T.C.
YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİYOFANT DENKLEMLERİ

ALİ CAN GÜLLÜ

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. REFAİL ALİZADE

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

SUNUM TARİHİ: 27/12/2017

BORNOVA/İZMİR
ARALIK 2017

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri: **İmza:**

Prof.Dr.Refail ALİZADE (Tez Danışmanı)
Yaşar Üniversitesi ....

Prof.Dr.Engin BÜYÜKAŞIK
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü ....

Yrd.Doç.Dr.Şule AYAR ÖZBAL
Yaşar Üniversitesi ....

Prof.Dr.Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

DİYOFANT DENKLEMLER

GÜLLÜ, Ali Can
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Refail ALİZADE
Aralık 2017

Bu çalışmada; Diyofant denklemlerinin genel ve özel çözüm yöntemleri ele alınmış, bazı özel diyofant denklemlerinin çözümleri verilmiştir. Ayrıca ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarında diyofant denklemler ile ilgili çıkmış sorular ve çözümleri verilmiştir. Tezin matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrenciler ve bunları çalıştıracak öğretmenler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

Anahtar sözcükler: Diyofant Denklemler, Pell Penklemleri, Pisagor Üçlüleri, Fermat Teoremi, Vieta Jumping, Fermat'ın Sonsuz İndirgeme Metodu

ABSTRACT

DİOPHANTİNE EQUATİON

GÜLLÜ, Ali Can
Msc in Department of Mathematics
Thesis Advisor: Prof. Dr. Refail ALİZADE
December 2017

In this thesis solution methods of general and localized diophantine equations are considered. Some special diophantine equations are solved. Also solution ways of selected problems from national and international mathematics olympiads are worked out.

We hope that this thesis will be helpfull for high school students that take part in the mathematical olympiads.

Keywords: Diophantine Equation, Pell Equation, pythagorean triples, Fermat's Theorem, Vieta Jumping, Fermat's Method of Infinite Descent

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman, her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Prof. Dr. Refail ALİZADE'ye çok teşekkür ederim. Bu süreçte bana yardımcı olan eşim Nihal GÜLLÜ, değerli arkadaşım Zafer ACAR ve Yaşar Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyesi değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ali Can GÜLLÜ

İzmir, 2017

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "DİYOFANT DENKLEMLER" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Ali Can GÜLLÜ

27/12/2017

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR

Kısaltma	Açıklama
IMO	International Mathematical Olympiad
UMO	Ulusal Matematik Olimpiyatı
UİMO	Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı
AIME	American Invitational Mathematics Examination
BUMO	Bulgaristan Matematik Olimpiyatı
INMO	Hindistan Matematik Olimpiyatı
BALMO	Balkan Matematik Olimpiyatı
RUMO	Rusya Matematik Olimpiyatı
CAMO	Kanada Matematik Olimpiyatı
POMO	Polonya Matematik Olimpiyatı
ROMO	Romanya Matematik Olimpiyatı
GEMO	Almanya Matematik Olimpiyatı

1. GİRİŞ

Cebirin babası olarak tanımlanan İskenderiyeli Diophantus (Diyofant), cebir denklemleri ve sayılar teorisi üzerine yazdığı Arithmetika adlı eserle bilinen Yunan matematikçidir. Değişkenleri tam sayı olan denklemler üzerine çalışmalar yapmıştır. Bu tarz denklemler kendi adıyla “diyofant denklemler” olarak anılır. Diophantus’un hayatı hakkında maalesef oldukça az bilgi mevcuttur. Hangi dönemde yaşadığıyla ilgili yapılan çıkarımlar ancak 500 yıllık bir döneme indirgenebilmiştir. Kendisinin Poligon sayılarla ilgili çalışmasında, M.Ö. 2. yüzyılda yaşamış olan İskenderiyeli Hypsicles’ten bahsetmiş olmasının yanı sıra, M.S. 4. yüzyılda yaşamış olan İskenderiyeli Theon’un da Diophantus’tan alıntı yapmış olması, Diophantus’un M.Ö. 2. yüzyılla M.S. 4. yüzyıl arasında bir dönemde yaşamış olduğunu düşündürmüştür.

Diophantus her ne kadar cebirin babası olarak tanımlansa da Diophantus’un yaşadığı dönemdeki Yunan Matematikçiler, Antik Mısır cebirinden haberdardılar. Tek bilinmeyenli cebir problemleri ve çözümleri M.Ö. 1650 yılında yazılmış olan Rhind Papirüsü’nde de geçmektedir. Dolayısıyla Diophantus’un en önemli katkısı, kendisinden önce gelen matematikçilerin çalışmalarını bir arada toplayıp, bunların uygulama alanlarını genişletmesidir. Ayrıca bir diğer katkısı da matematiksel gösterimleri sadece semboller yardımıyla yapmış olmasıdır. Çalışmalarını Arithmetika adlı eserinde toplamıştır.

Arithmetika, Diophantus’un 13 cilten oluşan ve sadece 6 cildinin günümüze ulaşabildiği değerli eseridir. 19. yüzyılda yaşamış olan Matematik tarihçisi Hankel’in tanımlamasına göre, "Arithmetika 5 farklı katagoride 130 problemi içerir." Hankel ayrıca bu problemleri çözümlenişlerine göre iki gruba ayırır: Tek çözümü olanlar (Determinate) ve genel çözümü olanlar (Indeterminate).

1. cilt tek çözümlü cebir problemlerini içerirken, 2, 3, 4 ve 5. ciltler genel çözümlü cebir problemlerini içerir. 6. cilt ise dik üçgenle ilgili aritmetik problemleri içerir. Diophantus Arithmetika’daki problemleri analitik bir şekilde, değişkenleri ve bilinmeyenleri semboller yardımıyla ifade etmiştir. Diophantus’un ölümünden sonra Arithmetika ve diğer çalışmaları batı dünyasında (Avrupa’nın Karanlık Çağ’a girmesinden dolayı) unutulmuştur. Arithmetika’nın büyük bölümünün bugüne ulaşabilmesinin sebebi, Arap alimlerin bu eser üzerinde tafsilatlı bir şekilde çalışmasıdır. Arithmetika’nın Latince’ye ilk çevirisi Bombelli tarafından 1570 yılında yapılmış fakat basılmamıştır. Bununla birlikte Bombelli, Diophontos’un çalışmasının bir kısmını kendi cebir çalışmasında kullanmıştır. Arithmetika’nın en bilinen Latince çevirisi ise Bachet tarafından 1621 yılında yapılmıştır. Arithmetika’nın 1621 baskısı, Fermat’ın meşhur Son

Teorem'ini yazmasından sonra daha da bir önem kazanmıştır.

Diophantus'un kaç yılında yaşağıdığı kesin olarak bilinmese de kaç yaşında öldüğü bilgisine ilgili M.S. 5. yüzyılda yaşamış olan Metodorus'un, çeşitli matematik bilmecelerini derlediği, Yunan Antolojisi adlı eserinde geçmektedir. Bu eserde Diophantus'un öldüğü yaş ile ilgili bilmece şöyledir:

- Diophantus hayatının 1/6'inde yetişkin olmuştur.
- Hayatının 1/12'sini daha tamamladığında sakal bırakmaya başlamıştır.
- Hayatının 1/7'sini daha tamamladığında evlenmiştir.
- 5 yıl sonra bir oğlu olmuştur.
- Oğlu, Diophantus'un hayatının yarısı kadar yaşamıştır.
- Oğlunun ölümünden 4 yıl sonra da Diophantus ölmüştür.

Bu bilmece de Diophantus'un öldüğü yaşı D ile gösterelim. Bu bilmecenden aşağıdaki denklem elde edilir;

$$D = (1/6 + 1/12 + 1/7)D + 5 + (1/2)D + 4$$

Bu denklemin çözümüne göre Diophantus'un 84 yıl yaşamıştır.

Diyofant denklemler matematiği her alanında görülebilen bir konudur. Bu tezde bu alanlardan ancak bir kısmı ele alınabilmiştir. Bu tezin 2. bölümünde diyofant denklemlerin çözümünde kullanılabilecek bölünebilme özellikleri, Öklid algoritması ve temel eşitsizlikler verildi. 3. bölümde lineer diyofant denklemler ele alındı. 4.bölümde çarpanlara ayırma yöntemi, eşitsizlik yöntemi, parametrik yöntemi, modüler aritmetik yöntemi, Fermat'ın sonsuz indirgeme yöntemi ve bunun özel bir şekli olan vieta jumping ile tümevarım yöntemi gibi genel yöntemler ile simetri yöntemi, özel çözümden genel çözüme ulaşma, bilinmeyenlerin sınırlandırılması, diskriminant yöntemi ve quadratik rezidü yöntemleri gibi özel yöntemler ele alınmıştır. 5. bölümde Pisagor üçlüleri ve Fermat teoremi,Pell denklemleri ve çözüm yöntemleri ile bazı özel Pell denklemlerine yer verilmiştir. 6. bölümde ise diyofant denklemleri ile ulusal matematik olimpiyatı ve dünyanın farklı yerlerinde yapılan matematik olimpiyatlarında çıkmış bir çok problem ve çözümü verilmiştir. Bu tezde belirtilmeyen tanım ve kavramlar için (Çallıalp F.,2009) kitabından yararlanılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Bölünebilme ve Temel Özellikler

Bu bölümde diyofant denklem çözümlerinde kullanılacak temel bölünebilme özellikleri ve kanıtları verilecektir. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ tam sayılar kümesi üzerinde a ve b sayıları için temel dört işlem $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ ve $a : b$ şeklinde gösterilecektir.

x ve y tam sayıları için $y = k \cdot x$ eşitliğini sağlayan k tam sayısı varsa y sayısı, x'in tam katıdır ve x sayısı y sayısını böler. Bu $x \mid y$ şeklinde ifade edilir, aksi durum ise $x \nmid y$ şeklinde gösterilir.

2.1.1. Özellikler

x, y ve z tam sayıdır. Buna göre aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $x \mid x$, (Yansıma Özelliği)
2. $x \mid y$ ve $y \mid z$ ise $x \mid z$, (Geçişme Özelliği)
3. $x \mid y$ ve $y \neq 0$ ise $|x| \leq |y|$,
4. $x \mid y$ ve $x \mid z$ ise $x \mid ax + bz$ olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır,
5. $x \mid y$ ve $x \mid y \pm z$ ise $x \mid z$,
6. $x \mid y$ ve $y \mid x$ ise $|x| = |y|$,
7. $x \mid y$ ve $y \neq 0$ ise $\frac{y}{x} \mid y$,
8. $x \mid y$ ve $z \neq 0$ ise $xz \mid yz$.

İspat 1) $x = 1 \cdot x$ olduğundan $x \mid x$'tir.

2) $x \mid y$ ve $y \mid z$ ise $y = x \cdot k_1$ ve $z = y \cdot k_2$ olacak şekilde k_1 ve k_2 tam sayıları vardır. O halde $z = x \cdot k_1 \cdot k_2$ olur ve $k_1 \cdot k_2 = k_3 \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z = x \cdot k_3$ elde edilir. O halde $x \mid z$'dir.

3) $x \mid y$ ve $y \neq 0$ ise $|k| \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$ için $|y| = |k| \cdot |x|$ olduğundan $|x| \leq |y|$'dir.

4) $x \mid y$ ve $x \mid z$ ise $y = x \cdot a$ ve $z = x \cdot b$ olacak şekilde a ve b tam sayıları vardır. $y + z = x \cdot a + x \cdot b$ ise $y + z = x(a + b)$ ve $a + b = c \in \mathbb{Z}$ olduğundan $y + z = x \cdot c$'dir. O halde $x \mid y + z$'dir.

5) $x \mid y$ ve $x \mid y \pm z$ ise $y = x \cdot k_1$ ve $y \pm z = x \cdot k_2$ olacak şekilde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $z = x \cdot k_2 \pm y$ ve $z = xk_2 - xk_1 = x(\underbrace{k_2 - k_1}_{\in \mathbb{Z}})$ olduğundan $x \mid z$'dir.

6) 3. özellikten $x \mid y$ ve $y \mid x$ ise $|x| \leq |y|$ ve $|y| \leq |x|$'tir. Buradan $|x| = |y|$'dir.

7) $x \mid y$ ise $y = x \cdot k$, olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $\frac{y}{x} = \frac{x \cdot k}{x} = k$'dir. $y = x \cdot k$ olduğundan $\frac{y}{x} \mid y$'dir.

8) $x \mid y$ ise $y = x \cdot k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. $z \neq 0$ için $y \cdot z = x \cdot z \cdot k$ olduğundan $x \cdot z \mid y \cdot z$'dir.

2.2. Öklid Algoritması

Bu bölümde diyofant denklem çözümünde çok önemli bir yeri olan Öklid Algoritması ve Ebob-Ekok ile ilgili birkaç temel özellik verilecektir. Bundan sonraki bölümlerde a ve b sayılaarının en büyük ortak böleni (a, b), en küçük ortak katı ise $[a, b]$ şeklinde gösterilecektir.

$a > b > 0$ tam sayılarına bölme algoritması uygulandığında bölüm q_1, kalan r_1 olmak üzere

$$a = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b$$

olur. $r_1 = 0$ ise $b \mid a$ olur ve $(a, b) = b$ dir. $r_1 \neq 0$ ise b, r_1 çiftine bölme algoritması uygulanırsa

$$b = r_1 q_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

elde edilir. Eğer $r_2 = 0$ ise işlem sona erer ve a, b tam sayı çiftinin en büyük ortak bölenini bulma işlemi b, r_1 çiftinin en büyük ortak bölenini bulma işlemine indirgenir.

$r_2 \neq 0$ ise r_1, r_2 çiftine bölme algoritması uygulanır.

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

elde edilir. Yukarıdaki işlem sistematik olarak kalan sıfır olana kadar sürdürülür.

$b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$ şeklinde negatif olmayan tam sayıların azalan bir dizisi elde edilir. Bu dizi sonludur. Yani uygun bir k adımdan sonra $r_{k+1} = 0$ olur.

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ \vdots &= \quad \vdots \\ r_{k-3} &= r_{k-2} q_{k-1} + r_{k-1} \\ r_{k-2} &= r_{k-1} q_k + r_k \\ r_{k-1} &= r_k q_{k+1} + 0 \end{aligned}$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Sıfırdan farklı olan son kalan r_k sayısı a ve b tam sayılarının en büyük ortak bölenidir.

Şöyle ki; son denklemden $r_k \mid r_{k-1}$, bir önceki denklemden $r_k \mid r_{k-2}$ ve böyle devam edilerek ikinci ve ilk denklemlerden de sırasıyla $r_k \mid b$, $r_k \mid a$ olduğu görülür. $c \mid a$, $c \mid b$ ise yukarıdaki eşitliklerden $c \mid r_1$, ikinci denklemden $c \mid r_2$, $\ldots$ ve son denklemden $c \mid r_k$ olduğu görülür. O halde $(a, b) = r_k$ elde edilir.

Örnek 2.1 1547 *ve* 560 *sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned} 1547 &= 2 \cdot 560 + 427 \\ 560 &= 1 \cdot 427 + 133 \\ 427 &= 3 \cdot 133 + 28 \\ 133 &= 4 \cdot 28 + 21 \\ 28 &= 1 \cdot 21 + 7 \\ 21 &= \mathbf{7} \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

olup $(1547, 560) = 7$ bulunur.

Örnek 2.2 1428 *ve* 1207 *tam sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}1428 &= 1 \cdot 1207 + 221\\ 1207 &= 5 \cdot 221 + 102\\ 221 &= 2 \cdot 102 + 17\\ 102 &= \mathbf{17} \cdot 6 + 0\end{aligned}$$

olup $(1428, 1207) = 17$ dir. Öklid algoritmasında takip edilen yöntem gereğince $(1428, 1207) = (1207, 221) = (221, 102) = (102, 17) = 17$ dir.

$(1428, 1207) = 17$ olduğundan $17 = 1428x + 1207y$ olacak şekilde x ve y tam sayıları bulunabilir. Yukarıdaki üçüncü eşitlikten geriye doğru gidilirse;

$$\begin{aligned}17 &= 221 - 2 \cdot 102\\ &= 221 - 2 \cdot (1207 - 5 \cdot 221)\\ &= 11 \cdot 221 - 2 \cdot 1207\\ &= 11 \cdot (1428 - 1 \cdot 1207) - 2 \cdot 1207\\ &= 11 \cdot 1428 - 13 \cdot 1207\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$17 = 1428 \cdot 11 + 1207 \cdot (-13)$$

şeklinde düzenlendiğinde $x = 11$ ve $y = -13$ olduğu görülür. Ancak bu eşitliği sağlayan x ve y tam sayılarının tek olmadığına dikkat edilmelidir. $(a, b) = d = ax + by$ yazılışında

$$d = \left(x + k \cdot \frac{b}{d}\right) a + \left(y - k \cdot \frac{a}{d}\right) b$$

şeklindeki yazılabileceği dikkate alınırsa her $k \in \mathbb{Z}$ için bir değer bulunabileceğinden sonsuz çoklukta x, y tam sayıları bulunabilir.

2.2.1. Özellikler

1. a ve b tam sayılar ve $k \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $(a, b) = (a, b - a \cdot k)$ eşitliği vardır.

2. a ve b tam sayılar olsun.

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$$

dir.

3. a ve b tam sayıları için $ax + by = (a, b)$ olacak şekilde x ve y tam sayıları vardır.

Örnek 2.3 *$4n - 7$ ve $n - 2$ tam sayılarının en büyük ortak bölenini bulalım.*

Çözüm: $(a, b) = (a, b - a \cdot k)$, $k \in \mathbb{Z}$ özelliğini kullanalım.

$$\begin{aligned}(4n-7, n-2) &= (4n-7-4(n-2), n-2)\\ &= (15, n-2)\end{aligned}$$

Bu durumda bu sayılarınn ebob'u 15'in bölenidir. $15, 5, 3$ veya 1'dir. Örneğin $n = 17$ için ebobları 15, $n = 7$ için ebobları 5'tir.

Örnek 2.4 *$\dfrac{7n+8}{5n-3}$ kesrinin hangi n değerleri için sadeleşebilir bir kesir olduğunu bulalım.*

Çözüm: Bu iki sayıyı bölebilen en büyük sayıyı bulmaya çalışalım.

$$\begin{aligned}(7n+8, 5n-3) = (2n+11, 5n-3) &= (2n+11, n-25)\\ &= (-66, n-25) = (66, n-25)\end{aligned}$$

olduğundan bu sayıların sadeleşebilmesi için $n - 25 \mid 66$ olmalıdır. $n - 25 \mid 6$, $n - 25 \mid 11$ ve $n - 25 \mid 66$ için $n = 6k + 25$, $n = 11k + 25$ ve $n = 66k + 25$ olabilir ($k \in \mathbb{Z}$).

Örnek 2.5 *n sayısının m sayısına bölümünden kalan r ise $a^n - 1$ sayısının $a^m - 1$ sayısına bölümünden kalan $a^r - 1$ dir.* $(a > 1)$

Çözüm: $a^m \equiv 1 \pmod{a^m - 1}$ yazılabilir. n sayısının m'ye bölümünden kalna r ise $n = m \cdot q + r$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}$ vardır.

$a^n - 1 = a^{mq+r} - 1 \equiv (a^m)^q \cdot a^r - 1 = a^r - 1 \pmod{a^m - 1}$ olduğundan $a^n - 1$ sayısının $a^m - 1$ sayısına bölümünden kalan $a^r - 1$ dir.

Örnek 2.6 *$(a^m - 1, a^n - 1) \equiv a^{(m,n)-1}$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Öklid algoritmasından;

$$\begin{aligned}
a^m - 1 &= (a^n - 1) \cdot q_0 + a^{r_1} - 1 & m &= n \cdot q_0 + r_1\\
a^n - 1 &= (a^{r_1} - 1) \cdot q_1 + a^{r_2} - 1 & m &= r_1 \cdot q_1 + r_2\\
&\vdots & &\vdots\\
a^{r_1} - 1 &= (a^{r_n} - 1) \cdot q_n + a^0 - 1 & r_{n-1} &= r_n \cdot q + r_0
\end{aligned}$$

Buradan $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{r_n} - 1$ elde edilir.

Örnek 2.7 $(2^{20} - 1, 2^{35} - 1) = 2^5 - 1$ *olduğunu gösteriniz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2^{35} - 1 &= (2^{20} - 1) \cdot q_0 + 2^{15} - 1 \qquad & 35 &= 20 \cdot q_0 + 15 \\ 2^{20} - 1 &= (2^{15} - 1) \cdot q_1 + 2^5 - 1 \qquad & 20 &= 15 \cdot q_1 + 5 \\ 2^{15} - 1 &= (2^5 - 1) \cdot q_2 + 0 \qquad & 15 &= 5 \cdot q_2 + 0 \end{aligned}$$

Öklid algoritmasında sıfırdan önceki son kalan bu sayıların ebob'unun vereceğinden $(2^{20} - 1, 2^{35} - 1) = 2^5 - 1$ dir. Kısaca örnek 2.6 dan $(2^{20} - 1, 2^{35} - 1) = 2^5 - 1$ dir.

Örnek 2.8 $\left(3^{2^{2017}-1} - 1, 3^{2^{1006}-1} - 1\right) = x$ *ise x kaçtır?*

Çözüm: Örnek 2.6 daki pratik kullanılırsa,

$\left(3^{2^{2017}-1} - 1, 3^{2^{1006}-1} - 1\right) = 3^{(2^{2017}-1, 2^{1006}-1)} - 1 = 3^{2^{(2017,1006)}-1} - 1 = 3^{2^1-1} - 1 = 3^1 - 1 = 2$ dir.

Burada 2017 asal olduğundan $(2017, 1006) = 1$ dir. O halde $x = 2$ dir.

2.3. Eşitsizlikler

Diyofant denklemlerin çözümlerinde bir çok eşitsizlik kullanılabilir ancak biz bu çalışmada en çok kullanılan ortalama eşitsizlikleri ile Couchy Schwarz eşitsizlikleri verilecektir.

2.3.1. Ortalama Eşitsizlikleri

Her x reel sayısı için aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$x^2 \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^2 \geq 0.$$

Burada x yerine $(a-b)$ yazılırsa,

$$a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2\right) \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$$
$$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x} \geq 2, x>0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

elde edilir. Buradan a ve b yerine $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ yazarsak

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler tek satırda yazılırsa

$$\min(a,b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b)$$

elde edilir.

Tanım 2.1 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

ifadesine Aritmetik Ortalama (A.O) denir.

Tanım 2.2 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$$

ifadesine Geometrik Ortalama (G.O) denir.

