YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STURM LIOUVILLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE SALINIM TEORİSİ

HANDE AKŞEHİRLİ

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. AHMET YANTIR

MATEMATİK YÜKSEK LİSANS

SUNUM TARİHİ: 10.01.2018

BORNOVA / İZMİR
OCAK 2018

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri: **İmza:**

Doç. Dr. Ahmet YANTIR Yaşar Üniversitesi	....
Doç. Dr. Serap TOPAL Ege Üniversitesi	....
Yrd. Doç. Dr. Refet POLAT Yaşar Üniversitesi	....

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

STURM LIOUVILLE

DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE SALINIM TEORİSİ

AKŞEHİRLİ, Hande

Yüksek Lisans Matematik

Danışman: Doç. Dr. Ahmet YANTIR

OCAK 2018

Bu tezde, ikinci mertebeden Sturm-Liouville diferansiyel denklemi için salınım teorisi ele alınmıştır. Diferansiyel denklemler için varlık teorisi ve temel formlar kısaca özetlenmiş ve Sturm-Liouville karşılaştırma teoremleri çalışılmıştır. Ayrıca bir Sturm-Liouville denklemini doğrusal olmayan bir denklem sistemine dönüştüren Prüfer dönüşümü de verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Salınım Teorisi, Sturm-Liouville Diferansiyel Denklemi, Prüfer Dönüşümü, Disconjugacy.

ABSTRACT

STURM LIOUVILLE

DIFFERENTIAL EQUATION AND OSCILLATION THEORY

AKŞEHİRLİ, Hande

Msc, Mathematics

Advisor: Doç. Dr. Ahmet YANTIR

January, 2018

In this thesis, we study oscillation of second order Sturm-Liouville differential equations. The existence and fundamental forms of differential equations are briefly intoduced and the comparison theorems of Sturm-Liouville differential equations are studied. Also the Prüfer substitution metlod which transforms Sturm-Liouville differential equation into a system of differential equations is examined.

Keywords: Oscillation Theory, Sturm-Liouville Differential Equation, Prüfer Substitution, Disconjugacy.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamın gerçekleşmesinde, bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda çekinmeden yardım alabildiğim, mesleki hayatım boyunca verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Ahmet YANTIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca engin bilgilerini bizlerle paylaşan Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ve son olarak, her zaman dağ gibi arkamda duran canım aileme ne kadar teşekkür etsem azdır. İyi ki varsınız.

Hande AKŞEHİRLİ

İzmir, 2018

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Sturm Lıouvılle Diferansiyel Denklemleri Ve Salınım Teorisi" adlı çalışmanın tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Hande AKŞEHİRLİ

İMZA

Hande

....

21 Ocak 2018

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGE VE KISALTMALAR

SL	Sturm Liouville
R^n	n boyutlu reel sayı
$[a,b]$	a,b kapalı aralığı
(a,b)	a,b açık aralığı
f	Skaler bir fonksiyon
W	Wronskian Diferansiyel Denklem
$L(u)$	Diferansiyel Operatör
$L^*(v)$	Diferansiyel Operatör Eşleniği
max	Maksimum eleman
Q	Tanımlı Dikdörtgen Bölge
$L(y)$	İkinci Mertebeden Lineer Homojen Diferansiyel Denklem
$C^2(I)$	İkinci Mertebeden Sürekli I aralığı
$C[a,b]$	$[a,b]$ sürekli fonksiyon uzayı
$\frac{dy}{dx}$	y fonksiyonunun x'e göre türev
$Q(u)$	Kuadratik Form
$\frac{d^2y}{dx^2}$	İkinci Mertebeden x'e göre türev

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Sturm Liouville teorisi, Jacques Charles François Sturm (1803-1855) ve Joseph Liouville (1809-1882) adlı iki matematikçinin çalışmalarından meydana gelmiştir. Zetl bu alanda yapılan çalışmaları bir kitapta toplamıştır. (Zetl, 2005)

İkinci mertebeden doğrusal Sturm-Liouville (SL) denklemi

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dy}{dt}\right] + q(t)y = -\lambda w(t)y \qquad (1)$$

biçiminde ifade edilmiştir. Burada y, bağımsız değişken olan t'in bir fonksiyonudur.

Denklemde $p(t), q(t)$ ve $w(t)$ katsayı fonksiyonları sıfırdan büyük olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla tüm katsayılar sonlu kapalı aralık $[a, b]$ de sürekli olup, p'nin sürekli türevi vardır. Yani $q, w \in C[a, b]$ ve $p \in C'[a, b]$ dir.

Eğer $y \in C^2[a, b]$ fonksiyonu (a, b) açık aralığının her noktasında (1) denklemini sağlarsa, bu fonksiyona (1) SL denkleminin bir çözümü denir. Eğer (1) denklemi olarak a ve b sınır noktalarında belli koşullar ile verilirse bu denkleme Sturm-Lioville Sınır Değer Problemi denir. y fonksiyonu, (1) denklemi ile beraber sınır koşullarını da sağlarsa SL Sınır Değer probleminin çözümüdür denir.

Sturm-Liouville denklemi özdeğer problemi olarak da bilinir. (1) denklemindeki λ değeri denkleme karşılık gelen doğrusal operatörün özdeğerleridir. Bu λ değerlerine karşılık gelen çözümler ise bu problemin öz-fonksiyonlarıdır.

Bu tezde Sturm karşılaştırma teoremi ve uygulamaları çalışılmıştır. İkinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemler için Sturm Karşılaştırma Teoremi, salınımlılık, disconjugacy gibi kavramlar detaylıca incelenmiştir.

Sturm karşılaştırma teoremi Fransız matematikçi Sturm tarafından ifade edilmiştir. Bu teoremde ikinci mertebeden doğrusal denklemin katsayıları arasındaki ilişkiler kullanılarak çözümleri bilinen bir denklem yardımıyla diğer diferansiyel denklemin çözümleri hakkında bilgiye sahip olmak mümkündür. Sturm karşılaştırma teoreminde, diferansiyel denkleminin herhangi bir aşikar olmayan hiçbir çözümünün birden fazla sıfıra sahip olamayacağını da göstermektedir. Ayrıca iki sıfırı arasında en az bir sıfıra sahip olduğu da anlatılmıştır.

İkinci mertebeden lineer denklemler için Sturm teorisine de yer verilmiştir. Lineer homojen diferansiyel denklemini Sturm teorisine göre tek bir çözüme sahip olup aşikar çözümün her kökünün basit olduğu yansıtılmaktadır.

Bu tez aşağıda sunulduğu şekliyle planlanmıştır.

- İkinci bölümde tezin geri kalan kısmı için gerekli temel tanım ve teoremler sunulmuştur. Varlık teklik teoremleri, diferansiyel denklemler için temel formlar verilmiştir.
- Üçüncü bölüm tezin ana kısmıdır ve Sturm-Lioville diferansiyel denklemi ve salınım teorisi arasındaki ilişkiler incelenmiş, Sturm karşılaştırma teoremi üzerinde durulmuştur.
- Dördüncü bölümde ise Sturm Lioville denklemini bir denklem sistemine dönüştüren Prüfer dönüşümü üzerinde durulmuştur.

Son olarak Sonuç bölümünde, tezde ele alınan konular kısaca özetlenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, okuyucunun tezi kolaylıkla takip edebilmesi için tez içerisinde geçen temel tanım ve teoremler listelenmiştir. Bu tanım ve teoremler diferansiyel denklem teorisi içeren bir çok kaynakta bulunabilir. Biz bu tezde (Cole (1968), Erkip (1992), Hille (1969), Leighton (1970), (Hartman (1964))) kaynaklarını kullandık.

2.1.Varlık Teklik Teoremleri

Diferansiyel denklemler teorisinin en önemli unsurlarından biri varlık teklik teoremleridir. Literatürde varlık teklik teoremleri sıklıkla çalışılmış ve halen de çalışılmaya devam etmektedir. Bu bölümde Picard-Lindelöff (Cole (1968), Hille (1969)) varlık teklik teoremi ve öncesinde de gerekli tanımlar ifade edilmiştir.

Tanım 2.1.1. $\forall(x,Y)\,,(x,\bar{Y}) \in Q$ için,

$$\left\|F(x,Y) - F(x,\overline{Y})\right\| \leq M\|Y - \bar{Y}\| \tag{2.1.1}$$

şeklinde bir eşitsizliği sağlayan $F: R^{n+1} \to R^n$ fonksiyonuna, Q bölgesinde Y ye göre *Lipschitz* şartını sağlıyor denir. Burada M sayısına *Lipschitz* sabiti denir. Norm olarak, Öklid norm kullanılabileceği gibi çalışılan uzaya göre değişen başka normlar da kullanılabilir.

Teorem 2.1.1. (Picard-Lindelöf Teoremi) a, b pozitif gerçel sayılar olmak üzere $F(t,Y)$ fonksiyonunun,

$$A = \{(t,Y): t_0 \leq t \leq t_0 + a, \|Y - Y_0\| \leq b\}$$

üzerinde sürekli olduğunu ve A dikdörtgeni üzerinde (2.1.1) *Lipschitz* şartını sağladığını kabul edelim. Ayrıca,

$$K = max_{(t,Y)\in A}\|F(t,Y)\| \quad , \quad \delta = \min\{a, b\,/\,K\}$$

olsun.

Bu durumda

$$Y = F(t,Y),\; Y(t_0) = Y_0$$

başlangıç değer problemi $t_0 \le t \le t_0 + \delta$ aralığında bir tek $Y(t)$ çözümüne sahiptir. (Cole (1968), Rao, (1980))

Teorem 2.1.2. $F(t,Y)$ ve $\frac{\partial F}{\partial Y_i}$ $i = (1,2,\dots,n)$ fonksiyonlarının $(n+1)$ boyutlu Öklid uzayının bir A alt kümesinde sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$Y'(t) = F(t,Y)$$

$$Y(t_0) = Y_0$$

başlangıç değer probleminin A alt kümesinde çözümü vardır ve tektir.

Şimdi $i,j = 1,2,\dots,n$ indisleri için $a_{i,j}(t)$ ve $b_i(t)$ fonksiyonları verilen bir $I \subset R$ aralığı üzerinde sürekli ve

$$Y(t) = (\; y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t) \;)$$

bilinmeyen n boyutlu bir vektör olmak üzere birinci basamaktan doğrusal homojen olmayan

$$Y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(t) y_j(t) + b_i(t), \quad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (2.1.2)$$

sistemini gözönüne alalım.

