ve özel çözümleri incelenmiş, bazı özel fonksiyonel denklemler detaylıca anlatılmıştır. Ayrıca Ulusal ve Uluslararası Matematik Olimpiyatlarında Fonksiyonlar ve Fonksiyonel Denklemlerle ilgili çıkmış sorular ve çözümlerine örnekler verilmiştir. Bu çalışmanın Matematik Olimpiyatlarına ilgi duyan öğrenci ve öğretmenler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

ABSTRACT

SOLUTION METHODS OF OLIMPIADS PROBLEMS ON FUNCTIONS

UZUN, Murat
Msc in Department of Mathematics
Thesis Advisor: Prof. Dr. Refail ALİZADE
December 2017

In this study functions are discussed starting from the high scool level. The general and private solutions of functional equations are investigated. Some spesific functional equations are described in detail. Besides questions and solutions about functional equations which asked before in National and International Mathematical Olimpiads are given.

We hope that this thesis will be helpfull for high school students that take part in the mathematical olympiads.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman, her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Prof. Dr. Refail ALİZADE'ye çok teşekkür ederim. Bu süreçte bana yardımcı olan eşim Özlem Uzun'a, Ali Can Güllü, Zafer Acar ve Yaşar Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Murat UZUN

İzmir, 2017

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "FONKSİYONLARLA İLGİLİ OLİMPİYAT PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Murat UZUN

27/12/2017

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR

Kısaltma	Açıklama
IMO	International Mathematical Olympiad
UMO	Ulusal Matematik Olimpiyat
UİMO	Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı

1. GİRİŞ

1.1. Fonksiyon Nedir?

Fonksiyonlar verilen girdilere eşsiz çıktılar atayan matematiksel varlıklardır.[1]

Verilen girdilerin nitelik ve niceliklerinin sonuçları nasıl etkilediği ya da birbirine bağlı, birbirini etkileyen olayları, dolayısıyla hayatın kendisini anlama yolunda en büyük yardımcı kavramlarından biridir fonksiyonlar.

17. yy'dan itibaren,

- Galile, Kepler ve Newton hareketleri araştırırken zaman ile yol arasındaki ilişkiyi ortaya koymuşlar.
- Robert Boyle gazların; sıcaklık, basınç ve hacimleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymuş,
- 19. yy'da akım, direnç ve voltaj arasındaki ilişki de görüldükten sonra denilebilir ki bilimde en önemli kavramlardan biri de değişkenler arasındaki ilişkilerdir.

Bu çalışmada; önce en temelden başlanarak, sıralı ikili, küme, kartezyen çarpım ve bağıntı tanımları ve özellikleri incelenerek fonksiyona bir altyapı oluşturulmuştur.

Daha sonra tanımı, çeşitleri işlem ve özellikleriyle elementer fonksiyona genişçe yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Ulusal ve Uluslararası Matematik olimpiyatlarında önemli bir yere sahip olan Fonksiyonel Denklemler konusu ele alınmıştır.

Fonksiyonel denklem tanımı, çeşitleri, çözüm yöntemleri, çözüm yöntemlerinde kolaylık sağlayacak temel özellikler incelenmiş, bazen özel bir koşul altındaki özel çözümler incelenmiştir. Bazen genel çözümler bulunmuş bazen ise çözümü olmayan fonksiyonel denklemlerin çözümsüzlüğü kanıtlanmıştır.

Son bölümde ise fonksiyonel denklem örnekleri çözümleriyle birlikte verilmiştir.

Bu çalışmada kaynağı açıkça kaynağı belirtilmeyen tanım ve kavramlar için "Thomas Kalkülüs 12. Baskı" ya bakılabilir.

---

[1] Khan Academy

2. KÜME–KARTEZYEN ÇARPIM–BAĞINTI

Sıralı İkili: Sıra önemli olmak şartıyla iki tane elemanın aralarına virgül konularak (a, b) şeklinde parantez içinde yazılmasına sıralı ikili denir.

$$(x, y) \qquad (3, 4) \qquad (m, n) \qquad \text{gibi}$$

Not: İki sıralı ikilinin birbirine eşit olmasının şartı birinci bileşen, birinci bileşene, ikinci bileşenin ikinci bileşene eşit olmasıdır. $(a, b) = (c, d)$ ise $a = c$ ve $b = d$ olmalıdır.

Örnek 2.1 $(2x - 5, 17) = (11, 3y - 1)$ *ise* $x \cdot y = ?$

Çözüm: $2x - 5 = 11$ ise $x = 8$, $3y - 1 = 17$ ise $y = 6$ bulunur. Buradan $x \cdot y = 8 \cdot 6 = 48$ bulunur.

2.1. Kartezyen Çarpım

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere, birinci elemanlar A kümesinden, ikinci elemanlar B kümesinden alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine A ile B nin kartezyen çarpım kümesi denir. $A \times B$ ile gösterilir.

$A = \{a, b\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ ise

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$
$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

dir. Görüldüğü gibi $A \times B \neq B \times A$ dır.

2.1.1. Kartezyen Çarpımın Eleman Sayısı

$s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise $s(A \times B) = m \cdot n$ ve $s(B \times A) = m \cdot n$ dir.

Özellikler

1. $A \neq B$ ise $A \times B \neq B \times A$ olur.

2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

2.2. Bağıntı

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olmak üzere $A \times B$ tanımlı ise $A \times B$ nin her alt kümesine A'dan B'ye bir bağıntı denir. $A \xrightarrow{\beta} B$ veya $\beta : A \longrightarrow B$ şeklinde gösterilir.

2.2.1. Bağıntı Sayısı

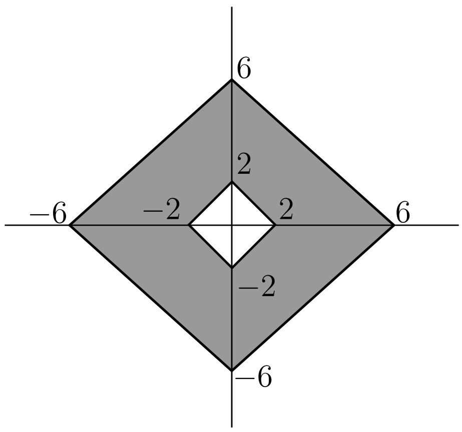
$s(A) = m$ ve $s(B) = n$ iken $s(A \times B) = m \cdot n$ olduğundan A'dan B'ye tanımlanabilen bağıntı sayısı $2^{m \cdot n}$ olur.

2.2.2. Bağıntının Grafiği

$x \in A$, $y \in B$ olmak üzere tüm $(x, y) \in A \times B$ lere düzlemde karşılık gelen noktaların kümesine β bağıntısının grafiği denir.

Örnek 2.2 $\beta = \{(x, y) | \quad 2 \leqslant |x| + |y| \leqslant 6 \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ *bağıntısının grafiğini çizip* β*'nın belirlediği bölgenin alanını bulalım.*

Çözüm:



$(6\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2 = 72 - 8 = 64 \; br^2$

2.2.3. Bağıntının Özellikleri

Yansıma: A kümesinde her bir x elemanı için bağıntının içinde (x, x) elemanı varsa β bağıntısına "yansıyandır" denir.

$A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlanan bir bağıntının yansıyan olması için mutlaka (a, a), (b, b), (c, c) elemanlarını bulundurması gerekir.

Simetri: $\forall(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ olmalıdır. Yani bağıntıda bulunan her (x, y) elemanının simetriği de bağıntının içinde bulunmalıdır.

Ters Simetri: $x \neq y$ ve $\forall(x, y) \in \beta$ iken $(y, x) \notin \beta$ olmalıdır. β'nın hiçbir (x, y) elemanının simetriği bağıntıda bulunmalıdır.

- Bir tek elemanın simetriği bulunursa Ters Simetri bozulur.
- $(x, x), (y, y)$ şeklindeki sıralı ikililerin bulunması ters simetriyi bozmaz.
- Bir bağıntı "Simetrik değilse ters simetriktir, ters simetrik değilse simetriktir" diyemeyiz. Hem simetrik hem de ters simetrik olmayan bağıntılar vardır. Örneğin $\beta = \{(x, y), (y, x), (x, z)\}$ bağıntısı simetrik de değildir, ters simetrik de değildir.

Geçişme: $\forall(x, y) \in \beta$ ve $(y, z) \in \beta$ iken $(x, z) \in \beta$ ise β bağıntısına geçişkendir denir.

- Bu özellik β'nın her bir elemanı için ayrı ayrı sağlanmalıdır. Bir tek eleman için sağlanmazsa β geçişken olmaz.
- $(x, y) \in \beta$ iken $(y, z) \notin \beta$ ise (y ile başlayan bir sıralı ikili yoksa) (x, z) aranmayıp bağıntının geçişken olduğu söylenir.

2.2.4. Bağıntı Çeşitleri

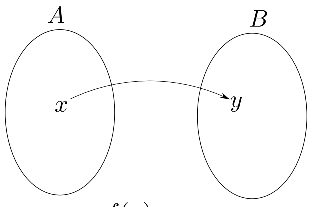
Denklik Bağıntısı: Bir β bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini aynı anda sağlıyorsa bu bağıntıya denklik bağıntısı denir.

Sıralama Bağıntısı: Bir β bağıntısı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini aynı anda sağlıyorsa bu bağıntıya sıralama bağıntısı denir.

3. FONKSİYON

3.1. Tanım

A kümesinin her elemanını B kümesinin bir ve sadece bir elemanı ile eşleyen özel bağıntıya fonksiyon denir.



$f(x) = y$

Yandaki gibi gösterilir. Burada
A tanım kümesi,
B değer kümesi,
$f(A) = y$ görüntü kümesidir.

Örnek 3.1 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $f : A \to B$, $f(x) = 2x + 3$ *fonksiyonu için* B *görüntü kümesi* $f(1) = 5$, $f(2) = 7$, $f(3) = 9$, $f(4) = 11$ *olduğundan*

$$B = \{5, 7, 9, 11\}$$

şeklindedir.

3.2. Fonksiyonlarla İşlemler

Fonksiyonların kuralları cebirsel ifadelerle verilmişse; nasıl ki cebirsel ifadeler toplanır, çıkarılır, çarpılır ve bölünürse aynı şeyler fonksiyonlar için de geçerlidir. Örneğin $f(x) = 3x+7$ ve $g(x) = 4x + 6$ olsun. O zaman

$$5 \cdot f(x) = 15x + 35$$
$$f(x) + g(x) = 7x + 13$$
$$(f \cdot g)(x) = (3x + 7) \cdot (4x + 6) = 12x^2 + 46x + 42$$

olur.