Tanım 2.3 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

ifadesine Harmonik Ortalama (H.O) denir.

Tanım 2.4 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ *için*

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

ifadesine Karesel Ortalama (K.O) denir.

Teorem 2.1 (Kuvvet (Power Mean) Eşitsizliği) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n > 0$

$M(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$

$M(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)(p) = (\frac{a_1^p + a_2^p + a_3^p + \cdots + a_n^p}{n})^{\frac{1}{p}}$

ve $(p \neq 0)$. *Bu eşitsizliğe Kuvvet (Power Mean) Eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik A.O, G.O, H.O ve K.O' nın genel bir halidir.*

Yukarıdaki eşitsizlikten;

$p = 1$ *için Aritmetik Ortalama*

$p = 2$ *için Karesel Ortalama*

$p = 0$ *için Geometrik Ortalama*

$p = -1$ *için Harmonik Ortalama elde edilir.*

Yani $M(1) = A.O$

$M(2) = K.O$

$M(-1) = H.O$

$M(0) = G.O$ *elde edilir.*

Ayrıca $2 > 1 > 0 > -1$ *olduğundan* $M(2) > M(1) > M(0) > M(-1)$ *eşitsizliği elde edilir ve* $K.O > A.O > G.O > H.O$ *yazılabilir.*

2.3.2. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

Teorem 2.2 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *ve* $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ *reel sayılar olsun.*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2\right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2\right) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz Eşitsizliği denir.

Bu eşitsizlik aşağıdaki gibi farklı şekillerde ifade edilebilir.

1. $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}$

2. $\frac{a_1}{b_1^2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n^2} \geq \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot (\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n})^2$

3. $\sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)} \geq \sqrt{a_1b_1} + \cdots + \sqrt{a_nb_n}$

4. $\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + \cdots + b_n}$

5. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, \quad x \in [0,1]$ için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \cdot x \sum_{i<j} a_i a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \cdot x \sum_{i<j} b_i b_j\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + x \sum_{i<j} a_i b_j\right)^2$$

6. Lagrange özdeşliği

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

7. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği, kompleks sayılarda;

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \geq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2$$

3. LİNEER DİYOFANT DENKLEMLER

Tanım 3.1 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b, a_1,a_2,\ldots,a_n,b\in\mathbb{Z}$ *biçimindeki denklemlere Lineer Diyofant Denklemler denir.* $n\geq 1$ *ve* $a_1,a_2,\ldots,a_n$ *sıfırdan farklıdır.*

Tanım 3.2 $a,b,c,x,y,z,m\in\mathbb{Z}$ *olmak üzere*

$$ax+by+cz=m$$

şeklindeki bir denklem 3 *bilinmeyenli lineer diyofant denklemdir. Lineer diyofant denklemler bilinmeyen sayısına göre isimlendirilir.*

Teorem 3.1 *Tamsayılar kümesinde* $ax+by+cz=n$ *denkleminin çözümünün olması için gerek ve yeter şart* a*,* b *ve* c *nin en büyük ortak böleninin* n *yi bölmesidir.*

İspat x_0,y_0,z_0 tam sayıları $ax+by+cz=n$ denkleminin çözümü olsun. O zaman,

$$ax_0+by_0+cz_0=n$$

denklemi sağlanır. $(a,b,c)=d$ olsun. O zaman, a, b, c sayıları $a=dq_1$, $b=dq_2$, $c=dq_3$ şeklinde yazılabilir. $ax_0+by_0+cz_0=n$ denkleminde a,b,c sayıları yerlerine sırasıyla dq_1,dq_2,dq_3 alınırsa $d\,(q_1x_0+q_2y_0+q_3z_0)=n$ olur. Dolayısıyla $d\mid n$ dir.

Şimdi de varsayalım $(a,b,c)=d$ ve $d\mid n$ olsun. O zaman $n=dq$ olur. Bezout Teoremi'inden[1] dolayı $Aa+Bb+Cc=d$ denklemini sağlayacak şekilde A,B,C tam sayıları bulunabilir. Son denklemin her iki tarafını q ile çarparsak,

$$(qA)a+(qB)b+(qC)c=qd=n$$

elde edilir. Dolayısıyla $x_0=qA$, $y_0=qB$, $z_0=qC$ tam sayıları bu denklemin çözümüdür.

Not 3.1 (x_0,y_0) *sayıları* $ax+by=c$ *lineer diyofant denkleminin bir özel çözümü ise* $x=x_0+bk$*,* $y=y_0-ak\quad(k\in\mathbb{Z})$ *denklemin genel çözümüdür. Gerçekten de* $ax_0+by_0=c$ *ise* $a(x_0+bk)+b(y_0-ak)=c$ *dir.*

Örnek 3.1 $6x+9y=2018$ *denklemini sağlayan tüm* (x,y) *tam sayı ikilileri kaç tanedir?*

Çözüm: $(6,9)=3$ ve $3\nmid 2018$ olduğundan denklemi sağlayan (x,y) tam sayı ikilisi yoktur.

Örnek 3.2 $3x+5y=100$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x,y) *pozitif tam sayı ikilisi vardır?*

[1] $p(x)$ polinomunun $(x-x_0)$ ile bölünebilmesi için gerek ve yeter koşul $p(x_0)=0$ durumudur.

Çözüm: $(3,5) = 1 \mid 100$ olduğundan denklemi sağlayan (x,y) tam sayı ikilisi vardır. $(5,100) = 5$ olduğundan $3x = 5k$ olmalıdır. O halde $(0,20)$ özel bir çözümdür. $x = 0 + 5k$, $y = 20 - 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ genel çözümüdür. $5k > 0$ ve $20 - 3k > 0$ olması için $0 < k < 7$ olmalıdır. O halde denklemi sağlayan 6 tane (x,y) pozitif tam sayı ikilisi vardır.

Örnek 3.3 $12x + 7y = 3$ *denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: $(7,12) = 1$ ve $1 \mid 3$ olduğundan denklemin tam sayılarda çözümü vardır. Öklid algoritmasından,

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \cdot 7 + 5 \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri tersten yazalım.

$$\begin{aligned} &1 = 5 - 2 \cdot 2 \\ &1 = 5 - 2 \cdot (7 - 5) = -2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \\ &1 = -2 \cdot 7 + 3 \cdot (12 - 7) = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7 \\ &12x + 7y = 1 \\ &12 \cdot 3 + 7 \cdot (-5) = 1 \end{aligned}$$

eşitliklerinden $x_0 = 3$ ve $y_0 = -5$ denklemin bir özel çözümüdür. O halde tüm çözümleri

$$\begin{aligned} x &= 3 + 7k & (k \in \mathbb{Z}) \\ y &= -5 - 12k & (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

denklemin genel çözümüdür.

Örnek 3.4 $3x + 4y = 10$ *denkleminin tam sayılarda genel çözümünü bulunuz.*

Çözüm: $x = \frac{10-4y}{3} = 3 - y + \frac{1-y}{3}$ olduğundan $\frac{1-y}{3} \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. $\frac{1-y}{3} = z \in \mathbb{Z}$ olsun. O halde $y = 1 - 3z$ olur. Buradan

$$x = \frac{10 - 4y}{3} = \frac{10 - 4(1 - 3z)}{3} = \frac{6 + 12z}{3} = 2 + 4z \in \mathbb{Z}$$

olur. O halde $x = 4z + 2$ ve $y = 1 - 3z$ denklemin genel çözümüdür.

Örnek 3.5 *Bir kırtasiyedeki ürünler ve fiyatları aşağıda verilmiştir.*

Defter	5 *lira*
Kalem	1 *lira*
A4 kâğıdı	5 *kr*

Bu ürünlerin her birinden en az bir tane almak şartıyla 100 *tane alıp* 100 *lira ödeyen bir kişinin her bir üründen kaçar tane aldığını bulunuz.*

Çözüm: Defter $\to x$, kalem $\to y$, A4 kâğıdı $\to z$ olsun. $x+y+z=100$ ve $5x+y+\frac{z}{20}=100$ denklemlerinin tam sayı çözümlerini bulalım.

$x+y+z=5x+y+\frac{z}{20} \Rightarrow 4x=\frac{19z}{20}$ ve $19z=80x$'tir. $z=80k$ ve $x=19k$'dır. $k=1$ için $x=19$, $y=1$ ve $z=80$. $k=2$ için $160>100$ olduğundan 19 defter, 1 kalem ve 80 tane A4 kâğıdı almıştır.

Örnek 3.6 $3x+2y+5z=10$ *denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: $(3,2,5) \mid 10$ olduğundan denklemin genel çözümü vardır. $3x+2y=5(\underbrace{2-z}_{k\in\mathbb{Z}})=5k$ olduğundan $x=y=k$ denklemin bir çözümüdür.

$10-5z=5k$ ise $z=2-k$ elde edilir. O halde $x=k$, $y=k$ ve $z=2-k$ denklemin bir genel çözümüdür.

Örnek 3.7 $2x+3y-z=5$ *ve* $x+y+z=6$ *denklem sistemini çözünüz.*

Çözüm: 3 bilinmeyenli bir denklem sisteminde 2 denklem verildiği için reel sayılarda sonsuz çözüm vardır. $z=k$ için,

$$2x+3y=k+5 \quad \text{ve} \quad x+y=6-k$$

elde edilir. $2x+3y-2(x+y)=k+5-2(6-k) \Rightarrow 5y=3k-7$ ve $y=\dfrac{3k-7}{5}$ elde edilir. 2. denklemde yerine yazılırsa, $x+\dfrac{3k-7}{5}+k=6$ ise $x=\dfrac{37-8k}{5}$ elde edilir. O halde $(x,y,z)=\left(\dfrac{37-8k}{5},\dfrac{3k-7}{5},k\right)$ elde edilir.

4. DİYOFANT DENKLEM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Lineer ve lineer olmayan diyofant denklemlerin çözümünde bölünebilme özellikleri, çarpanlara ayırma, tümevarım, modüler aritmetik gibi birçok yöntem kullanılabilir. Bu bölümde en çok kullanılan elementer yöntemler ele alınacaktır.

4.1. Çarpanlara Ayırma Yöntemi

$(f_1(x) - x_1) \cdot (f_2(x) - x_2) \cdot ... \cdot (f_n(x) - x_n) = 0$ şeklinde çarpanlarına ayrılmış bir ifadenin tüm tam sayı çözümlerini bulmak için her bir çarpanı 0 yapan değerler hesaplanır ve çözüm kümesine alınır.

Örnek 4.1 $x^3y - 2x^2 + xy - 5 = 0$ *denkleminin tam sayı çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: Verilen ifade gruplandırarak çarpanlarına ayrılabilir.

$$x^2(xy-2) + (xy-2) - 3 = 0$$
$$(xy-2)(x^2+1) = 3$$

$x, y \in \mathbb{Z}$ olduğundan $(xy-2) \in \mathbb{Z}$ ve $(x^2+1) \in \mathbb{Z}$'dir.

$(xy-2)$	(x^2+1) $= 3$
3	1
1	3

$x^2 + 1 \geq 1$ olduğundan 1 ya da 3'tür. O halde $x^2 + 1 = 1$ ve $x = 0$'dır. $x = 0$ için y değeri bulunamadığından denklemin tam sayılarda çözümü yoktur. $\big(x^2+1 = 3$ ise $x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$'dir.$\big)$

Örnek 4.2 (Titu Andreescu) $(x^2+1)(y^2+1) + 2(x-y)(1-xy) = 4(1+xy)$ *denkleminin tam sayılardaki çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: İfade çarpanlarına ayrılırsa;

$$x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x-y)(1-xy) = 4,$$
$$(xy-1)^2 + (x-y)^2 - 2(x-y)(xy-1) = 4.$$
$$[xy - 1 - (x-y)]^2 = 4,$$
$$(x+1)(y-1) = \mp 2.$$

elde edilir. Buradan olabilecek tüm durumlar aşağıdaki yazılabilir.

$$\begin{cases} x+1=2, \\ y-1=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1=-2, \\ y-1=1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+1=1, \\ y-1=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1=-1, \\ y-1=-2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+1=2, \\ y-1=-1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1=-2, \\ y-1=1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+1=1, \\ y-1=2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+1=-1, \\ y-1=2, \end{cases}$$

Bu denklemleri sağlayan tam sayılar $(1,0),(-3,2),(0,-1),(-2,3)$ olarak bulunur.

Örnek 4.3 *p ve q asal sayıları için*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$$

denklemini sağlayan kaç (x,y) tam sayı ikilisi vardır?

Çözüm: Verilen ifadede paydalar eşitlenir ve denklem düzenlenirse

$$(x-pq)(y-pq)=p^2q^2$$

elde edilir. Burada p ve q asal sayı olduğu için,

$$\begin{cases} x-pq=1, \\ y-pq=p^2q^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-pq=p, \\ y-pq=pq^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-pq=q, \\ y-pq=p^2q^2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-pq=p^2, \\ y-pq=q^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-pq=pq, \\ y-pq=pq, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-pq=pq^2, \\ y-pq=p, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-pq=p^2q, \\ y-pq=q, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-pq=q^2, \\ y-pq=p^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-pq=p^2q^2, \\ y-pq=1, \end{cases}$$

durumları elde edilir. Buradan tüm çözümler

$$(1+pq,pq(1+pq)), \quad (p(1+q),pq(1+q), \quad (q(1+p),pq(1+p),$$
$$(p(p+q),q(p+q), \quad (2pq,2pq), \quad (pq(1+q),p(1+q),$$
$$(pq(1+p),q(1+p), \quad (q(p+q),p(p+q), \quad (pq(1+pq),1+pq)$$

olarak bulunur.

Örnek 4.4 (UMO-2004) *n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2+ab-6b^2=n$ eşitliğini sağlayan a, b tam sayıları bulunur?*

A) 17 B) 19 C) 29 D) 31 E) 37

Çözüm: $(a+3b)(a-2b)=n$ asal olduğundan $a+3b=\pm n$; $a-2b=\pm 1$ olmak zorunda. Örneğin $a+3b=-n$; $a-2b=-1 \Rightarrow 5b=-n+1 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod 5$. Diğer üç durumda da $n \equiv 1 \pmod 5$ $\Rightarrow$ olduğundan sadece $n=31$ denklemi sağlar. $(13,6), (-13,-6), (19,-6), (-19,6)$.

Örnek 4.5 (UMO-2004) *$2x+5y=xy-1$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?*

Çözüm: $2x-xy+5y-10=-11 \Rightarrow (x-5)(y-2)=11 \Rightarrow x-5=-11,-1,1,11$ $(x,y)=(-6,1),(4,-9),(6,13),(16,3)$; yani 4 adet ikili vardır.

Örnek 4.6 *$x^4=y^2+71$ denkleminin tam sayı çözümlerinin sayısını bulunuz.*

Çözüm: $x^4-y^2=71$ ise, $(x^2-y)(x^2+y)=71$ ve 71 asal sayı olduğundan,

$$\begin{cases} x^2-y=1 \\ x^2+y=71 \end{cases}$$

sisteminden, $2x^2=72$ ve buradan, $x=\pm 6$, $y=35$ olur.

$$\begin{cases} x^2-y=71 \\ x^2+y=1 \end{cases}$$

sisteminden, $2x^2=72$ ve buradan, $x=\pm 6$, $y=-35$,

$$\begin{cases} x^2-y=-1 \\ x^2+y=-71 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} x^2-y=-71 \\ x^2+y=-1 \end{cases}$$

denklem sistemleri için, $2x^2=-72$ olacağından çözüm yoktur. O halde, denklemin tam sayı çözümleri, $(-6,35), (-6,-35), (6,35), (6,-35)$ olarak bulunur. Denklemi sağlayan 4 tane tam sayı ikilisi vardır.

Örnek 4.7 *$x^2-2y^2-xy+x-2y=2$ denklemini tam sayılar kümesinde çözünüz.*

Çözüm: Verilen ifade çarpanlarına ayrılırsa $(x-2y)(x+y+1)=2$ elde edilir. O halde

$$\begin{array}{cccc} x-2y=1 & x-2y=2 & x-2y=-1 & x-2y=-2 \\ x+y+1=2 & x+y+1=1 & x+y+1=-2 & x+y+1=-1 \end{array}$$

denklemleri elde edilir. Buradan (x,y) tam sayı ikilisinin sadece $(1,0)$ olduğu elde edilir.

Örnek 4.8 $x^6=y^2+60$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x,y) *tam sayı çifti vardır?*

Çözüm: $x^6-y^2=60$ ise, $(x^3-y)(x^3+y)=60$ yazılabilir. (x^3-y) ve (x^3+y) sayılarının her ikisi de ya tek ya da çifttir. Buna göre, $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ olduğundan, çarpanlardan biri ± 10 ve diğeri ± 6 olmalıdır.

$$\begin{cases} x^3-y=10 \\ x^3+y=6 \end{cases} \text{ise, } x=2, y=-2; \qquad \begin{cases} x^3-y=-10 \\ x^3+y=-6 \end{cases} \text{ise, } x=-2, y=2;$$

$$\begin{cases} x^3-y=6 \\ x^3+y=10 \end{cases} \text{ise, } x=2, y=2; \qquad \begin{cases} x^3-y=-6 \\ x^3+y=-10 \end{cases} \text{ise, } x=-2, y=-2;$$

olacak şekilde denklemin 4 tam sayı çözümü vardır.

4.2. Eşitsizlik Yöntemi

Eşitsizlikler yardımıyla diyofant denklemlerin çözüm aralıkları daraltılıp, bu aralıktaki tam sayılara ulaşılır. Bu yöntem daha çok sınırlı sayıda tam sayı çözümü olan denklemler için kullanılır.

Örnek 4.9 $x^3+y^3=(x+y)^2$ *denklemini sağlayan tüm* (x,y) *tam sayı ikililerini bulunuz.*

Çözüm: Verilen ifadeyi önce çarpanlarına ayıralım.

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)(x+y)$$

$x+y=0$ için $(x,-x)$ denklemin çözümüdür. Diğer durumda $(x^2-xy+y^2)=(x+y)$ için ifadeyi düzenleyelim.

$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

$$(x-1)^2\leq 1 \quad \text{ve} \quad (y-1)^2\leq 1$$

olduğundan x ve y sayıları $[0,2]$ aralığındadır. O halde tüm çözümler $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ olarak bulunur.

Örnek 4.10 $x^3 - y^3 = xy + 61$ *denkleminin pozitif tam sayılarda kaç tane kökü vardır?*

Çözüm: Denklemi $(x-y)(x^2+xy+y^2) - xy = 61$ veya

$$(x-y)\left((x-y)^2 + 3xy\right) - xy = 61$$

olarak yazabiliriz. $x - y = u$ diyelim. Sağ taraf pozitif olduğundan, $u = x - y > 0$ dır. $v = xy$ yazalım. Yine, $xy = v > 0$ dır. Bu değişkenlerle denklemi yeniden yazarsak, $u, v > 0$ için

$$u^3 + v(3u-1) = 61$$

elde edilir. Böylece, $u^3 < 61$ ise, $u = 1$, 2 veya 3 sonucu çıkar. Ayrıca,

$$v = \frac{61 - u^3}{3u - 1}$$

olduğu da göz önüne alınırsa, $u = 1$ için, $v = 30$, $u = 2$ için $v = 53/5$ ve $u = 3$ için $v = 17/4$ olur. Böylece $u = 1$ ve $v = 30$ eşitliklerinden, $x - y = 1$ ve $xy = 30$ denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümlerinden de $x = 6$ ve $y = 5$ bulunur.

Örnek 4.11 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ *denkleminin pozitif tam sayılarda kaç tane çözümü vardır?*

Çözüm: Denklem düzenlenirse, $3y - 3x = xy$ eşitliğinden,

$$x = \frac{3y}{y+3} = \frac{3y+9-9}{y+3} = 3 - \frac{9}{y+3}$$

elde edilir. Buradan, $y + 3 = 9$ ve $y = 6$ olabilir ki bu durumda $x = 2$ elde edilir. Yani denklemin sadece 1 çözümü vardır ve bu çözüm $(2,6)$ dır.

Örnek 4.12 (ROMO)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

denklemini sağlayan tüm (x, y, z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Çözüm: x, y ve z pozitif olduğundan

$$2 \leq x \leq y \leq z$$

dir. Buradan $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$ ve $x \in \{2,3,4,5\}$ elde edilir.

- $x = 2$ ise, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{100}$ ve $y \in \{11, 12, \ldots, 20\}$ olur. Buradan $z = 10 + \frac{100}{y-10}$ ve $(y-10) \mid 100$ elde edilir. Demek ki çözümler

$$(2, 11, 110), (2, 12, 60), (2, 14, 35), (2, 15, 30), (2, 20, 20)$$

olarak bulunur.

- $x = 3$ ise, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{20}$ ve $y \in \{4, 5\}$ bulunur. Buradan çözüm $(4, 4, 10)$ olur.

- $x = 5$ ise, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5}$ ve $y = z = 5$ bulunur. Buradan çözüm $(5, 5, 5)$ olur.

4.3. Parametrik Yöntemi

Bazı diyofant denklemlerin çözüm sayısı sonlu olmayabilir. Bu durumda tüm genel çözümleri parametrik olarak bulunup ifade edilebilir.

Örnek 4.13 (Townament Of Towns) *$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda (x, y, z) tam sayı üçlüsü olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $z = -y$ için $x^3 = x^2 + 2y^2$ denklemi elde edilir. $y = mx$, $m \in \mathbb{Z}$ için $x^3 = x^2 + 2m^2x^2$ ve $x = 1 + m^2$ elde edilir. O halde genel çözüm $x = 2m^2 + 1$, $y = m(2m^2 + 1)$ ve $z = -m(2m^2 + 1)$ olarak bulunur.

Örnek 4.14 *x, y ve z tam sayıları için $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda (x, y, z) üçlüsü olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: Paydalar eşitlenip denklem düzenlenirse $z = \frac{xy}{x+y}$ elde edilir. $(x, y) = d$ olsun. O halde $x = dm$ ve $y = dn$ ve $(m, n) = 1$ olacak şekilde m ve n tam sayıları vardır. O halde, $z = \frac{dmn}{m+n}$ elde edilir. Buradan $(m, n) \mid d$, $d = k(mn, m+n)$ olmalıdır ($k \in \mathbb{Z}$). $x = km(m+n)$, $y = kn(m+n)$ ve $z = kmn$ denklemin genel çözümüdür.

Örnek 4.15 *$x^2 = y^3 + z^5$ denkleminin pozitif tam sayılarda sonsuz çözümü olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x_n = n^{10}(n+1)^8$, $y_n = n^7(n+1)^5$ ve $z_n = n^4(n+1)^3$ eşitlikleri bu denklemi sağlar.