$n \times n$ biçimindeki $(\, a_{i,j}(t) \,)$ matrisini $A(t)$ ve $B(t)$ vektörünü $b_i(t) = (\, b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t) \,)$ şeklinde ifade edersek, (2.1.2) doğrusal sistemi,

$$Y' = A(t)Y + B(t) \qquad (2.1.3)$$

biçiminde bir matris diferansiyel denklem olarak yazılabilir. Buradan sistem doğrusal olduğunda $Y' = F(t,Y),\; Y(t_0) = Y_0$ deki F, $F(t,Y) = A(t)Y + B(t)$ şeklindedir.

(2.1.3) denklemindeki $B(t) \equiv 0$ olduğunda denklem homojendir. Bunun aksi mümkün olduğunda ise homojen olmayan matris diferansiyel denklem adını alır. Buna göre homojen matris diferansiyel denklemi,

$$Y' = A(t)Y \tag{2.1.4}$$

şeklindedir.

Herhangi bir n. mertebe doğrusal diferansiyel denklemi 1. mertebeden $n \times n$ doğrusal denklem sistemi şeklinde yazmak mümkündür. f skaler bir fonksiyon olmak üzere n. mertebeden,

$$f^{(n)} + a_1(t)f^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)f = b(t)$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y_1 = f$$

$$y_2 = f'$$

$$\vdots$$

$$y_n = f^{(n-1)}$$

dönüşümleri ile yukarıda verilen denklem (2.1.3) formunda yazılabilir. Burada

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & a_1 \end{bmatrix} \; ve \; b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

ile belirlenir.

(2.1.4) homojen matris diferansiyel denklemi ve buna ilişkin $Y(t_0) = Y_0$ başlangıç-koşul şartından meydana gelen,

$$Y' = A(t)Y$$

$$Y(t_0) = Y_0 \tag{2.1.5}$$

başlangıç-değer problemini inceleyelim.

Doğrusal denklem sistemleri için varlık teklik teoremi aşağıda verilmiştir ve Teorem 2.1.2'nin bir sonucudur.

Teorem 2.1.3. $A(t)$ matrisi, I kümesi R' de alt küme olacak şekilde $(t_0 \in R)$ sürekli ise, (2.1.5) probleminin I kümesinde geçerli bir tek çözümü bulunur.

Doğrusal diferansiyel denklemlerde olduğu gibi çözümlerin lineer kombinasyonunun da çözüm olduğu aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.4. $Y' = A(t)Y$ matris denkleminin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür. (Rao (1980))

Tanım 2.1.2. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ fonksiyonları birer vektör fonksiyonları olsun. Dolayısıyla,

$$Y_1(t) = \begin{bmatrix} Y_{11}(t) \\ \vdots \\ Y_{n1}(t) \end{bmatrix}, Y_2(t) = \begin{bmatrix} Y_{12}(t) \\ \vdots \\ Y_{n2}(t) \end{bmatrix}, \dots, Y_n(t) = \begin{bmatrix} Y_{1n}(t) \\ \vdots \\ Y_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{vmatrix} Y_{11}(t) & Y_{12}(t) & \dots & Y_{1n}(t) \\ Y_{21}(t) & Y_{22}(t) & \dots & Y_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ Y_{n1}(t) & Y_{n2}(t) & \dots & Y_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{2.1.6}$$

verilen determinanta $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ vektör fonksiyonlarının Wronskian'ı denir ve buradan $W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)(t)$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.5. (2.1.4) homojen matris diferansiyel denkleminin $I \subset R$ kümesinde $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ matrislerinin n tane çözümünün lineer bağımsızlığı

$$W(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \neq 0 \tag{2.1.7}$$

olması ile eşdeğerdir. (Rao (1980))

Sonuç 2.1.1. Homojen matris diferansiyel denkleminin $I \subset R$ de n tane çözümünün Wronskian'ı; denklemin çözümleri lineer bağımlıysa özdeş kabul edilip sıfır, aksi takdirde lineer bağımsızsa yine özdeş olarak sıfırdan farklıdır.

Sonuç 2.1.2. $f_1, f_2, \dots, f_n$ ler

$$f^{(n)} + a_1(t)f^{(n-1)} + \dots + a_n(t)f = 0$$

n. mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin çözümleri ise,

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\left(\int_{t_0}^{t} -a_1(t)dt\right)} \quad (2.1.8)$$

dir.

Teorem 2.1.6. $i = 1,2, \dots, n$ alt indisleri için $Y_i(t)$, (2.1.5) matris denkleminin $Y_i(t_0) = (0,0, \dots, 1, \dots, 0)$ şartını sağlayan herhangi bir çözümü olsun. Böylece n tane $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ matris denklemlerinin çözümleri (2.1.5)'in bütün çözümlerinin lineer uzayı için birer baz oluşturur. (Hartman (1964))

Tanım 2.1.3. Daha önce tanımladığımız (2.1.5) matris denkleminin

$$Y_i(t_0) = (0,0, \dots, 1, \dots, 0); \ i = 1,2, \dots, n$$

şartını sağlayan $Y_i(t)$ çözümlerinin kümesine (2.1.5)'in temel (esas) çözümler sistemi denir.

$\varphi(t) = (Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_n(t))$ matrisi de (2.1.5)'in temel çözümleri matrisi adı altındadır.

Sonuç 2.1.3. $A(t)$ matrisinin elemanları $n \times n$ tipinde t'nin sürekli fonksiyonları olan bir matris ise (2.1.5) başlangıç değer probleminin çözümü $Y(t) = \varphi(t)Y_0$ şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.1.7. $A(t)$ ve $B(t)$ matrisleri, $I \subset R$ kümesinde ($t_0 \in I$) de sürekli ise,

$$Y = A(t)Y + B(t)$$

$$Y(t_0) = Y_0 \quad (2.1.9)$$

matris sisteminin I kümesinde sağlayan bir tek çözümü vardır. Dolayısıyla çözüm

$$Y(t) = \varphi(t)Y_0 + \varphi(t) \int_{t_0}^{t} \varphi^{-1}(s)B(s)ds$$

şeklindedir.

Sonuç 2.1.4. (2.1.9) matris sisteminin $A(t)$=A olduğunda sistemin çözümü,

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\, Y_0 + e^{(t-t_0)A} \int_{t_0}^{t} e^{-(s-t_0)A} B(s)ds$$

biçimindedir.

Herhangi bir n. mertebeden doğrusal diferansiyel denklemi diferansiyel operatörlerle ifade etmek mümkündür.

$$k_0(t)u^{(n)} + k_1(t)u^{(n-1)} + \cdots + k_n(t)u = f(t)$$

diferansiyel denklemi,

$$L(u) = k_0(t)u^{(n)} + k_1(t)u^{(n-1)} + \cdots + k_n(t)u$$

lineer operatörü yardımıyla,

$$Lu = f$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.1.4. $L(u) = k_0(t)u^{(n)} + k_1(t)u^{(n-1)} + \cdots + k_n(t)u$

diferansiyel operatörünün eşleniği,

$$L^*(v) = (-1)^n(k_0(t)v)^{(n)} + (-1)^{n-1}(k_1(t)v)^{(n-1)} + \cdots + (k_{n-1}(t)v)' + k_n v$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.5. $L^* = L$ ise L diferansiyel operatörüne öz-eşlenik operatör denir. Eğer $L(u) = L^*(u) = 0$ olduğu takdirde $L(u) = 0$ ve $L^*(u) = 0$ öz-eşlenik denklemler olarak isimlendirilir.

Lemma 2.1.1. (Gronwall-Lemması) Diyelim ki $x = a$ noktasını kapsayan bir I açık aralığında u sürekli pozitif bir fonksiyon olsun. Pozitif A ve B sabitleri için,

$$u(x) \leq A + B\left|\int_a^x u(t)dt\right|$$

eşitsizliği I aralığındaki $\forall x$ için kabul edilsin. Bu takdirde,

$$u(x) \leq Ae^{B(x-a)}$$

dır.

Sonuç 2.1.5. $x = a$ ‘yı kapsayan bir açık aralığında u sürekli olsun. Bu açık aralıkta $u(x) \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Pozitif B sabiti ile I aralığında $\forall x \in I$ için,

$$u(x) \leq B\left|\int_a^x u(t)dt\right|$$

eşitsizliği verilsin. Bu durumda $\forall x \in I$ için u, sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon ise özdeş olarak sıfıra eşittir.

Teorem 2.1.8. g fonksiyonu $(a,b) \in R^2$ noktasının komşuluğunda sürekli bir fonksiyon belirtilsin. y fonksiyonunun,

$$y' = g(x,y) \quad , \quad y(a) = b$$

birinci mertebeden başlangıç değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul y fonksiyonunun

$$y(x) = b + \int_a^x g\big(t, y(t)\big)dt \tag{2.1.10}$$

integral denkleminin sağlamasıdır.

2.2. Temel Formlar

Bu kısımda, $I \subset R$ için I kümesinde $k_0(t)$ sıfırdan farklı ve

$k_0(t) \in C^2(I)$, $k_1(t) \in C^1(I)$, $k_2(t) \in C(I)$ olmak üzere,

$$k_0(t)y'' + k_1(t)y' + k_2(t)y = 0 \tag{2.2.1}$$

ikinci mertebeden doğrusal diferansiyel denklemine uygun çözümlerin duruma göre kullanabileceğimiz özelliklerinin incelenmesini sağlayan iki standart (temel) form üzerinde çalışılmıştır.