- Fonksiyonlar liste yöntemiyle verilmişse; sadece birinci bileşeni aynı olan elemanlar arasında işlemler yapılabilir. Birinci bileşeni aynı olan elemanların ikinci bileşenleri toplanır, çıkarılır, çarpılır, bölünür veya başka bir reel sayı ile çarpılabilir.

Örnek 3.2

$$f = \{(-6,10),(-5,9),(-2,6),(-1,4),(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$$
$$g = \{(-7,4),(-5,2),(-4,3),((-2,5),(0,8),(2,6),(5,7)\}$$

şeklinde verilmişse $2 \cdot f$, $f+g$ ve $f \cdot g$'yi bulunuz.

Çözüm:

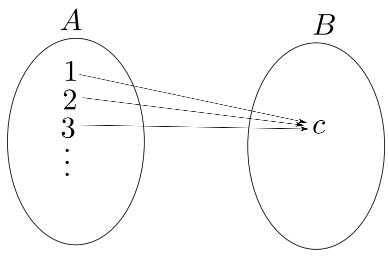
$$\begin{aligned} 2 \cdot f &= \{(-6,20),(-5,18),(-2,12),(-1,8),(0,6),(1,4),(2,2),(3,0)\} \\ f+g &= \{(-5,9+2),(-2,6+5),(0,3+8),(2,1+6)\} \\ &= \{(-5,11),(-2,11),(0,11),(2,7)\} \\ f \cdot g &= \{(-5,9\cdot 2),(-2,6\cdot 5),(0,3\cdot 8),(2,1\cdot 6)\} \\ &= \{(-5,18),(-2,30),(0,24),(2,6)\} \end{aligned}$$

olur.

3.3. Fonksiyon Çeşitleri

3.4. Sabit Fonksiyon

$f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. A'nın her x elemanı için $f(x) = c$ olacak şekilde bir $c \in B$ varsa $f(x)$ fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.



Sabit bir fonksiyon rasyonel şekilde ifade edilmişse, yani $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun sabit olması için $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ olmalıdır.

Örnek 3.3 $f(x) = \dfrac{2ax^2 - 4x + 10}{12x^2 + 6x - 3b}$ *fonksiyonu sabit fonksiyonsa $a \cdot b = ?$*

Çözüm: $\dfrac{2a}{12} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{10}{-3b}$ ise $a = -4$ ve $b = 5$ bulunur. Buradan $a \cdot b = -20$ çıkar.

3.5. Sıfır Fonksiyonu

$f(x) = 0$ şeklinde 0 a eşit olan fonksiyondur.

3.6. Birebir Fonksiyon

$\forall x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise f fonksiyonuna 1–1 fonksiyon denir.

Örnek 3.4 $f(x) = 2x + 3$ *fonksiyonu 1–1 iken* $f(x) = x^2 - 6x + 14$ *fonksiyonu 1–1 değildir.*

3.7. Örten Fonksiyon

$\forall y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $\exists x \in A$ varsa f örten fonksiyondur.

Örnek 3.5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ *örten fonksiyon iken,* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$ *örten değildir.*

3.8. İçine Fonksiyon

Örten olmayan fonksiyona içine fonksiyon denir.

3.9. 1–1 İçine Fonksiyon

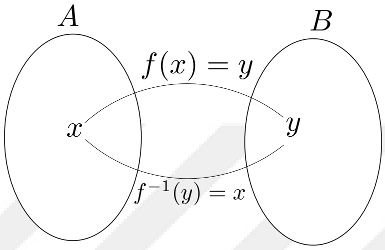
Bir fonksiyon hem 1–1 hem de içineyse bu fonksiyona 1–1 içine fonksiyon denir.

3.10. 1–1 Örten Fonksiyon

Bir fonksiyon hem 1–1 hem de örtense buna 1–1 örten fonksiyon denir.

- Bir fonksiyonun tersinin var olabilmesinin şartı o fonksiyonun 1–1 ve örten olmasıdır.

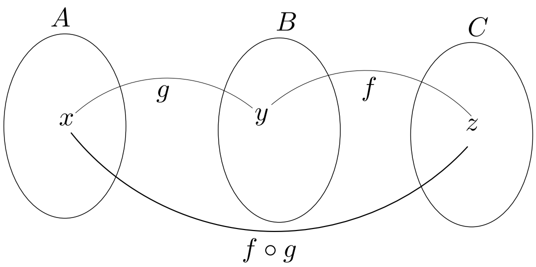
3.11. Ters Fonksiyon



$f : A \to B$, $f(x) = y$ fonksiyonu tanımlanmış ise $f^{-1} : B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tersi denir.

Örnek 3.6 $f(x) = 4x + 6$ *ise* $f^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{4}$, $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x+5}$ *ise* $f^{-1}(x) = \dfrac{-5x+4}{3x-2}$ *dir.*

3.12. Bileşke Fonksiyon



A kümesindeki x elemanını alıp, C kümesindeki z elemanına götüren $f[g(x)] = z$ fonksiyonuna f ile g nin bileşke fonksiyonu denir. $f \circ g$ şeklinde gösterilir.

3.13. Ters ve Bileşke Fonksiyonun Özellikleri

1. $(f^{-1})^{-1} = f$

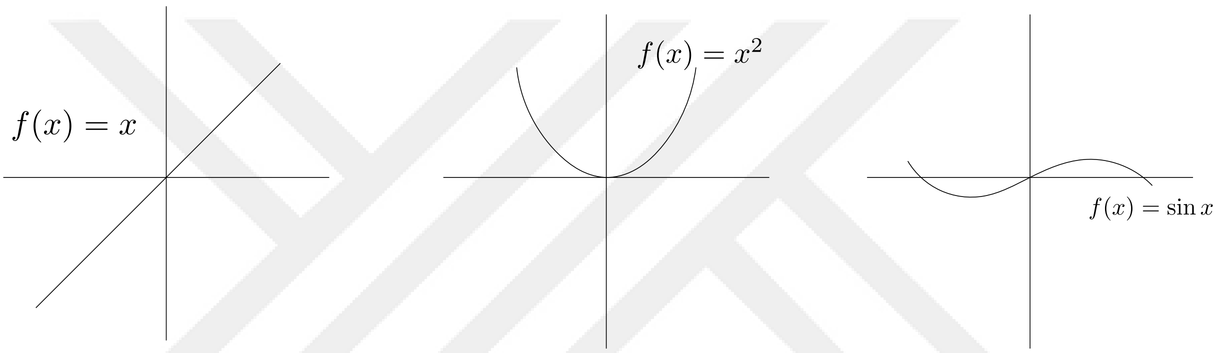
2. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I(x)$

3. Bileşke fonksiyonunun değişme özelliği yoktur. Genelde $f \circ g \neq g \circ f$ dir.

4. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ dir.

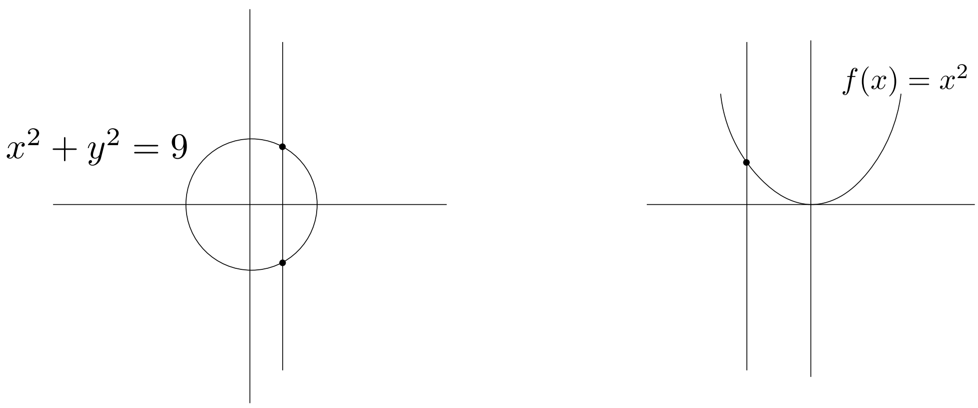
3.14. Fonksiyonların Grafikleri

Fonksiyonun elemanlarına analitik düzlemde karşılık gelen noktaların görüntüsüne fonksiyonun grafiği denir. Örneğin



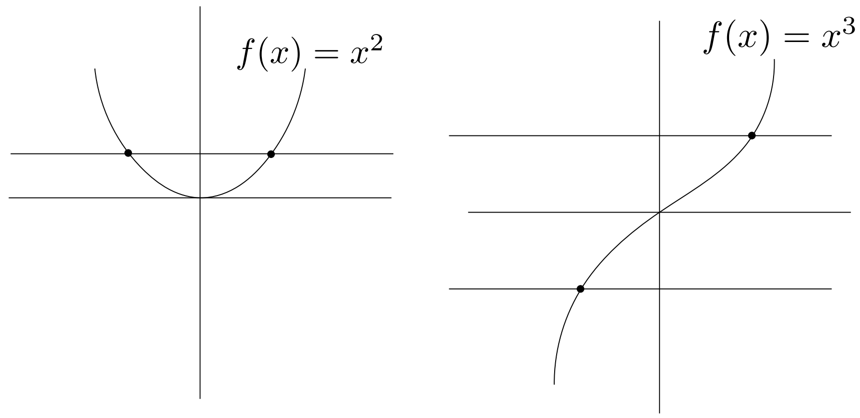
3.14.1. Doğru Testleri

Düşey Doğru Testi: Bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını anlamak için kullanılır. Düşey (dikey) çizilen doğru eğer grafiği birden çok noktada keserse bu bağıntı fonksiyon değildir.



Çizilen düşey doğru $x^2 + y^2 = 9$ un grafiğini iki noktada kestiğinden fonksiyon değildir.

Yatay Doğru Testi: Fonksiyonun 1–1 olup olmadığını anlamaya yarar. x eksenine paralel çizilen doğrular grafiği birden çok noktada keserse fonksiyon 1–1 olmaz.



Şekilde görüldüğü gibi $y = x^2$ fonksiyonu 1–1 değil, $y = x^3$ fonksiyonu 1–1 dir.

3.15. Permütasyon Fonksiyonu

Tanım kümesi üzerinde 1–1 ve örten olan her fonksiyona permütasyon fonksiyon denir.

Örnek 3.7 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *ise* $f : A \to A$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

fonksiyonu $f(1) = 2$*,* $f(2) = 3$*,* $f^{-1}(3) = 2$ *vb. şeklinde okunur.*

3.16. Çift ve Tek Fonksiyonlar

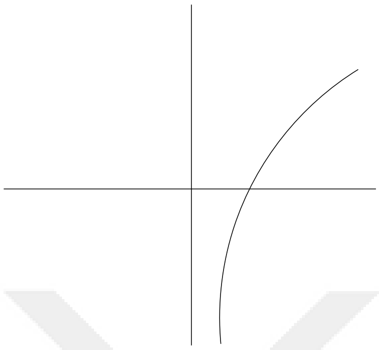
$f(-x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonlara çift fonksiyonlar denir. Örnek olarak $f(x) = x^2$ ve $f(x) = \cos x$ verilebilir. Bu tür fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir.