4.4. Modüler Aritmetik Yöntemi

Derecesi 1'den büyük olan diyofant denklemlerin çözümünün olup-olmadığı araştırılırken çoğunlukla modüler aritmetik yöntemi kullanılır. Bunun yanı sıra lineer diyofant denklemlerinde de modüler aritmetik kullanılması çözümü oldukça kolaylaştıracaktır.

Aşağıdaki eşitliklerin bilinmesi bir çok problemin çözümünde kolaylık sağlayacaktır. n, pozitif bir tam sayı olmak şartıyla;

$n^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$	$n^3 \equiv 0, 1, -1 \pmod 7$
$n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$	$n^5 \equiv 0, 1, -1 \pmod{11}$

Örnek 4.16 $a > 1$ *pozitif bir tam sayı olmak üzere*

$$a^3 + (a+1)^3 + \cdots + (a+n)^3 = 201820182018$$

olacak şekilde a *ve* n *pozitif tam sayılarının olmadığını gösteriniz.*

Çözüm:

$$a^3 + (a+1)^3 + \cdots + (a+n)^3 = \left(1^3 + 2^3 + \cdots + (a+n)^3\right) - \left(1^3 + 2^3 + \cdots + (a-1)^3\right)$$

ve

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

olduğundan,

$$201820182018 = \Big[\underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + (a+n)^3}_{p^2}\Big] - \Big[\underbrace{1^3 + 2^3 + \cdots + (a-1)^3}_{q^2}\Big]$$

ve $p^2, q^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ olduğundan $p^2 - q^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$ olmalıdır.
$201820182018 \equiv 2 \pmod 4$ olduğundan denklemin tam sayılarda çözümü yoktur.

Örnek 4.17 (BALMO) $x^5 - y^2 = 4$ *denkleminin tam sayılarda çözümü olmadığını kanıtlayınız.*

Çözüm: $x^5 \equiv 0, 1, -1 \pmod{11}$ ve $y^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$ olduğundan, $x^5 - y^2 \not\equiv 4 \pmod{11}$ olduğundan denklemin tam sayılarda çözümü yoktur.

Örnek 4.18 (GEMO) *x ve y tam sayı, p asal sayıdır.*

$$p + 1 = 2x^2$$
$$p^2 + 1 = 2y^2$$

denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $p + 1 = 2x^2$ olduğundan $p \neq 2$'dir. $2x^2 \equiv 2y^2 \equiv 1 \pmod p$ olduğundan $x \equiv \mp y \pmod p$'dir. $p^2 + 1 > p + 1$ olduğundan $x < y < p$'dir. O halde $x + y = p$ olur. Bu durumda $p^2 + 1 = 2(p - x)^2 = 2p^2 - 4px + p + 1$ olur. O halde $p = 4x - 1, 2x^2 = 4x$ ve $x = 0$ veya $x = 2$'dir. $p = -1$ ya da $p = 7$'dir. p asal olduğundan 7 olmalıdır.$(x, y) = (2, 5)$ elde edilir.

4.5. Fermat Yöntemi (Sonsuz İndirgeme)

Negatif olmayan tam sayılarla ilgili bir P özelliğini alalım. $P(n)$, $n > 0$ önermeler dizisi $P(n)$ " P özelliğini sağlar" şeklinde olsun. $P(n)$'in yeterince büyük n sayıları için yanlış olduğu gösterilerek bu yöntem kullanılabilir. k negatif olmayan bir tam sayı olsun. Öyleki $P(k)$ önermesi yanlıştır. $m > k$ için $P(m)$ doğru ise $P(j)$ doğru olacak şekilde daha büyük bir j bulunabilir. $m > j \geq k$ Bu durumda tüm $n \geq k$ için $P(n)$ yanlıştır. Bu yönteme çoğu zaman sonlu indirgeme yöntemi denir. Fermat'ın sonsuz indirgeme yöntemi aşağıdaki biçimde verilebilir.

k negatif olmayan bir tam sayı olsun ve aşağıdaki koşul sağlansın.$m > k$ için $P(m)$ doğru ise $P(j)$'nin doğru olmasını sağlayan daha küçük bir j sayısı bulunabilir. O halde her $n > k$ için $P(n)$ yanlıştır.

Özetle; $P(n)$'in doğru olduğu bir n varsa k dan büyük olan sayılardan oluşan $n > n_1 > n_2 ...$ sonsuz dizisi bulunabilir. Fakat negatif olmayan tam sayılar için böyle bir dizi bulunamaz.

Örnek 4.19 (Kurschak Mathematical Competition) $x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 3xyz = 0$ *denklemini sağlayan tüm pozitif (x, y, z) üçlülerini bulunuz.*

Çözüm: Eşitlik $\pmod 3$ te düşünülürse $x^3 \equiv 0 \pmod 3$ olmalıdır. x bir tam sayı olduğundan $x = 3x_1$ olacak şekilde $x_1 \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O halde $27x_1^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9x_1yz = 0$ elde edilir. Bu denklem, tekrar $\pmod 3$ te incelenirse $9x_1^3 + y^3 + 3z^3 - 3x_1yz = 0$ olduğundan $y = 3y_1$ olacak şekilde $y_1 \in \mathbb{Z}$ vardır. y yerine $3y_1$ yazılırsa, $9x_1^3 + 27y_1^3 + 3z^3 - 9x_1y_1z = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde $z = 3z_1$ elde edilir. Daha sonra $x_1 = 3x_2$, $y_1 = 3y_2$ ve $z_1 = 3z_2$ elde edilir. Bu şekilde

$$n \longrightarrow \infty \quad x = 3^n x_1, \quad y = 3^n y_1, \quad \text{ve} \quad z = 3^n z_1$$

elde edilir. Ancak hiçbir x, y, z için $x \mid 3^n$, $y \mid 3^n$ ve $z \mid 3^n$ tam sayıları yoktur. O halde denklemin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur.

Örnek 4.20 (Korean Mathematical Olympiad) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ *denklemini sağlayan tüm* (x, y, z) *tam sayı üçlülerini bulunuz.*

Çözüm: $x = y = z = 0$ denklemin bir çözümüdür. x, y ve z nin üçü birden tek sayı olamaz. Çünkü o durumda $x^2 + y^2 + z^2$ ifadesi tek, $2xyz$ ifadesi çift olurdu.

x, y ve z den biri tek ikisi çift olamaz. O halde ya ikisi tek biri çift, ya da üçü de çifttir.

Üçünün de çift olduğu durumda $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ ve $z = 2z_1$ olacak şekilde $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1y_1z_1 \quad \text{veya} \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem ilk denklem ile aynıdır. Benzer şekilde $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$ ve $z_1 = 2z_2$ yazılırsa $x_2^2+y_2^2+z_2^2 = 8x_2y_2z_2$ dir. Bu şekilde devam edildiğinde $x = 2^n x_n$, $y = 2^n y_n$ ve $z = 2^n z_n$ ve $n \longrightarrow \infty$ olduğunda 2^n sayısını (sonsuzu) bölebilecek $x \in \mathbb{Z}$ olmayacağı için çözüm yoktur.

İkisinin tek, birinin çift olduğu durumu inceleyelim. $x = 2x_1 + 1$, $y = 2y_1 + 1$, $z = 2z_1$ olacak şekilde x_1, y_1, z_1 tam sayıları vardır. Denklemde yerine yazılırsa,

$$(2x_1 + 1)^2 + (2y_1 + 1)^2 + (2z_1)^2 = 2(2x_1 + 1)(2y_1 + 1)(2z_1)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı $\pmod 4$ te 2 ye eşittir. Ancak sağ tarafı $\pmod 4$ de sıfıra eşittir. Bu yüzden çözüm yoktur. O halde denklemin tek çözümü $(0, 0, 0)$ dır.

Örnek 4.21 $2x^2 + y^2 = 384$ *olacak şekilde tüm* (x, y) *pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.*

Çözüm: $2x^2 + y^2 = 384$ eşitliğine göre, y sayısı çift olmalıdır. $y = 2n$ diyelim. Yerine yazarsak, $x^2 + 2n^2 = 192$ elde edilir. Bu denkleme göre de, x çift olmalıdır. $x = 2m$ yazalım. Bu durumda, $2m^2 + n^2 = 96$ olur.

Benzer düşünce ile, $n = 2k$ yazılırsa $m^2 + 2k^2 = 48$, $m = 2s$ yazılırsa $2s^2 + k^2 = 24$, $k = 2p$ yazılırsa $s^2 + 2p^2 = 12$, $s = 2q$ yazılırsa $2q^2 + p^2 = 6$ ve son olarak $p = 2t$ yazılırsa

$q^2 + 2t^2 = 3$ elde edilir. Son denkleme göre $q = t = 1$ olmalıdır. Böylece $x = 2^3 = 8$ ve $y = 2^4 = 16$ bulunur.

Örnek 4.22 *$x^3 + 2y^3 = 4z^3$ denkleminin $(0, 0, 0)$ üçlüsünden başka pozitif tam sayılarda çözümü olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ olduğundan x çifttir. $x = 2x_1$ olsun. O halde $8x_1^3 + 2y^3 = 4z^3$ ve $4x_1^3 + y^3 = 2z^3$ olur. O halde $y = 2y_1$ olmalıdır. Bu durumda $4x_1^3 + 8y_1^3 = 2z^3$ ve $z^3 = 2x_1^3 + 4y_1^3$ olduğundan $z = 2z_1$ olacak şekilde $z_1 \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda ise $4x_1^3 + 8y_1^3 = 8z_1^3$ ve $2x_1^3 + 4y_1^3 = 4z_1^3$ yani ilk durum elde edilir. $x = 2y_2$, $y_2 = 2x_3, \ldots$ şeklinde devam edildiğinde $x = 2^n \cdot x_n$, $y = 2^n \cdot y_n$ ve $z = 2^n \cdot z_n$ durumu elde edilir. Ancak $n \longrightarrow \infty$ iken x sayısı 2^n sayısını bölemeyeceği için denklemin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur.

Örnek 4.23 *$\sqrt{2}$'nin irrasyonel bir sayı olduğunu Fermat'ın Sonsuz İndirgeme yöntemini kullanarak gösteriniz.*

Çözüm: $x, y \in \mathbb{Z}$ için $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ olacak şekilde x, y tam sayılarının bulunmadığını gösterelim.

$\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ ise $x^2 = 2y^2$'dir. O halde $x = 2x_1$ olacak şekilde $x_1 \in \mathbb{Z}$ vardır. $x = 2x_1$ için $4x_1^2 = 2y^2$ ve $y^2 = 2x_1^2$ olduğundan $y = 2y_1$ olacak şekilde $y_1 \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde $2x_1^2 = 4y_1^2$ ve $2y_1^2 = x_1^2$ yani ilk durum elde edilir. O halde $x > x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ ve $y > y_1 > y_2 > y_3 > \ldots$ için $x = 2^n \cdot x_n$ ve $y = 2^n \cdot y_n$ elde edilir. $n \longrightarrow \infty$ iken x ve y, 2^n sayısına bölünecek şekilde x ve y tam sayıları olamayacağı için $x^2 = 2y^2$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur.

4.5.1. Vieta Jumping Yöntemi

Fermat'ın sonsuz indirgeme yönteminin özel bir halidir. Verilen denklemi sağlayan en büyük x_n sayısının varlığı kullanılarak, bu denklemi sağlayan ve x_n sayısından büyük olan x_{n+1} sayısının var olduğunu Vieta formülleri kullanılarak gösterildiğinde çelişki elde edilir. Benzer şekilde denklemi sağlayan en küçük x_m sayısı için, x_m den küçük bir x_{m+1} sayısının denklemi sağladığı gösterilirse çelişki yöntemi ile ispat yardımıyla denklemin çözümünün olmadığı gösterilmiş olur.

Örnek 4.24 (IMO-1988) *a ve b pozitif tam sayıları için $ab+1$ sayısı a^2+b^2 sayısını bölüyorsa, $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ sayısının tam kare olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $ab+1 \mid a^2+b^2$ ise $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Tersini, yani bir a, b ikilisi için k 'nın tam kare olmadığını varsayalım. $a+b$ ifadesini minumum yapan a, b değeri için, ($a \geq b$ olsun). $x^2 - bkx + b^2 - k = 0$ denkleminin bir kökü a dır. $x_1 = a$ için $x_2 = bk - a$ olur. Vieta formülünden $x_1 + x_2 = bk$ ve $x_1 = a$ olduğundan $x_2 = bk - a$ dır. Benzer şekilde $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ için $a \cdot x_2 = b^2 - k$ olduğundan $x_2 = \dfrac{b^2-k}{a}$ elde edilir. k bir tam kare olmadığından x_2 değeri 0 olamaz. $x_2 = \underbrace{bk-a}_{\in\mathbb{Z}} = \dfrac{b^2-k}{a} < a$ elde edilir. Çünkü $a \geq b$ için $x_2 = \dfrac{b^2-k}{a}$ ve $b \leq a$ için $b^2 \leq a^2$ dir. a, b pozitif olduğundan $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1} = k \in \mathbb{Z}^+$ olur. O halde $b^2 - k < a^2$ ve $\dfrac{b^2-k}{a} < a$ elde edilir. $x_2 = bk - a$ ve $x_2 + b < a + b$ için (x_2, b) bu denklemi sağlar. Bu durumda $a+b$ nin en küçük değeri için denklemi sağlayan daha küçük bir değer bulunur. O halde bu bir çelişkidir. Denklemi sağlayan a, b pozitif tam sayıları yoktur.

Örnek 4.25 (IMO-2007) *a ve b pozitif tam sayılardır. $4ab-1 \mid (4a^2-1)^2$ ise $a = b$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $4ab-1 \mid b^2(4a^2-1)^2 - (4ab-1)(4a^3b - 2ab + a^2) = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. Buradan a ve b pozitif tam sayıları için $4ab-1 \mid (a-b)^2$ ifadesi elde edilir.

$\dfrac{(a-b)^2}{4ab-1} = k$ olsun. ($k > 0$ dır.) Bu eşitliği sağlayan a ve b ikilisi için $a+b$ ifadesini en küçük yapan (A, B) ikilisini alalım. Bu ikili $A > B$ için (A, B) olsun.

$\dfrac{(x-B)^2}{4xB-1} = k$ ise $x^2 - (2B+4kB)x + B^2 + k \neq 0$ elde edilir. $x_1 = A$ ve $x_2 = 2B + 4kB - A = \dfrac{B^2+k}{A}$ dır. (Vieta formüllerinden) O halde (x_2, b) ikilisi de bu denklemi sağlar. (A, B) ikilisi minimum özelliğinden $x_2 + B \geq A + B$ dolayısıyla $x_2 \geq A$ elde edilir. Yani $\dfrac{B^2+k}{A} \geq A$'dır. Buradan $k \geq A^2 - B^2$ dir. $\dfrac{(A-B)^2}{4AB-1} = k \geq a^2 - B^2$ olduğundan $A - B \geq (a+b)(4AB-1) \geq A + B$ elde edilir. Çelişki. Bu yüzden $a = b$ olmak zorundadır.

Örnek 4.26 *x ve y pozitif tam sayıları için $xy \mid x^2+y^2+1$ ise $\dfrac{x^2+y^2+1}{xy} = 3$ olduğunu kanıtlayınız.*

Çözüm: $\dfrac{x^2+y^2+1}{xy} = k$ olsun. ($k \in \mathbb{Z}$ için $k = 3$ olduğunu kanıtlayalım.)

Bu eşitliği sağlayan tüm (X, Y) ikilileri için $x+y$ yi en küçük yapan (X, Y) ikilisi alınırsa,

$X = Y$ için $\dfrac{2X^2+1}{X^2} = k \in \mathbb{Z}$ için $k = 2 + \dfrac{1}{X} \in \mathbb{Z}$ olmalıdır. $X \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $X = Y = 1$ ve $k = 3$ elde edilir.

$X > Y$ olsun. $\dfrac{t^2+Y^2+1}{tY} = k$ ise $t^2 - kY \cdot t + Y^2 + 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemde $t_1 = X$ ve $t_2 = kY - X = \dfrac{Y^2+1}{X}$ (Vieta formüllerinden) elde edilir. $X > Y \geq 1$ için $t_2 = \dfrac{Y^2+1}{X} < X$ tir. Ancak bu bir çelişkidir. O halde $X = Y$ dir ve $k = 3$ tür.

4.6. Tümevarım Yöntemi

Negatif olmayan tam sayılar üzerinde $P(n)$ önermesi için;

1. $n = 0$ için $P(n)$ doğrudur.
2. Herhangi bir $n = k$ için $P(k)$ önermesinin doğru olduğunu kabul edelim.
3. $n = k + 1$ için $P(k+1)$'in doğru olduğu gösterilirse negatif olmayan her n tam sayısı için $P(n)$ önermesinin doğru olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4.27 (BUMO) *$n \geq 3$ için $7x^2 + y^2 = 2^n$ denklemini sağlayan x ve y tek sayılarının olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $n \geq 3$ için x_n ve y_n sayıları $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$ eşitliğini sağlasın.

$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 2^{n+1}$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$7\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{7x_n \pm y_n}{2}\right)^2 = 2\left(7x_n^2 + y_n^2\right) = 2^{n+1}$$

olur. $\dfrac{x_n + y_n}{2}$ ve $\dfrac{|x_n - y_n|}{2}$ sayılarından biri tektir. Çünkü $\dfrac{x_n + y_n}{2}$ tek ise $\dfrac{7x_n - y_n}{2} = 3x_n + \dfrac{x_n - y_n}{2}$ ifadesi tek sayıdır. Bundan dolayı $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ ve $y_{n+1} = \dfrac{7x_n - y_n}{2}$ olmalıdır. Eğer $\dfrac{x_n - y_n}{2}$ tek ise $\dfrac{7x_n + y_n}{2} = 3x_n + \dfrac{x_n + y_n}{2}$ elde edilir. Bundan dolayı $x_{n+1} = \dfrac{|x_n - y_n|}{2}$ ve $y_{n+1} = \dfrac{7x_n + y_n}{2}$ şeklinde yazılabilir. Bu yüzden $7x^2 + y^2 = 2^n$ denklemini sağlayan x ve y tek sayıları vardır.

4.7. Özel Yöntemler

Bazı özel diyofant denklemlerin çözümü için köklerin sınırlandırılması, simetriden yararlanma ya da özel köklerden genel çözüme ulaşma gibi yöntemler kullanılabilir.

4.7.1. Simetri Yöntemi

Bilinmeyenlerin kat sayılarının aynı olduğu durumlarda simetri yönteminden faydalanılabilir.

Örnek 4.28 (Balkan Junior) $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$ *denklemini sağlayan kaç tane* (a, b, c) *tam sayı üçlüsü vardır?*

Çözüm: $a \geq b \geq c$ olsun. $13^3 = 2197 > 2001$ olduğundan $a, b, c < 13$'tür. $8^3 + 8^3 + 8^3 = 1536 < 2001$ olduğundan $a = 9, 10, 11$ ya da 12'dir.

$a = 9$ için $b^3 + c^3 = 1272$, $b = c = 8$ için $8^3 + 8^3 = 1024 < 1272$ olduğundan $b = 9$ olmalıdır. O halde $c^3 = 543$, $c \notin \mathbb{Z}$'dir.

$a = 10$ için, $b^3 + c^3 = 1001$'dir. $b = 10$ için $c = 1$ ve $b = 9$ için $c \notin \mathbb{Z}$'dir. $b = 8$ için $c^3 = 489 < 512$ çözüm yoktur. $b < 8$ için $c > b$ olduğundan başka çözüm yoktur.

$a = 12$ için, $b = 6$ ve $b = 5$ alınırsa çözüm olmadığı görülür. Denklemin tek çözümü $(10, 10, 1)$'dir. Simetri kullanıldığı için $(10, 1, 10)$ ve $(1, 10, 10)$'da denklemin çözümleridir. Denklemin 3 tane çözümü vardır.

Örnek 4.29 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{5}$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y, z) *pozitif tam sayı üçlüsü vardır?*

Çözüm: Denklem simetrik olduğundan $1 \leq x \leq y \leq z$ olsun. $1 > \frac{4}{5}$ olduğundan $x > 1$'dir.

$x \leq y \leq z$ olduğundan $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} \leq \frac{3}{x} \Rightarrow x \leq 3,75$ olur. O halde $x = 2$ veya $x = 3$ olmalıdır.

$x = 2$ için, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10} \Rightarrow z = \frac{10y}{3y-10} \geq 2$'dir. $y \geq 7$ için $z < 7$ olacağından $y \leq z$ şartı sağlanmaz. $y \in \{4, 5, 6\}$ için $z = \{20, 10, \frac{15}{2}\}$ olduğundan çözümler $(2, 4, 20)$ ve $(2, 5, 10)$'dur. Simetriden $2 \cdot 3! = 12$ tane çözüm vardır.

$x = 3$ için, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15} \Rightarrow z = \frac{15y}{7y-15} \geq 3$'tür. $7y - 15 > 0$ için $y \geq 3$'tür. $y \geq 5$ için $z < 4$ olacağından $y \leq z$ şartı sağlanmaz. O halde $y \in \{3, 4\}$ için $z \notin \mathbb{Z}$ olur ve çözüm yoktur.

Denklemin 12 tane çözümü vardır.

Örnek 4.30 (Asya Pasifik) *m, n ve k pozitif tam sayıları için*

$$(36m + n) \cdot (m + 36n) = 2^k$$

denkleminin çözümünün olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Denklem simetrik olduğundan $m \leq n$ olsun. Denklemi sağlayan $x \in \mathbb{Z}^+$ olduğunu kabul edelim. Denklemi sağlayan en küçük m, n ve x için, $(36m + n) \cdot (m + 36n) = 2^k$ olması için $36m + n$ ve $m + 36n$ sayılarının ikisinde 2'nin kuvveti olmalıdır. O halde $4 \mid n$ ve $4 \mid m$ olmalıdır. Dolayısı ile $m/2$ ve $n/2$ sayıları da denklemin çözümüdür. $\frac{m}{2} < m$ olduğundan ve denklemin en küçük çözümü (m, n, x) olduğundan bu bir çelişkidir. O halde denklemi sağlayan (m, n, x) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur.

4.7.2. Özel Çözümden Genel Çözüme Ulaşma

Genellikle sonsuz sayıda çözümü olan diyofant denklemlerin çözümünde kullanılır. Denklemin bir çözümü tahmin ya da deneme yanılma ile bulunup, bu çözüm genelleştirilir.