Bir $[a,b]$ aralığında $k_0(t)$ fonksiyonu sıfırdan farklı ise

$$k_0(t)y'' + k_1(t)y' + k_2(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0$$

ikinci mertebeden başlangıç değer problemi,

$$y(t) = u(t)\, e^{-\frac{1}{2}\int_a^t \frac{k_1(s)}{k_0(s)} ds} \tag{2.2.2}$$

dönüşümü ile (2.2.1) denklemi ile normal forma dönüştürülebilir. (Humi-Miller (1988))

Basitlik için $e^{-\frac{1}{2}\int_a^t \frac{k_1(s)}{k_0(s)} ds}$ terimine A dersek;

$$y' = u'A - \frac{1}{2}\frac{k_1(t)}{k_0(t)}Au$$

$$y'' = A\left[u'' + u'\left(-\frac{1}{2}\frac{k_1}{k_0} - \frac{1}{2}\frac{k_1}{k_0}\right) + u\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{k_1(t)}{k_0(t)}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{k_1'(t)}{k_0(t)} + \frac{1}{2}\frac{k_0'(t)k_1(t)}{k_0^2(t)}\right\}\right]$$

elde edilir. Bu elde edilen türevleri (2.2.1) yerine yazdığımızda

$$u'' + F(t)u = 0 \text{ (Normal Form)} \tag{2.2.3}$$

şeklinde bulunan normal formuna ulaşılır. Burada,

$$F(t) = \frac{1}{k_0^2}\left[k_2k_0 - \frac{1}{4}k_1^2 - \frac{1}{2}(k_1'k_0 - k_1k_0')\right]$$

şeklinde ifade edilir.

Üstel ifade sıfırdan farklı olarak bilindiğinden (2.2.2) denklem dönüşümü (2.2.1) denkleminin çözümündeki köklerin sayısını etkilemez. O takdirde verilen aralık olan $[a,b]$ üzerinde $k_0(t)$ fonksiyonu sıfırdan farklı ise (2.2.1) denklemi,

$$h(t) = \frac{1}{k_0(t)}e^{\int_a^t \frac{k_1(s)}{k_0(s)}ds}$$

verilen ifadeyle çarpılırsa,

$$(P(t)u')' + Q(t)u = 0 \tag{2.2.4}$$

tipinde öz-eşlenik forma dönüştürülebilir. Buradaki $P(t) = k_0h(t), Q(t) = k_2h(t)$ verilmiş olan fonksiyonlardır. (Humi-Miller (1988))

Yukarıdaki dönüşümlerle ilgili bir konuya değinirsek, (2.2.4) denklemi (2.2.1) denklemine göre daha genel bir denklemdir. Yani, (2.2.1) denklemi (2.2.4) biçimindeki bir denkleme her zaman dönüştürülebilir fakat aksinin mümkün olabilmesi için $P(t)$ fonskiyonunun $C'([a,b])$ 'in elemanı olması gerekmektedir.

BÖLÜM 3

STURM LIOVILLE DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

Bu bölümde, birinci ve ikinci mertebeden lineer homojen Sturm Liouville denklemlerine yer verilecektir. Sturm Liouville denklemleri literatürde bir çok bilim insanı tarafından çalışılmış diferansiyel denklemleri, alanının en önemli denklemlerinden biridir. Özdeğer problemi olarak da bilinen bu denklemin salınım teorisinde pek çok uygulaması mevcuttur. Salınım teorisinin mekanikten elektriğe, optikten ekonomi ve sosyal bilimlere, biyolojiden fiziğe bir çok alanda uygulamaları mevcuttur. Sturm Liouville denklemleri kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için de çok önemli bir araçtır. Biz bu bölümde Sturm teorisi alanında yapılan araştırmalar sonucu ortaya çıkan ve geliştirilen bazı karşılaştırma toeremlerinin üstünde duracağız.

3.1. Birinci Mertebeden Denklemlerin Sturm Liouville Teorisi

Bu kısımda, birinci mertebeden diferansiyel denklemlerinin çözümleri üzerinde durulmuştur. İlk olarak başlangıç değer problemlerinin çözümlerini inceleyeceğiz.

Verilen ilk teoremin çözümlerine istinaden başlangıç değer koşulları birbirine yeterince yakın söz konusu olduğunda teoremde belirtilen bölge gereği çözümleri de birbirine yakındır. Dolayısıyla $y(x,n)$, n' ye göre süreklidir.

Teorem 3.1.1. $g(x,y) \in C'$ fonksiyonu $Q\colon |x-m| < \alpha\,, |y-n| < \beta|$ dikdörtgen bölgesi üzerinde *Lipschitz* şartını sağlasın. $y(x,n)$ fonksiyonu da

$$y' = g(x,y)$$

$$y(m) = n \tag{3.1.1}$$

biçiminde verilen başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda verilen $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ sayısı vardır ki $|n_1 - n_2| < \delta$ iken $her\, |x - \varepsilon\,| < \alpha$ için $|y(x,n_1) - y(x,n_2)| < \varepsilon$.

İspat: Teorem 2.1.8'den (3.1.1) başlangıç değer problemi ile,

$$y(x,n) = n + \int_m^x g[t, y(t,n)]dt \tag{3.1.2}$$

integral denklemine eşdeğerdir.

Buradan,

$$y(x,n_1)-y(x,n_2)=(n_1-n_2)+\int_m^x\left[g\big(t,y(t,n_1)\big)-g\big(t,y(t,n_2)\big)\right]dt$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır ve düzenlenirse,

$$|y(x,n_1)-y(x,n_2)|\le|n_1-n_2|+\left|\int_m^x\left[g\big(t,y(t,n_1)\big)-g\big(t,y(t,n_2)\big)\right]dt\right|$$

$$\le|n_1-n_2|+\int_m^x\left|g\big(t,y(t,n_1)\big)-g\big(t,y(t,n_2)\big)\right|dt \qquad (3.1.3)$$

bulunur. g fonksiyonu, $Lipschitz$ şartını sağladığından,

$$|g(x,y_1)-g(x,y_2)|<M|y_1-y_2|$$

olacak şekilde bir $M>0$ sabiti mevcuttur. Buradan yola çıkılarak,

$$|y(x,n_1)-y(x,n_2)|\le|n_1-n_2|+M\int_m^x|y(t,n_1)-y(t,n_2)|dt \qquad (3.1.4)$$

yazılabilir. Daha önce ifade ettiğimiz Lemma (2.1.1)'den

$$|y(x,n_1)-y(x,n_2)|\le\delta e^{M(x-m)} \qquad (3.1.5)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $\delta=\varepsilon\, e^{-M\alpha}$ olsun. $\forall|x-m|\le\alpha$ için,

$$|y(x,n_1)-y(x,n_2)|<\varepsilon$$

bulunur.

Teorem 3.1.2. $g(x,y)\in C'$ fonksiyonu $Q\colon|x-m<\alpha|,|y-n|<\beta$ dikdörtgen bölgesi üzerinde sınırlı olsun. Dolayısıyla $Lipschitz$ şartını sağlasın. $Y'=g(x,y)$ denkleminin (x_0,y_0) noktasını sağlayan çözümü φ ve $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ noktasından geçen çözümü $\bar{\varphi}$ fonksiyonlarını kabul edelim. Bir $m<x<n$ aralığı üzerinde φ ve $\bar{\varphi}$ fonskiyonlarının tanımlı olduğunu varsayalım. (Leighton (1970))

Böylece, $\forall\varepsilon>0$ tekabül eden $|x-\bar{x}|,|x_0-\overline{x_0}|$ ve $|y_0-\bar{y}_0|$ bölgelerinin δ sayısından küçük olduğunda

$m < x < n$, $m < \bar{x} < n$ için,

$$|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Sonuç 3.1.1. $g(x, y) \in C'$ ve g fonksiyonları, *Lipschitz* şartını sağladığından dolayı daha önce ifade ettiğimiz (3.3.1) probleminin tek bir çözümü vardır.

Teorem 3.1.3. Bir $A \subset R^{n+1}$ 'de $F \in C'$ olsun ve Lipschitz şartını sağlayacak şekilde bir F fonksiyonu verilsin. $n \times 1$ boyutlu bir Y vektörü olmak üzere;

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, t)$$

denkleminin çözümü olan $Y(t, c_1), c_1$'e göre sürekli türevlenebilirdir.

Örnek 3.1.1. A, $n \times n$ boyutlu sabit elemanlı matris ve y, $n \times 1$ boyutlu vektör olmak üzere,

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(t)$$

$$y(t_0) = c_1$$

başlangıç değer problemini inceleyelim. Sonuç 2.1.4. 'den bu problemin $y(t, c_1)$ çözümü,

$$y(t, c_1) = c_1 e^{A(t-t_0)} + e^{At} \int_{t_0}^{t} e^{-As} g(s) ds$$

olup y vektörü c_1'e göre sürekli türevlenebilirdir.

Örnek 3.1.2. (3.1.1) probleminde g fonksiyonu, Lipschitz şartını sağlamadığında problemin birden fazla çözümü var olabilir.

Bunu da aşağıdaki bir problemle açıklayalım.

Örneğin;

$$y' = \frac{1}{y^3} \ , \ y(0) = 0$$

probleminde gerekli işlemler yapıldığında $y(x) = \mp\sqrt{4x}$ şeklinde iki çözümü olduğu görülür. Diğer bir ifadeyle çözümlerin tekliği yeterlidir.

Örnek 3.1.3. Verilen problem (3.1.1) eğer uygun koşullarda ele alırsak başlangıç şartı maksimum δ hata gelecek şekilde düşünüldüğünde (3.1.2) denklemi, böylece sistemin incelenmesinde olası tüm durumlar hesaplanabilir.

Bir örnek verilirse;

$$y' = x^2 y, \qquad |y(0) - 1| \leq \delta, \qquad |x^2| < 1$$

sistemi için,

$$|g(x^2, y_1) - g(x^2, y_2)| \leq |y_1 - y_2|$$

verilip (3.1.5) eşitsizliğinden,

$$|\Delta y| = |y(x^2, 1 + \delta) - y(x^2, 1)]| \leq \delta e^{x^2} < \delta e$$

elde edilir. Devamında $1 - \delta < y(0) < 1 + \delta$ başlangıç şartına bağlı olan her çözüm;

$$e^{\frac{x^3}{3}} - \delta e \leq y(x) \leq e^{\frac{x^3}{3}} + \delta e$$

verilen eşitsizliği gerektiğinde sağlamalıdır.

Teorem 3.1.4. $F(x, y)$ fonksiyonunun, $x > m$ aralığı için *Lipschitz* şartını sağladığını kabul edelim. Eğer $g(x)\, fonksiyonu, g'(x) \leq F(x, g(x))$ diferansiyel eşitsizliğini sağlıyorsa,

$$y' = F(x, y)$$

$$f(m) = g(m) = c_1$$

başlangıç-değer probleminin $f(x)$ çözümü $m \leq x$ için $g(x) \leq f(x)$ eşitsizliğini sağlar.