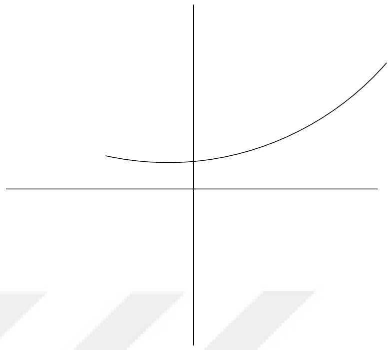
$f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağlayan fonksiyonlara da tek fonksiyonlar denir. Örnek olarak $f(x) = x^3$ ve $f(x) = \sin x$ verilebilir. Bu fonksiyonların grafikleri de orijine göre simetriktir.

Not: İlerde daha detaylı göreceğimiz üzere fonksiyonel denklemlerin çözümünde fonksiyonun tekliği ya da çiftliği önemli bir kriterdir.

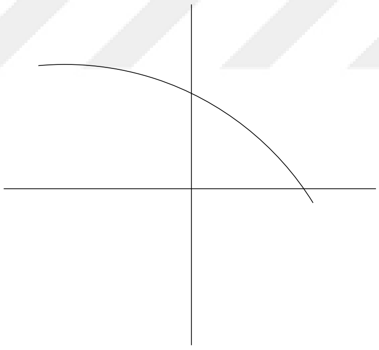
3.17. Artan ve Azalan Fonksiyonlar

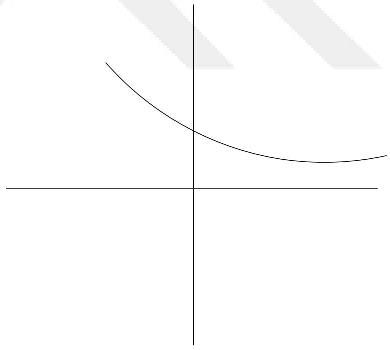
Artan Fonksiyon: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f artan fonksiyondur. Örnek olarak $f(x) = 2x + 3$ verilebilir. Aşağıdaki grafikler artan fonksiyon grafiklerine örnektir.





Azalan Fonksiyon: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f azalan fonksiyondur. Örnek olarak $f(x) = -2x + 3$ verilebilir. Aşağıdaki grafikler azalan fonksiyon grafiklerine örnektir.





3.18. Polinom Fonksiyon

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

şeklindeki ifadelere x e bağlı n. dereceden polinom fonksiyon denir.

3.19. Üstel Fonksiyon

$a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak şartıyla

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad f(x) = a^x$$

şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyon denir.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ için $a^x > 0$ dır.
- $0 < a < 1$ ise fonksiyon azalandır.
- $a > 1$ ise fonksiyon artandır.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ dir.

3.20. Logaritma Fonksiyonu

1–1 ve örten olan üstel fonksiyonun tersine logaritma fonksiyonu denir. $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için

- $x > 0$
- $a > 0$
- $a \neq 1$

olmalıdır.

3.21. Çok Değişkenli Fonksiyonlar

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ : \quad x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde tanımlı $y = f(x)$ şeklindeki fonksiyonlara tek değişkenli fonksiyon,
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ : \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde tanımlı $z = f(x, y)$ şeklindeki fonksiyonlara iki değişkenli fonksiyon,

- $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \ : \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde tanımlı $x_{n+1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şeklindeki fonksiyonlara n değişkenli fonksiyon

denir.

3.22. Periyodik Fonksiyon

$f : A \to B$ bir fonksiyon, $\forall x \in A$ ve $\exists\, T \in \mathbb{R}$ için

$$f(x+T) = f(x)$$

eşitliğini sağlayan fonskiyona periyodik fonksiyon, bu eşitlikteki pozitif T sayılarının en küçüğüne fonksiyonun periyodu denir.

3.23. Sınırlı Fonksiyon

Tanım kümesindeki $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \leqslant N$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{R}$ sayısı varsa bu N sayısına bu fonksiyonun üst sınırı, f fonksiyonuna da üstten sınırlı fonksiyon denir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $M \leqslant f(x)$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısı varsa bu M sayısına bu fonksiyonun alt sınırı, f fonksiyonuna da alttan sınırlı fonksiyon denir.

Alttan ve üstten sınırlı fonksiyonlara sınırlı fonksiyonlar denir.

3.24. Sürekli Fonksiyonlar

$f : A \to B$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $x = a$ noktasında limiti var ve bu limit değeri fonksiyonun o noktadaki değerine eşitse bu fonksiyon $x = a$ noktasında süreklidir denir.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ise fonksiyona $x = a$ noktasında süreklidir denir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli olan fonksiyona $\mathbb{R}$'de süreklidir denir.

4. FONKSİYONEL DENKLEMLER

4.1. Fonksiyonel Denklem Nedir?

Nasıl ki en az bir cebirsel ifade içeren denklemlere cebirsel denklem, köklü ifade içeren denklemlere köklü denklem, grafiği doğrular olan denklemlere doğrusal denklem diyorsak, fonksiyonlar içeren ve çözümleri de fonksiyonlar olan denklemlere "fonksiyonel denklem" denir.

Bir fonksiyonel denklemi çözmek demek, bazen o denklemi sağlayan tüm fonksiyonlar ailesini bulmak, bazense o ailenin özel bir sayıya karşılık gelen özel bir ferdini bulmak demektir.

4.2. Fonksiyonel Denklem Çeşitleri

Sadece tam sayılar ve rasyonel sayılar kümesinde tanımlanan fonksiyonel denklemler bulunduğu gibi reel sayılar kümesinde de tanımlanan veya aslında sadece $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ da tanımlı olduğu halde fonksiyonun sürekliliği ve limit yardımıyla "bulduğumuz çözüm tüm reel sayılar için geçerlidir" diyebileceğimiz fonksiyonel denklemler de vardır.

Bunlardan ayrıca polinom fonksiyon olarak verilmiş, polinom ve fonksiyon özellikleri kullanılarak çözümü yapılabilen fonksiyonel denklemler de vardır.

Fonksiyonel denklemlerin çözümü için bazen fonksiyonun periyodik ya da monoton olması, tekliği, çiftliği, artan ya da azalanlığı, sürekli, sınırlı ya da diferansiyellenebilir olması işimizi kolaylaştırabilir.

Ya da önceden çözümü bildiğimiz Cauchy, Jensen, Pexider vb. özel denklemlerin çözümlerinden yararlanarak yeni denklemlerin çözümlerine ulaşılabilir.

Bu yolculuk her zaman mutlu sonla bitmeyebilir. Bazen bir denklemin genel ya da özel çözümlerine ulaşırken bazen de çözümü olmayan bir denklemle karşılaşabiliriz. Bu durumda problemimiz artık bu denklemi çözmek değil, çözümsüzlüğünü ya da böyle bir fonksiyonun mevcut olamayacağını ispatlamak olur.

4.3. Fonksiyonel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Gerek genel çözümler için gerekse özel çözümler için bazı yöntem ve kavramlardan yararlanabiliriz.

Bu yöntemlerden en basiti doğru değerleri yerine yazmak anlamında "yerine koyma yöntemi" denilebilir.

4.3.1. Yerine Koyma Yöntemi ile Çözülebilen Denklem Örnekleri

Örnek 4.1 $x \neq 0, 1$ *olmak üzere*

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

eşitliği sağlandığına göre $f(2)$ *kaçtır?*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{2} \quad &\text{için} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = \frac{1}{2} \\
x = -1 \quad &\text{için} \quad f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \\
x = 2 \quad &\text{için} \quad f(2) + f(-1) = 2
\end{aligned}$$

İkinci denklem eksi ile çarpılıp her üç denklem toplanırsa $f(2) = \frac{7}{4}$ bulunur.

Örnek 4.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(k+1) = f(k) + k$ *ve* $f(1) = 3$ *ise* $f(41)$ *kaçtır?*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
k = 1 \quad &\text{için} \quad f(2) = f(1) + 1 \\
k = 2 \quad &\text{için} \quad f(3) = f(2) + 2 \\
&\vdots \\
k = 40 \quad &\text{için} \quad f(41) = f(40) + 40 \\
&+ \\
\hline
\end{aligned}$$

Taraf tarafa toplarsak

$$\cancel{f(2)} + \cancel{f(3)} + \cdots + \cancel{f(40)} + f(41) = f(1) + \cancel{f(2)} + \cdots + \cancel{f(40)} + 1 + 2 + \cdots + 40$$

$$f(41) = f(1) + \frac{40 \cdot 41}{2} = 823$$

bulunur.

Örnek 4.3 (Kanada 1989) *n sayısının rakamları toplamını $f(n)$ ile gösterelim. Buna göre $f\left(f\left(f\left(f\left(1989^{1989}\right)\right)\right)\right)$ nedir?*

Çözüm: $1989^{1989} \leqslant (10000)^{1989}$ dir. En büyük rakam 9 olduğundan

$$f\left(1989^{1989}\right) \leqslant 9 \cdot 1989 \cdot 4 = 71604 \leqslant 99999$$

olur. Buradan $f\left(f\left(1989^{1989}\right)\right) < 45$ bulunur. Buradan $f\left(f\left(f\left(1989^{1989}\right)\right)\right) < 18$ diyebiliriz.

$$f\left(f\left(f\left(f\left(1989^{1989}\right)\right)\right)\right) \leqslant 9$$

olur. 1989'un tüm kuvvetleri 9'a bölüneceğinden

$$f\left(f\left(f\left(f\left(1989^{1989}\right)\right)\right)\right) = 9$$

olur.

Örnek 4.4 *$f(m,n) : [\mathbb{R} - \{0\}] \times [\mathbb{R} - \{0\}] \to \mathbb{R}$ ve $f\left(m, f(n,k)\right) = f(m,n) \cdot k$ ve $f(m,m) = 1$ için $f(m,12) = 24$ ise m kaçtır?*

Çözüm: $m = n = k$ alırsak

$$f(m, \underbrace{f(m,m)}_{1}) = f(m,m) \cdot m$$
$$f(m,1) = m$$

bulunur. Ayrıca sadece k yerine n yazarsak

$$\underbrace{f(m, \underbrace{f(n,n)}_{1})}_{m} = f(m,n) \cdot n$$
$$m = f(m,n) \cdot n$$
$$\frac{m}{n} = f(m,n)$$

den $f(m,12) = \dfrac{m}{12} = 24$ ten $m = 288$ bulunur.