Örnek 4.31 (CAMO) *Sıfırdan farklı x, y, z tam sayıları için $x^2 + y^5 = z^3$ denkleminin sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $(3, -1, 2)$ denklemin özel bir çözümüdür. $(2, 5, 3) = 30$ olduğundan $(3k^{15}, -k^6, 2k^{10})$ denklemin genel çözümüdür. Gerçekten de $(3k^{15})^2 + (-k^6)^5 = 8k^{30} = (2k^{10})^3$'dur.

Örnek 4.32 *$x^2 + y^2 = z^{2008}$ denklemini sağlayan kaç tane (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?*

Çözüm: $3^2 + 4^2 = 5^2$ denkleminin her iki tarafını $5^{2006} \cdot k^{2008}$ ile çarpalım.

$$\underbrace{3^2 \cdot 5^{2006} \cdot k^{2008}}_{(3 \cdot 5^{1003} \cdot k^{1004})^2} + \underbrace{4^2 \cdot 5^{2006} \cdot k^{2008}}_{(4 \cdot 5^{1003} \cdot k^{1004})^2} = \underbrace{5^{2008} \cdot k^{2008}}_{(5k)^{2008}}$$

elde edilir. Denklemin genel çözümü $k \in \mathbb{Z}$ için

$$(x, y, z) = \left(5^{1003} \cdot 3 \cdot k^{1004}, 5^{1003} \cdot 4 \cdot k^{1004}, 5k\right)$$

olur. O halde denklemin sonsuz çözümü vardır.

4.7.3. Bilinmeyenlerin Sınırlandırılması Yöntemi

Diyofant denklemin sonlu sayıda çözümü varsa, bu köklerin en küçük ve en büyük değeri bulunup aradaki sayılar denenerek çözüme ulaşılabilir. Çözüm kümesi çok elemanlı ya da sonsuz elemanlı denklemler için uygun olmayan bir yöntemdir.

Örnek 4.33 $2x^y - y = 2018$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *pozitif tam sayı ikilisi vardır?*

Çözüm: $x = 1$ için y negatif olduğundan $x > 1$'dir. $x > 1$ için y'nin değeri 10'dan küçüktür. Çünkü $2 \cdot 2^{10} - 10 = 2038 > 2018$'dir. O halde $y \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ olmalıdır. $2x^y$ ve 2018 çift olduğundan y çift sayıdır. Bu durumda $y = 2, 4, 6$ ve 8 için alt durumlar incelenebilir.

$y = 2$ için $\quad 2x^2 - 2 = 2018 \Rightarrow x = \sqrt{1010} \notin \mathbb{Z}$,

$y = 4$ için $\quad 2x^4 - 4 = 2018 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1011} \notin \mathbb{Z}$,

$y = 6$ için $\quad 2x^6 - 6 = 2018 \Rightarrow x = \sqrt[6]{1012} \notin \mathbb{Z}$,

$y = 8$ için $\quad 2x^8 - 8 = 2018 \Rightarrow x = \sqrt[8]{1026} \notin \mathbb{Z}$.

O halde denklemi sağlayan pozitif (x, y) ikilisi yoktur.

Örnek 4.34 $(4 - x)^{4-x} + (5 - x)^{5-x} + 10 = 4^x + 5^x$ *denklemini sağlayan tüm* x *tam sayılarını bulunuz.*

Çözüm: $x < 0$ olması durumunda eşitliğin sol tarafı tam sayı iken sağ taraf 1 den küçük pozitif bir sayıdır ve eşitliğin sağlanması mümkün değildir. $x > 5$ olması durumunda ise sol taraf 10 dan küçük iken sağ taraf 4000 den büyük olacaktır. O halde, x sayısı 0 ile 5 arasında olabilir. Kontrol edilirse, $x = 2$ için

$$2^2 + 3^3 + 10 = 16 + 25$$

olduğundan, denklemin tek tam sayı çözümü $x = 2$ bulunur.

Örnek 4.35 (Estonya M.O. 1999) $a^2 + b = b^{1999}$ *denklemini sağlayan kaç tane* (a, b) *tam sayı ikilisi vardır?*

Çözüm: $a^2 = b(b^{1998} - 1)$ yazalım. $b \geq 2$ için b ve $b^{1998} - 1$ sayıları aralarında asal olacağından, bu sayıların her ikisi de tam kare olmalıdır. Fakat, b^{1998} sayısı zaten bir tam kare olduğundan, $b^{1998} - 1$ sayısı tam kare olamaz. Dolayısıyla, $b \leq 1$ olmalıdır.

$$b = 1 \text{ ise } a = 0, b = 0 \text{ ise } a = 0 \text{ ve } b = -1 \text{ ise } a = 0$$

olur. $b \leq -2$ olamaz çünkü bu durumda $a^2 < 0$ olur. O halde denklemin sadece 3 çözümü vardır.

Örnek 4.36 $x^y = y^{x-y}$ *denklemini sağlayan kaç tane* (x, y) *pozitif tam sayı ikilisi vardır?*

a) 3 b) 4 c) 0 d) Sonsuz sayıda e) Hiçbiri

Çözüm: $x^y = y^{x-y}$ ise $x > y$ olur. Buna göre $x - y \geq y$ eşitsizliğinden $x \geq 2y$ elde edilir. obeb$(x, y) = d$ olsun. Yani $x = md$ ve $y = dn$ olsun. Bu durumda $m \geq 2n$ olur. Böylece

$$(dm)^{dn} = (dn)^{dm-dn}$$

eşitliğinden $m^{dn} = n^{dm-2dn} \cdot d^{dm-2dn}$ elde edilir. $n > 1$ olursa n sayısının asal çarpanları m sayısını bölecektir ve ortaya çelişki çıkacaktır. Bu durumda $n = 1$ ve $m^d = d^{dm-2d}$ olacağından $m = d^{m-2}$ elde edilir.

i) $m = 3$ için $d = 3$ olur ve $(m, n) = (9, 3)$ bir çözümdür.

ii) $m = 4$ için $d = 2$ olur ve $(m, n) = 8, 2$ bir çözümdür.

iii) $m > 4$ için $d > 1$ olur. Fakat $dm - 2 \geq 2m - 2 > m$ çelişkisi elde edilir.

O halde, $m > 4$ için çözüm yoktur. Böylece denklemin sadece 2 çözümü olduğu bulunur.

4.7.4. Diskriminant Yöntemi

2. dereceden lineer diyofant denklemler için ya da 2. dereceden lineer diyofant denklemlere dönüştürülebilen denklemler için kullanılabilen bir yöntemdir. Diskriminant hesaplanıp, kök olması için $\Delta \geq 0$ olmasına dayanan bir yöntemdir. Bu sayede kökler belirli bir aralığa sınırlandırılıp denklem çözülebilir.

Örnek 4.37 $n^2 + 3n + 5 = 121m$ *denklemini sağlayan kaç tane* (n, m) *pozitif tam sayı ikilisi vardır?*

Çözüm: $n^2 + 3n + 5 - 121m = 0$ denkleminde $\Delta = 11(44m - 1)$ olduğundan $n = \dfrac{-3 \mp \sqrt{11(44m-1)}}{2}$'dir. $11(44m - 1)$ ifadesini tam kare yapan bir m sayısı yoktur. Çünkü $44m - 1 = 11 \cdot t^2 \quad (t \in \mathbb{Z})$ olması mümkün değildir. O halde denklemi sağlayan (n, m) pozitif tam sayı ikilisi yoktur.

Örnek 4.38 *$x^2 - x - k = 0$ denkleminin tam sayı kökü olacak şekilde, 100'den küçük kaç pozitif tam sayı vardır?*

Çözüm: $x^2 - x - k = 0$ denkleminin kökleri, $(1 \pm \sqrt{1+4k})/2$'dir. Bu köklerin tam sayı olması için, $1 \pm \sqrt{1+4k}$ ifadesi çift sayı, dolayısıyla da $\sqrt{1+4k}$ tek sayı olmalıdır. $1+4k$ tek sayı olduğundan, $1+4k$ bir tek sayının çift kuvveti olması gerekir. O halde, $1+4k$ sayısı bir tek sayının çift kuvveti olacak şekilde kaç tane 100'den küçük k sayısı olduğunu bulmalıyız. $4 \cdot 100 + 1 = 401$ olduğundan, $1 + 4k \leq 19^2$ olabilir. 19'dan küçük olan tüm pozitif tek sayıların karesi için bir k pozitif tam sayısı bulabiliriz. Buna göre, $1+4k$ sayısı $3^2, 5^2, \ldots, 19^2$ değerlerini alabilir. O halde 9 tane istenen şekilde k sayısı vardır.

4.7.5. Kare ve Küp Kalanlar

2. dereceden, 3. dereceden ya da daha yüksek dereceli diyofant denklemlerin çözümünde modüler aritmetik yönteminin kullanılışı bölüm 4'te anlatılmıştı. Bu bölümde olimpiyat problemlerinde çok sık karşılaşılan tam kare ve tam küp sorularının özel durumları incelenecektir. Bir tam sayının karesinin, küpünün ya da $n \geq 4$ için n. kuvvetinin bazı özel modlarda sınırlı sayıda farklı kalanı olduğu incelenecektir.

- mod **3**

x	x^2	x^3
0	0	0
1	1	1
2	1	2

Yukarıdaki tablo incelendiğinde bir tam sayının karesinin $\pmod 3$'teki değerinin 0 ya da 1 olacağı (2 olamayacağı) görülür. Ancak küp için belirgin bir özellik yoktur.

Örnek 4.39 *x bir tam sayı ise $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 2019$ denkleminin çözümünün olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: $x^2 + (x^2+2x+1) + (x^2+4x+4) = 3x^2 + 6x + 5 \equiv 2 \pmod 3$, ancak $2019 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan denklemi sağlayan $x \in \mathbb{Z}$ yoktur.

- mod **4**

x	x^2	x^3
0	0	0
1	1	1
2	0	0
3	1	-1

Yukarıdaki tablodan bir tam sayının karesinin $\pmod 4$'teki değerinin 0 ya da 1 olacağı görülür. Küpün ise $0, 1$ ya da 3 olduğu (2 olamayacağı) görülür.

- $\bmod$ **5**

x	x^2
0	0
1	1
2	-1
3	-1
4	1

Buradan bir tam sayının karesinin $\bmod 5$ teki değerinin 0, 1 ya da 4 olabileceği yani 2 ve 3 olamayacağı görülür.

Bir tam sayının karesi ve küpü ile ilgili aşağıda verilen sonuçlara, modüler aritmetik yöntemi ile ulaşılabilir.

- Bir tam sayının karesinin birler basamağının 2, 3, 7 ve 8 olamaz. Bu, tüm rakamlamların kareleri alınarak gösterilebilir.

- Bir sayının karesinin birler basamağı sıfır ise , son iki basamağı sıfırdır.

  $\triangleright$ a sayısı 0 ile bitiyorsa, $10k$ şeklindedir. a^2 sayısının karesi $100k^2$ olduğu için son iki basamağı sıfırdır.

- Bir sayının karesinin birler basamağı 5 ise , son iki basamağı 25'tir.

  $\triangleright$ a sayısı $10k + 5$ şeklinde ise a^2 sayısı $100k^2 + 100k + 25$ olduğundan son iki basamağı sıfırdır. $\triangleleft$

- Bir sayının karesinin 3'e bölümünden kalan 1 veya 0'dır.

  $\triangleright$ $a \equiv 1, 2 \pmod 3$ ise $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ ve $a \equiv 0 \pmod 3$ ise $a^2 \equiv 0 \pmod 3$ olduğundan kalan 0 ya da 1 dir.$\triangleleft$

- Bir sayının karesinin 4'e bölümünden kalan 1, veya 0'dır.

  $\triangleright$ Sayı çift ise $2k$ şeklindedir. Karesi $4k^2$ şeklindedir ve 4 ise bölümünden kalan 0 dır. Sayı tek ise $2k+1$ şeklindedir ve karesi $4k^2+4k+1$ şeklindedir ve 4 e bölümünden kalan 1 dir. $\triangleleft$

- Bir sayının karesinin 8'e bölümünden kalan 0, 1 veya 4 'tür.

Örnek 4.40 $\underbrace{1111...1}_{ntane}$ *sayısının n'nin hangi değerleri için bir tam kare olduğunu bulalım.*

Çözüm: $n = 1$ için $1^2 = 1$'dir.
$n \geq 2$ için , bu sayının 4 ile bölümünden kalan 3'tür. Ancak , bir tam karenin 4 ile bölümünden kalan 3 olamaz.(0 ya da 1 olabilir.) Bu yüzden sadece $n = 1$ için tamkaredir.

Örnek 4.41 *x,y,z birer tam sayıdır.*
$x^2 + y^2 + z^2 = 847$ *denklemini sağlayan kaç tane (x,y,z) üçlüsü vardır?*

Çözüm: Bir sayının karesinin 8 ile bölümünden kalanları bulalım.
0,1 ya da 4'tür. 847'nin 8 ile bölümünden kalan 7'dir. O halde $x^2 + y^2 + z^2 = 8k + 7$ olamaz.

Örnek 4.42 *a ve b birer tam sayıdır.*
$8a^3 - 13b^3 = 2027$ *denklemini sağlayan kaç tane (a, b) ikilisi vardır?*

Çözüm: 7 ile bölümünden kalanları inceleyelim.
$8a^3 \to a^3$, $-13b^3 \to b^3$, $2027 \to 4$
$a^3+b^3 = 7k+4$ olamaz. Çünkü bir sayının küpünün 7 ile bölümünden kalan 0,1 veya 6 olabilir. Bunların ikisinin toplamı 4 olamaz. O halde bu denklemi sağlayan (a, b) ikilisi yoktur.

Örnek 4.43 *1000 basamaklı bir sayıda bir tanesi dışında tüm basamaklar 5' tir. Bu sayının hiçbir tam sayının karesi olamayacağını kanıtlayınız.*

Çözüm: Son rakam 5 ise, bir önceki 2 olmak zorundadır. Ancak bir sayının rakamları toplamı $s \equiv 2 \pmod 3$ olamayacağından tamkare olamaz.

Son rakam 1 veya 9 ise sayı $\equiv 3 \pmod 4$olamayacağından tamkare olamaz. Sayı tek sıfırla bitemez. Son rakam 4 ise, sayı $\equiv 2 \pmod 4$.
Son rakam 6 ise, $s \equiv 6 \pmod 9$ olamayacağından (çünkü sayı 3' e bölünüp, 9' a bölünmüyor) tamkare olamaz.

Örnek 4.44 (UMO-2003) *Aşağıdaki n tam sayılarından hangisi için $x^2 \equiv -1 \pmod{n}$ denkliğini sağlayan en az bir x tam sayısı vardır?*

A) 97 B) 98 C) 99 D) 100 E) Hiçbiri

Çözüm: $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ (p asal) denkliğinin kökü sadece $p \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda vardır. O halde;

$97 \equiv 1 \pmod{4}$ $x^2 \equiv -1 \pmod{97}$' nin kökü var (2^{48}, 2^{24} veya 2^{12}).

$a^2 \equiv -1 \pmod{98}$ olsaydı, $a^2 \equiv -1 \pmod{7}$. Bu mümkün değil, çünkü $7 \equiv 3 \pmod{4}$.

$a^2 \equiv -1 \pmod{99} \Rightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{11}$. Bu da mümkün değil, çünkü $11 \equiv 3 \pmod{4}$.

$a^2 \equiv -1 \pmod{100} \Rightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{4}$. Olamaz. **Cevap E**

Örnek 4.45 (UMO-2014) *Aşağıdaki sayılardan hangisi x ve y tam sayılar olmak üzere, x^2+y^5 biçiminde yazılamaz?*

a) 59170 b) 59149 c) 59130 d) 59121 e) 59012

Çözüm: Eşitliği $\pmod{11}$ de inceleyelim. $x^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$ ve $y^5 \equiv 0, 1, 10 \pmod{11}$ olduğundan $x^2 + y^5 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ olabilir. Bu yüzden 7 olmaz. Ancak; $59121 \equiv 7 \pmod{11}$ olduğundan, 59121 sayısı $x^2 + y^5$ formunda yazılamaz. **Cevap D**

Örnek 4.46 (UMO-2002) $3n^2 + 3n + 7$ *sayısının tam küp olmasını sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?*

A) 0 B) 1 C) 3 D) 7 E) Sonsuz Çoklukta

Çözüm:

- $n \equiv 0 \pmod{3}$ ise, $3n^2 + 3n + 7 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow$ tam küp olamaz.
- $n \equiv 1 \pmod{3}$ ise, $3n(n + 1) + 7 \equiv 4 \pmod{9} \Rightarrow$ tam küp olamaz.
- $n \equiv 2 \pmod{3}$ ise, $3n(n+1)+7 \equiv 7 \pmod{9} \Rightarrow$ tam küp olamaz. O halde $3n^2+3n+7$ ifadesini tam küp yapam n pozitif tam sayısı yoktur.

Cevap A

Örnek 4.47 $3^n + 163$ *sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan tüm* n *pozitif tam sayılarını bulunuz.*

Çözüm: Denklemi $\pmod 4$ 'te inceleyelim. $(-1)^n + 3 \equiv x^2 \pmod 4$ elde edilir. Bir sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 0 ya da 1'dir. Bu yüzden n çift sayıdır. k tam sayısı için $n = 2k$ alalım. $163 = (x - 3^k)(x + 3^k)$ ve 163 asal sayı olduğundan $x - 3^k = 1, x + 3^k = 163$ elde edilir. Buradan $3^k = 81, k = 4, n = 8$ elde edilir. n'nin tek değeri vardır.

Örnek 4.48 *Rakamları toplamı 2016 olan bir tam kare bulunuz.*

İpucu: *Rakamları toplamı 2016 olan* $(10^n - 1)^2$ *şeklinde bir sayı arayınız.*

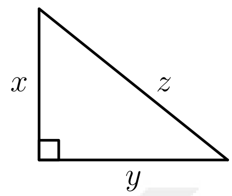
Çözüm: $(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{n-1}800\ldots1$ dir. Bu sayının rakamları toplamı; $9(n-1) + 8 + 1 = 2016$ ise $n = 224$ elde dilir. Gerçektende; $(\underbrace{99\ldots9}_{224})^2$ sayısının rakamları toplamı 2016'dır.

*** Bir çok sayı bulunabileceğine dikkat ediniz.

5. ÖZEL DİYOFANT DENKLEMLER

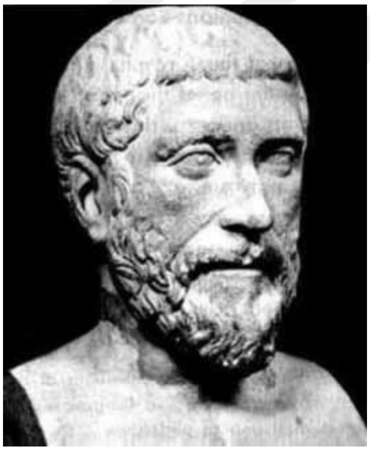
5.1. Pisagor Üçlüleri

“Kareli ve Küplü Şeylerin Tarihi” isimli kitapta, yaklaşık 4000 yıl önce yani Pisagor’dan 2000 yıl öncesine ait kil tabletlerde 2. dereceden bir çok denklemin çözümünün yazılı olduğu belirtilmektedir. Hatta çivi yazısı ile yazılmış Pisagor üçlüleri yer almaktadır.



Pisagor Teoremi
$x^2 + y^2 = z^2$

Ancak Pisagor zamanında üzerinde daha çok durulmuş, matematiksel kanıtı yapılmış ve birçok Pisagor üçlüsü bulunmuş ve birbirinin katı olmayan Pisagor üçlülerinin sonsuz sayıda olduğu kanıtlanmıştır. $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan pozitif (x, y, z) tam sayı üçlüsüne **Pisagor üçlüsü** denir.



Örnek 5.1 $x^2 + y^2 = z^2$ *denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: $x^2 + y^2 = z^2$ ise $z^2 - y^2 = x^2$’dir. O halde $(z - y)(z + y) = x^2$ elde edilir.

1. Durum: x asal sayı olsun. $(z - y)(z + y) = 1 \cdot x^2$ olacağından ($z - y = z + y = x$ için $y = 0$ olacağından çözüm yoktur) $z - y = 1$ ve $z + x = x^2$’dir. Buradan $z = \frac{x^2+1}{2}$ ve $y = \frac{x^2-1}{2}$ elde edilir. O halde $\left(x, \frac{x^2-1}{2}, \frac{x^2+1}{2}\right)$, $x > 1$ ve x tek tam sayıları için bir Pisagor üçlüsüdür. Gerçekten de $x = 3, 5, 7, 9, \ldots$ için (3 − 4 − 5), (5 − 12 − 13), (7 − 24 − 25), (19 − 40 − 41), …üçlüleri temel Pisagor üçlüleridir. Asal sayılar sonsuz elemanlı olduğundan bu üçlü bize Pisagor üçlülerinin (birbirinin katı olmayan) sonsuz sayıda olduğunu kanıtlar.

2. Durum: $x^2 = u \cdot v$ olacak şekilde $u, v \in \mathbb{Z}$ olsun. $(z-y)(z+y) = u \cdot v$ ise $z = \frac{u+v}{2}$ ve $y = \frac{u-v}{2}$ bu denklemi sağlar. O halde, $\left(\sqrt{uv}, \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$ bir Pisagor üçlüsüdür. Bunu düzenlersek, $u = a^2$, $v = b^2$ için $(a > b)$ $(2ab, a^2 - b^2, a^2 + b^2)$ üçlüsü bir Pisagor üçlüsüdür. Gerçekten de $a = 4$ ve $b = 3$ için $(24 - 7 - 25)$ bir Pisagor üçlüsüdür.

5.2. Fermat Teoremi

$x^n + y^n = z^n$ denklemi $n = 2$ için Pisagor teoremidir. Fermat, $n > 2$ için bu denklemi sağlayan x, y ve z tam sayılarının bulunmadığı ortaya atmış ve bunun kanıtının not defterinin kenarına sığmayacağını not etmişti. Yaklaşık 300 yıl boyunca her matematikçinin ilgisini çeken bu teorem 1993 yılında küçük bir eksikle ve 1995 yılında eksiksiz olarak Andrew Wiles tarafından çözülmüştür.

$n = 2$ için sonsuz çözüm olduğu bir önceki kısımda gösterilmişti. Burada $n = 4$ için denklemin tam sayılarda çözümünün olmadığı gösterilecektir.

Örnek 5.2 *Şimdi de Fermat'ın son teoreminin 3. kuvvet için elementer bir ispatını yapalım. Bu çözüm J. Browkin tarafindan R.D. Carmichael'in fikrine dayanarak yapılmıştır.*

x, y, z sayılarının $x^3 + y^3 = z^3$ denkliğini sağladığını varsayalım. Ayrıca $|xyz| \neq 0$ şartıyla mümkün olan en küçük sayılar olsun. Açık bir şekilde x, y, z sayıları ikişerli olarak aralarında asaldır. Çünkü aralarında asal olmasalardı bile $d > 1$ ortak çarpanı için $x^3 + y^3 = z^3$ denkliğinde her iki taraf d^3'e bölünerek daha çözümlere ulaşılabilirdi.