İspat: Diyelim öyle bir x_1 mevcut olsun ki $f(x_1) < g(x_1)$ eşitsizliği var olsun. Buna göre;

$$S = \{x | (f(x) - g(x) \geq 0, m \leq x \leq x_1\}$$

kümesini inceleyelim. S kümesi boş kümeden farklıdır çünkü $m \in S$ dir. Ayrıca S sınırlı ve kapalı küme olduğundan $b = max\{x \in S\}$ noktası vardır. Buna göre $(b, x_1]$ aralığı üzerinde $r(x) = g(x) - f(x) > 0$ ve $r(b) = g(b) - f(b) = 0$ dır.

Diğer yandan $r(x)$ fonksiyonu,

$$r'(x) = g'(x) - f'(x) \leq F(x, g(x)) - F(x, f(x))$$

$$\leq M(g(x) - f(x)) = Mr(x)$$

eşitsizliğini sağlar ve tanımladığımız aralık olan $(b, x_1]$ üzerinde,

$$0 \leq r(x) \leq r(b)e^{M(x-m)} = 0$$

eşitsizliği elde edilir. Yani $r(x)$ fonksiyonu sıfırdır. Böylece, $(b, x_1]$ aralık üzerinde $f(x) < g(x)$ varsayımıyla çeliştiğinden ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.5. (Karşılaştırma Teoremi) f ve g fonksiyonları sırasıyla verilen başlangıç değer probleminin çözümleri olsun. Yani,

$$y' = F(x, y) \qquad\qquad \gamma' = G(x, \gamma)$$

$$f(m) = c_1 \qquad\qquad g(m) = c_1$$

biçimindedir. F ve G fonksiyonları *Lipschitz* şartını sağlıyor, eğer bir Q bölgesinde $G(x, y) \leq F(x, y)$ ise $g(x) \leq f(x)$ dir. (Hille (1969), Swanson (1968))

İspat: g fonksiyonu verilen $\gamma' = G(x, \gamma)$ denkleminin bir çözümünü sağladığından,

$$g'(x) = G(x, g) \leq F(x, g)$$

dir. Dolayısıyla, bir önceki teoremde ifade ettiğimiz gibi $m \leq x$ için $g(x) \leq f(x)$ eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.6. f ve g fonksiyonları 3.1.4 teoreminde tanımladığımız şekilde kabul edilsin. Eğer ki $g(m) < f(m)$ ise $m < x$ için $g(x) < f(x)$ dir. (Hille (1969), Swanson (1968))

Örnek 3.1.4.

$$y' = x^4 y \qquad\qquad \gamma' = x\gamma$$

problemlerinin $f(1) = 1$ ve $g(1) = 1$ çözümlerini inceleyelim.

$1 < x,\ 0 < y$ olduğunda $xy \leq x^4 y$ dir. Teorem 3.1.5 karşılaştırma teoremi gereği $Q: \{(x, y): 1 < x\ ,\ 0 < y\}$ bölgesinde çözümleri $g(x) \leq f(x)$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Belirtilirse,

$$f(x) = e^{\frac{x^5-1}{5}} \quad , \quad g(x) = e^{\frac{x^2-1}{2}}$$

olup Q bölgesinde $g(x) \leq f(x)$ dir.

3.2. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Sturm Liouville Denklemleri

Bu kısımda, ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin çözümleri olan iki çözümün sıfırları üzerinde durulacaktır. Ardından sıfırları olan bu iki denklemin çözümleri de incelenmiştir. Sturm ayırma ve Sturm karşılaştırma gibi önemli iki teoreme de yer verilmiştir.

İkinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem;

$$L(y) = p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

biçiminde tanımlansın.

$I \subset R$ 'de $p_0(x) \neq 0$ ve $p_0 \in C^2(I), p_1 \in C'(I)$ ve $p_2 \in C(I)$ olsun.

Teorem 3.2.1. $L(y) = 0$ lineer homojen diferansiyel denkleminin bir aşikar olmayan çözümünün her kökü basittir. (Swanson (1968))

İspat: Diyelim ki $L(y) = 0$ lineer homojen diferansiyel denkleminin aşikar olmayan çözümünü $x = x_0$ noktasında bir sıfırı kabul edelim. Buna göre başlangıç-değer noktaları $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ dır. Daha önce ifade ettiğimiz teorem 2.1.2 'e göre problem bir tek çözüme sahiptir. Bu ise verilen çözümde $y(x) = 0$ aşikar çözüm olup bir çelişki belirtir. Dolayısıyla çelişkiden $L(y) = 0$ ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin aşikar olmayan her çözümünün kökü basittir.

Teorem 3.2.2. $L(y) = 0$ ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin bir aşikar olmayan $y(x)$ çözümü, kapalı aralık olan $[a, b]$ üzerinde en fazla sonlu sayıda sıfıra sahiptir. (Swanson (1968))

İspat: $y(x)$, $[a, b]$ aralığında sonsuz sayıda sıfıra sahip olduğunu kabul edelim. $Bolzano - Weierstrass$ teoremi gereği sınırlı her dizinin en az bir yığılma noktası olacağından bu sıfırların kümesi verilen aralıkta bir c yığılma noktası vardır. Diğer yandan $Rolle$ teoremine göre $y'(\mu) = 0$ olacak şekilde sonsuz sayıda $\mu \in [a, b]$ noktası bulunur. Bu kümenin de yığılma noktası c dir. Böylece $y(c) = y'(c) = 0$ dır. Teorem 3.2.1'den yararlanılırsa bir çelişki elde edilir. Bu da $y(x)$'in $[a, b]$ aralığı üzerinde en fazla sonlu sayıda sıfıra sahip olduğunu ispatlar.

r fonksiyonu sürekli türevlenebilir, p fonksiyonu sürekli ve $a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde tanımlı iki fonksiyon olsun. $r(x) > 0$ için,

$$[r(x)y']' + p(x)y = 0 \tag{3.2.1}$$

denklemini ele alalım. Gerekli işlemler yapıldığında;

$y''r(x) + y'r'(x) + p(x)y = 0$ denklemi meydana gelir.

Teorem 3.3.3. (Sturm Ayırma Teoremi) (3.2.1) diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü y_1, y_2 olsun. x_1 ve x_2 de $y_1(x)$'in ardışık iki çözümü kabul edelim. Bu durumda (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$'in yalnız bir sıfırı vardır. (Hille (1969), Swanson (1968))

İspat: y_1, y_2 fonksiyonları lineer bağımsız olduğundan x_1 veya x_2, $y_2(x)$'in sıfırı olamaz. Koşullara uygun

$$\varphi(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

fonksiyonu tanımlansın. Diyelim ki (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$'in bir sıfırı olmasın. Bu durumda (x_1, x_2) aralığında φ sürekli türevlenebilirdir. Dolayısıyla,

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ dır. *Rolle* teoreminden $\varphi'(\mu) = 0$ olacak şekilde $\mu \in (x_1, x_2)$ noktası vardır. Bu durumda $\varphi'(\mu)$ fonksiyonu yazıldığında,

$$\varphi'(\mu) = \frac{y_2(\mu)y_1{}'(\mu) - y_2{}'(\mu)y_1(\mu)}{y_2{}^2(\mu)} = 0$$

bulunur. Bu denklem eşitliğinin mümkün olması için $\gamma(y_1, y_2)(\mu) = 0$ denklemini sağlaması gerekmektedir, bu ise imkansızdır. Yani, y_2 fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında en az bir sıfırı olmalıdır. Diyelim ki y_2 fonksiyonunun (x_1, x_2) aralığında iki sıfırı var olsun. Bu durumda (x_1, x_2) aralığında y_1 'in bir sıfırı olması gerektiğinden bu y_1'in ardışık iki sıfırı olmasıyla çelişir. Böylece, y_2'nin (x_1, x_2) aralığında yalnız bir sıfırı olup ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.2.1. $KN - LM \neq 0$ olmak üzere, $y'' + t^2y = 0$ denkleminin iki lineer bağımsız çözümü

$$y_1(x) = K\cos tx + L\sin tx$$

$$y_2(x) = M\cos tx + N\sin tx$$

dir. Sturm Ayırma teoremine göre, bu iki çözümden birinin iki sıfırı arasında diğer çözümün bir sıfırı vardır.

Uyarı 3.2.1. Sturm Ayırma teoremi, bir diferansiyel denklemin her çözümünün bir sıfıra sahip olmasını gerektirmez. Bu uyarıyı, aşağıdaki bir örnekle doğrulayalım.

Örnek 3.2.2. $y'' - t^2 y = 0$ denklemi incelendiğinde $y(x) = c_1 e^{tx} + c_2 e^{-tx}$ biçiminde bulunan denklem çözümü $A \cos htx$ olup görüldüğü üzere bir sıfıra sahip olmadığı bulunmaktadır.

Teorem 3.2.4. p ve q fonksiyonları, $[a, b]$ aralığında sürekli ve yine bu aralıkta $q(x) \leq p(x)$ verilsin. Ayriyetten y ve γ fonksiyonları,

$$y'' + p(x)y = 0$$

$$\gamma'' + q(x)\gamma = 0 \qquad (3.2.2)$$

denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri olsun. Böylece $p = q$ ve y fonksiyonunda γ'nın bir katı olmadıkça $[a, b]$ aralığında $\gamma(x)$'in ardışık iki sıfırı arasında $y(x)$'in en az bir sıfırı vardır.

Uyarı 3.2.2. $p_0(x) \neq 0$ kabul edildiği takdirde teorem 3.2.4,

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (3.2.3)$$

biçimindeki denklemler için de kullanılmaktadır. Daha önce bahsetmiş olduğumuz 2.3 kesiminden (3.2.3) denklemi her zaman (3.2.2) biçimine kolayca dönüştürülebilir. Ayrıca denklemin sıfırlarını bu dönüşüm denklemi etkilemez.