Örnek 4.5 (Çin M.O. 2002) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(1) = 1$ ve $\forall m \in \mathbb{R}$ için $f(m+5) \geqslant f(m) + 5$, $f(m+1) \leqslant f(m) + 1$ eşitsizlikleri sağlanmaktadır. $g(m) = f(m) + 1 - m$ ise $g(2002)$ kaçtır?*

Çözüm: Verilen bilgilerden kolayca

$$\begin{aligned} f(m)+5 \leqslant f(m+5) &\leqslant f(m+4)+1 \\ &\leqslant f(m+3)+2 \\ &\leqslant f(m+2)+3 \\ &\leqslant f(m)+5 \quad \text{yazılabilir.} \end{aligned}$$

Buradan $f(m+1)=f(m)+1$ olur.

$$\begin{array}{lll} m=1 & \text{için} & \cancel{f(2)} = f(1)+1 \\ m=2 & \text{için} & \cancel{f(3)} = \cancel{f(2)}+1 \\ & \vdots & \\ m=2001 & \text{için} & f(2002) = \cancel{f(2001)}+1 \\ & + & \\ \hline & & f(2002) = f(1)+2001 = 2002 \end{array}$$

den $g(2002) = f(2002)+1-2002 = 2002+1-2002 = 1$ bulunur.

Örnek 4.6 (AIME 1984) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$,

$$f(t) = \begin{cases} t-3 & t>999 \\ f\left(f(t+5)\right) & t<1000 \end{cases}$$

şeklinde tanımlandığına göre $f(84)$ *kaçtır?*

Çözüm:

$$\begin{aligned} f(1004) &= 1001 \\ f(1003) &= 1000 \\ f(1002) &= 999 \\ f(1001) &= 998 \\ f(1000) &= 997 \\ f(999) &= f\left[f(1004)\right] = f(1001) = 998 \\ f(998) &= f\left[f(1003)\right] = f(1000) = 997 \\ f(997) &= f\left[f(1002)\right] = f(999) = 998 \end{aligned}$$

olur. $t \leqslant 1001$ için t tek ise sonuç 998, t çift ise sonuç 997 olduğundan $f(84)=997$ olur.

4.4. Doğrusal Fonksiyonlar

$f(x) = ax + b$ şeklindeki fonksiyonlara lineer (doğrusal) fonksiyon denir. Bir fonksiyonun doğrusallığı bazen çözümde işimizi kolaylaştırabilir.

Örnek 4.7 41 *tane f fonksiyonunun bileşkesinden oluşan fonksiyon*

$$\underbrace{f(f(f \dots f}_{\textit{41 tane}}(x))) = 7^{41} \cdot x + 1$$

ise $f(x) = ?$

Çözüm: $f(f(f \dots f(x))) = 7^{41} \cdot x + 1$ eşitliğinin sağ tarafı doğrusal olduğundan sol tarafı da doğrusaldır. $f(x) = ax + b$ formundadır.

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax + b \\
f(f(x)) &= a(ax + b) + b = a^2x + b(a + 1) \\
f(f(f(x))) &= a\left(a^2x + b(a + 1)\right) + b = a^3x + b(a^2 + a + 1) \\
&\vdots \\
\underbrace{f(f(f \dots f}_{\text{41 tane}}(x))) &= a^{41}x + b\left(a^{40} + a^{39} + \dots + a + 1\right) \\
&= a^{41}x + b \cdot \frac{a^{41} - 1}{a - 1} = 7^{41} \cdot x + 1
\end{aligned}$$

olduğundan $a = 7$ ve $b \cdot \dfrac{a^{41} - 1}{a - 1} = 1$ olur. Buradan $b = \dfrac{6}{7^{41} - 1}$ bulunur. Yani aranan fonksiyon $f(x) = 7x + \dfrac{6}{7^{41} - 1}$ olur.

4.5. Fonksiyonel Denklemlerin Çözümünün Varlığı

Fonksiyonel denklemlerin çözümü için çıktığımız bu yolda bazen yazılan denklemi sağlayan bir fonksiyon bulamayız. O zaman da bize düşen bu imkânsızlığı kanıtlamak olur.

Bunun için genellikle fonksiyonun artan ya da azalanlığı, sürekli ya da periyodik olması, tekliği ya da çiftliği gibi kabullerle yola çıkıp, bir çelişki bulmaya çalışmaktır.

Örnek 4.8 (Municipal 1998) *$\forall x \in \mathbb{R}$ için*

i) $f(1+f(x)) = 1-x$

ii) $f(f(x)) = x$

eşitliklerini sağlayan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm: Kabul edelim ki i ve ii özelliklerini sağlayan f vardır. O zaman $f\left[f(1+f(x))\right] = f(1-x)$ olur. Buradan $1 + f(x) = f(1-x)$ bulunur.

$$x = 0 \quad \text{için} \quad 1 + f(0) = f(1)$$
$$x = 1 \quad \text{için} \quad 1 + f(1) = f(0)$$

dır. Son iki ifade taraf tarafa toplanırsa $2 = 0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Demek ki istenen özelliklere uygun f fonksiyonu yoktur.

Örnek 4.9 *$c \in (-1, 1)$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(cx) = f(x)$ koşulunu sağlayan ve $x = 0$ noktasında sürekli olan tüm fonksiyonları bulunuz.*

Çözüm: $f(x) = f(cx)$ ise

$$f(x) = f(cx) = f(c^2x) = \cdots = f(c^nx)$$

alabiliriz. Fonksiyon $x = 0$ noktasında sürekli ve $\lim\limits_{n\to\infty} c^nx = 0$ olduğundan

$$f(0) = f\left(\lim_{n\to\infty} c^nx\right) = \lim_{n\to\infty} f(c^nx) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x)$$

olur yani $f(cx) = f(x)$ eşitliğini sağlayan tek fonksiyon $f(x) = 0$ fonksiyonudur.

4.6. Türev Yardımıyla Çözülebilen Fonksiyonel Denklemler

Bir fonksiyonun türevlenebilir olması çözümü kolaylaştıran özelliklerden biridir.

Örnek 4.10 *$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x+y) - f(x-y) = 2 \cdot f(y)$$

olmak üzere tüm türevlenebilir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(x+y) - f(x-y) = 2 \cdot f(y)$ ifadesinde her iki tarafın x e göre türevini alırsak; $f'(x+y) - f'(x-y) = 0$, y ye göre türevini alırsak; $f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(y)$ bulunur. Taraf taraf toplarsak $2f'(x+y) = 2 \cdot f'(y)$ den $f'(x+y) = f'(y)$ bulunur. $y = 0$ için $f'(x) = f'(0)$ ve $f'(0) = x \in \mathbb{R}$ dersek $f'(x) = x$ ise $f(x) = ax + b$ bulunur.

Örnek 4.11 $P(2k) = P'(k) \cdot P''(k)$ *eşitliğini sağlayan tüm* $P(k)$ *polinomlarını bulunuz.*

Çözüm: $P(k) = ak^n + \cdots$ formatında n. dereceden bir polinom olsun. O halde P', $(n-1)$. dereceden, P'', $(n-2)$. dereceden olur. $P(2k) = P'(k) \cdot P''(k)$ eşitliğini derece yönünden incelersek $n = (n-1) + (n-2)$ yani $n = 3$ bulunur. O halde $P(k) = ak^3 + bk^2 + ck + d$ şeklindedir. $P'(k) = 3ak^2 + 2bk + c$, $P''(k) = 6ak + 2b$ olur.

$$P(2k) = P'(k) \cdot P''(k)$$
$$8ak^3 + 4bk^2 + 2ck + d = \left(3ak^2 + 2bk + c\right) \cdot (6ak + 2b)$$

eşitliğinin sağlanması için $8a = 18a^2$ ve $b = c = d = 0$ olmalıdır. Buradan $a = \dfrac{4}{9}$ bulunur. Dolayısıyla verilen eşitliği sağlayan tek polinom $P(k) = \dfrac{4}{9}k^3$ polinomudur.

4.7. Polinom

Örnek 4.12 (Kanada 1975) $n \in \mathbb{Z}^+$, $(P(x))^n = P(P(x))$ *eşitliğini sağlayan tüm reel katsayılı polinomları bulunuz.*

Çözüm: $P(x) = ax^m + \cdots$ ve $(P(x))^n = a^n \cdot x^{m \cdot n} + \cdots$ şeklinde olurlar. $(P(x))^n = P(P(x))$ yani

$$a^n \cdot x^{m \cdot n} + \cdots = a^{m+1} \cdot x^{m^2} + \cdots$$

olduğundan $m = n$ ve $a = 1$ bulunur. Bu durumda $(P(x))^n = P(P(x)) + Q(x)$ eşitliğinin sağlanması için $Q(x) = 0$ olmalıdır. O halde bu eşitliği sağlayan tüm polinomlar $P(x) = x^n$ şeklindedir.

Örnek 4.13 (Slovenya 1999) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *için* $f(x - f(y)) = 1 - x - y$ *fonksiyonel denklemini sağlayan tüm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tanımlı fonksiyonları bulunuz.*

Çözüm: $f(x - f(y)) = 1 - x - y$ denkleminde $x = 0$, $y = 1$ için

$$f(x - f(y)) = 0$$

Yine orijinal denklemde $y = -f(1)$ alırsak

$$f(x - \underbrace{f(-f(x))}_{0}) = 1 - x + f(1)$$
$$f(x) = 1 + f(1) - x$$

bulunur. $1 + f(1) = c$ dersek $f(x) = c - x$ olur.

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$
$$c - x + f(y) = 1 - x - y$$
$$c - \cancel{x} + c - \cancel{y} = 1 - \cancel{x} - \cancel{y}$$

den $c = \dfrac{1}{2}$ bulunur. O halde aranan fonksiyon $f(x) = \dfrac{1}{2} - x$ fonksiyonudur.

Örnek 4.14 (Kanada MOCP 2001) *Aşağıdaki koşulları sağlayan $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu bulunuz.*

i) $f(4) = 4$

ii) $\dfrac{1}{f(1)f(2)} + \dfrac{1}{f(2)f(3)} + \dfrac{1}{f(3)f(4)} + \cdots + \dfrac{1}{f(n)f(n+1)} = \dfrac{f(n)}{f(n+1)}.$

Çözüm: Eğer;

$$f(n+1) - f(n) = \cdots = f(3) - f(2) = f(2) - f(1) = 1$$

ise aranan fonksiyon $f(x) = x$ fonksiyonu olabilir.

$f(x) = x$ fonksiyonunun $f(4) = 4$ şartını sağladığı aşikardır.

ii) için de

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \frac{1}{f(3)f(4)} + \cdots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} \\
&= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{f(n)}{f(n+1)}
\end{aligned}$$

olduğundan $f(x) = x$ istenen koşulları sağlayan bir fonksiyondur.