Buradan hareketle hepsi tek sayı olamayacağı gibi sadece bir tanesi çift sayı olabilir. Varsayalım z çift, $x; y$ tek olasun. Böylece $x + y$ ve $x - y$ de çift olur.

Buradan

$$x + y = 2u, \qquad x - y = 2w.$$

$x = u + w$, $y = u - w$ alınabilir. $(x, y) = 1$ olduğundan $(u, w) = 1$'dir ve $x \not\equiv w$ $\pmod 2$.

Denklem tekrar düzenlendiğinde $2u(u^2 + 3w^2) = z^3$ elde edilir.

Eğer $(u, 3) = 1$ ise $(2u, u^2 + 3w^2) = 1$ olur. Bu yüzden $2ut^3$, $u^2 + 3w^2 = 5^3$ denkliğinde 5 tek sayıdır ve $(u, w) = 1$ dir. Bu denklik için $u = \alpha^3 - 9\alpha\beta^3$ çözüm olacağından $t^3 = 2u = 2\alpha \cdot (\alpha - 3\beta) \cdot (\alpha + 3\beta)$ eşitliğine kavuşulur.

Buradan $2\alpha, \alpha - 3\beta$ ve $\alpha + 3\beta$ nın aralarında asal olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak $2\alpha = \sigma^3$, $\alpha - 3\beta = \tau^3$ ve $\alpha + 3\beta = \epsilon^3$ olur ki bu da

$$\sigma^3 = \epsilon^3 + \tau^3$$

eşitliğini verir.

Fakat $\epsilon\sigma\tau|^3 = |t^3| = |2u| = |x+y|\neg 0$ ve $|x+y| \leq |xyz| < |xyz|^3$ durumu varsayımımız olan $|xyz|$ nin minimal olması ile çelişmektedir.

Eğer $3 \mid u$ ve $u = 3v$ ise denklem $18v(3v^2 + w^2) = z^3$ olacaktır. Yani $3v \not\equiv \pmod 2$ ve $(3v, w) = 1$ olduğundan $(18v, 3v^2 + w^2) = 1$'i buradan da $18v = t^3$, $3v^3 + w^2 = 5^3$, 5 tektir ve $(v, m) = 1$'i elde ederiz.

$v = 3\beta\alpha^2 - 3\beta^3$ eşitliğinden $t^3 = 18v = 27 \cdot 2\beta(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$ olur. Burada 2β, $\alpha + \beta$ ve $\alpha - \beta$'dan herhangi ikilisinin aralarında asal olduğu kolaylıkla anlaşılabilir. Böylece $2\beta = \sigma^3$, $\alpha + \beta = \tau^3$ ve $\alpha - \beta = \epsilon^3$'dur. $\tau^3 = \sigma^3 + \epsilon^3$ olur. Fakat bu durum

$$|\epsilon\sigma\tau|^3 = \left|\frac{1}{27}t^3\right| = \left|\frac{2}{3}v\right| = \frac{2}{9}|v| = \frac{1}{9}|x+y| \neq 0$$

ve $\frac{1}{9}|x+y| \leq |xyz| \leq |xyz|^3$ olması nedeniyle varsayımımız olan $|xyz|$'nin minimal olmasıyla çelişmektedir. Böylece $x^3 + y^3 = z^3$ denkleminin tam sayılarda çözüm olmadığı ispatlanmış olur.

Örnek 5.3 *$x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin her biri sıfırdan farklı x, y ve z tam sayıları için çözümünün olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: 5.1 de $a^2 + b^2 = c^2$ denkleminin çözümleri bulunmuştu. Burada a, b ve c'nin tam sayı olması gerektiği göz önüne alınırsa m ve n tam sayıları için

$$\pm a = m^2 - n^2, \quad \pm b = 2mn, \quad \pm c = m^2 + n^2$$

eşitlikleri yazılabilir.

$x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin sıfırdan farklı bir çözümü varsa (x, y, z^2) üçlüsü

$$x^4 + y^4 = t^2$$

denklemini sağlar. x, y, t tam sayılarının pozitif ve obeb$(x, y, t) = 1$ olduğunu varsayalım. Doğal sayılardaki en küçük eleman seçebilme özelliğini kullanıp değeri en küçük olan bir çözüm alınırsa

$$x^2 = m^2 - n^2, \quad y^2 = 2mn, \quad t = m^2 + n^2$$

olur. Buradan $x^2 + n^2 = m^2$ elde edilir ve Pisagor üçlüleri kuralı tekrar uygulanırsa

$$x = a^2 - b^2, \quad n = 2ab, \quad m = a^2 + b^2$$

elde edilir. O halde $y^2 = 4ab(a^2 + b^2)$ olması gerekir. $y = 2k$ olsun, o zaman $k^2 = ab(a^2 + b^2)$ olacaktır. $a, b, a^2 + b^2$ aralarında asal oldukları ve çarpımları da tam kare olduğu için her biri kare olmalıdır.

$$a = c^2, \quad b = d^2, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Buradan $c^4 + d^4 = e^2$ ama $e < t$ dir. Bu t nin en küçük olma özelliği ile çelişir. O halde $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin sıfırdan farklı x, y ve z için çözümü yoktur.

5.3. Pell Denklemi

1611-1674 yılları arasında yaşayan John Pell, Pierre De Fermat(1601-1665) ile aynı dönemde yaşamıştır. $X^2 - dY^2 = N$ tipindeki denklemlerin tam sayı çözümleri ile uğraşmıştır. Özel bir diyofant denklemi olan bu denklem daha sonra Fermat tarafından Pell Denklemi olarak adlandırılmıştır. Özellikle $X^2 - dY^2 = 1$ tipindeki denklemlerin çözümü çok önemli yer tutar. Çünkü bu tip denklerin çözümünde sürekli kesirler yardımıyla genel çözüme ulaşma ve bu sayede köklü ifadelerin yaklaşık değerlerin hesaplanabilmesi, 1600'lü yıllar için çok önemlidir. Fermat, Pell Denklemi sayesinde $(\sqrt{5})$ ifadesinin değerinin virgülden sonraki 4. basamağına kadar hatasız olarak kolay bir biçimde hesaplamıştır.

Pierre De Fermat

John Pell

5.3.1. Pell Denklemine Dönüştürülebilen Denklemler

Her Pell Denklemi tam sayılarda çözülemeyebilir. Ancak karmaşık denklemleri Pell Denklemine dönüştürmek, bilinen yöntemler sayesinde denklemi çözmekte kolaylık sağlayacaktır.

Örnek 5.4 (Berkeley Math Circle) $2x^2-6xy+3y^2 = -1$ *denklemini Pell Denklemi biçiminde yazınız.*

Çözüm: Verilen ifade düzenlenirse, $x^2-3(y-x)^2 = 1$ elde edilir. Burada $X = x$ ve $Y = y-x$ dönüşümü yapılırsa $X^2 - 3Y^2 = 1$ Pell denklemi elde edilir.

5.3.2. $X^2 - dY^2 = \pm 1$ Tipindeki Denklemlerin Çözümü

$x^2-dy^2 = 1$ denkleminin genel çözümü bulunurken eşitliğin her iki tarafının karesi alınır. $x^4 - 2dx^2y^2 + d^2y^4 = 1$ elde edilir. Bu ifade tam kareye tamamlanırsa,

$$\left(x^2 + dy^2\right)^2 - 4dx^2y^2 = 1$$
$$\left(x^2 + dy^2\right)^2 - d(2xy)^2 = 1$$

elde edilir. $x^2 + dy^2 = A$ ve $2xy = B$ için bu denklem $A^2 - dB^2 = 1$ formuna dönüşür. O halde bu Pell Denkleminin bir çözümü (x_0, y_0) ise $(x_0^2 + dy_0^2, 2x_0y_0)$ ikilisi de bir çözümdür. Bu durumda denklemin bir çözümü deneme yanılma ile bulunursa, bu çözümler kullanılarak denklemin bir çok çözümü daha bulunmuş olur. Bu da denklemin sonsuz sayıda çözümü olduğunu gösterir.

Örnek 5.5 $x^2 - 3y^2 = 1$ *denklemini tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: $y = 1$ için $x = 2$ denklemin özel bir çözümüdür. Benzer biçimde $(-2, 1), (-2, -1)$ ve $(2, -1)$ ikilileri de çözümdür.

$x^2 - 3y^2 = 1$ denkleminin iki tarafının karesi alınırsa $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^2 = 1$ elde edilir. Eşitliğin sol tarafı tam kareye tamamlanırsa, $\left(x^2 + 3y^2\right)^2 - 12x^2y^2 = 1$ elde edilir. İfade düzenlenirse $\left(x^2 + 3y^2\right)^2 - 3(2xy)^2 = 1$ eşitliğinde $x^2 + 3y^2 = A$ ve $2xy = B$ dönüşümü yapılırsa denklem $A^2-3B^2 = 1$ şekline dönüşür. O halde (x, y) bir çözüm ise $(x^2 + 3y^2, 2xy)$ çözümdür.

$x = 2$ ve $y = 1$ için $(7, 4)$,

$x = 7$ ve $y = 4$ için $(97, 56), \ldots$

şeklinde devam edilirse denklemin tüm çözümleri bulunmaz ancak sonsuz sayıda çözümü olduğu elde edilir.

Örnek 5.6 $\sqrt{3}$ *sayısının yaklaşık değerini Pell Denklemi yardımıyla hesaplayınız.*

Çözüm: $x^2 - 3y^2 = 1$ denklemini kullanalım. Bu eşitlikten;

$3y^2 = x^2 - 1$ ve $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{y}$ elde edilir. Burada $x > 1$ olması gerektiği açıktır. x tam sayısı için $x^2 - 1$ sayısını tam kare yapan 1'den büyük tam sayı değeri olmadığından $\sqrt{x^2-1}$ irrasyonel sayıdır. O halde $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{y}$ eşitliğinden $\sqrt{3}$ sayısının değerinin irrasyonel olduğunu söylenebilir. X'in büyük değerleri için $\sqrt{x^2-1}$ ifadesinin değeri x'e çok yakındır. O halde $\sqrt{3} \approx \frac{x}{y}$'dir.

$x^2 - 3y^2 = 1$ denkleminin birkaç çözümü incelenerek $\sqrt{3}$ sayısının yaklaşık değeri şu şekilde hesaplanabilir;

x	y	x/y
2	1	2
7	4	$1,75$
98	56	$1,732142857$
18817	10864	$1,73205081$
708158977	408855776	$1,732050808$

Hesap makinesi yardımıyla $\sqrt{3}$ değeri hesaplanıldığında $1,732050808\ldots$ olduğu görülür. Birkaç bölme işlemi yardımıyla virgülden sonraki 8 basamağa kadar hesaplanabildiği göz önüne alındığında mükemmel bir yöntem olduğu (yaklaşık 400 yıl önce) söylenebilir.

Örnek 5.7 $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ *denklemini tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: $(x; y) \to (x + 2y; x + y)$ dönüşümünün denklemin genel çözümü olduğu tam kare yardımıyla bulunabilir. Gerçekten de;

$$\begin{aligned}(x+2y)^2 - 2(x+y)^2 &= x^2 + 4xy + 4y^2 - 2\left(x^2 + 2xy + y^2\right)\\ &= 2y^2 - x^2 = -\left(x^2 - 2y^2\right)\end{aligned}$$

olduğundan bu dönüşüm denklemin genel çözümüdür. $(x, y) = (1, 0)$ bu denklemi sağladığından aşağıdaki gibi yeni değerler bulunabilir.

x	1	1	3	7	17	41	99	239
y	0	1	2	5	12	29	70	169
$x^2 - 2y^2$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Bu sayede $\sqrt{2}$'nin değerini hesaplanabildiği gibi aşağıdaki eşitlikler yardımıyla da denklemin yeni kökleri bulunabilir.

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1+2\sqrt{2}+2 = 3+2\sqrt{2},$

$\left(1+\sqrt{2}\right)^3 = 1+3\sqrt{2}+3\cdot 2+2\sqrt{2} = 7+5\sqrt{2},$

$\left(1+\sqrt{2}\right)^4 = \left(1+\sqrt{2}\right)^3\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(7+5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = 17+12\sqrt{2},$

$\left(1+\sqrt{2}\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2},$

$\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(1+\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(1+\sqrt{2}\right) = \left(x_n+y_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = x_n+y_n\sqrt{2}+x_n\sqrt{2}+ 2y_n = (x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2},$

Benzer şekilde

$\left(1-\sqrt{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{2},$

$\left(1-\sqrt{2}\right)^3 = 7-5\sqrt{2},$

$\left(1-\sqrt{2}\right)^4 = 17-12\sqrt{2},$

$\left(1-\sqrt{2}\right)^n = x_n - y_n\sqrt{2}$

eşitlikleri kullanılabilir.

Örnek 5.8 $x^2-2y^2=7$ *denklemini tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: $(x;y)\to(3x+4y;2x+3y)$ dönüşümünün denklemin bir çözümü olduğunu gösterelim.

$(3x+4y)^2-2(2x+3y)^2 = 9x^2+24xy+16y^2-8x^2-24xy-18y^2 = x^2-2y^2$ olduğundan bu dönüşün denklemin bir çözümüdür.

$(x;y)=(3;1)$ denklemin bir özel çözümüdür. O halde $(13,9)$ denklemin bir çözümüdür. Bu değer yerine yazılarak sonsuz sayıda çözüm bulunabilir.

$(3;1)\to(13,9)\to(75;53)\to\ldots,$

Örnek 5.9 $x^2-xy-y^2=\pm 1$ *denklemini tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: Denklem 4 ile çarpılırsa $4x^2-4xy-4y^2=\pm 4$ denklemi elde edilir. İfadeler tam kareye tamamlanırsa $(2x-y)^2-5y^2=\pm 4$ eşitliğine ulaşılır. Bu durumda; $(x,y)=(2x-y,y)$ için $x^2-5y^2=\pm 4$ denkleminin ilk birkaç çözümü tablodaki gibidir.

x	0	1	1	2	3	5	8	13	21
y	1	0	1	1	2	3	5	8	13
x^2-xy-y^2	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

Burada x değerleri Fibonacci dizisinin terimleri olduğundan

$\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$ ve $\varphi_{n+2}=\varphi_n+\varphi_{n+1}$

$\varphi_2 = 0+1$, $\varphi_3 = 1+1 = 2$, $\varphi_4 = 1+2 = 3$, $\varphi_5 = 2+3 = 5$, $\varphi_6 = 3+5 = 8$, $\varphi_7 = 5+8 = 13$ elde edilir. Ve denklemin sonsuz çözüm olduğu elde edilir.

5.3.3. Çözümlü Pell Denklemleri

Örnek 5.10 (Dorin Andrica) $\dfrac{n(n+1)}{3}$ *ifadesini tam kare yapan tüm n pozitif tam sayılarını bulunuz.*

Çözüm: $\dfrac{n(n+1)}{3} = y^2$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}^+$ alınırsa $n^2+n = 3y^2$ ve $4n^2+4n = 12y^2$ elde edilir. Bu denklemi Pell denklemine dönüştürülürse, $(2n+1)^2 - 12y^2 = 1$ elde edilir. $2n+1 = x$ için, $x^2 - 12y^2 = 1$ Pell Denklemini çözelim.

$x = 7$ ve $y = 2$ denklemin özel bir çözümüdür.

$$x_m = \frac{1}{2}\left[\left(7+2\sqrt{12}\right)^m + \left(7-2\sqrt{12}\right)^m\right]$$
$$y_m = \frac{1}{2\sqrt{12}}\left[\left(7+2\sqrt{12}\right)^m - \left(7-2\sqrt{12}\right)^m\right]$$

olduğundan,

$$x = 2n+1 = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2m} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2m}\right]$$
$$n_m = 3\left[\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^m - \left(2-\sqrt{3}\right)^m}{2\sqrt{3}}\right]^2$$

$m \geq 0$ şeklindeki tüm n sayıları $\dfrac{n(n+1)}{3}$ ifadesini tam kare yapar.

Örnek 5.11 *Aralarında asal a ve c sayıları için $a^4+b^3-c^2$ denklemini sağlayan sonsuz sayıda (a,b,c) tam sayı üçlüsü olduğunu gösteriniz.*

Çözüm: $b^3 = c^2 - a^4$ olduğundan $b^3 = (c-a^2)(c+a^2)$ olarak yazılabilir. Burda $c+a^2 = m^3$ ve $c-a^2 = n^3$ olacak şekilde m ve n tam sayıları vardır. Çünkü a ve c sayıları aralarında asaldır.

$$c = \frac{m^3+n^3}{2} \text{ ve } a^2 = \frac{m^2-n^3}{2}.$$

$m = k+1$ ve $n = k-1$ için $a^2 - 3k^2 = 1$ elde edilir. $(2,1)$, $a^2-3k^2 = 1$ Pell Denkleminin özel bir çözümüdür. $a_1 = 2$ ve $k_1 = 1$ için genel çözüm,

$$a_j = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^j + \left(2-\sqrt{3}\right)^j\right]$$
$$k_j = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^j - \left(2-\sqrt{3}\right)^j\right], \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

O halde (a, b, c) üçlüsü $\left(a_j, k_j^2 - 1, k_j^3 + 3k_j\right)$, $\quad j = 1, 2, 3, \ldots$ olarak bulunur.

Örnek 5.12 $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ *denklemini pozitif tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: $u = y - 2x$ dönüşümü yapılırsa $u^2 - 3x^2 = 1$ denklemi elde edilir. Bu denklemi (Örnek 5.5) te çözmüştük. İkinci yol olarak genel çözümden,

$$u_n + x_n\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$$
$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$$
$$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$$

elde edilir.

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$$

denklemin genel çözümüdür.

Örnek 5.13 $x^2 - 5y^2 = 1$ *denklemini tam sayılarda çözünüz.*

Çözüm: $(x_1, y_1) = (9, 4)$ denklemin özel çözümüdür. $x_n + y_n\sqrt{5} = \left(x_1 + y_1\sqrt{5}\right)^n$ olduğundan, $x_n + y_n\sqrt{5} = \left(9 + 4\sqrt{5}\right)^n$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten $n = 1, 2, \ldots$ için sonsuz sayıda çözüm bulunabilir.

6. DİYOFANT DENKLEM SORULARI

Soru 1

$5x + 13y = 50$ *denklemini saylayan kaç farklı* (x, y) *negatif olmayan tamsayı ikilisi vardır?*

Çözüm: Bu denklem $\pmod 5$ veya $\pmod{13}$ de incelenebilir. $\pmod 5$ te incelenirse $3y \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow y \equiv 0 \pmod 5$. $y = 0 \Rightarrow x = 10, y = 5 \Rightarrow x = -3$
O halde tek çözüm vardır.

Soru 2

$11x + 17y = 298$ *denkleminin tüm pozitif çözüm ikililerini bulunuz.*

Çözüm: Denklem $\pmod{17}$'de incelenirse
$11x \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow 22x \equiv 18 \pmod{17} \Rightarrow 5x \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 20x \equiv 4 \pmod{17} \Rightarrow$ $3x \equiv 4 \pmod{17} \Rightarrow 18x \equiv 24 \pmod{17} \Rightarrow x \equiv 7 \pmod{17}$. $x = 7 \Rightarrow y = 13$, $x = 24 \Rightarrow$ $y = 2$'dir. $(7, 13)$ ve $(24, 2)$ dir.

- a ve b tam sayılarının En Büyük Ortak Böleni d olsun. $(a, b) = d$. $ax + by = c$ denkleminin tam sayılardaki çözümü için;

  i) $d \nmid c \Rightarrow$ çözüm yoktur.

  ii) $d \mid c \Rightarrow$ çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır. Modüler aritmetik ya da deneme-yanılma ile (x_0, y_0) çözümü bulunur.

  $x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot n$, $y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot n$, $n \in \mathbb{Z}$, denklemin genel çözümüdür.

Soru 3

$5x + 7y = 25$ *denkleminin tam sayılardaki genel çözümünü bulunuz.*

Çözüm: $(5, 7) = 1 \mid 25$ olduğundan denklemin çözümü vardır. Görüleceği üzere $x = 5$ ve $y = 0$ denklemi sağlar. O halde $(x_0, y_0) = (5, 0)$'dır.
$x = 5 + \frac{7}{1} \cdot n$ ve $y = 0 - \frac{5}{1} \cdot n$ genel çözümdür. $(n \in \mathbb{Z})$. $(x, y) = (5 + 7n, -5n)$'dir.

Soru 4 (UMO-1995)

$n^n + 1 = (n + 1)(2n + 1)$ *eşitliğinin tam sayılar kümesinde kaç çözümü vardır?*

Çözüm: $n^n + 1 = 2n^2 + 3n + 1$, $n \neq 0 \Rightarrow n^{n-1} = 2n + 3 \Rightarrow n(n^{n-2} - 2) = 3 \Rightarrow n \in \{1, -1, 3, -3\}$. Bunlardan $n = -1$ ve $n = 3$ denklemi sağlar.

- En çok kullanılan yöntemlerden biri de çarpanlara ayırma yöntemidir. Bu sayede verilen çarpanların alabileceği değerler teker teker incelenir ve çözüme ulaşılır.

Soru 5 (UMO-2004)

n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2 + ab - 6b^2 = n$ eşitliğini sağlayan $a,\ b$ tam sayıları bulunur?

a) 17 b) 19 c) 29 d) 31 e) 37

Çözüm: $(a + 3b)(a - 2b) = n$ asal olduğundan $a + 3b = \pm n$; $a - 2b = \pm 1$ olmak zorunda. Örneğin $a + 3b = -n$; $a - 2b = -1 \ \Rightarrow 5b = -n + 1$

$\Rightarrow n \equiv 1 \pmod 5$. Diğer üç durumda da $n \equiv 1 \pmod 5 \ \Rightarrow$ sadece $n = 31$ denklemi sağlar: $(13, 6),\ (-13, -6),\ (19, -6),\ (-19, 6)$.

Soru 6 (UMO-2004)

$2x + 5y = xy - 1$ eşitliğini sağlayan kaç $(x,\ y)$ tam sayı ikilisi vardır?

Çözüm: $2x - xy + 5y - 10 = -11 \Rightarrow (x - 5)(y - 2) = 11 \Rightarrow$

$x - 5 = -11,\ -1,\ 1,\ 11\ (x, y) = (-6, 1),\ (4, -9),\ (6, 13),\ (16, 3);$

yani 4 adet ikili vardır.