İspat: $\gamma(x)$ 'in ardışık iki sıfırı x_1 ve x_2 olsun. Ayrıca (x_1, x_2) aralığında $y(x)$ fonksiyonu sıfırdan farklı olsun. (3.2.3) denklemi homojen bir denklem olduğundan $-y$ ve - γ fonksiyonları da birer çözümdür. Bu durumda $y > 0$ ve $\gamma > 0$ denilebilir. Buradan (x_1, x_2) aralığında y ve γ'nın *Wronskian* fonksiyonu,

$$\gamma(y, \gamma, x_1) = y(x_1)\gamma'(x_1) > 0$$

$$\gamma(y, \gamma, x_2) = y(x_2)\gamma'(x_2) > 0 \qquad (3.2.4)$$

ve dolayısıyla,

$$\gamma'(y, \gamma, x) = y\gamma'' - y''\gamma = y\gamma(p - q) \geq 0$$

yazılabilir. Böylece γ fonskiyonu (x_1, x_2) aralığında azalmayan bir fonksiyon olduğu görülür. Bu ise bir çelişki belirtir. Sonuç olarak, (x_1, x_2) aralığında $y(x)$'in bir sıfıra sahip olmasını gerektirmektedir.

Uyarı 3.2.3. Eğer x_1, y ve γ'nın bir sıfırı ise $y(x)$ fonksiyonu, $\gamma(x)$ fonksiyonundan daha hızlı bir salınım gerçekleştirdiğinde teorem 3.2.4, y nin γ'dan daha önce bir sıfırı olmasını gerekmektedir.

Sonuç 3.2.1. $[a, b]$ aralığında $q(x) \leq 0$ ise,

$$\gamma'' + q(x)\gamma = 0 \tag{3.2.5}$$

denkleminin aşikar olmayan çözümünün $[a, b]$ aralığında bulunabilecek en fazla bir sıfırı vardır.

İspat: Verilen denklem (3.2.5)'in bir $\gamma(x)$ çözümünün $[a, b]$ aralığında iki tane sıfırı var ise teorem 3.2.4'den $y'' = 0$ denklemin çözümünün bu aralıkta bir sıfırı olmasını gerektirdiğinden bu ifade bir çelişki belirtip ispatı tamamlamamıza yardımcı olmaktadır.

Teorem 3.2.5. (Sturm Karşılaştırma Teoremi)

$a \leq x \leq b$ aralığında;

$$r(x)y'' + r'(x)y' + p_1(x)y = 0 \tag{3.2.6}$$

denkleminin bir çözümü u olsun. Yine aynı aralıkta verilen;

$$r(x)z'' + r'(x)z' + p_2(x)z = 0 \tag{3.2.7}$$

denkleminin de bir çözümü v olsun. Ayrıca $r(x)$ fonksiyonu sıfırdan farklı ve pozitif olmak üzere r sürekli türevlenebilir, $p_2(x) > p_1(x)$ olacak şekilde p_1 ve p_2 fonksiyonları sürekli fonksiyonlar olsun.

Şayet $[a, b]$ aralığında x_1, x_2'ler u'nun ardışık iki sıfırı ise, $x_1 < x < x_2$ aralığında v'nin en az bir sıfırı vardır. Diğer yandan, x_1'in v'nin bir sıfırı olması durumunda da geçerliliği vardır. (Hille (1969), Swanson (1968))

İspat: Kabul edelim ki $x_1 < x < x_2$ aralığında v'nin bir sıfırı olmasın. Yine bu aralıkta $u(x) > 0$ ve $v(x) > 0$ olsun. u ve v sırasıyla (3.2.6) ve (3.2.7)'nin çözümleridir.

Dolayısıyla,

$$[r(x)u']' + p_1(x)u = 0$$

$$[r(x)v']' + p_2(x)v = 0$$

yazılabilir. Birinci denklem $-v$ ile ikinci denklem u ile çarpıldığında;

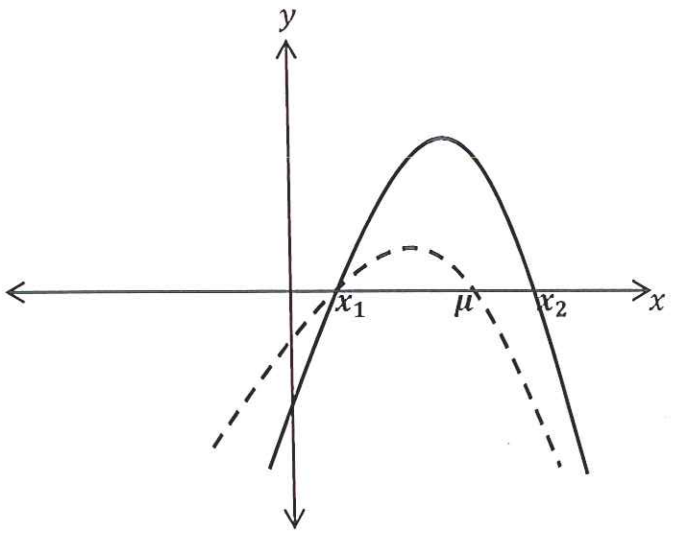
$$-v[r(x)u']' - v[up_1(x)] = 0$$

$$u[r(x)v']' + u[vp_2(x)] = 0$$

bulunur. Devamında taraf tarafa toplanır ve $x_1 < x < x_2$ aralığı üzerinden integral alınırsa;

$$r(x_2)u'(x_2)v(x_2) - r(x_1)u'(x_1)v(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [p_2(x) - p_1(x)]u(x)v(x)dx$$

elde edilir. Hipotez gereği $r(x_2) > 0$ dır. $x_1 < x < x_2$ aralığında $u(x) > 0$ ve $u(x_2) = 0$ olduğundan da $u'(x_2) < 0$ dır. $x_1 < x < x_2$ aralığından $v(x) > 0$ olduğundan $v(x_2) \geq 0$ dır. Buradan $r(x_2)u'(x_2)v(x_2) \leq 0$ ve benzer ifadeyle $r(x_1)u'(x_1)v(x_1) \geq 0$ dır. Buna göre birinci taraf pozitif değildir. Diğer yandan $p_2(x) > p_1(x)$ olduğundan ikinci taraf pozitif olacağından bu bir çelişki belirtir. Bu da $x_1 < x < x_2$ aralığında v'nin en az bir sıfırı olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.



Şekil 3.2 Çözümlerin sıfırları arasındaki ilişki

Teorem 3.2.6. $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve

$$z'' + p_2(x) = 0$$

$$z(a) = z(b) = 0 \tag{3.2.8}$$

sınır – değer probleminin bir aşikar olmayan çözümü $z(x)$ olsun.

Ayrıca,

$$\int_a^b [p_1(x) - p_2(x)]z^2(x)dx \geq 0 \tag{3.2.9}$$

denklemini kabul edelim. Bu durumda;

$$y'' + p_1(x)y = 0\,, y(a) = 0 \tag{3.2.10}$$

sınır-değer probleminin aşikar olmayan bir $y(x)$ çözümü,

$a \leq x \leq b$ aralığı üzerinde bir sıfıra sahiptir.

İspat: $z(x)$ fonksiyonu (3.2.8) denkleminin ve $y(x)$ fonksiyonu (3.2.10) denkleminin birer çözümleri olduğundan,

$$z'' + p_2(x)z(x) = 0$$

$$y'' + p_1(x)y(x) = 0$$

biçiminde ifade edilebilir. Birinci denklemi $-z(x)$, ikinci denklemi de $\frac{z^2(x)}{y(x)}$ ile çarpıp toplarsak;

$$z\left[z'' - z\frac{y''}{y}\right] = [p_1(x) - p_2(x)]z^2 \tag{3.2.11}$$

eşitlik elde edilir. Buradan yola çıkarak kabul edelim ki $y(x)$ fonksiyonu sıfırdan farklı olsun. (3.2.11) elde edilen eşitliğin sol tarafı $\frac{z}{y}$ parantezine alınıp,

$\frac{z}{y}(yz' - zy')'$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafında a'dan b'ye integral alındığı takdirde;

$$\int_a^b \frac{z}{y}(yz' - zy')'dx = \int_a^b [p_1(x) - p_2(x)]z^2(x)dx \geq 0 \tag{3.2.12}$$

bulunur. Birinci integralde kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\left[\frac{z}{y}(yz' - zy')'\right]\Big|_a^b \leq \int_a^b (z' - \frac{z}{y}y')^2 dx \tag{3.2.13}$$

elde edilir. c_1 bir sabit olmak üzere $z(x) \neq c_1\, y(x)$ olduğundan (3.2.13) eşitsizliğinin sağ tarafı pozitif ve $L'Hospital$ kuralı gereği $x = a$ da $\frac{z}{y}$ oranı sonlu olduğundan sol taraf sıfırdır. Bu ise bir çelişki belirtir. İfade edelim ki (3.2.9) sağlanıyorsa $y(x)$ fonksiyonu, $a < x < b$ değer aralığında bir sıfıra sahiptir.

Teorem 3.2.7. $r(x) \equiv 1$ şartından yola çıkılarak Teorem 3.2.5'in bir genel ifadesidir. Diğer yandan Teorem 3.2.5'in önemli bir durumu μ sabit olmak üzere $p_2(x) = \mu^2$ olduğunda bulunmasıdır. Bu takdirde (3.2.7),

$$\int_a^{a+(\frac{\pi}{\mu})} [p_1(x) - \mu^2] \sin^2 \mu\, (x - a) dx \geq 0 \tag{3.2.14}$$

biçiminde ifade edilir. Buradan,

$$\int_a^{a+(\frac{\pi}{\mu})} p_1(x) \sin^2 \mu\, (x - a) dx \geq \frac{\pi}{2}\mu \tag{3.2.15}$$

şeklindedir. Bu eşitsizlikte $t_0 = \mu(x - a)$ dönüşümü uygulandığında,

$$\int_0^{\pi} p_1(\frac{t_0}{\mu} + a) \sin^2 t_0\, dt \geq \frac{\pi}{2}\mu^2 \tag{3.2.16}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8. (Sturm-Picone Teorisi)

$$r(x)y'' + r'(x)y' + p_1(x)y = 0 \tag{3.2.17}$$

$$r(x)z'' + r'(x)z' + p_2(x)z = 0 \tag*{(3.2.17)*}$$

denklemleri (3.2.6) ve (3.2.7) denklemlerinin yerine alındığında $r_2(x) \leq r_1(x)$ koşulu kabul edilirse; daha önce tanımladığımız Teorem 3.2.5'de bulunan sonuçlar da geçerlidir.