Örnek 4.15 (IMO 1977) $f(x) : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ *tanımlı bir fonksiyon ve* $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ *için* $f(x+1) > f(f(x))$ *ise* $\forall x$ *için* $f(x) = x$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x) \geqslant f(x+1)$ olsun. $f(x) \geqslant f(x+1) > f(f(x))$ olur. Ancak $m = 1$ için $1 > f(1)$ olmaz. Bu çelişki dolayısıyla $f(x) < f(x+1)$ olur bu ise f artan demektir. $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x) > x$ iken $f(x) \geqslant x+1$ olur. f artan olduğundan $f[f(x)] \geqslant f(x+1)$ bulunur, bu ise problemin şartı ile çelişir. O halde $f(x) \leqslant x$ olmalıdır. $\forall x \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x) < f(x+1)$ ve $f(x) \leqslant x$ olduğundan $f(x) = x$ olmak zorundadır.

4.8. Süreklilik Yardımıyla Çözülebilen Fonksiyonel Denklemler

Örnek 4.16 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $f\left(\sqrt{2}x\right) = 2 \cdot f(x)$ eşitliğini sağlasın. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$ denklemini sağlayan tüm fonksiyonları bulunuz.*

Çözüm: $f(x) = x^2 + p(x)$ ifadesinde periyodu 1 olan her periyodik fonksiyon için $p(x)$'in genel çözümü aşikardır. $p(\sqrt{2}x) = 2 \cdot p(x)$ olduğunu biliyoruz. Ancak bu ifade ne $p(x) = 0$ olduğunu ne de p'nin sınırlı olduğunu gösterir. Ancak f sürekli olduğundan $p(x)$ de süreklidir. Her periyodik sürekli fonksiyon sınırlı olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $p(x) = 0$ dır. Böylece tek çözüm $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ dir.

Örnek 4.17 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonları bulalım.

Çözüm: Kabul edelim ki $g(x) = f(x) - \dfrac{x^5}{5}$ fonksiyonu tanımlı olsun. $g(x+y) = g(x) + g(y)$ ve $g(x) = ax$ yazarsak denklemin çözümü olarak $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + ax$ olur.

Örnek 4.18 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $f[x + f(y)] = y + f(x+1)$ denklemini sağlayan tüm fonksiyonları bulalım.*

Çözüm: $f[x + f(y)] = y + f(x+1)$ için

$$\begin{aligned} P(0, y+1-f(1)) &\Rightarrow f[f(y+1) - f(1)] = y + 1 \\ P\left(y - f(1), f(y+1-f(1)\right) &\Rightarrow f\left(y - f(1) + f(f(y+1-f(1)))\right) \\ &= f[y+1-f(1)] + f(y+1-f(1)) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$f(x+y+1-f(1)) = f[y+1-f(1)] + f(x+1-f(1))$$

o zaman $g(x) = f[x+1-f(1)]$ ve $g(x+y) = g(x)+g(y)$ fonksiyonlarının sürekliliğinden $g(x) = ax$ ve $f(x) = x[x+f(1)-1]$ olduğundan $f(x) = ax+b$ formunda iki adet çözüm $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 1+x$ ve $f(x) = 1-xp$ olarak bulunur.

4.9. Sınırlılık Yardımıyla Çözülebilen Fonksiyonel Denklemler

Örnek 4.19 $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ *tanımlı* $[0,1]$ *aralığında sınırlı bir fonksiyon ve her bir negatif* x, y *çifti için*

$$f(x) \cdot f(y) \leqslant x^2 \cdot f\left(\frac{y}{2}\right) + y^2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\forall x \in \mathbb{R}^-$ *için* $f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$ *olduğunu gösterelim.*

Çözüm: Verilen eşitsizlikte $x = y$ alınırsa

$$2x^2 \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant [f(x)]^2$$

bulunur. $g(x) = \dfrac{2 \cdot f(x)}{x^2}$ için $g(\frac{x}{2}) \geqslant g(x)^2$ olur. Buradan $g(\frac{x}{2^n}) \geqslant g(x)^{2n}$ bulunur. Bazı u'lar için $g(u) = a > 1$ olduğunu varsayarsak, $g\left(\dfrac{u}{2^n}\right) \geqslant a^{2^n}$ olur ve $f\left(\dfrac{u}{2^n}\right) \geqslant u^2 \dfrac{a^{2^n}}{2^{2n+1}}$ bulunur. Son eşitlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa f sınırsız çıkar ki bu bir çelişkidir. Öyleyse $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) \leqslant 1$ dir. Yani $f(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$ bulunur.

4.10. Monotonluk Yardımıyla Çözülebilen Denklemler

Örnek 4.20 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *ye sürekli, monoton azalan bir* $f(x)$ *fonksiyonu;*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \textit{için} \quad f(x+y) = f\big(f(x)+f(y)\big) = f\Big[f\big(x+f(y)\big) + f\big(y+f(x)\big)\Big]$$

eşitliğini $\forall x \in \mathbb{R}^+$ *için* $f\big(f(x)\big) = x$ *olduğunu ispatlayınız.*

Çözüm: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x)$ sürekli ve monoton ise $f(x) = x$ denkleminin $a > 0$ olan bir kökü vardır. $y = a$ değerini fonksiyonel denklemde yerine yazarsak;

$$f(x+a) + f(f(x)+a) = f\Big(f(x+a) + f\big(f(x)+a\big)\Big)$$

olur. Buradan $f(x+a)+f(f(x)+a)$,
$f(x)=x$ in kökküdür. Böylece; x yerine $f(x)$ yazarsak bu denklemi elde ederiz;

$$f(x+a)+f(f(f(x))+a)=a.$$

Bu yüzden $f(f(f(x))+a)=f(x+a)$ içine fonksiyonu (monoton azalan) $f(f(x))=x$ olur. Buna örnek verirsek; $f(x)=\dfrac{1}{x}$ için aşikardır.

Örnek 4.21 (Romanya 2011–Grade IV) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$|x-y|^2 \leqslant \Big|f(x)-f(y)\Big| \leqslant |x-y|$$

eşitsizliğini sağlayan tüm fonksiyonları bulunuz.

Çözüm: $\forall x,y$ için $|x-y|^2 \leqslant \Big|f(x)-f(y)\Big| \leqslant |x-y|$ denkleminde $y=x$ alırsak f süreklidir. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $x=a$ ve $y=b$ için $(a-b)^2\leqslant 0$ ve $a=b$ için f, 1–1, sürekli ve monotondur. $f(0)=0$ ve f artan olduğundan $f(x)+c$ ve $c-f(x)$ birer çözümdür. $x=1$, $y=0$ için $f(1)=1$ bulunur. $f(x)\in[0,1]$ ve $x=x$,
$y=0$ için $f(x)\leqslant x$. $x=x$,
$y=1$ için $1-f(x)\leqslant 1-x$ buradan $f(x)=x$ tir. $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=x+a$ ve $f(x)=a-x$ olmak şartıyla $\exists\, a\in\mathbb{R}$ vardır.

Örnek 4.22 (Kanada 1995) $f(x)=\dfrac{9^x}{3+9^x}$ *olduğuna göre,*

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{3}{1996}\right)+\cdots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm: $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x}{3+9^x}+\dfrac{9^{1-x}}{3+9^{1-x}}=1$ olduğundan
$f\left(\dfrac{1}{1996}\right)+f\left(\dfrac{2}{1996}\right)+f\left(\dfrac{3}{1996}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{1995}{1996}\right)=997+f(1/2)=1995/2$ bulunur.

Örnek 4.23 (AIME 1994) *$f(x)$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) + f(x-1) = x^2$ koşulunu sağlamaktadır. $f(19) = 94$ ise, $f(94)$ değerinin son üç rakamı kaçtır?*

Çözüm: $f(94) = 94^2 - f(93)$ eşitliğinde, $f(93) = 93^2 - f(92)$ yazalım ve bu işlemi sürdürelim. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(94) &= 94^2 - f(93) = (94^2 - 93^2) + f(92) \\ &= (94^2 - 93^2) + 92^2 - f(91) \\ &= (94^2 - 93^2) + (92^2 - 91^2) + f(90) \\ &\ \vdots \\ &= (94^2 - 93^2) + (92^2 - 91^2) + \cdots + (22^2 - 21^2) + 20^2 - f(19) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$f(94) = 94 + 93 + 92 + 91 + \cdots + 22 + 21 + 400 - 94 = 4561$$

elde edilir. Yanıt 561 olur.

Örnek 4.24 (AIME 1985) *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her x reel sayısı için, $f(0) = 0$, $f(2+x) = f(2-x)$ ve $f(7+x) = f(7-x)$ eşitliklerini sağladığına göre $|x| \leqslant 1000$ ve $f(x) = 0$ olacak şekildeki x sayılarının mümkün olan en küçük sayısı kaçtır?*

Çözüm: $f(0) = 0$, $f(2+x) = f(2-x)$ ve $f(7+x) = f(7-x)$ eşitliklerine göre, $f(2+x) = f(2-x)$ eşitliğinde $x = x-2$ yazarsak, $f(x) = f(4-x)$, $f(7+x) = f(7-x)$ eşitliğinde $x = x-7$ yazarsak $f(x) = f(14-x)$ olur. Buna göre,

$x = 0$ ise $f(4) = f(14) = 0$ $\quad$ $x = 4$ ise $f(0) = f(10) = 0$

$x = 10$ ise $f(-6) = f(4) = 0$ $\quad$ $x = -6$ ise $f(10) = f(20)$

$x = 20$ ise $f(-16) = f(-6)$ $\quad$ $x = -16$ ise $f(-20) = f(30)$

şeklinde devam edilirse görülür ki, n bir tam sayı olmak üzere

$$x = 10n \text{ ve } x = 4 - 10n$$

olduğunda $f(x) = 0$ olmaktadır. $2000/10 = 200$ olduğundan $200 \cdot 2 + 1 = 401$ tane sayı vardır.

Örnek 4.25 (Harvard MIT Math. Tournament 2002) *a, b ve n pozitif tam sayılar olmak üzere, $a+b=2^n$ ve $f(a)+f(b)=n^2$ eşitlikleri sağlanıyorsa, $f(2002)$ kaçtır?*

Çözüm: $a+b=2^n$ ve $f(a)+f(b)=n^2$ eşitliklerine göre $f(a)=n^2-f(2^n-a)$ yazabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} f(2002) &= 11^2 - f(2^{11}-2002) = 121 - f(46) \\ &= 121 - (6^2 - f(2^6-46)) = 85 + f(18) \\ &= 85 + 5^2 - f(2^5-18) = 110 - f(14) \\ &= 110 - (4^2 + f(2^4-14)) = 94 + f(2) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $f(2)=2^2-f(2^2-2)$ eşitliğinden, $2f(2)=4$ ve $f(2)=2$ bulunur. Böylece $f(2002)=96$ olur.