Soru 7 (UMO-2012)

$4mn(m + n - 1) = (m^2 + 1)(n^2 + 1)$ eşitliğini sağlayan kaç (m, n) tam sayı ikilisi vardır?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

Çözüm: $(m^2+1)(n^2+1) = m^2n^2+m^2+n^2+1 > m^2n^2+2mn \Rightarrow 4m+4n-4 \geq mn+2 \Rightarrow$ $(m - 4)(n - 4) < 0$ $m \geq n$ kabul edelim. $\Rightarrow n \leq 7$ eşitliğini $\pmod 4$ te inceleyelim. m ve n tek sayı olmalıdır. Tüm durumları inceleyelim.

$n = 1$ ise, $4m^2 = 2m^2 + 2 \Rightarrow m = 1$,

$n = 3$ ise, $12m^2 + 24m = 10m^2 + 10$, çözüm yok.

$n = 5$ ise, $20m^2 + 80m = 26m^2 + 26 \Rightarrow 3m^2 - 40m + 13 = (3m - 1)(m - 13) = 0 \Rightarrow$ $m = 13$,

$n = 7$ ise, $28m^2 + 168m = 50m^2 + 50 \Rightarrow 11m^2 - 84m + 25 = 0$, çözüm yok.

Tüm çözümler $(1, 1), (5, 13), (13, 5)$.

Cevap C

Soru 8 (UMO-2012)

$x^3 - 13y^3 = 1453$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı sıralı ikililerinin sayısı aşağıdakilerden hangisine bölünemez?

a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) Hiçbiri

Çözüm: Denklemi $\pmod{13}$ te inceleyelim.

$1453 \equiv 10 \pmod{13}$ olup hiçbir sayının küpü 13 modunda 10'a denk değildir.

Cevap E

Soru 9 (UMO-1999)

x, y, z tam sayılar,

$$x - 3y + 2z = 1$$

$$2x + y - 5z = 7$$

*denklem sistemini sağlayan z aşağıdakilerden **hangisi olabilir?***

a) 3^{111} b) 4^{111} c) 5^{111} d) 6^{111} e) Hiçbiri

Çözüm:

$$x - 3y + 2z = 1$$
$$2x + y - 5z = 7$$

denklem sisteminde y'ler yok edilirse $7x - 13z = 22$ eşitliği elde edilir.

$z \equiv 1 \pmod{7}$'dir ve aynı şekilde x'ler yok edilirse $7y - 9z = 5$ eşitliğinde $z \equiv 1 \pmod{7}$'dir.

$4^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4^{111}(4^3)^{37} \equiv 1 \pmod{7}$'dir.

Cevap B

Soru 10 (UMO-1993)

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2$ denkleminin x, y tam sayı olacak şekilde kaç tane (x, y) çözüm takımı vardır?

a) Sonsuz b) 12 c) 2 d) 0 e) 3

Çözüm: $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = y^2 = 3x^2 + 6x + 5 = y^2$'dir.$3x^2 + 6x + 5 = y^2 \Rightarrow 5 \equiv y^2 \pmod{3}$ olur. Tam sayılarda, tam kare bir ifade mod 3'e göre 0 veya 1'e denk olacağından, $2 \equiv y^2 \pmod{3}$ denkliğinin tam sayılarda çözümü yoktur.

Cevap D

Soru 11 (UMO-2010)

m nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = m$ eşitliğini sağlayan (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü yoktur?

a) 16 b) 14 c) 12 d) 10 e) 8

Çözüm: $m = 16$ için $(8, 1, 6)$

$m = 14$ için $(2, 1, 2)$

$m = 12$ için $(4, 6, 6)$

$m = 10$ için $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 10 \Rightarrow x$ veya y 5 ile bölünür. Bu da $5^2|10$ demektir ki çelişki elde edilir.İkilisi de 5 ile bölünmezse $3x^2 + 4y^2 \neq 0 \pmod 5$ olur.

Cevap D

Soru 12 (UMO-2001)

m, n, k tam sayıları $221m + 247n + 323k = 2001$ eşitliğini sağlıyorsa, k'nin alabileceği 100 den büyük en küçük değeri kaçtır?

a) 124 b) 111 c) 107 d) 101 e) Hiçbiri

Çözüm:

$$\begin{cases} 221 = 13 \cdot 7 \\ 247 = 13 \cdot 9 \\ 323 = 17 \cdot 19 \\ 2001 = 3 \cdot 667 \end{cases}$$

$221 \cdot m + 247 \cdot n + 323 \cdot k = 2001$ eşitliği $13 \cdot 17m + 13 \cdot 19 \cdot n + 17 \cdot 19 \cdot k = 3 \cdot 667$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik $\pmod{13}$ e göre düzenlendiğinde

$323 \equiv -2 \pmod{13}$

$2001 \equiv -1 \pmod{13}$

$-2k \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow k \equiv 7 \pmod{13}$ O halde, $k = 13t + 7 (t \in \mathbb{Z}^+)$ dir.

$t = 8$ için, aranan durum sağlanır ve $k = 13.8 + 7 = 111$ bulunur.

Cevap B

Soru 13

$2011y^2 = 2010x + 3$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) tam sayı ikilisi vardır?

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Sonsuz çoklukta

Çözüm: $2011y^2 = 2010x + 3$ olup $y^2 \equiv 3 \pmod 5$ olduğundan $2011y^2 = 2010x + 3$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur.

$$(\text{mod } 5) \equiv \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline x & x^2 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 4 & 1 \\ \hline \end{array} \right.$$

Cevap D

Soru 14 (UMO-2001)

$2^n + 65$ *sayısının, bir tam sayının karesine eşit olmasını sağlayan en büyük* n *tam sayısı kaçtır?*

A) 2014 B) 268 C) 10 D) 4 E) Hiçbiri

Çözüm: $n \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 2^n + 65 \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow$ tamkare olamaz.

$n \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow 2^n + 65 \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow$ tamkare olamaz.

$n = 2k$ ve $2^n + 65 = x^2$ ise $(x - 2^k)(x + 2^k) = 65 = 5 \cdot 13 = 1 \cdot 65$.

- $x - 2^k = 5;\ x + 2^k = 13 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow n = 4$
- $x - 2^k = 1;\ x + 2^k = 65 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow n = 10$

Cevap C

Soru 15

$xy = 4(y^2 + x)$ *eşitliğini sağlayan kaç tane* (x, y) *tam sayı ikilisi vardır?*

a) 0 b)3 c) 7 d) 14 e) Hiçbiri

Çözüm: $xy = 4(y^2 + x) \Rightarrow 4y^2 = x(y - 4)$ olup,

$$x = \frac{4y^2}{y-4} = \frac{4y^2 - 64 + 64}{y-4} = \frac{4(y^2 - 16) + 64}{y-4} = \frac{4(y-4)(y+4)}{y-4} + \frac{64}{y-4} = 4(y+4) + \frac{64}{y-4}$$ olup

$64 = 2^6$ olduğundan 2^6 sayısının 7 tane pozitif tam sayı böleni olup 14 tanede tam sayı böleni vardır.

Cevap D

Soru 16

$2x^2+ky^2 \equiv z^2 \pmod{32}$ *denkliğinin,* x, y, z *tek tam sayılar olmak üzere, en az bir çözümünün bulunmasını sağlayan* k *tam sayılarının kümesi aşağıdakilerden hangisidir?*

a) $k : k \equiv 7 \pmod 8$ b) Hiçbiri c) $k : k \equiv 7 \pmod{16}$ d) $k : k \equiv 7 \pmod{32}$ e) $k : k \equiv 7 \pmod 4$

Çözüm: $x \in 1, 3, 5, 7, ..., 29, 31, x^2 \equiv 1, 9, 17, 25 \pmod{32}, 2x^2 \equiv 2, 18 \pmod{32}$

$2x^2 \equiv 2$ için $ky^2 \equiv k, 9k, 17k$ veya $25k \pmod{32}$ dir. $ky^2 \equiv 31, 7, 15$ veya $23 \pmod{32}$ dir.

$2x^2 \equiv 2$ için

$$2 + k \cdot y^2 \equiv z^2 \pmod{32}$$
$$2 + k \cdot y^2 \equiv 1 \Longrightarrow k = 9, 17, 25$$

$2x^2 \equiv 18$ için

$$18 + k \cdot y^2 \equiv z^2 \pmod{32}$$
$$\Longrightarrow k = 1, 9, 17, 25$$

Sonuç olarak $k \equiv 7 \pmod 8$ bulunur.

Cevap A

Soru 17

$a^2b + ab^2 = 2009201020092010$ *eşitliğini sağlayan kaç* (a, b) *tam sayı ikilisi vardır?*

a) 4 b)3 c) 1 d) 0 e) Hiçbiri

Çözüm: $a^2b+ab^2 = 2009201020092010$ ise $2009201020092010 \equiv 1 \pmod 9$ olduğuna göre, $2009201020092010 \equiv 1 \pmod 3$ olup $3 \nmid a$ ve $3 \nmid b$ dir. $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$ olup a ile b nin 3 modunda kalanları aynıdır. (Diğer durumda $3 \mid a + b$)

Durum 1: $a = 3k + 1$ ve $b = 3t + 1$ ise, $a + b = 31 + 2$ elde edilir. Bu durumda, $ab(a + b) \equiv 2 \pmod 3$ olur ve buradan çözüm gelmez.

Durum 2: $a = 3k + 2$ ve $b = 3t + 2$ ise, $a + b = 31 + 4$ elde edilir. Bu durumda, $ab(a + b) \equiv 7 \pmod 9$ olur ve buradan da çözüm gelmez.

Yani $a^2b + ab^2 = 2009201020092010$ eşitliğini sağlayan (a, b) tam sayı ikilisi yoktur.

Cevap D

Soru 18

m nin hangi değeri için, $3x^2 - 10xy - 8y^2 = m^{19}$ eşitliğini sağlayan hiçbir (x, y) tam sayı ***ikilisi yoktur?***

a) 7 b)6 c) 5 d) 4 e) 3

Çözüm: $3x^2 - 10xy - 8y^2 - m^{19} = 0$ denklemini x değişkenine göre, $2.$ dereceden bir bilinmeyenli denklem olarak çözersek,

$x_{1,2} = \dfrac{10y \pm \sqrt{\triangle}}{2 \cdot 3}$ ise $x_{1,2} = \dfrac{10y \pm \sqrt{100 + y^2 + 96y^2 + 4m^{14}}}{2 \cdot 3}$ ve

$x_{1,2} = \dfrac{10y \pm \sqrt{(14y)^2 + 4m^{19}}}{2 \cdot 3}$

elde edilir. Buna göre, $(14y)^2 + 4m^{19} = t^2$ ve $t \in Z$ olmalıdır.

$(t - 14y)(t + 14y) = 4m^{19}$ tür. $m = 4$ için

$(t - 14y)(t + 14y) = 240$ ve $y \neq 0 \pmod 3$ şayet $y \equiv 0 \pmod 3$ ise $3x^2 - 10xy - 8y^2 \equiv 0 \pmod 3$ oysa $m = 4$ için $m^{19} \equiv 1 \pmod 3$ tür.

Buna göre, $t - 14y = 2^{\alpha}$ ve $t + 14y = 2^{\beta}$ dir.

$2^{\alpha} - 2^{\beta} = 28y, \beta + \alpha = 40$ ise $\beta - \alpha$ çift olup

buradan $2^{\beta} = 2^{\alpha} \pmod 3$ ve $28y = 0 \pmod 3$ yani $y = 0 \pmod 3$ çelişki.

Cevap D

Soru 19

$3m^2n = n^3 + A$ denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki A değerlerinden hangisi için çözümü vardır?

a) 301 b) 403 c) 415 d) 427 e) 481

Çözüm:

$$301 = 7 \cdot 43 \equiv 1 \pmod 3$$
$$403 = 13 \cdot 31 \equiv 1 \pmod 3$$
$$415 = 5 \cdot 83 \equiv 1 \pmod 3$$
$$427 = 7 \cdot 61 \equiv 1 \pmod 3$$
$$481 = 13 \cdot 37 \equiv 1 \pmod 3$$

$3m^2n = n^3 + A \Rightarrow n(3m^2 - n^2) = A \Rightarrow n \mid A$. Tüm seçeneklerde

$$\begin{aligned} A \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n(3m^2 - n^2) &\equiv 1 \pmod 3 \\ -n^3 &\equiv 1 \pmod 3 \\ n^3 &\equiv -1 \pmod 3 \end{aligned}$$

olduğundan A nın $\mod 3$ te -1 olan bir çarpanı olmalıdır. Bu durumu sağlayan sadece 415 tir. $A = 415$ için $(n, m) = (5, 6)$ çözümü vardır.

Cevap C

Soru 20

a, b, c; 1 den büyük tam sayılar olmak üzere, $a! = b!c!$ denkleminin kaç ***çözümü vardır?***

a) 1 b)2 c) 6 d) 8 e) Sonsuz çoklukta

Çözüm: $b! = x$ olsun. $b! = x$ ise $(x-1)! = c!$ için $(x-1)!x = x!$ olacağından $a = x!$ olur. Örneğin, $b! = 3! = 6$ ise $c = 5!$ olduğundan $5!6 = 6! = a!$ olacaktır. O halde bu denklemi sağlayan sonsuz çoklukta (a, b, c) üçlüsü vardır.

Cevap E

Soru 21

a, b, c tam sayı olmak üzere, $x = a \pmod{14}, x = b \pmod{15}, x = c \pmod{16}$ denklik sistemini ve $0 \leq x < 2000$ koşulunu sağlayan x tam sayılarının sayısı aşağıdakilerden ***hangisi olamaz?***

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

Çözüm 1:

E.k.o.k.$(14, 15, 16) = 1680$ olduğundan $k, t \in N$ olmak üzere, $x = 1680.k + t$ formundadır. (t bu şartı sağlayan ilk doğal sayıdır.) t bulunamazsa 0 tane x, t bulunursa o zaman $k = 0$ ve duruma göre $k = 1$ için 1 veya 2 tane x değeri bulunabilir. Bu durum A, B ve C seçeneklerini mümkün kılar fakat 3 tane x değeri bulunamaz.

Çözüm 2:

a tek, c çift olursa çözüm olmaz. Yani x tam sayılarının sayısı 0 olur. E.k.o.k.$(14, 15, 16) = 1680$ olduğundan x_1, x_2 kök ise $x_2 - x_1 = 1680n$ için 1 veya 2 kök gelir. Bu da x tam sayılarının sayısının 3 olamayacağı demektir.

Cevap D

Soru 22

$x^3 + y^3 = x^2yz + xy^2z + 2$ *eşitliğini sağlayan kaç* (x, y, z) *tam sayı* ***üçlüsü vardır?***

a) 5 b)4 c) 3 d) 2 e) 1

Çözüm: $(x + y)(x^2 - xy + y^2 - xyz(x + y) - 2) = 0$ denkleminde $x + y = 0$ olamaz. Buna göre,

$(x + y)[x^2 - xy + y^2 - xyz] = 2$ olduğundan $x + y \mid 2$ olmalıdır. Yani, $x + y = k$ olsun, buradan $k = -2, -1, 1, 2$ olabilir.

1. x çift, y çift ise $(x + y)[x^2 - xy + y^2 - xyz]$ ifadesi Ç.Ç olacağından ifade 4 ün katı olur fakat $4 \nmid 2$ olduğundan çözüm gelmez.

2. x çift, y tek ise, $(x + y)[x^2 - xy + y^2 - xyz]$ ifadesi T.T olacağından ifade birden büyük tek sayı olur fakat tek sayı $4 \nmid 2$ olduğundan çözüm gelmez.

3. x tek, y çift ise, $(x + y)[x^2 - xy + y^2 - xyz]$ ifadesi T.T olacağından ifade birden büyük tek sayı olur fakat tek sayı 2 olduğundan çözüm gelmez.

4. x tek, y tek ise, $x + y \neq 1, -1$ olamaz. $x + y = 2, -2$ olabilir.
   $x + y = 2$ için, $(x + y)^2 - xy(3 + z) = 3$ denkleminden $(3, -1, -4), (-1, 3, -1), (1, 1, 0)$ çözümleri gelir.
   $x + y = -2$ için, $(x + y)^2 - xy(3 + z) = 1$ denkleminden $xy(3 + z) = 5$ denkleminden $(-1, -1, 2)$ çözümü gelir.Bu da dört tane çözüm demektir.

Cevap B

Soru 23

$x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod p$ *denkliğinin kaç* p *asal sayısı için* $0 \leq x < p$ *olmak üzere üç farklı tam* ***sayı kökü yoktur?***

a) 1 b)2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

Çözüm: $x^3 - 5x^2 - 22x + 56 \equiv 0 \pmod p$ ifadesi $x = 2$ için sıfıra eşit olduğunda çarpanlardan biri $x - 2$ dir. Buna göre ifadeyi çarpanlarına ayırdığımızda;

$x^3 - 5x^2 - 22x + 56 = (x - 2)(x - 7)(x + 4) \equiv 0 \pmod p$ elde edilir. Buradan denklemin kökleri $x \equiv 2 \pmod p$ veya $x \equiv 7 \pmod p$ veya $x \equiv -4 \pmod p$ elde edilir. Denklemin $0 \leq x < p$ olmak üzere, farklı üç tam sayı kökünün olmaması için, bu köklerden en az ikisi birbirine eşit olmalıdır.

Bu ise $p = 2, p = 5$ ve $p = 11$ için sağlanır.

Cevap C

Soru 24

$a! + b^3 = 18 + c^3$ *eşitliğini sağlayan kaç* (a, b, c) *pozitif tam sayı üçlüsü vardır?*

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Çözüm: $a = 1$ veya 2 ise $b^3 - c^3 = 17$ veya 16.

$c \geq 2$ ise $b^3 - c^3 \geq (c+1)^3 - c^3 = 3c^2 + 3c + 1 \geq 19$.

$c = 1$ içinde çözüm yoktur.

$a \geq 3$ ise $3 \mid b^3 - c^3$.

$b \not\equiv c \pmod 3$ ise $3 \nmid b^2+bc+c^2 \Rightarrow b \equiv c \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid b^2+bc+c^2 \Rightarrow 9 \mid b^3-c^3 \Rightarrow a \geq 6$.

$a \geq 7$ ise, $7 \mid 18 + c^3 - b^3 x^3 \equiv 0, 4 \pmod 7 \Rightarrow c^3 - b^3 \not\equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c^3 - b^3 = 702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13 \Rightarrow c \equiv 3 \Rightarrow c - b = 3k \Rightarrow k(3k^2 + cb) = 2 \cdot 3 \cdot 13$

Soru 25 (UMO–2014)

$mn + n + 14 = (m-1)^2$ *eşitliğini sağlayan kaç* (m, n) *tam sayı ikilisi vardır?*

a) 16 b) 12 c) 8 d) 6 e) 2

Çözüm: $mn + n + 14 = (m-1)^2$ ise $n = \dfrac{m^2 - 2m - 13}{m+1}$ ve $n = n - 3 - \dfrac{10}{m+1}$ dir. O halde $m + 1 \mid 10$ olmalıdır. Bu durumda m tane sayının 8 farklı değeri vardır. $m \in \{-1, -2, -5, -10, 1, 2, 5, 10\}$, yani 8 farklı (m, n) ikilisi vardır.

Cevap C

Soru 26 (UMO–2015)

$3(m^3 n + n^2 + 1) = m(n^3 + 9m + n)$ *denklemini sağlayan kaç farklı* (m, n) *tam sayı ikilisi vardır?*

a) 0 b)2 c) 4 d) 8 e) Sonsuz çoklukta

Çözüm: Denklem düzenlenirse,

$$mn(3m^2 - n^2 - 1) = 9m^2 - 3n^2 - 3$$

elde edilir. O halde $mn = 3$ veya $3m^2 - n^2 - 1 = 0$ olmalıdır. $mn = 3$ için $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(-3, -1)$, $(-1, 3)$ olmak üzere 4 çözüm vardır. $3(3m^2 - n^2 - 1) = 0$ ise $3m^2 - n^2 \equiv 1 \pmod 3$ ve $n^2 \equiv 2 \pmod 3$ olmalıdır. Ancak $n^2 \equiv 2 \pmod 3$ denkleminin tam sayılarda çözümü olmadığından 4 tane (m, n) ikilisi vardır.

Cevap C

Soru 27 (UMO-2014)

Aşağıdaki sayılardan hangisi x ve y tam sayılar olmak üzere, $x^2 + y^5$ biçiminde yazılamaz?

a) 59170 b) 59149 c) 59130 d) 59121 e) 59012

Çözüm: Denklemi $\pmod{11}$ de inceleyelim.

$x, y \equiv 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5 (mod 11)$ 'dir.

$x^2 \equiv -2, 0, 1, 3, 4, 5 (mod 11)$ ve $5 \equiv 0, \pm1 (mod 11)$ iken $y^5 \equiv 0, \pm1 (mod 11)$ olur. O halde $x^2 + y^5 \equiv 0, \pm1, \pm2, \pm3, 4, \pm5 (mod 11)$ olur.⇒x2+y5≡0,±1,±2,±3,4,±5(mod11) yani $x^2 + y^5$ sayısının 11 ile bölümünden kalan 7 olamaz.

Seçeneklerden $59121 = 11k + 759121 = 11k + 7$ olduğundan, istenilen biçimde yazılamayan bir sayıdır.

Cevap D

Soru 28

$m^3 - n^3 = 9^k + 123$ *eşitliğini sağlayan kaç* (m, n, k) *negatif olmayan tam sayı üçlüsü vardır?*

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) Hiçbiri

Çözüm: $9^k + 123$ sayısı her k için pozitiftir. $m = n + a$ eşitliğini denklmede yerine yazalım.

$$(n + a)^3 - n^3 = 9^k + 123$$

$3an^2 + 3na^2 + a^3 = 3^{2^k} + 3 \cdot 41$ olduğundan a sayısı 3'e tam bölünmelidir. $a = 3a_1$ için $9a_1n^2 + 27na_1^2 + 27a_1^3 = 9^k + 123$ olur. Denklemin sol taraf 9'un katı ancak sağ tarafı $9k + 6$ formundadır. Bu yüzden $k = 0$ dışında çözüm yoktur. $k = 0$ için $m^3 - n^3 = 124$ ve $m = 5$, $n = 1$ bulunur. O halde $(m, n, k) = (5, 1, 0)$ dışında çözüm yoktur.