Teorem 3.2.9. $[a,b]$ aralığında verilen $r_1(x), r_2(x), p_1(x)$ ve $p_2(x)$ denklemleri sürekli ve $r_1(x) > 0$ ve $r_2(x) > 0$ olsun. $z(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$[r_2(x)z']' + p_2(x)z = 0 \ , z(a) = z(b) = 0$$

sınır-değer probleminin çözümüdür. Şayet;

$$\int_a^b [(r_2 - r_1)(z')^2 + (p_1 - p_2)z^2]\, dx \geq 0$$

koşulu sağlanıyorsa;

$$r(x)y'' + r'(x)y' + p_1(x)y = 0$$

$$y(a) = 0$$

başlangıç-değer probleminin bir $y(x)$ çözümü $(a,b]$ aralığında bir sıfıra sahiptir.

Bu teoremin ispatı, teorem 3.2.6'nın ispatına benzer şekildedir. Gerekli olan bağıntı ise,

$$\int_a^b [(r_2 - r_1)(z')^2 + (p_1 - p_2)z^2]\, dx + \int_a^b r_1 \left[\frac{yz' - y'z}{y}\right]^2 dx$$

$$=$$

$$\frac{z}{y}[r_2 yz' - r_1 y'z]|_a^b$$

dir. Verilen bu bağıntının adı $Picone\ formülü$ 'dür. (3.2.12)'e benzer biçimde bulunabilir.

Teorem 3.2.10. (Bocher-Osgood)

$I: 0 \leq x < \infty$ aralığında p fonksiyonu sürekli ve türevlenebilir, $p(x) > 0, p'(x) \geq 0$ koşullarının kabulleri üzerine,

$$y'' + p(x)y = 0 \qquad (3.2.18)$$

denkleminin bir çözümü $y(x)$ olsun. Şayet a ve b $y'(x)$'in ardışık iki sıfırı varsa; $|y(b)| \leq |y(a)|$ olması mümkündür.

İspat: $y(x)$ fonksiyonu $y'' + p(x)y = 0$ denkleminin bir çözümü olduğundan bu denklemi yazabiliriz. Eğer her iki tarafını $2y'$ ile çarpıp, a'dan b'ye integral alırsak;

$$2y'y'' + 2y'p(x)y = 0$$

$$\int_a^b [(y'(x))^2]'dx + \int_a^b [y^2(x)]'dx = 0$$

$$(y'(x))^2 \,|_a^b + \int_a^b p(x)\,[y^2(x)]'dx = 0 \qquad (3.2.19)$$

denklem eşitliği elde edilir. (3.2.19) denkleminin birinci terimdeki ifadesi sıfır, yani $(y'(x))^2 = 0$ dır. İkinci terime ise kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$p(b)y^2(b) - p(a)y^2(a) - \int_a^b p'(x)y^2(x)dx = 0$$

$$p(b)y^2(b) - p(a)y^2(a) = \int_a^b p'(x)y^2(x)dx \qquad (3.2.20)$$

bulunur. Diyelim ki $y^2(b) > y^2(a)$ kabul edilsin. Buradan yola çıkarak,

$$\int_a^b p'(x)\,y^2(x)dx < y^2(b)\int_a^b p'(x)dx = y^2(b)[p(b) - p(a)]$$

dır. (3.2.20) denklem eşitliğinden,

$$p(b)y^2(b) - p(a)y^2(a) < y^2(b)[p(b) - p(a)]$$

dır.

Dolayısıyla, $p(a)y^2(b) < p(a)y^2(a)$ olur. Bu kabulümüze bir çelişki yaratır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bocher-Osgood teoremi öz-eşlenik formlar için de geçerlidir. Daha önce tanımladığımız,

$$(r(x)y')' + p(x)y = 0 \qquad (3.2.21)$$

denklem incelendiğinde, $r(x) > 0, p(x)$ ve $r(x) \in C'(I)$ denilebilir.

Teorem 3.2.11. $r(x), p(x) > 0$ ve $[r(x)p(x)]' \geq 0$ olsun. Kabul edelim ki $y(x)$ fonksiyonu da $(r(x)y')' + p(x)y = 0$ denkleminin bir çözümü olsun. Şayet α ve β, $y'(x)$'in ardışık iki sıfırı ise $|y(\beta)| \leq |y(\alpha)|$ dır.

İspat: $(r(x)y')' + p(x)y = 0$ denklemine

$$t = \int_0^x \frac{1}{r(x)} dx$$

dönüşümü yapılırsa,

$$r(x)y' = \frac{dy}{dt} \quad , \quad [r(x)y']' = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{r(x)}$$

elde edilip (3.2.21) denkleminde yerine yazıldığı takdirde,

$$y'' + [p(x)r(x)]\, y = 0 \qquad (3.2.22)$$

bulunur. Dönüşümün eşitsizliği,

$$t_0 = \int_a^\infty \frac{1}{r(x)} dx \leq \infty$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}[p(x)r(x)] \geq 0 \quad , \quad 0 \leq t \leq t_0 \qquad (3.2.23)$$

şartlar gereği teoerem 3.2.9'u sağlar. (3.2.23) eşitsizliğinden,

$$[p(x)r(x)]'r(x) \geq 0$$

şeklinde tanımlanabileceğinden teorem 3.2.9 uygulanırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.9'dan şayet $[r(x)p(x)]' \geq 0$ verildiğinde ise (3.2.21)'in çözümleri sınırlıdır ve hatta eşitsizlik yön değiştirirse çözümlerin sınırlı olmasını gerektirmez.

Teorem 3.2.12. Şayet, $r(x)$ fonksiyonu pozitif ve $[r(x)p(x)]' \leq 0$ ise (3.2.21)'in denkleminin bir çözümü $y(x)$ olmak şartıyla $r(x)p(x)y^2(x)$ çarpımı sınırlıdır.

İspat: (3.2.21) denkleminin bir çözümü $y(x)$ olsun. $[r(x)y']' + p(x)y = 0$ denkleminin her iki tarafını $2ry'$ ile çarpıp a'dan x'e integral alınırsa;

$$2ry'(r(x)y')' + 2ry'p(x)y = 0$$

$$2\int_a^x ry'[r(x)y']'dx + 2\int_a^x ry'yp(x)dx = 0$$

$$(ry')^2|_a^x + \int_a^x rp(y^2)'dx = 0$$

$$[r(x)y'(x)]^2 + r(x)p(x)y^2(x) = {c_1}^2 + \int_a^x [r(x)p(x)]'y^2(x)dx$$

eşitliği bulunur, ${c_1}^2$ burada sabit terimdir. $[r(x)y'(x)]^2$ ve $r(x)p(x)y^2(x)$ terimleri ${c_1}^2$ sabit teriminden küçük olup ispat tamamlanmış olur.

$$Ly = [r_1(x)y']' + b(x)y' + p_1(x)y = 0 \tag{3.2.24}$$

$$Lz = [r_2(x)z']' + C(x)z' + p_2(x)z = 0 \tag{3.2.25}$$

biçimindeki ikinci basamaktan daha genel diferansiyel denklemler için kaynaklarda bazı karşılaştırma teoremlerini inceleyelim.

Burada b ve C birer (α,β) aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, diğer katsayı fonksiyonları ise daha önce verdiğimiz Teorem 3.2.8'de tanımlandığı gibidir.

$Q(u), \vec{u} = (u_1, u_2)$ değişkenlerine bağlı ve

$$Q(u) = r_2{u_1}^2 - 2Cu_1u_2 + G{u_2}^2 \tag{3.2.26}$$

biçiminde tanımlı, kuadratik formu ele alınsın. G sürekli olsun. Buradan;

$$\Delta = 4C^2 - 4r_2G \leq 0$$

$$C^2 \leq r_2G$$

$$G \geq \frac{C^2}{r_2} \tag{3.2.27}$$

elde edilir. Tanım gereği $\forall(u_1,u_2) \in R^2$ için $Q(u) \geq 0$ ancak ve ancak kuadratik formu (3.2.27) koşulu adı altında pozitif-yarı-tanımlıdır.

Bu kuadratik formların üzerinden verdiğimiz açıklamalar gereği vereceğimiz teoremlerde kullanabileceğimiz iki gösterimlerin üzerinde duralım.

y, y' fonksiyonları (α, β) aralığında sürekli $y(\alpha) = y(\beta) = 0$ olmak üzere,

$$F(y) = r_2(y')^2 - 2Cyy' + (G - p_2)y^2$$

tanımlı ve

$$J(y) = \int_{\alpha}^{\beta} F(y)dx \qquad (3.2.28)$$

kuadratik fonksiyonu olsun. Buna istinaden;

$$j(y) = \int_{\alpha}^{\beta} [r_1(y')^2 - 2byy' - p_1y^2]dx \qquad (3.2.29)$$

biçiminde bir fonksiyon ve $V(y) = j(y) - J(y)$ olacak şekilde bir

$$V(y) = \int_{\alpha}^{\beta} [r_1(y')^2 - 2byy' - p_1y^2]dx - \int_{\alpha}^{\beta} F(y)dx$$

fonksiyonu da var olsun. Buradan;

$$V(y) = \left[\int_{\alpha}^{\beta} (r_1 - r_2)(y')^2 - 2(b - C)yy' + (p_2 - p_1 - G)\right]dx \qquad (3.2.30)$$

biçiminde olan fonksiyonu kabul edelim.

$b \in C'(\alpha, \beta)$ ve $C \in C'(\alpha, \beta)$ durumunda (3.2.30) fonksiyonunda kısmi integral uygulanırsa;

$$V(y) = \int_{\alpha}^{\beta} [(r_1 - r_2)(y')^2 + (b' - C' + p_2 - p_1 - G)y^2]dx \qquad (3.2.31)$$

ifadesi bulunur.

Teorem 3.2.13. (α, β) üzerinde $G \geq \frac{C^2}{r_2}$ olsun. $J(y) < 0$ olacak şekilde $\exists y \not\equiv 0$ var ise (α, β) aralığında $L(z) = 0$'ın her çözümü için $\exists c$ için $z(c) = 0$ dır.