4.11. Birinci Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 4.26 *Çok bilinen klasik bir fonksiyonel denklem*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

Öncelikle ek varsayımlara gerek kalmadan (1) denkleminden mümkün olduğunca daha fazla bilgi almaya çalışıyoruz. $y=0$, $f(x)=f(x)+f(0)$ ı sağlar,
yani,

$$f(0)=0. \tag{2}$$

$y=-x$ için, $0=f(x)+f(-x)$,
yani,

$$f(-x)=-f(x) \tag{3}$$

elde edilir.

Şimdi kabulümüzü $x>0$ için sınırlayalım. $y=x$ için, $f(2x)=2f(x)$, tümevarımla,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx)=nf(x) \tag{4}$$

elde edilir.

$x = \dfrac{m}{n}$ *rasyoneli için, yani,* $n \cdot x = m \cdot 1$*,* (4) *ile*
$f(n \cdot x) = f(m \cdot 1)$*,*
$nf(x) = m \cdot f(1)$*, ve*

$$f(x) = \frac{m}{n} \cdot f(1) \tag{5}$$

bulunur.

Eğer $f(1) = c$ *alırsak, o zaman,* (2)*,* (3)*,* (5) *ile rasyonel* x *için* $f(x) = cx$ *elde ederiz. Ek varsayımlar olmadan elde edebileceğimiz tek şey budur.*

a) f ***sürekli ise:*** f *in sürekli olduğunu kabul edelim. Eğer* x *irrasyonel ise o zaman limit* x *ile* x_n *rasyonel dizisini seçelim.* f *in sürekliliğinden*

$$f(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = \lim_{x_n \to x} c_{x_n} = c_x$$

olur. O zaman her x *için* $f(x) = cx$ *elde edilir.*

b) f ***monoton artan ise:*** f *monoton artan olsun. Eğer* x *irrasyonel ise, o zaman rasyonel sayıların* x*'e yakınsayan artan ve azalan birer* r_n *ve* R_n *dizileri bulunabilir. O zaman*

$$c_{r_n} = f(r_n) \leqslant f(x) \leqslant f(R_n) = cR_n$$

olur. $n \to \infty$ *için,* c_{r_n} *ve* cR_n *dizilerinin ikisi de* c_x*'e yakınsar. Bu yüzden her* x *için* $f(x) = cx$*'dir.*

c) f ***sınırlı veya periyodik ise:*** f*,* $[a, b]$ *kapalı aralığında tanımlansın, yani, her* $x \in [a, b], |f(x)| < M$ *olsun.* f *in ayrıca* $[0, b-a]$ *aralığında sınırlı olduğunu görelim. Eğer* $x \in [0, b-a]$ *ise o zaman* $x + a \in [a, b]$ *dir.* $f(x) = f(x+a) - f(a)$ *oluşundan,*

$$|f(x)| < 2M$$

elde edilir.

Eğer $b - a = d$ *alırsak, o zaman* f*,* $[0, d]$ *aralığında sınırlıdır.* $c = \dfrac{f(d)}{d}$ *ve* $g(x) = f(x) - cx$ *olsun. O zaman*

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Dahası, $g(d) = f(d) - cd = 0$ *ve*

$$g(x+d) = g(x) + g(d) = g(x),$$

yani, $g(x)$ *fonksiyonu,* d *periyoduyla periyodiktir. İki sınırlı fonksiyonun farkından dolayı* $g(x)$*, aynı zamanda* $[0, d]$ *aralığında sınırlıdır. Periyodik özellikten dolayı* $g(x)$*, tüm sayı doğrusunda* *sınırlıdır.* $g(x_0) \neq 0$ *olacak şekilde bir* x_0 *olduğunu kabul edelim. O zaman* $g(nx_0) = ng(x_0)$ *olur.* n*'i yeterince büyük seçerek,* $|ng(x_0)|$*'ı istediğimiz kadar büyütebiliriz. Bu ise* $g(x)$ *in sınırlılığıyla çelişir. Bu yüzden her* x *için,* $g(x) = 0$*, yani,*

$$\forall x \text{ için } f(x) = cx.$$

1905 de G. Hamel hiçbir yerde sınırlı olmayan ve $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *fonksiyonel denklemini sağlayan "wild" fonksiyonlarını keşfetmiştir. "tame" sonuçları keşfetmek için çalışıyoruz. Eğer tüm rasyoneller için bir çözüm bulmayı başarırsak, o zaman o çözümü süreklilikle veya monotonlukla tüm reellere genişletebiliriz.*

4.12. İkinci Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 4.27 *Diğer bilinen bir denklem*

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{1}$$

dir.

Eğer $f(\alpha) = 0$ *olacak şekilde bir* α *varsa, o zaman her* x *için* $f(x+\alpha) = f(x) \cdot f(\alpha) = 0$ *dır, yani,* f *birim sıfırdır. Diğer tüm çözümler için, her yerde* $f(x) \neq 0$ *olur.* $x = y = \dfrac{t}{2}$ *için,*

$$f(t) = f^2\left(\frac{t}{2}\right) > 0.$$

Aradığımız çözüm her yerde pozitiftir. $y = 0$ *için,* (1) *den* $f(x) = f(x) \cdot f(0)$*, yani,* $f(0) = 1$ *elde edilir.* $x = y$ *için,* $f(2x) = f^2(x)$*, ve tümevarımla*

$$f(nx) = f^n(x) \tag{2}$$

bulunur.

$x = \dfrac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$*, yani,* $n \cdot x = m \cdot 1$ *olsun.* (2) *yardımıyla,*

$$\begin{aligned} f(nx) = f(m \cdot 1) &\Rightarrow f^n(x) = f^m(1) \\ &\Rightarrow f(x) = f^{\frac{m}{n}}(1) \end{aligned}$$

bulunur. $f(1) = \alpha$ *alırsak, o zaman*

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \alpha^{\frac{m}{n}},$$

yani, rasyonel x için $f(x) = \alpha^x$ elde edilir. Zayıf ek koşullar (süreklilik, monotonluk, sınırlılık) yardımıyla, her x için, $f(x) = \alpha^x$ olduğunu görebiliriz.

Daha basit olan bir sonraki adımda her x için $f(x) > 0$ olduğundan (1) de logaritma alınırsa,

$$\ln \circ f(x+y) = \ln \circ f(x) + \ln \circ f(y)$$

elde edilir.

Şimdi $\ln \circ f = g$ olsun. O zaman $g(x+y) = g(x) + g(y)$ eşitliğinden

$$\ln f(x) = g(x) \Rightarrow g(x) = cx$$
$$\Rightarrow \ln \circ f(x) = cx$$

ve

$$f(x) = e^{cx}$$

elde edilir.

4.13. Üçüncü Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 4.28

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

denklemini ele alalım.

Sonuçlardan biri olan her x için $f(x) = 0$'ı tahmin etmek kolaydır. $x = 0$ için tanımlanan tek çözümdür. Eğer $x = 0$ f'in tanım kümesine aitse, o zaman (1) de $y = 0$ koyarak, her x için $f(x) = 0$'ı sağlayan $f(0) = f(x) + f(0)$'ı elde ederiz. f'in tanım kümesinde $x = 1$ olsun. $x = y = 1$ ile, $f(1) = 2f(1)$, veya

$$f(1) = 0 \tag{2}$$

Eğer 1 ve -1 ikisi birden tanım kümesine aitse, o zaman f çift fonksiyondur, yani her x için $f(-x) = f(x)$'dir. İspatlamak için (1) de $x = y = -1$ alalım, ve (2) ile birlikte

$$f(1) = 2f(1) = 0 \Rightarrow f(-1) = 0$$

elde ederiz.

(1) de $y = -1$ alarak, $f(-x) = f(x) + f(-1)$ ve buradan her x için $f(x) = f(-x)$ elde edilir.

$x > 0$ için f'in diferansiyellenebilir olduğunu kabul edelim. y'nin sabit olduğunu ve x'in değişken olduğunu alalım. O zaman $yf'(xy) = f'(x)$ elde ederiz. $x = 1$ için, $yf'(y) = f'(1)$ elde edilir. Notasyon değişimiyle $f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$, buradan

$$f(x) = \int_1^x \frac{f'(1)}{t} dt = f'(1) \ln x$$

bulunur. Eğer fonksiyon $x < 0$ içinde tanımlıysa, o zaman $f(x) = f'(1) \ln |x|$ olur.

4.14. Dördüncü Cauchy Fonksiyonel Denklemi

Örnek 4.29 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad x, y \geqslant 0$ *için,*

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ eşitliğini sağlayan tüm sürekli $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulalım.

Bu eşitliği sağlayan fonksiyonel denkleme 4. Cauchy Fonksiyonel Denklemi denir.

Çözüm: $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geqslant 0$ olduğu kolayca gösterilebilir.
Örneğin $x = y = \sqrt{a}$ alırsak

$$f(a) = f(\sqrt{a}) \cdot f(\sqrt{a})$$
$$f(a) = \left[f(\sqrt{a})\right]^2 \qquad \text{olduğundan}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \geqslant 0$ dır.

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ eşitliğinde her iki tarafın $\ln$ ini alırsak;
$\ln [f(x \cdot y)] = \ln f(x) + \ln f(y)$ bulunur.

$\ln f(x) = h(x)$ alınırsa;
Buradan; karşımıza 3. Cauchy denklemi olan

$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$ çıkar ki
bu denklemin çözümünün $h(x) = 0$ veya $h(x) = c \cdot \ln x$ olduğunu biliyoruz.

$h(x) = \ln f(x)$ olduğundan

$$\ln f(x) = 0 \qquad\qquad \ln f(x) = c \cdot \ln x$$
$$f(x) = e^0 = 1 \qquad\qquad f(x) = e^{\ln x^c}$$

eşitliğini sağlayan fonksiyonlar $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ ve $f(x) = x^c$ bulunur.

4.15. Jensen Fonksiyonel Denklemi

Örnek 4.30

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \tag{1}$$

Jensen's fonksiyonel denklemini ele alalım. $f(0) = a$ *ve* $y = 0$ *olsun. O zaman* $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+a}{2}$ *olur. Buradan*

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+a}{2}$$

ve

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - a$$

elde edilir. $g(x) = f(x) - a$ *yardımıyla,* $g(x+y) = g(x) + g(y)$ *yardımıyla* $g(x) = cx$ *ve*

$$f(x) = cx + a$$

elde edilir.