Cevap A

Soru 29 (UMO-2005)

k sayısının aşağıdaki değerlerinden hangisi için $x^2 - y^2 = k$ eşitliğini sağlayan (x, y) tam sayı ikilisi yoktur?

a) 2005 b) 2006 c) 2007 d) 2008 e) 2009

Çözüm: k tekse $x - y = 1$, $x + y = k$ denklemlerinin $x = \dfrac{k+1}{2}$, $y = \dfrac{k-1}{2}$ gibi kökü vardır. $k = 2008$ ise, $x - y = 2$, $x + y = 1004$'ün kökü vardır.

$x - y \equiv x + y \pmod 2 \Rightarrow k \equiv (x - y)(x + y) \equiv 0, 1 \pmod 4 \Rightarrow k = 2006 \equiv 2 \pmod 4$ durumunda çözüm yoktur.

Cevap B

Soru 30 (UMO-2004)

$i, o, p, t, y \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$ olmak üzere, $top^2 = iyitop$ ise, $y - i$ kaçtır?

Çözüm: $top^2 = 1000 \cdot iyi + top \Rightarrow top(top-1) = 1000 \cdot iyi$ $(top, top-1) = 1 \Rightarrow$ bunlardan biri tektir ve 5^3'e bölünür, diğeri 2^3'e bölünür, 5'e bölünmez. $125, 375, 625, 875$ sayılarından komşusu 8'e bölünen sadece 375 ve 625'tir. $625 \cdot 624 = 390000$; $\boxed{376 \cdot 375 = 141000} \Rightarrow y - i = 3$.

Soru 31 (UMO-2005)

$xyz = 510510$ ve $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$ eşitliklerini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı üçlüsü vardır?

Çözüm: $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \Rightarrow (x, y) = (y, z) = (x, z) = 1$ $y(x^2 - z^2) + zx(z - x) + y^2(z - x) = 0 \Rightarrow (z - x)(zx + y^2 - yx - yz) = 0$ $(z - x)(z - y)(x - y) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} z = x = 1,\ y = 510510; \\ z = y = 1,\ x = 510510; \\ x = y = 1,\ z = 510510. \end{cases}$$

Yani verilen denklemleri sağlayan üç tane (x, y, z) üçlüsü vardır.

Soru 32 (PSS131.15)

$p^2 - 2q^2 = 1$ eşitliğini sağlayan tüm p, q asal sayılarını bulunuz.

Çözüm: $2q^2 = (p-1)(p+1)$ sayısı 4'e bölünür $\Rightarrow 2 \mid q \Rightarrow q = 2,\ p = 3$.

Soru 33

p asal ve n pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(1 + p)^n = 1 + pn + n^p$$

eşitliğini sağlayan kaç (p, n) sıralı ikilisi vardır?

Çözüm: $1 + np + \binom{n}{2} \cdot p^2 + \ldots + p^n = 1 + pn + n^p \Rightarrow$ $p\left[\binom{n}{2}p + \ldots + p^{n-1}\right] = n^p \Rightarrow n = pm$ ve $p^n \leq n^p \Rightarrow p^{pm} \leq (pm)^p \Rightarrow p^{m-1} \leq m \Rightarrow m \leq 2$ $m = 1 \Rightarrow \binom{p}{2} + \ldots + p^{m-2} = p^{p-2} \Rightarrow p = 2.$ $m = 2 \Rightarrow p = 2$ sağlamaz.

Soru 34 (PSS132.43)

$x^2 + y^2 = x^2y^2$ denkleminin $x = y = 0$ dışında tam sayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

Çözüm: x, y tekse, sol taraf çift, sağ taraf tek olur. $\Rightarrow$ Çelişki.

x, y'den biri tek diğeri çiftse, sol taraf tek, sağ taraf çift olur. $\Rightarrow$ Çelişki.

$\Rightarrow x = 2x_1,\ y = 2y_1 \ \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4x_1^2y_1^2 \ \Rightarrow x_1 = 2x_2,\ y_1 = 2y_2$ v.s.

$\Rightarrow$ her n için $2^n \mid x, y \ \Rightarrow x = y = 0.$

Soru 35 (UMO-1994)

Bir çiftlikteki tavşanların sayısı Mart ayında bir tam karedir. Tavşanların sayısı Nisan ayında 100 adet artarak bir tam kareden bir fazla hale gelir. Mayıs ayında, tavşan sayısı, yine 100 adetlik bir artıştan sonra yeniden tam kare olur. Tavşanların Mart ayındaki sayısı nedir?

Çözüm: $m_{art} = x^2$; $n_{isan} = m + 100 = y^2 + 1$; $s_{may\text{ß}s} = n + 100 = z^2$. $y^2 + 1 + 100 = z^2 \ \Rightarrow (z-y)(z+y) = 101 \ \Rightarrow z - y = 1;\ z + y = 101 \Rightarrow z = 51,\ y = 50 \ \Rightarrow m = y^2 + 1 - 100 = 50^2 - 100 + 1 = (50-1)^2 = 49^2.$

Soru 36 (UMO-1994)

b pozitif bir tam sayı ve $(\ )_b$ sayıların b tabanına göre gösterimi olmak üzere

$$(12)_b \cdot (15)_b \cdot (16)_b = (3146)_b$$

ise, $(12)_b + (15)_b + (16)_b$ sayısının 10 tabanındaki karşılığı nedir?

Çözüm: $(b+2)(b+5)(b+6) = 3b^3 + b^2 + 4b + 6 \ \Rightarrow b^3 - 6b^2 - 24b - 27 = 0$. $b > 6$ ve $b \mid 27 \ \Rightarrow b = 9$ sağlıyor. $\Rightarrow (12)_9 + (15)_9 + (16)_9 = 40.$

Soru 37 (UMO-1996)

x ve y tam sayı olmak üzere, $x^2 - y^2 = 1996$ eşitliğini sağlayan kaç (x, y) sıralı ikilisi vardır?

Çözüm: $(x-y)(x+y) = 1996 \ \Rightarrow x - y \equiv x + y \equiv 0(\pmod 2)$)

$\Rightarrow x - y = \pm 2,\ x + y = \pm 2 \cdot 499$ veya $x - y = \pm 499 \cdot 2,\ x + y = \pm 2$

$\Rightarrow$ dört tane çözüm vardır.

Soru 38

Kaç p asal sayısı için, $x^3 - x + 2 \equiv (x-r)^2(x-s) \pmod p$ denkliğinin tüm x tam sayıları tarafından gerçekleşmesini sağlayan r, s ***tam sayıları bulunabilir?***

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

Çözüm: $x^3 - x + 2 \equiv x^3 - (2r+s)x^2 + (r^2 + 2rs)x - r^2s \pmod p$ olduğuna göre;

1. $2r + s \equiv 0 \pmod p$

2. $r^2 + 2rs \equiv -1 \pmod p$

3. $r^2 s \equiv -2 \pmod p$ olmalıdır.

$s \equiv -2r \pmod p \Rightarrow 3r^2 \equiv 1 \pmod p$ ve $r^2 s \equiv -2 \pmod p$ denk-liğinden $2r^3 \equiv 2 \pmod p$ olur.

$p = 2 \Rightarrow x^3 - x + 2 \equiv x(x-1)(x+1) \equiv (x-1)^2(x-0) \pmod p$

$p \neq 2 \Rightarrow r^3 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 3r^3 \equiv 3 \pmod p \Rightarrow (3r^2).r \equiv 3 \pmod p$ olup,$3r^2 \equiv 1 \pmod p$ olduğundan $r \equiv 3 \pmod p$ olur.

$r \equiv 3 \pmod p \Rightarrow 3^3 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 26 \equiv 0 \pmod p$ olur ve buradan $p = 13$ elde edilir.$(x-3)^2(x-7) \equiv (x^2-6x+9)(x-7) \equiv x^3 - 13x^2 + 51x - 63 \equiv x^3 - x + 2 (\bmod 13)$

Cevap C

Soru 39 (UMO-1999)

Aşağıdakilerden hangisi, m ve n tam sayılar olmak üzere, $m^2 + 3mn - 4n^2$ şeklinde ifade edilemez?

a) 69 b) 76 c) 91 d) 94 e) Hiçbiri

Çözüm: $m^2 + 3mn - 4n^2 = (m-n)(m+4n)$. $(m+4n) - (m-n) = 5n \Rightarrow$ çarpanların farkı 5'e bölünür. $69 = 23 \cdot 3;\ 76 = 76 \cdot 1;\ 91 = 91 \cdot 1;\ 94 = 47 \cdot 2 \Rightarrow$ yanıt E şıkkıdır.

Soru 40 (UMO-2000)

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0 \\ 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0 \end{cases}$$

sistemini sağlayan kaç (x, y, z) pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?

Çözüm: $(-5)/\quad 3x^2 - 2y^2 - 4z^2 + 54 = 0$

$(3)/\quad 5x^2 - 3y^2 - 7z^2 + 74 = 0$

$- - - - - - - - - - - - - - - - -$

$y^2 - z^2 = 48$

ve $y - z \equiv y + z \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow$

1. $y - z = 2,\ y + z = 24 \Rightarrow y = 13,\ z = 11,\ x = 16$

2. $y - z = 4,\ y + z = 12 \Rightarrow y = 8,\ z = 4,\ x = \pm\sqrt{46} \Rightarrow$ çözüm değil

3. $y - z = 6,\ y + z = 8 \Rightarrow y = 7,\ z = 1,\ x = 4$

$\Rightarrow$ iki çözüm vardır.

Soru 41 (UMO-2001)

$(2a+b)(2b+a)=2^c$ *eşitliğini sağlayan kaç* (a,b,c) *pozitif tam sayı sıralı üçlüsü vardır?*

Çözüm: $2a+b=2^d$; $2b+a=2^e$. $a,\ b\geq 1\ \Rightarrow d>0,\ e>0\ \Rightarrow$

$b,\ a$ çifttir. $a=2a_1,\ b=2b_1\ \Rightarrow (2a_1+b_1)(2b_1+a_1)=2^{c-2}$.

Benzer şekilde $a_1=2a_2,\ b_1=2b_2$ v.s. her n için $2^n\mid a,\ b\ \Rightarrow$ Çelişki.

$\Rightarrow$ Çözüm yoktur.

Soru 42 (JMO1)

$2^n+12^n+2011^n$ *sayısının bir tam kare olmasını sağlayan tüm* n *pozitif tam sayılarını bulunuz.*

Çözüm: $n=1$ sağlar: $2{+}12{+}2011=45^2$. Bunu sağlayan başka bir n sayısının bulunmadığını kanıtlayalım. $n\geq 2$ olsun. n tekse $A=2^n+12^n+2011^n\equiv 3\pmod 4$, dolayısıyla A tam kare olamaz. n çiftse $A=2^n+12^n+2011^n\equiv 1+1\equiv 2\pmod 3$, dolayısıyla A tam kare olamaz.

n'nin çift olduğu durum şöyle de kanıtlanabilir: $n=2k$ olsun. $(2011^k)^2<2^{2k}+12^{2k}+2011^{2k}=4^k+144^k+2011^{2k}<1+2\cdot 2011^k+2011^{2k}=(2011^k+1)^2$. O halde A sayısı iki ardışık tam karenin arasında olduğundan tam kare olamaz.

Soru 43 (UMO-2004)

$2x+5y=xy-1$ *eşitliğini sağlayan kaç* $(x,\ y)$ *tamsayı ikilisi vardır?*

Çözüm: $2x-xy+5y-10=-11\Rightarrow(x-5)(y-2)=11\Rightarrow$

$x-5=-11,\ -1,\ 1,\ 11\ (x,y)=(-6,1),\ (4,-9),\ (6,13),\ (16,3)$;

yani 4 adet ikili vardır.

Soru 44 (UMO-2004)

n nin aşağıdaki değerlerinden hangisi için $a^2+ab-6b^2=n$ eşitliğini sağlayan $a,\ b$ tam sayıları bulunur?

a) 17 b) 19 c) 29 d) 31 e) 37

Çözüm: $(a+3b)(a-2b)=n$ asal olduğundan $a+3b=\pm n$; $a-2b=\pm 1$ olmak zorunda. Örneğin $a+3b=-n$; $a-2b=-1\ \Rightarrow 5b=-n+1$

$\Rightarrow n\equiv 1\pmod 5$. Diğer üç durumda da $n\equiv 1\pmod 5\ \Rightarrow$

Sadece $n=31$ denklemi sağlar: $(13,6),\ (-13,-6),\ (19,-6),\ (-19,6)$.

Soru 45 (UMO-1993)

$$xz - yt = 1$$
$$xt + 4yz = 3$$

denklem çiftinin x, y, z, t negatif olmayan tam sayılar olmak üzere kaç tane (x, y, z, t) çözüm takımı vardır?

Çözüm: $xt + 4yz = 3 \Rightarrow yz = 0$, $xt = 3$. $z = 0$ olursa, $yt = -1 \Rightarrow$ Çelişki. $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ $x = z = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow (x, y, z, t,) = (1, 0, 1, 3)$
$\Rightarrow$ tek çözüm.

Soru 46 (PSS134.98)

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ *denkleminin aralarında asal olan çözümlerini bulunuz.*

Çözüm: $\dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{1}{z} \Rightarrow z(x+y) = xy$. Eşitliğin sol tarafı z'ye bölünür
ve $(z, x) = (z, y) = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow x + y = \pm xy \Rightarrow y = x(\pm y - 1) \Rightarrow$
$x = \pm 1 \Rightarrow 0 = \pm 1$ veya $y = \pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Çözüm yoktur.

Soru 47 (Kangroo–2013)

x ve y tam sayıları, $x^2 - y^2 = 84$ eşitliğini sağlıyor. $x^2 + y^2$'nin kaç farklı değeri vardır?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 5 e) 6

Çözüm: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 84$ olmalıdır. O halde $x - y$ ve $x + y$ sayıları çift sayıdır.

$x - y = 2$	$x - y = 42$	$x - y = -2$	$x - y = -42$
$x + y = 42$	$x + y = 2$	$x + y = -42$	$x + y = -2$
$x = 22$	$x = 22$	$x = -22$	$x = -22$
$y = 20$	$y = -20$	$y = -20$	$y = 20$

Bu eşitliklerden $x^2 + y^2 = 20^2 + 22^2$ olur ve bir tek değeri vardır. **Cevap A**

Soru 48 (UMO-2007)

c, a ve b nin pozitif ortak katlarının en küçüğünü ve d de, ortak bölenlerinin en büyüğünü göstermek üzere, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$ eşitliğini sağlayan kaç tane (a, b) pozitif tam sayı ikilisi vardır?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

Çözüm: a ve b sayılarının en büyük ortak böleni d ise $a = dx$ ve $b = dy$ olacak şekilde aralarında asal x ve y pozitif tam sayıları vardır. O halde $c = dxy$ olur. denklemde yerine yazılırsa, $\dfrac{1}{dx} + \dfrac{1}{dy} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{dxy} = 1$ elde edilir. Buradan $d = 1 + \dfrac{x+y+1}{xy} > 1$'dir. $x = y = 1$ için $d = 4$ tür. $1 \leq x < y$ olsun. $d = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy}$ eşitliğinde $x = 1$ ve $y = 2$ için en büyük değeri alır. $x = 1$ ve $y = 2$ için $d = 3$ olur. O halde $d \leq 3$ tür. $d = 3$ için $x = 1$ ve $y = 2$ dir. $(a, b) = (3, 6)$ ve $(6, 3)$ olur. $d = 2$ için $x = 2$ ve $y = 3$ olur. $(a, b) = (4, 6)$ ve $(6, 4)$ elde edilir. Toplam 5 tane (a, b) ikilisi vardır.

Cevap B

Soru 49 (UMO-2007)

15 *den küçük kaç* p *asal sayısı için,*

$$m + n + k \equiv 0 \pmod p$$
$$mn + mk + nk \equiv 1 \pmod p$$
$$mnk \equiv 2 \pmod p$$

sistemini sağlayan (m, n, k) *tam sayı üçlüsü vardır?*

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

Çözüm: m, n, k sayıları 3. dereceden $x^3 - bx^2 + cx - d \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin kökleri olarak düşünülebilir. Vieta teoreminden $b \equiv 0 \pmod p$, $c \equiv 1 \pmod p$ ve $d \equiv 2 \pmod p$ olur. $x^3 + x - 2 = 0$ denkleminin bir kökü $x = 1$ olduğundan $x - 1$ çarpanı bulunur. Polinom bölmesi ile $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2)$ yazılabilir. $k \equiv 1 \pmod p$ alabiliriz. m, n sayıları $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod p$ denkliğinin kökleridir. Bu denkliği 4 ile genişletirsek $(2x+1)^2 \equiv -7 \pmod p$ şeklinde düzenleyebiliriz. Şimdi p ye değerler verelim.

$p = 2$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 1 \pmod 2$ olup 1 sayısı, $\mod 2$ de bir kare kalandır. (Yani çözüm vardır, bu çözümlerin $x \equiv 0, 1 \pmod 2$ olduğunu görmek zor değildir).

$p = 3$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 2 \pmod 3$ olup 2 sayısı, $\mod 3$ de bir kare kalan değildir, çözüm yoktur.

$p = 5$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 3 \pmod 5$ olup 3 sayısı, $\mod 5$ de bir kare kalan değildir, çözüm yoktur.

$p = 7$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 0 \pmod 2$ olup 0 sayısı, $\mod 7$ de bir kare kalandır. Yani çözüm vardır ve $x \equiv 3 \pmod 7$ çözümdür. $m = n = 3$ alınabilir.

$p = 11$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 4 \pmod 2$ olup 4 sayısı, $\mod 7$ de bir kare kalandır. Çözüm vardır .

$p = 13$ için $(2x+1)^2 \equiv -7 \equiv 5 \pmod 2$ olup 5 sayısı, $\mod 13$ de bir kare kalan değildir. $\mod 13$ de kare kalanlar $0, 1, 3, 4, 9, 10, 12$ dir.

Sonuç olarak $p \in \{2, 7, 11\}$ elde edilir.

Cevap B

Soru 50 (UMO-2008)

$3m^2n = n^3 + A$ *denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki* A *değerlerinden hangisi için çözümü vardır?*

a) 301 b) 403 c) 481 d) 427 e) 6

Çözüm: Öncelikle seçeneklerde verilen A değerlerinin 3 ile bölünemediğini gözlemleyelim.

$n(3m^2 - n^2) = A$ yazalım. $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ olduğundan $3m^2 - n^2 \equiv 0, 2 \pmod 3$ olur. A sayısı 3 e bölünmediğinden $3m^2 - n^2 \equiv 2 \pmod 3$ mümkündür. O halde A sayısının pozitif bölenlerinden biri $3k + 2$ formunda olmalıdır. Şimdi seçenekleri inceleyelim.

$301 = 7 \cdot 43$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 301$

$403 = 13 \cdot 31$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 403$

$415 = 5 \cdot 83$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni vardır. $n(3m^2 - n^2) = 5 \cdot 83$ eşitliğinde $3m^2 - n^2 = 83$ ve $n = 5$ için $m = 6$ bulunur.

$427 = 7 \cdot 61$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 427$

$481 = 13 \cdot 37$ olduğundan $3k + 2$ formunda böleni yoktur. $A \neq 481$

Cevap C

Soru 51 (UMO-2008)

$\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ *denkleminin pozitif tamsayılarda kaç tane* (x, y) *çözüm ikilisi vardır?*

a) 8 b) 18 c) 72 d) 2130 e) Sonsuz sayıda

Çözüm: $\sqrt{xy} - 71\sqrt{x} + 30 = 0$ denklemini $\sqrt{x}\left(71 - \sqrt{y}\right) = 30$ şeklinde yazalım. Burada hem $\sqrt{x}$, hem de $71 - \sqrt{y}$ çarpanlarının birer tam sayı olması gerekir. Aksini varsayalım, $\sqrt{x} = a\sqrt{b}$ şeklinde a, b pozitif tam sayıları bulunduğunu varsayalım. b, 1 den büyük tam kare çarpan içermeyecek şekilde olduğunu düşünebiliriz. (Böyle sayılara free-square denir). Bu durumda $71 - \sqrt{y} = c\sqrt{b}$ şeklide olması gerekir ama öyle değildir, çelişki.

O halde $\sqrt{x}\left(71 - \sqrt{y}\right) = 30$ denklemini çözmek $n(71 - m) = 30$ denklemini çözmekle eşdeğerdir. 30 un pozitif bölen sayısı kadar, yani 8 tane çözüm vardır.

Cevap A

Soru 52 (UMO-2009)

Her $0 \leq i \leq 17$ *için,* a_i *sayısı,* $-1, 0$ *veya* 1 *olmak üzere ,*

$$a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^{17}a_{17} = 2^{10}$$

eşitliğini sağlayan $(a_0, a_1, \ldots, a_{17})$ *on sekizlisi vardır?*

a) 9 b) 8 c) 7 d) 4 e) 1

Çözüm: Sorunun çözümü için 2^{10} eşitini veren toplamları kontrol etmemiz yeterlidir. Buna göre,

$$2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{12} - 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{13} - 2^{12} - 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{14} - 2^{13} - 2^{12} - 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{15} - 2^{14} - 2^{13} - 2^{12} - 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{16} - 2^{15} - 2^{14} - 2^{13} - 2^{12} - 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$
$$2^{17} - 2^{16} - 2^{15} - 2^{14} - 2^{13} - 2^{12} - 2^{11} - 2^{10} = 2^{10}$$

olacaktır. Yukarıdaki eşitliklere göre toplam 8 tane on sekizli vardır.

Soru 53 (UMO-2010)

$y^2 - x^2 = 2y + 7x + 4$ *eşitliğini sağlayan kaç* (x, y) *pozitif tam sayı ikilisi vardır?*

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) Sonsuz çoklukta

Çözüm: Eşitliğin her iki tarafını 4 ile çarpalım:

$4y^2 - 8y = 4x^2 + 28x + 16$

$(2y - 2)^2 = (2x + 7)^2 - 29$

$(2x + 7)^2 - (2y - 2)^2 = 29$

x, y pozitif olmak üzere $(2x+2y+5)(2x-2y+9) = 29 \Rightarrow 2x+2y = 24$ ve $2x-2y = -8$ ise; $x = 4, y = 8$ denklemin tek çözümüdür.

Cevap C

Soru 54 (UMO-2010)

$2011y^2 = 2010x + 3$ *eşitliğini sağlayan kaç* (x, y) *tamsayı ikilisi vardır?*

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0 e) 6

Çözüm: Eşitliği $\pmod 5$ de incelersek $y^2 \equiv 3 \pmod 5$ olur ki, bir tamkare 5 modunda 3 kalanını vermez. O halde eşitliği sağlayan tam sayılar yoktur.