İspat: Diyelim ki (α, β) aralığında $z \neq 0$ olacak şekilde $L(z) = 0$ denkleminin bir çözümü z olsun.

$$L(z) = (r_2(x)z'(x))' + b(x)z'(x) + p_2(x)z = 0$$

denkleminde $\exists z$ için $L(z) = 0$ 'ın çözümü ise (α, β) aralığında $z(x) \neq 0$ 'ın üzerindedir.

$$X = z\left(\frac{y}{z}\right)' \ , \ Y = \frac{r_2 z'}{z}$$

biçiminde tanımlı iki fonksiyon olsun. Bu durumda (α, β) aralığındaki her noktada,

$$r_2 X^2 - 2CyX + Gy^2 + (y^2 Y)' = F(y) + \left(y^2 \frac{1}{z}\right) Lz \tag{3.2.32}$$

eşitliğini daha açık şekilde yazarsak;

$$r_2 z^2 \left[\left(\frac{y}{z}\right)'\right]^2 - 2Cyz\left(\frac{y}{z}\right)' + Gy^2 + y^2\left(\frac{r_2 z'}{z}\right)' = F(y) + \left(y^2 \frac{1}{z}\right) L(z)$$

$$\left(r_2 \frac{1}{z^2}\right)(zy' - z'y)^2 - 2Cy\frac{1}{z}(zy' - z'y) + Gy^2 + \frac{y^2}{z^2}[z(r_2 z)' - r_2(z')^2]$$

$$=$$

$$r_2(y')^2 - 2Cyy' + (G - p_2)y^2 + \left(y^2 \frac{1}{z}\right) L(z)$$

denklem eşitliği elde edilir. Buradan belirlenen aralık olan (α, β) aralığında $L(z) = 0$ olduğunda (3.2.32) denkleminin α'dan β'a integrali alınırsa,

$$J(y) = \int_{\alpha}^{\beta} [r_2 X^2 - 2CyX + Gy^2]dx + \lim_{u,v \to \alpha,\beta} \left[r_2 y^2 \frac{z'}{z}\right]_u^v \tag{3.2.33}$$

bulunur. (3.2.33) denklemde ikinci yan terim sıfır ve birinci yan terim hipotezden dolayı pozitif yarı tanımlıdır. Dolayısıyla, bir çelişki belirtir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.14. $G \geq \frac{C^2}{r_2}$ (α, β) üzerinde olsun. $J(u) \leq 0$ olacak şekilde (α, β) aralığının bir açık alt aralığında özdeş $y \neq 0$ tanımlı y fonskiyonu var ise

$L(z) = 0$'ın her çözümü aşağıda verilen özelliklerden birine sahiptir.

$i)$ (α, β) aralığı üzerinde z en az bir sıfıra sahiptir.

$ii)$ (α, β) aralığı üzerinde $G \equiv \frac{C^2}{r_2}$ dir ve $z(x)$ fonksiyonu, $[\alpha, \beta]$ aralığında bulunan bir x_0 sabiti için,

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}\left[-C(x)\frac{1}{r_2(x)}\right]dx}$$

ifadesinin bir sabit katıdır.

İspat: (3.2.33) denklemindeki integral kareler toplamı olarak yazılırsa,

$$J(y) = \int_{\alpha}^{\beta} [r_2\left(X - \left(\frac{Cy}{r_2}\right)\right)^2 + \left(G - \left(\frac{C^2}{r_2}\right)\right)y^2]dx$$

olur. (α, β) aralığında r_2 pozitif ve $G \geq \frac{C^2}{r_2}$ olduğundan $J(y) \geq 0$ dır. Eşitlik (α, β) aralığında $X \equiv \frac{Cy}{r_2}$ ve $G \equiv \frac{B^2}{r_2}$ durumlarını sağlar. $X \equiv \frac{Cy}{r_2}$'den X yerine yazıldığı takdirde,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{z}\right] = X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{Cy}{r_2 z}$$

ve ya

$$\frac{y}{z} = K\, e^{\left[\int_{x_0}^{x}\left[C(x)\frac{1}{r_2(x)}\right]dx\right]}$$

elde edilir. Buradaki K sabiti sıfırdan farklı ve x_0 birer sabit olmak üzere $G \equiv \frac{C^2}{r_2}$ ve $z(x)$ de

$$e^{\int_{x_0}^{x}\left[-C(x)\frac{1}{r_2(x)}\right]dx}$$

fonksiyonunun bir katı olmadığı sürece $J(u) > 0$ dır. Bu durumda $Lz = 0$ denkleminin her çözümü (α, β) aralığı üzerinde en az bir sıfırı vardır.

Teorem 3.2.15. (α, β) aralığı üzerinde $G \geq \frac{C^2}{r_2}$ olsun. Bu aralık üzerinde; $V(y) > 0$ ve $y(\alpha) = y(\beta) = 0$ olacak şekilde $Ly = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir y çözümü varsa, $Lz = 0$ denkleminin her çözümünde en az bir sıfıra sahiptir.

İspat: $V(y) > 0$ olsun. Bu durumda $J(y) < j(y)$ dir. (α, β) aralığı üzerinde $Ly = 0$ ve $y(\alpha) = y(\beta) = 0$ olduğu takdirde *Green* formülü uygulanırsa,

$$\int_{\alpha}^{\beta} y(Ly)dx + j(y) = [\, r_1 yy'\,]_{\beta}^{\alpha}$$

yazılabilir. $j(y) = 0$ olduğundan $J(y) < 0$ elde edilir. Teorem 3.2.13 ve hipotez gereği bir çelişki belirtir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.16. $0 \leq x < \infty$ aralığında, b ve p_1'ler sürekli fonksiyonlar ve $p_1(x) \geq 0$ olsun. Şayet y ve z denklemleri sırasıyla;

$$y'' + b(x)y' - p_1(x)y > 0$$

$$z'' + b(x)z' - p_1(x)z = 0$$

denklemlerini sağlayacak şekilde $0 \leq x < \infty$ aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonlar ve

$$y(0) = z(0) = y'(0) = z'(0)$$

koşulları var ise, bu takdirde $0 < x < \infty$ aralığında $y(x) > z(x)$ dir.

İspat: $w = y - z$ dönüşümü yapıldığında;

$$w' = y' - z'$$

$$w'' = y'' - z''$$

dir. $w'' = y'' - z''$ dönüşümü için gerekli işlemler yapıldığında,

$$y'' - z'' + b(x)(y' - z') - p_1(x)(y - z) > 0$$

dır. Hipotezden w,

$$w'' + b(x)w' - p_1(x)w > 0 \quad , \quad w(0) = w'(0) = 0 \qquad (3.2.34)$$

eşitsizliğini sağlar ve bir $0 < x < x_0$ aralığında $w(x) > 0$ bulunur. Diyelim ki $x > x_0$ için $w(x) \leq 0$ olsun. Bu takdirde $w(x)$ bir yerel maksimumda öyle ki $\exists x > 0$ noktası vardır. $w'(x_1) = 0$ ve $w(x_1) = 0$ dır. Dolayısıyla (3.2.34) denkleminden $w''(x_1) > 0$ dır. Bu eşitsizlik yerel maksimum ile çelişir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Levin , 1960 yılında Sturm Karşılaştırma Teoremini farklı bir yoldan incelemiştir. İzlediği yol,

$$y'' + p_1(x)y = 0 \qquad (3.2.35)$$

$$z'' + p_2(x)z = 0 \qquad (3.2.36)$$

denklemleri sırasıyla $u = -\frac{y'}{y}, v = -\frac{z'}{z}$ dönüşümleriyle;

$$u' = u^2 + p_1(x) \tag{3.2.37}$$

$$v' = v^2 + p_2(x) \tag{3.2.38}$$

$Riccati$ diferansiyel denklemlerine dönüştürmedir. Bu yol daha öncelerde $Hille, Hartman\ ve\ Wintner$ ünlü matematikçileri tarafından diferansiyel denklemler için salınımlarında kullanılmıştır.

Teorem 3.2.17. (Levin)

$y(x)$ ve $z(\alpha)$ fonksiyonları sıfırdan farklı, (3.2.35) ve (3.2.36) denklemlerinde aşikar olmayan $[\alpha, \beta]$ aralığında birer çözümleri olsun. $\forall x \in [\alpha, \beta]$ için;

$$-\frac{y'(x)}{y(\alpha)} + \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt > \left| -\frac{z'(\alpha)}{z(\alpha)} + \int_{\alpha}^{x} p_2(t)dt \right| \tag{3.2.39}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu takdirde $[\alpha, \beta]$ aralığında $z(x)$ denklemi sıfırdan farklı ve

$$-\frac{y'(x)}{y(x)} > \left|\frac{z'(x)}{z(x)}\right| \quad , \qquad \alpha \le x \le \beta \tag{3.2.40}$$

biçimindedir.

İspat: $y(x)$ fonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan $[\alpha, \beta]$ üzerinde $u = -\frac{y'}{y}$ fonksiyonu sürekli olup, $u' = u^2 + p_1(x)$ olan $Riccati$ denklemini sağlar. Bu takdirde;

$$\int_{\alpha}^{x} u'(t)dt = \int_{\alpha}^{x} u^2(t)dt + \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt$$

$$u(x) - u(\alpha) = \int_{\alpha}^{x} u^2(t)dt + \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt$$

$$u(x) = u(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} u^2(t)dt + \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt \tag{3.2.41}$$

adımları yapıldığında denklemi bulunur. (3.2.39) şartından;

$$u(x) \ge u(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt$$

$$u(x) \geq -\frac{y'(\alpha)}{y(\alpha)} + \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt > 0 \tag{3.2.42}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer yandan $z(\alpha)$ sıfırdan farklı olduğundan $v = -\frac{z'}{z}$ denklemi sürekli olup, $v' = v^2 + p_2(x)$ *Riccati* denklemini sağlar. Buradan benzer işlemler yapılırsa,

$$v(x) = v(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} p_2(t)dt \tag{3.2.43}$$

denklemi bulunur. Burada bir $[\alpha, \mu]$ aralığı kabuldür. Dolayısıyla $\alpha < \mu \leq \beta$ olacak şekilde öyle bir μ vardır. (3.2.39) ve (3.2.43) denklemlerinden,

$$v(x) \geq v(\alpha) + \int_{\alpha}^{x} p_2(t)dt$$

$$> -u(\alpha) - \int_{\alpha}^{x} p_1(t)dt$$

$$\geq -u(x) \ , \ \alpha \leq x \leq \mu$$

olur. Dolayısıyla $u(x) > -v(x)$ dir.

$$u(x) > |v(x)| \tag{3.2.44}$$

olduğunu gösterelim. Burada $\alpha \leq x \leq \mu$ aralığında $u(x) > v(x)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diyelim ki $v(x_0) \geq u(x_0)$ olsun. $[\alpha, \mu]$ üzerinde bir x_0 noktası var olsun. (3.2.39) eşitsizliğinden $x = \alpha$ için $u(\alpha) > |v(\alpha)|$ ve $[\alpha, \mu]$ üzerinde

u ve v'ler sürekli fonksiyon olduğundan $\alpha \leq x \leq x_1$ için $u(x) > v(x)$ ve