Örnek 4.31 *Daha karışık bir örnek alalım.*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y) \tag{1}$$

(1) *in sürekli çözümünü bulmak istiyoruz. Öncelikle her* x *için* $f(x) = 0$ *bariz çözümdür. Şimdi*

$$y = 0 \Rightarrow 2f(x) = 2f(x)f(0) \Rightarrow f(0) = 1,$$
$$x = 0 \Rightarrow f(y) + f(-y) = 2f(0)f(y) \Rightarrow f(-y) = f(y)$$

yani, f *çift fonksiyondur.* $x = ny$ *için*

$$f\left[(n+1)y\right] = 2f(y) \cdot f(ny) - f\left[(n-1)y\right] \tag{2}$$

elde edilir.

$y = x$ *için,* $f(2x) + f(0) = 2f^2(x)$ *olur. Buradan* $t = 2x$ *için*

$$f^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{f(t)+1}{2} \tag{3}$$

buluruz.

$\cos$ *ve* $\cosh$ *fonksiyonları ile* (2) *ve* (3) *sağlanır.* $f(0) = 1$ *ve* f *sürekli olduğundan, yeterince küçük* $a > 0$ *için* $[-a, a]$ *aralığında* $f(x) > 0$ *elde edilir. Buradan* $f(a) > 0$ *olur.*

(a) *İlk olarak* $0 < f(a) \leqslant 1$ *durumunu alalım. O zaman* $0 \leqslant c \leqslant \frac{\pi}{2}$ *aralığında bir* c *olmalıdır. Bu yüzden* $f(a) = \cos c$ *olur.* $x = \left(\frac{n}{2^m}\right) a$ *biçimindeki herhangi bir sayı için,*

$$f(x) = \cos \frac{c}{a} x \tag{4}$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

$x = a$ *için* c*'nin tanımından açıktır.* $x = \frac{a}{2}$ *için* (3) *den*

$$f^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{f(a)+1}{2} = \frac{\cos c + 1}{2} = \cos^2 \frac{c}{2}$$

olmalıdır.

$f\left(\frac{a}{2}\right) > 0$, $\cos \frac{c}{2} > 0$ *olduğundan*

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \cos \frac{c}{2} \tag{5}$$

elde edilir.

(5) *denkleminin* $x = \frac{a}{2^m}$ *için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman* (3) *denklemi*

$$f^2\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = \frac{f\left(\frac{a}{2^m}\right)+1}{2} = \cos^2 \frac{c}{2^{m+1}}$$

veya

$$f\left(\frac{a}{2^{m+1}}\right) = \cos\left(\frac{c}{2^{m+1}}\right)$$

sağlar. $f(a/2^m) = \cos(c/2^m)$ *eşitliği, her* m *doğal sayısı için sağlanır.* $n = 2$ *için* (2) *den*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2^m}a\right) &= f\left(3 \cdot \frac{a}{2^m}\right) = 2f\left(\frac{a}{2^m}\right) f\left(\frac{a}{2^{m-1}}\right) - f\left(\frac{a}{2^m}\right) \\ &= 2\cos\frac{c}{2^m}\cos\frac{c}{2^{m-1}} - \cos\frac{c}{2^m} = \cos\frac{3}{2^m}c \end{aligned}$$

(4) *ten* $x = [(n-1)/2^m]\,a$ *ve* $x = (n/2^m)a$ *değerlerini,* (2) *den de* $x = [(n-1)/2^m]a$ *ve* $x = (n/2^m)a$ *ile birlikte düşünecek olursak;*

$$f\left(\frac{n+1}{2^m} \cdot a\right) = \cos \frac{n+1}{2^m} \cdot c$$

bulunur. Sonuç olarak

$$f\left(\frac{n}{2^m} \cdot a\right) = \cos \frac{n}{2^m} \cdot c \qquad n, m \in \{0, 1, \ldots\} \text{ için}$$

eşitliğine ulaşırız. f sürekli olduğundan da her x için

$$f(x) = \cos \frac{c}{a} x$$

bulunur. Ayrıca eğer $f(a) > 1$ iken $c > 0$ vardır ve

$$f(a) = \cosh c$$

dir.

Her x için bunu tek şekilde gösterebiliriz:

$$f(x) = \cosh \frac{c}{a} x.$$

Böylece (1) fonksiyonel denklemini içeren sürekli çözümler

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = \cos bx, \qquad f(x) = \cosh bx$$

$f(x) = 1$ ($b = 0$ için) sabitiyle listelenir.

(b) (1)'in türevlenebilir tüm çözümlerini bulmak istiyoruz. Türevlenebilen sürekli üssel fonksiyonları alacak olursak $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ denklemini tüm çözümler için kullanabiliriz. İki kez türevini alıp x ve y değişkenlerini tanımlarsak

$$x = f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x) \cdot f(y)$$
$$y = f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x) \cdot f''(y)$$

bu iki denklemi birlikte düşündüğümüzde

$$f''(x) \cdot f(y) = f(x) \cdot f''(y) \Rightarrow \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{f''(y)}{f(y)} = c \Rightarrow f''(x) = c \cdot f(x)$$
$$c = -w^2 \Rightarrow f(x) = a \cos wx + b \sin wx,$$
$$c = w^2 \Rightarrow f(x) = a \cosh wx + b \sinh wx.$$

$f(0) = 1$ ve $f(-x) = f(x)$ için çözümler sırasıyla

$$f(x) = \cos wx \quad \textit{ve} \quad f(x) = \cosh wx, \qquad \textit{bulunur.}$$

Cauchy'nin denklemlerini bu kadar detaylı konuştuktan sonra; diğer popüler denklemlerin ifadeleri ile yetinelim.

Cauchy'nin Fonksiyonel Denklemleri

1. $f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad f(x)=cx$

2. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \qquad f(x)=e^{cx} \qquad f(x)=0$

3. $f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \qquad f(x)=c\cdot \ln x \qquad f(x)=0$

4. $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \qquad f(x)=x^{c} \qquad f(x)=1 \qquad f(x)=0$

Jensen Fonksiyonel Denklemi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad f(x)=cx+a$$

Pexider Fonksiyonel Denklemleri

1. $f(x+y)=g(x)+h(y)$
$$\begin{aligned} f(x)&=cx+h(0)+g(0)\\ g(x)&=cx+g(0)\\ h(x)&=cx+h(0)\end{aligned}$$

2. $f(x+y)=g(x)\cdot h(y)$
$$\begin{aligned} f(x)&=g(0)\cdot h(0)\cdot a^{x}\\ g(x)&=g(0)\cdot a^{x}\\ h(x)&=h(0)\cdot a^{x}\end{aligned}$$

3. $f(x\cdot y)=g(x)+h(y)$
$$\begin{aligned} f(x)&=c\cdot \ln x+h(1)+g(1)\\ g(x)&=c\cdot \ln x+g(1)\\ h(x)&=c\cdot \ln x+h(1)\end{aligned}$$

4. $f(x\cdot y)=g(x)\cdot h(y)$
$$\begin{aligned} f(x)&=x^{c}\cdot g(1)\cdot h(1)\\ g(x)&=x^{c}\cdot g(1)\\ h(x)&=x^{c}\cdot h(1)\end{aligned}$$

Z. Daroczy Fonksiyonel Denklemi

$$a\cdot A\neq 0 \quad f(ax+y)=f(Ax)+f(y) \qquad \forall k\in \mathbb{Z}^{+} \quad f\left(a^{k}x\right)=A^{k}\cdot f(x)$$

5. OLİMPİYAT PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

1. $x \in \mathbb{R}$ için $f_1(x) = x^2 - 2x$ ve $n \geqslant 1$ için

$$f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$$

bağlantılarıyla $f_1, f_2, f_3, \ldots$ fonksiyonları tanımlanıyor. f_{1996} fonksiyonu $[0,2]$ kapalı aralığında alabileceği en küçük ve en büyük değerler nedir?

Çözüm: $f_1([0,2]) = [-1,0]$;
$f_2([0,2]) = f_1([-1,0]) = [0,3]$;
$f_3([0,2]) = f_1([0,3]) = [-1,3]$;
$f_4([0,2]) = f_1([-1,3]) = [-1,3]$;
$\ldots$
$f_{1996}([0,2]) = [-1,3] \Rightarrow -1$ ve 3.

2.
$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

fonksiyonel denklemini sağlayan tüm sürekli f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \Rightarrow g(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{f(x)\cdot f(y)} = \dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)} = g(x)+g(y)$
$\Rightarrow g(x) = cx \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{cx}$ bulunur.

3. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x \to -x \Rightarrow -xf(-x) - 2xf(x) = -1$; 2 ile çarpıldığında $\Rightarrow -2xf(-x) - 4xf(x) = -2$, bu da ilk denklemle toplandığında
$-3 \cdot x \cdot f(x) = -3$ ise $f(x) = \dfrac{1}{x}$ bulunur.

4.
$$x^3 \cdot 3^{\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x^3} \cdot 3^{x^3} = 6$$

denkleminin kaç farklı gerçel çözümü vardır?

a) 3 b) 2 c) 0 d) Sonsuz çoklukta e) Hiçbiri

Çözüm: $x > 0 \Rightarrow 6 = x^3 \cdot 3^{\frac{1}{x^3}} + \dfrac{1}{x^3} \cdot 3^{x^3} \geqslant 2\sqrt{\cancel{x^3} \cdot 3^{\frac{1}{x^3}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x^3}} \cdot 3^{x^3}} = 2\sqrt{3^{x^3+\frac{1}{x^3}}} \geqslant$
$2\sqrt{3 \cdot 2^{\sqrt{x^3+\frac{1}{x^3}}}} = 6 \Rightarrow$ Hepsi eşitlik olmak zorunda $\Rightarrow$

$x^3 = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ Tek çözüm bulunur.

5. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$$

Çözüm: $g(x) = f(x) - 2$ alınırsa,

$$g(x+y) = f(x+y) - 2 = f(x) + f(y) - 2 - 2 = g(x) + g(y)$$

bulunur. Buradan $g(x) = cx \Rightarrow f(x) = cx + 2$ olur.

6. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

$$f(x+y) = \left(1 + \frac{y}{x}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{y}\right) f(y)$$

Çözüm: Denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f(x+y) = \frac{(x+y)f(x)}{x} + \frac{(x+y)f(y)}{y} \Rightarrow \frac{f(x+y)}{x+y} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$$

olur. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ alınırsa, $g(x+y) = g(x) + g(y) \Rightarrow g(x) = cx$ olur ve buradan $f(x) = cx^2$ bulunur.

7. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x+y)+f(x-y) = 2\left[f(x) + f(y)\right]$ eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = y = 0$ alınırsa $f(0) = 0$ bulunur.

$f(-x) = f(x)$ ve $y = x$ ise $f(2x) = 4f(x)$ bulunur. Tümevarımla,

$$\begin{aligned} f(kx) = k^2 f(x) \Rightarrow f(kx + x) + f(kx - x) &= 2f(kx) + 2f(x) \\ \Rightarrow f((k+1)x) &= 2k^2 f(x) + 2f(x) - (k-1)^2 f(x) \\ &= (k^2 + 2k + 1)f(x) = (k+1)^2 f(x) \end{aligned}$$

bulunur.