Cevap D

Soru 55 (UMO-2010)

$\dfrac{x}{y+7} + \dfrac{y}{x+7} = 1$ *eşitliğini sağlayan kaç* (x, y) *tam sayı ikilisi vardır?*

a) 18 b) 17 c) 15 d) 14 e) 11

Çözüm: İfadeyi x' e bağlı ikinci dereceden denklem olarak düzenlersek $x^2 - yx + y^2 - 49 = 0$ olur. Tam sayı çözümler için denklemin diskriminantının tamkare olmasını sağlayan y değerlerini bulmalıyız.

$$\Delta = 14^2 - 3y^2 = k^2 \Rightarrow 3y^2 = (14 - k)(14 + k)$$

$p, q \in \mathbb{Z}$ ve $y^2 = p \cdot q$ için $3p + q = 28$ olur. y^2 pozitif olduğundan p,q sayıları aynı işaretlidir. Bu halde sadece pozitif durumu incelemek yeterlidir.

Çarpımları tamkare olan (p, q) ikililerini bulalım. $(p, q) = \{(9, 1), (4, 16), (1, 25), (0, 28)\}$. Buradan bulunan y değerlerinin kümesi $y = \{-8, -5, -3, 0, 3, 5, 7, 8\}$ dir.

Kümedeki 0 dışında ki her y değeri için iki tane x değeri bulunabilmektedir. Yani toplamda 15 tane (x, y) tamsayı ikilisi bulunur.

Bu değerler ; $(-5, -8)$, $(-3, -8)$, $(-8, -5)$, $(3, -5)$, $(-8, -3)$, $(5, -3)$, $(7, 0)$, $(-5, 3)$, $(8, 3)$, $(-3, 5)$, $(8, 5)$, $(0, 7)$, $(7, 7)$, $(3, 8)$, $(5, 8)$.

Cevap C

Soru 56 (UMO-2011)

m *nin hangi değeri için,* $3x^2 - 10xy - 8y^2 = m^{19}$ *eşitliğini sağlayan hiç bir* (x, y) *tam sayı ikilisi yoktur?*

a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

Çözüm: Denklemi $(3x + 2y)(x - 4y) = m^{19}$ şeklinde çarpanlara ayıralım. Bir $0 \leq a \leq 19$ tam sayısı için $3x + 2y = m^a$ ve $x - 4y = m^{19-a}$ olmalıdır. Bu denklemlerden

$$x = \frac{2m^a + m^{19-a}}{7} \ldots (1)$$

ve

$$y = \frac{5m^a - m^{19-a}}{14} \dots (2)$$

olur. (1) ve (2) eşitliklerini

$$2m^a + m^{19-a} \equiv 0 \pmod 7 \dots (3)$$

ve

$$y = 5m^a - m^{19-a} \equiv 0 \pmod{14} \dots (4)$$

biçiminde yazalım. Şimdi seçenekleri deneyelim:

$m = 7$ ve $a = 1$ için (3), (4) denkliklerinin sağlandığı açıktır. Yani denklemin çözümü vardır.

$m = 6$ için (3) denkliği $2 + 6^{19-2a} \equiv 0 \pmod 7$ olur. Ancak $19 - 2a$ tek sayı ve olduğundan $6 \equiv -1 \pmod 7$ olduğundan $2 + 6^{19-2a} \equiv 1 \pmod 7$ çelişkisi elde edilir. $m = 6$ için denklemin çözümü yoktur.

Cevabı bulduk ancak diğer seçenekler de kontrol amaçlı denenebilir.

$m = 3$ için çözüm olduğunu gösterelim. (3) denkliği $2 + 3^{19-2a} \equiv 0 \pmod 7$ şekline gelir. $3^{19-2a} \equiv 5 \pmod 7$ olmalıdır. $3^5 \equiv 5 \pmod 7$ olduğundan $19 - 2a = 5$ seçersek $a = 7$ tam sayısı bulunabilir. Bu değer için (4) denkliği de sağlandığından, $m = 3$ için çözüm vardır.

Cevap B

Soru 57 (UMO-2012)

$x^3 + y^3 = x^2yz + xy^2z + 2$ *eşitliğini sağlayan kaç* (x, y, z) *tam sayı üçlüsü vardır?*

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e)5

Çözüm: Verilen ifadeyi aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

$$(x + y)(x^2 + y^2 - xy) = xyz(x + y) + 2 \Rightarrow (x + y)((x + y)^2xy(z - 3)) = 2$$

$x + y = \{1, -1, 2, -2\}$ değerlerini alabilir.

$x + y = 1 \Rightarrow xy(z - 3) = 1$ çözüm yoktur.

$x + y = -1 \Rightarrow xy(z - 3) = -3$ çözüm yoktur.

$x + y = 2 \Rightarrow xy(z - 3) = -3$ olup $(3, -1, 4)$, $(-1, 3, 4)$, $(1, 1, 0)$ üç çözüm vardır.

$x + y = -2 \Rightarrow xy(z - 3) = -5$ olup $(-1, -1, -2)$ tek çözümü vardır.

Buna göre toplam çözüm sayısı 4 tür.

Cevap B

Soru 58

$a! + b^3 = 18 + c^3$ *eşitliğini sağlayan kaç* (a, b, c) *pozitif tam sayı uçlüsü vardır?*

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

Çözüm: $a = 1$ veya 2 ise $b^3 - c^3 = 17$ veya 16 . $c \geq 2$ ise $b^3 - c^3 \geq (c+1)^3 - c^3 = 3c^2 + 3c + 1 \geq 19$. $c = 1$ içinde çözüm yoktur. $a \geq 3$ ise $3/b^3 - c^3$. $b \not\equiv c \mod 3$ ise $3 \nmid b^2 + bc + c^2 \Rightarrow b \equiv c \mod 3 \Rightarrow 3/b^2 + bc + c^2 \Rightarrow 9/b^3 - c^3 \Rightarrow a \geq 6$. $a \geq 7$ ise, $7/18 + c^3 - b^3$
$x^3 \equiv 0, 4 \mod 7 \Rightarrow c^3 - b^3 \not\equiv 3 \mod 7 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c^3 - b^3 = 702 = 2 \cdot 3^3 \cdot 13 \Rightarrow c \equiv 3 \Rightarrow c - b = 3k \Rightarrow k(3k^2 + cb) = 2 \cdot 3 \cdot 13$.

Soru 59 (INMO)

$(xy-7)^2 = x^2+y^2$ *denklemini sağlayan tüm negatif olmayan* (x, y) *tam sayı ikililerini bulunuz.*

Çözüm: Verilen denklemi düzenlersek $(xy-6)^2+13 = (x+y)^2$ veya $(xy-6)^2-(x+y)^2 = -13$ denklemlerini elde ederiz. İki kare farkı biçiminde olan ifadeyi düzenlersek $[xy - 6 - (x + y)][xy - 6 + (x + y)] = -13$ olur. 13 asal bir sayı olduğundan

$$\begin{cases} xy - 6 - (x+y) = -1 \\ xy - 6 + (x+y) = 13 \end{cases} ; \quad \begin{cases} xy - 6 - (x+y) = -13 \\ xy - 6 + (x+y) = 1 \end{cases}$$

sistemleri elde edilir. Bu sistemler de

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 6 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 0 \end{cases}$$

sistemlerine denktir. En son çıkan denklemleri çözersek $(3, 4), (4, 3), (0, 7), (7, 0)$ elde edilir.

Soru 60 (POMO)

$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1$ *denklemini sağlayan tüm negatif* (x, y) *tam sayı ikililerini bulunuz.*

Çözüm: $x = u + 1, y = v + 1$ ve $u, v \in \mathbb{Z}$ olarak alalım. O zaman denklem $(u + 1)^2v + (v + 1)^2u = 1$ ve buradan da $uv(u + v) + 4uv + (u + v) = 1$ olur. Son denklem düzenlenerek $uv(u + v + 4) + (u + v + 4) = 5$ ve buradan da $(u + v + 4)(uv + 1) = 5$ elde edilir. 5 asal bir sayı olduğundan $u + v$ ve uv değerleri aşağıda verilen dört denklem sistemini sağlamalıdır.

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u + v = -9 \\ uv = -2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u + v = -3 \\ uv = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u + v = -5 \\ uv = -6 \end{cases}$$

Ancak çözümleme yapılırsa sadece birinci ve dördüncü sistemin tam sayı çözümlerinin olduğu görülür. Bu çözümler $(0,1),(1,0),(-6,1),(1,-6)$ olur. Demek ki $x=u+1, y=v+1$ ise $(x,y)=(1,2),(-5,2),(2,1),(2,-5)$ olmalıdır.

Soru 61 (ROMO)
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{5}$ *denklemini* (x,y,z) *tam sayı üçlüleri için çözünüz.*

Çözüm:

- Eğer $x=2$ ise, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$ ve $y\in\{11,12,...,20\}$ olur. Buradan $z=10+\frac{100}{y-10}$ ve $(y-10)\mid 100$ elde edilir. Demek ki çözümler,

$$(2,11,110),(2,12,60),(2,14,35),(2,15,30),(2,20,20)$$

  olarak bulunur.

- Eğer $x=3$ ise, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$ ve $y\in\{3,4,5,6,7\}$ bulunur. Buradan da çözümler $(3,4,60),(3,5,15),(3,6,10)$ şeklinde elde edilir.

- Eğer $x=4$ ise, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{20}$ ve $y\in\{4,5\}$ bulunur. Buradan çözüm $(4,4,10)$ olur.

- Eğer $x=5$ ise, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5}$ ve $y=z=5$ olur. $(5,5,5)$

Soru 62 (CAMO)

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y \qquad (1)$$
$$\frac{4y^2}{1+4y^2}=z \qquad (2)$$
$$\frac{4z^2}{1+4z^2}=x \qquad (3)$$

denklem sisteminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $x^2\geq 0$ olduğundan $\frac{4x^2}{1+4x^2}\geq 0$ ve $y\geq 0$ olur. Benzer biçimde $x\geq 0$ ve $z\geq 0$ durumları da elde edilir. Buna göre (1) ve (2) 'den

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}\geq\frac{4y^2}{1+4y^2}$$

yazılabilir. $1+4x^2>0$ olduğundan içler dışlar çarpımı yapılabilir.

$$4x^2(1+y^2) \geq 4y^2(1+4x^2) \qquad \text{ise} \qquad x^2 \geq y^2$$

olur. Demek ki $x \geq y \geq z$ durumu vardır. $x \geq y$,(1) ve (3)'den

$$4z^2(1+z^2) \geq 4x^2(1+4x^2) \qquad \text{ve} \qquad z \geq x$$

olur. Yani, $z \geq x \geq y \geq z$ olur ki bu ancak $x = y = z$ durumunda mümkündür. $\dfrac{4x^2}{1+4x^2} = x$ denklemi $x = 0$ için sağlanır. Çözümlerden birisi $(0,0,0)$ dır. Diğer çözümün ise $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olduğunu görmek zor değildir. Buna göre denklem sisteminin tam sayılarda tek çözümü vardır.

Soru 63 (RUMO)

$p^3 - q^5 = (p+q)^2$ *eşitliğini sağlayan tüm* (p, q) *asal çiftlerini bulunuz.*

Çözüm: Varsayalım p ve q sayılarından herhangi biri 3'e eşit olsun. Eğer öyleyse,

$$p \equiv 1 \pmod 3 \qquad \text{veya} \qquad p \equiv 2 \pmod 3$$

veya

$$q \equiv 1 \pmod 3 \qquad \text{veya} \qquad p \equiv 2 \pmod 3$$

olur. Eğer $p \equiv q \pmod 3$ ise sol kısım 3 ile bölünebilir, ama bu sefer sağ kısım bölünemez. Eğer $p \neq q \pmod 3$ ise sağ kısım 3 ile bölünebilir, ama bu sefer sol kısım bölünemez. Eğer $p = 3$ ise, $q^5 < 27$ olur ki bu durum imkansızdır. Eğer $q = 3$ ise, $p^3 - 243 = (p+3)^2$ olur ki burada tek çözüm $p = 7$ durumudur. Demek ki tek çözüm $(7, 3)$ ikilisidir.

Soru 64 (BALMO)

$x^5 - y^2 = 4$ *denkleminin tam sayılarda çözümünün olmadığını gösteriniz.*

Çözüm: Denkleme $\mathrm{mod}11$ altında bakalım. $(x^5)^2 = x^{10} \equiv 0$ veya $1 \pmod{11}$ olduğundan $x^5 \equiv -1, 0$ veya $1 \pmod{11}$ durumu vardır. Demek ki $x^5 - 4 \equiv 6, 7$ veya $8 \pmod{11}$ olacaktır. Ancak bir tam karenin $\pmod{11}$'deki kalanlar kümesi $0, 1, 3, 4, 5, 9$ elemanlarından oluşur. Dolayısıyla verilen denklemin tam sayılarda bir çözümü yoktur.

Soru 65 (GEMO)

$$\begin{cases} p + 1 = 2x^2 \\ p^2 + 1 = 2y^2 \end{cases}$$

sisteminin (x, y) *tam sayı çözümleri olmasını sağlayan tüm* p *asallarını bulunuz.*

Çözüm: Genelliğini kaybetmeden varsayalım $x, y \geq 0$ olsun. Ayrıca $p + 1 = 2x^2$ çift bir ifade olduğuna göre $p \neq 2$ olmalıdır. $2x^2 \equiv 1 \equiv 2y^2 \pmod p$ olduğundan $x \equiv \pm y \pmod p$ olur. Çünkü p tek sayıdır. $x < y < p$ olduğundan $x + y = p$ olur. Buna göre $p^2 + 1 = 2(p - x)^2 = 2p^2 - 4px + p + 1$ olur. Demek ki $p = 4x - 1, 2x^2 = 4x$ ise $x = 0$ veya 2 ve $p = -1$ veya 7 olur. p asal sayı olduğundan tabi ki 7 olmalıdır. $p = 7$ ise $(x, y) = (2, 5)$ olur.

Soru 66 (23.IMO)

$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ denkleminde eğer n bir pozitif tam sayı ise denklemin (x, y) tam sayı ikililerinin olacağını ve bu şekilde en az elemanlı çözüm kümesinin 3 elemanlı olduğu gösteriniz. Ayrıca $n = 2891$ için bir çözüm bulmaya çalışınız.

Çözüm: Tam küp açılımına tamamlayarak,
$x^3 - 3xy^2 + y^3 = 2x^3 - 3x^2y - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3$
$= 2x^3 - 3x^2y + (y - x)^3$
$= (y - x)^3 - 3(y - x)(-x)^2 + (-x)^3$
olur. Buradan, eğer (x, y) ikilisi bir çözüm ise $(y - x, -x)$ ikilisi de bir çözümdür. İki çözüm birbirinden farklıdır öyle ki $y - x = x$ ve $-x = y$ olduğunda $x = y = 0$ olur.
Benzer biçimde,

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (-y)^3 - 3(-y)(x - y)^2 + (x - y)^3$$

ise $(-y, x - y)$ denklemin üçüncü çözümüdür. Bu iki dönüşümü problemin ikinci kısmının çözümü için kullanacağız.
Varsayalım (x, y) bir çözüm olsun. 2891 sayısı 3 ile bölünemediğine göre $x^3 + y^3$ de 3 ile bölünemez. Demek ki ya x ve y mod 3'de 0 haricinde aynı kalanı verecekler veya x ve y'den biri 3 ile bölünecektir. Bu iki durumda da $-x, y, x - y$ sayılarından biri 3 ile bölünebilir ve yukarıdaki dönüşümleri kullanarak y sayısı 3'ün bir katıdır diyebiliriz. Buna göre x^3 sayısı $2891 \pmod 9$'a denk olacaktır. Ancak bu durum imkansızdır. Çünkü $2891 \equiv 2 \pmod 9$'dur ve kübik residüler $\pmod 9$'da $0, 1$ ve 8 dir.

Soru 67 (AIME 1999)

$n^2 - 19n + 99$ sayısı tam kare olacak şekilde tüm n pozitif tam sayılarının toplamını bulunuz.

Çözüm: $m \in Z$ için, $n^2 - 19n + 99 = m^2$ olsun. Buna göre,

$$n^2 - 19n + 99 - m^2 = 0$$

denkleminden,

$$n_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 4(99 - m^2)}}{2}$$

olur. Bu ifadenin bir tam sayı olması $k \in Z$ için,

$$361 - 4(99 - m^2) = 4m^2 - 35 = k^2$$

durumunda mümkündür. Buradan, $(2m - k)(2m + k) = 35$ olduğundan,

$$\begin{cases} 2m - k = 1 \\ 2m + k = 35 \end{cases} \text{veya} \begin{cases} 2m - k = 5 \\ 2m + k = 7 \end{cases}$$

denklem sistemleri elde edilir. Birinci denklemden $k = 17$, ikinci denklemden de $k = 1$ bulunur. Böylece,$n \in \{1, 18, 10, 9\}$ olabilir.

Soru 68 (250 Problem)

$$x^2 - 2y^2 + 8z = 3$$

denkleminin pozitif tam sayı köklerinin bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm: Denklemi $x^2 = 2y^2 - 8z + 3$ şeklinde yazalım. $y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8 \Rightarrow 2y^2 - 8z + 3 \equiv 3, 5 \pmod 8$.

$x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \not\equiv (2y^2 - 8z + 3) \pmod 8$

Soru 69 (250 Problem)

$$4xy - x - y = z^2$$

denkleminin pozitif tam sayı köklerinin bulunmadığını gösteriniz.

Çözüm: $4xy - x - y = z^2 \Rightarrow 16xy - 4x - 4y + 1 = 4z^2 + 1 \Rightarrow (4x - 1)(4y - 1) = (2z)^2 + 1 . x > 0 \Rightarrow 4x - 1$ sayısının $p \equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere bir p asal böleni var $\Rightarrow$ $(2z)^2 \equiv -1 \pmod p \Rightarrow (2z)^4 \equiv 1 \pmod p; (2z)^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow (2z)^{(4,p-1)} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow (2z)^2 \equiv 1 \pmod p \Rightarrow$ çelişki.

Soru 70 (Problem Solving Strategies)

$$y^2 = x^3 + 7$$

denkleminin tam sayılarla çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

Çözüm: $y^2+1=x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$ x çiftse $y^2\equiv 7 \pmod 8 \Rightarrow$ olmaz $\Rightarrow x$ tek $\Rightarrow x^2-2x+4\equiv(x-1)^2+3\equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow$ bu sayının , $p\equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere bir p asal böleni var. $\Rightarrow y^2\equiv -1 \pmod p \Rightarrow$

Soru 71 (15)

$$p^2-2q^2=1$$

eşitliğini sağlayan tüm p,q asal sayılarını bulunuz.

Çözüm: $q=3\Rightarrow p^2=19\Rightarrow$ Çelişi $q\neq 3\Rightarrow q^2\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow p^2\equiv 2q^2+1\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow p=3\Rightarrow q=2\Rightarrow$ tek Çözüm : (3,2)

Soru 72 (Problem Solving Strategies)

$$x^2+y^2=x^2y^2$$

denkleminin $x=y=0$ dışında tam sayı çözümünün bulunmadığını kanıtlayınız.

1.Çözüm. $x^2y^2-x^2-y^2+1=1\Rightarrow(x^2-1)(y^2-1)=1\Rightarrow x=y=0.$

2.Çözüm. (x,y) gibi bir çözüm varsa, ikisi de çift olmak zorunda $\Rightarrow x=2x_1, y=2y_1\Rightarrow 4x_1^2+4x_2^2=16x_1^2x_2^2\Rightarrow x_1^2+y_1^2=4x_1^2x_2^2$. x_1,y_1 ikisi de tek olursa $x_1^2+y_1^2\equiv 2\neq 0\equiv 4x_1^2x_2^2 \pmod 4 \Rightarrow$ ikisi de çifttir. $x_1=2x_2, y_1=2y_2\Rightarrow$ sonsuz devam eder $\Rightarrow x=y=0.$

Soru 73 (Problem Solving Strategies)

$$x^2-3y^2=17$$

denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $x^2-3y^2=17\Rightarrow x^2\equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow$ olamaz.

Soru 74 (Problem Solving Strategies)

$$2xy+3y^2=24$$

denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm: $y(2x+3y)=24\Rightarrow y\mid 24\Rightarrow$

$(x,y)=(17,-21);(7,-6);(3,-4);(-3,-2);(3,2);(-3,4);(-7,6);(-17,12).$

Soru 75 (Problem Solving Strategies)

$$x + y = x^2 - xy + y^2$$

denkleminin tüm tam sayı çözümlerini bulunuz.

Çözüm: Denklemi 2 ile çarpalım. $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$ elde edilir. $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2\ (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ olur. Buradan tüm çözümler; $(x, y) = (0, 0); (1, 0); (0, 1); (2, 1); (2, 1); (2, 2)$. şeklindedir.

KAYNAKÇA

1. Alizade R., *Ders Notları*, Yaşar Üniversitesi, İzmir 2013.

2. Andreescu, T. and Andrica, D., *Quadratic Diophantine Equations*, 2015.

3. Andreescu, T. and Andrica, D. and Cucurezeanu, I., *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach*, Birkhäuser Boston.

4. Andreescu, T. and Andrica, D. and Feng, Z., *104 Number Theory Problems: from the Training of the USA IMO Team*, 2007.

5. Çallıalp F., *Sayıların Teorisi*, Birsen Yayınevi, 2009.

6. Darling D., *The Universal Book of Mathematics: From Abracadabra to Zeno's Paradoxes*, John Wiley and Sons, 2004.

7. Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer New York 1999.

8. Erdoğan M. and Yılmaz G., *Çözümlü Problemlerle Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi*, Beykent Üniversitesi Yayınları, 2008.

9. Long, C.T., *Elementary Introduction to Number Theory*, Waveland Press, Incorporated 1995.

10. Özdemir M., *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 3, Sayılar Teorisi*, Altın Nokta Yayıncılık, 2007.

11. Sierpinski, W., *Elementary Theory of Numbers: Second English Edition (edited by A. Schinzel)*, 1988.

12. Sierpinski, W., *250 problems in elementary number theory*, American Elsevier Pub. Co. 1970.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Can GÜLLÜ 01.01.1984 tarihinde Hatay/ Dörtyol'da doğdu, ilkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Hatay Erzin'de tamamladı. Cumhuriyet Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2007 yılında mezun olduktan sonra İzmir Konak Rakım Erkutlu ilköğretim okuluna atandı. Daha sonra Buca Atatürk Ortaokulunda çalıştı ve halen de Karşıyaka Yamaç Ortaokulunda çalışmaya devam etmektedir. Palme Yayınları ve Altın Nokta yayınlarından ilkokul, ortaokul ve lise öğrencilerine yönelik kitapları bulunmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.