$f(1) = c \Rightarrow f(k) = ck^2$ dir. $x = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ alınırsa $a = bx$ ve buradan

$$f(a) = f(bx) \Rightarrow b^2 f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{f(a)}{b^2} \Rightarrow \frac{ca^2}{b^2} \Rightarrow cx^2$$

bulunur.

8. a sabit bir sayı olmak üzere her x için $f(x+a) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ eşitliğini sağlayan f fonksiyonunun periyodik olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm: $f(x+a) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ eşitliğinde x yerine $x+a$ yazarsak,

$$f(x+2a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{1-f(x)+1+f(x)}{1-f(x)-1-f(x)} = -\frac{1}{f(x)}$$

bulunur. O zaman,

$$f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = -\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}} = f(x)$$

dir.

9. Pozitif gerçel sayılar üzerinde tanımlı, $f(1) = 1$ koşulu ile tüm x, y gerçel sayıları için $f(x^2y^2) = f(x^4+y^4)$ koşulunu sağlayan kaç f fonksiyonu vardır?

Çözüm: $x = y = 1$ ise $f(2) = f(1)$ dir. Her $z \in \mathbb{R}^+$ için $0 < z < 1$ ise $x^2y^2 = z$ ve $x^4+y^4 = 2$ olacak şekilde x, y vardır. Buradan

$$f(z) = f(x^2y^2) = f(x^4+y^4) = f(2) = 1$$

bulunur.

$z \geqslant 2$ ise $x^2y^2 = 1$, $x^4+y^4 = z$ olacak şekilde x, y vardır. Buradan

$$f(z) = f(1) = 1$$

bulunur.

$1 < z < 2$ ise $x^2y^2 = z$ ve $x^4+y^4 = 2$ olacak şekilde x, y vardır. Buradan

$$f(z) = f(x^4+y^4) = 1$$

bulunur.

10. $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$ fonksiyonel denkleminin tüm sürekli çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $g(x) = f(x) + 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} g(x+y) = f(x+y) + 1 &= f(x) + f(y) + f(x)f(y) + 1 \\ &= (f(x) + 1) + f(y)\,(f(x) + 1) \\ &= (f(x) + 1)(f(y) + 1) \\ &= g(x)g(y) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $g(x) = a^x$ olduğu çıkar. O zaman $f(x) = g(x) - 1 \Rightarrow a^x - 1$ olur.

11. $y = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{1999}}$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) rasyonel sayı ikilisi vardır?

Çözüm: $y^2 = x^2 + \dfrac{1}{1999}$ ise $(y - x)(y + x) = \dfrac{1}{1999}$ dur.

$k = 1, 2, \ldots$ için $y - x = \dfrac{k}{1999}$ ve $y + x = \dfrac{1}{k}$ denklemlerinin çözümü olduğundan sonsuz sayıda (x, y) ikilisi vardır.

12. f fonksiyonu, her $x \neq 1$ gerçel sayısı için,

$$f\,(x) + f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}\right) = x^3$$

eşitliğini sağlıyorsa, $f(-1)$ nedir?

Çözüm: $f\,(x) + f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}\right) = x^3$ eşitliğinde x yerine $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$ yazılırsa

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}\right) + f\left(\frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{-x}\right) = \frac{1}{1 - x^3}$$

bulunur. x yerine $\dfrac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{-x}$ yazılırsa

$$f\left(\frac{\sqrt[3]{1 - x^3}}{-x}\right) + f(x) = -\frac{1 - x^3}{x^3}$$

bulunur. Bu denklemlerden

$$2f(x) = x^3 - \frac{1}{1 - x^3} - \frac{1 - x^3}{x^3}$$

denklemi elde edilir. O zaman

$$f(-1) = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{4}$$

bulunur.

13. a, b, c, d gerçel sayılar ve $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ olmak üzere, $f(x) + g(x) = 0$, $f(x) - (g(x))^3 = 0$ denklem sisteminin birden çok gerçel kökü varsa, $f(x)g(x) = 0$ denkleminin en çok kaç farklı gerçel kökü olabilir?

A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

Çözüm: $f(x) = -g(x)$ ise kökleri aynıdır ve

$$g(x) + (g(x))^3 = 0 \Leftrightarrow g(x)[1 + (g(x))^2] = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

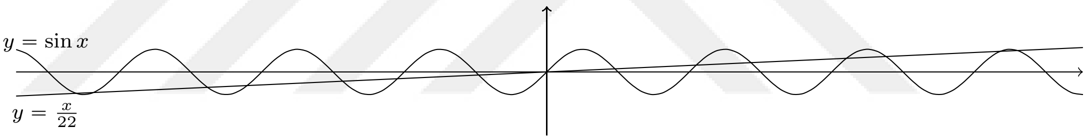
dır. O halde $g(x) = 0$ ın 2 kökü vardır. Buradan

$$-(g(x))^2 = f(x)g(x) = 0$$

denkleminin de 2 kökü olduğu anlaşılır.

14. $\sin x = \dfrac{x}{22}$ denkleminin gerçel çözümlerinin sayısı nedir?

Çözüm: $y = \sin x$ ve $y = \dfrac{x}{22}$ denklemlerinin grafiklerinin tam 15 tane kesişim noktası bulunur.



15. $f(x) = x^2 + 12x + 30$, ise aşağıdaki denklemi çözünüz:

$$f(f(f(f(f(x))))) = 0.$$

Çözüm: $x^2 + 12x + 30 = (x + 6)^2 - 6$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} f(f(f(f((x+6)^2 - 6)))) &= 0 \Rightarrow \\ f(f(f((x+6)^4 - 6))) &= 0 \Rightarrow \\ f(f((x+6)^8 - 6)) &= 0 \Rightarrow \\ f((x+6)^{16} - 6) &= 0 \Rightarrow \\ (x+6)^{32} - 6 &= 0 \Rightarrow \\ (x+6)^{32} &= 6 \Rightarrow \\ x &= -6 \pm \sqrt[32]{6} \end{aligned}$$

bulunur.

16. $\mathbb{R}^+$ pozitif gerçel sayılar kümesi olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$y^2 \cdot f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = 1$ ise $y^2 f(1) = f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot z = \frac{1}{y}$ dir. Buradan $f(z) = \frac{1}{z^2}$ bulunur. O zaman her $f(1) = a \in \mathbb{R}^+$ sağlanır.

17. $\mathbb{R}^+$ pozitif gerçel sayılar kümesi olmak üzere, her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$f(x) \cdot f(y) = f(xy) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = y = 1$ ise $f(1)^2 - f(1) - 2 = 0$ dır. Buradan $f(1) = -1$ veya $f(-1) = 2$ bulunur.
$y = 1$ ise $f(x)f(1) = f(x) + \frac{1}{x} + 1$ dir. Buradan $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ veya $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ bulunur. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ eşitliği sağlamaz, $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ eşitliği sağlar.

18. $f(0) = 1$ ve her n tam sayısı için

$$f(f(n)) = n \quad \text{ve} \quad f(f(n+2)+2) = n$$

eşitliklerini gerçekleyen tüm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $f(n) = (f(n+2)+2)$ ise $f(n) = f(f(f(n+2)+2)) = f(n+2)+2$ dir. Buradan $f(n+2) = f(n) - 2$ bulunur. $f(1) = f(f(0)) = 0$ dır. Tümevarımla

$$f(n) = 1 - n$$

bulunur.

19. Negatif olmayan gerçel sayılar kümesinde tanımlı, negatif olmayan gerçel sayı değeri alan ve her negatif olmayan x, y gerçel sayıları için

$$x \cdot f(y) + y \cdot f(x) = f(x) \cdot f(y) \cdot (f(x) + f(y))$$

eşitliğini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = y = 1$ ise $2f(1) = 2f(1)^3$ bulunur. O zaman

(a) $f(1) = 1$ veya

(b) $f(1) = 0$

dır.

(a) $y = 1$ ise $x + f(x) = f(x)(f(x) + 1) \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$.

(b) $y = 1$ ise $f(x) = 0$.

20. Her x, y gerçel sayıları için

$$yf(x) + xf(y) = (x + y)f(x + y)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $x = 0$ ise $yf(0) = yf(y)$ dir. Buradan $f(y) = f(0) = c$ bulunur.

21. Her x, y pozitif gerçel sayıları için

$$f(x)f(y) = f(xy) + 2005\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2004\right)$$

eşitliğini sağlayan tüm $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $y = 1$ ise $f(x) \cdot f(1) = f(x) + 2005 \cdot \left(\frac{1}{x} + 2005\right)$ dir. Buradan $f(1)^2 = f(1) + 2005 \cdot 2006$ bulunur. O zaman $f(1) = -2005$ veya $f(1) = 2006$ dır.
$f(1) = -2005$ ise $f(x) = -\frac{2005}{2006}\left(\frac{1}{x} + 2005\right)$ sağlamaz.
$f(1) = 2006$ ise $f(x) = \frac{1}{x} + 2005$ sağlar.

22. $f(x) = ax + b$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $f^{2002}(x) = x$ eşitliğini sağlıyorsa, a, b sayılarını bulunuz.

Çözüm: $x = f^{2002}(x) = a(a(\ldots(ax+b)+\ldots+b)+b)+b = a^{2002}x+a^{2001}b+\cdots+ab+b$ dir. Buradan $a^{2002} = 1 \Rightarrow a = 1$ bulunur.

(a) $a = 1$; $(a^{2001} + \cdots + a + 1)b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(x) = x$.

(b) $a = -1$; $(a^{2001} + \cdots + a + 1)b = 0 \Rightarrow 0 \cdot b = 0 \Rightarrow f(x) = -x + b, \quad b \in \mathbb{R}$.

KAYNAKÇA

1. Aczel J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, 1966.

2. Alizade R., *Ders Notları*, Yaşar Üniversitesi, İzmir 2013.

3. Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer New York 1999.

4. Hasan A.D., *A.PS Functional Equations Maathen*.

5. Özdemir M., *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 4*, Altın Nokta Yayıncılık, 2007.

6. Özdemir M., *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 5*, Altın Nokta Yayıncılık, 2007.

7. Parvardi A.H., *Functional Equations Problems*, June 13, 2011.

8. Thomas Calculus 12. th. Edition

ÖZGEÇMİŞ

Murat UZUN, 15.02.1981 tarihinde Isparta YALVAÇ ta doğdu. Altı yaşında İzmir'e taşınıp ilk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2005 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Matematik Öğretmenliği'nden mezun oldu. Sonrasında bazı özel öğretim kurumlarında çeşitli görevler almıştır. Halen özel bir kurumda yöneticilik yapan Murat UZUN evli ve iki çocuk babasıdır.