$v(x_1) = u(x_1)$ olacak şekilde $x \in (\alpha, x_0]$ vardır. $u(x) > -v(x)$ eşitsizliğini ele alırsak $\alpha \leq x \leq x_1$ için $u(x) > |v(x)|$ yazılır ve buradan verilen aralıkta

$$\int_{\alpha}^{x_1} v^2(t)dt < \int_{\alpha}^{x_1} u^2(t)dt$$

dır. Dolayısıyla (3.2.39), (3.2.43) ve (3.2.41) denklemleri ele alınırsa,

$$v(x_1) = v(\alpha) + \int_{\alpha}^{x_1} p_2(t)dt + \int_{\alpha}^{x_1} u^2(t)dt$$

$$< v(\alpha) + \int_{\alpha}^{x_1} p_1(t)dt + \int_{\alpha}^{x_1} u^2(t)dt = u(x_1)$$

bulunur. Bu ise bir çelişki belirtmiş olup $\alpha < \mu < \beta$ aralığında $[\alpha, \mu]$ üzerinde (3.2.44) denklemi sağlanır. Ayriyetten v fonksiyonunun tüm $[\alpha, \beta]$ 'da sürekli olduğundan (3.2.44) denklemi bu aralıkta geçerlidir. Bu durumda $|v(x)|$ sınırlı olduğundan $z(x)$ denklemi sıfırdan farklıdır. ∎

Teorem 3.2.18. (Levin) $y(x)$ ve $z(\beta)$ fonksiyonları sıfırdan farklı, $[\alpha, \beta]$ üzerinde sırasıyla (3.2.37) ve (3.2.38) denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri olsun. $\forall x \in [\alpha, \beta]$ için,

$$\frac{y'(\beta)}{y(\beta)} + \int_{\alpha}^{\beta} p_1(t)dt > \left|\frac{z'(\beta)}{z(\beta)} + \int_{\alpha}^{\beta} p_2(t)dt\right| \tag{3.2.45}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $[\alpha, \beta]$ üzerinde $z(x)$ sıfırdan farklı ve

$$\frac{y'(x)}{y(x)} > \left|\frac{z'(x)}{z(x)}\right|, \alpha \leq x \leq \beta \tag{3.2.46}$$

dir.

Bahsetmiş olduğumuz Sturm Ayırma ve Karşılaştırma teoremleri, denklemlerin çözümü olan sıfırlarının durumunu belirlemenin yanında salınımlılığını da incelenmesinde önemli yer ayırır. Bu salınımlılığa ilişkin bazı sonuçlar üzerinde duralım.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ fonksiyonları, $x_0 \geq 0$ için $x_0 \leq x < \infty$ aralığında sıfırdan büyük reel değerli sürekli fonskiyonlar olsun. Bu durumda $p_1(x) \leq p_2(x)$ olmak üzere;

$$y'' + p_1(x)y = 0 \tag{3.2.47}$$

$$y'' + p_2(x)y = 0 \tag{3.2.48}$$

şeklinde tanımlı diferansiyel denklemlerini ele alalım.

Tanım 3.2.1. $(x_0, \infty]$ üzerinde (3.2.47) denkleminin bir aşikar olmayan çözümünde sonsuz tane sıfırı var ise, bu verilen aralıkta salınımlı, aksi takdirde (3.2.47) denkleminin bir aşikar olmayan çözümü $[x_0, \infty)$ üzerinde sonlu tane sıfırları var ise verilen aralıkta salınımsızdır.

(3.2.47) denkleminin çözümleri Sturm Ayırma teoreminden ya salınımlıdır ya da salınımsızdır. Buna göre (3.2.47) diferansiyel denkleminin her çözümü salınımlı ise denklem salınımlı, aksi mümkünse salınımsızdır.

(3.2.47) diferansiyel denkleminin kapalı ve sınırlı I aralığı üzerinde tanımlı aşikar olmayan bir çözümünde sıfırlarının sayısı sonlu olduğundan, bu kapalı ve sınırlı aralıkta diferansiyel denklemi salınımsızdır.

Sturm Karşılaştırma teoremi kullanılarak, karşılaştırılan iki diferansiyel denklem için birinin salınım özelliği bilindiği takdirde diğerinin salınım özelliğini bilmek mümkündür. Örnek verecek olursak;

$$y'' + \left(\frac{m}{x^2}\right) y = 0 \qquad (3.2.49)$$

biçiminde verilen diferansiyel denklemini incelediğimizde, kolaylıkla ifade edilir ki $m \leq \frac{1}{4}$ olduğunda salınımsızdır. Ayrıca ε sıfırdan büyük olmak üzere $m = \frac{(1+\varepsilon)}{4}$ olduğunda salınımsızdır.

Teorem 3.2.19. ε sıfırdan büyük olmak üzere $\forall\, x \geq x_0 > 0$ aralığı için şayet $p_1(x) \geq (1+\varepsilon)\frac{1}{4x^2}$ ise (3.2.47) diferansiyel denklemi salınımlıdır.

İspat : m sıfırdan büyük bir sabit olmak üzere $y'' + m^2 y = 0$ denklemi salınımlı olup $x^* = e^x$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx^*}\frac{dx^*}{dx} = \frac{dy}{dx^*}e^x = x^*\frac{dy}{dx^*}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(x^*\frac{dy}{dx^*}\right) = \frac{dx^*}{dx}\frac{dy}{dx^*} + x^*\frac{d^2y}{d(x^*)^2}\frac{dx^*}{dx} = x^*\frac{dy}{dx^*} + (x^*)^2\frac{d^2y}{d(x^*)^2}$$

dır. Tanımlanan denklemde yerine yerleştirildiğinde;

$$(x^*)^2\frac{d^2y}{d(x^*)^2} + x^*\frac{dy}{d(x^*)^2} + m^2y = 0$$

elde edilir, yine $y = \frac{z}{\sqrt{x^*}}$ dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{d^2y}{d(x^*)^2} = \frac{\frac{d^2z}{d(x^*)^2}\sqrt{x^*} - \frac{1}{2\sqrt{x^*}}\frac{dz}{dx^*}}{x^*} - \frac{\frac{dz}{dx^*}(x^*)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}z\sqrt{x^*}}{(x^*)^3}$$

$$\frac{dy}{dx^*} = \frac{\frac{dz}{dx^*}}{\sqrt{x^*}} - \frac{z}{(x^*)^{\frac{3}{2}}}$$

dir. Denklemleri aynı şekilde diferansiyel denklemde yerine yerleştirilirse;

$$2z'' + x^{\frac{3}{2}} \frac{z}{2\sqrt{x}} (1 + m^2) = 0$$

$$z'' + \frac{(1 + m^2)}{4x^2} z = 0$$

şeklinde kanonik formu elde edilir. Bu denklem salınımlıdır çünkü, daha önce ifade ettiğimiz uyarı 3.2.2 'den dönüşümler $y'' + m^2 y = 0$ denkleminin sıfırlarının sayısını etkilemez. Böylece teorem, teorem 3.2.5 'den,

$$p_1(x) \geq \frac{1 + 4m^2}{4x^2} = \frac{1 + \varepsilon}{4x^2}$$

$\varepsilon > 0$ koşulu gereği (3.2.47) diferansiyel denklemi salınımlı olur.

Sonuç 3.2.2. $\forall\, x \geq x_0 \geq 0$ için,

$x^2 p_1(x) \leq \frac{1}{4}$ ise (3.2.48) diferansiyel denklemi salınımsızdır.

Sonuç 3.2.3. $\forall x \geq x_0$ için $p_1(x) \leq 0$ olsun. Bu takdirde (3.2.48) diferansiyel denklemi salınımsızdır.

Teorem 3.2.20. φ fonksiyonu, $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ olacak şekilde sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$y'' + \big(1 + \varphi(x)\big)y = 0 \qquad (3.2.50)$$

denkleminin aşikar olmayan çözümü salınımlıdır.

İspat : Gerekli büyüklükte x_0'lar için kabul gereği,

$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$ olduğundan $x \geq x_0$ için $|\varphi(x)| \leq \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ olacak şekilde yazılabilir. Buradan; $-\varepsilon \leq \varphi(x) \leq \varepsilon$ olup her tarafına 1 eklendiği takdirde

$1 - \varepsilon \leq \varphi(x) + 1 \leq \varepsilon + 1$ elde edilir. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ tanımlarsak $x \geq x_0$ için,

$1 + x \geq x_0 \geq \frac{1}{2}$ olur. $y'' + \frac{1}{2} y = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleri salınımlı olduğundan Teorem 3.2.5 gereği (3.2.50)'nin aşikar olmayan çözümleri salınımlıdır.

Teorem 3.2.21. $p_1(x) \geq m^2 > 0$ aralığında $\forall x$ için m gerçel sabit sayısı var ise, (3.2.48) diferansiyel denkleminin aşikar olmayan çözümleri salınımlıdır.

İspat : $y'' + m^2 y = 0$ diferansiyel denkleminin salınımlı olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla teorem 3.2.5 gereği ifade kolaylıkla görülür.

Teorem 3.2.22. Şayet $\lim_{x\to\infty} p_1(x) = \infty$ ise, (3.2.48) diferansiyel denkleminin tüm aşikar olmayan çözümleri salınımlıdır.

İspat : Hipotez gereği x_0'dan büyük $\forall x$ için $p_1(x) > m^2 > 0$ olduğu kolayca görülür. Bu takdirde $y'' + m^2 y = 0$ denkleminin her aşikar olmayan çözümü salınımlı olduğundan Teorem 3.2.5 gereği istenilen sonuç elde edilir.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ fonksiyonları;

$$p_1(x) = \int_x^\infty p_1(t)\ ,\ p_2(x) = \int_x^\infty p_2(t)dt$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.23. (Hille-Wintner)

$0 < \alpha \leq \infty$ için $0 \leq p_2(x) \leq p_1(x)$ olacak şekilde $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ integral denklemleri yakınsak kabul edilsin. Buradan p_1 ve p_2 fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda; (3.2.47) diferansiyel denklemi şayet salınımsız ise (3.2.48) diferansiyel denklemi de salınımsızdır. Aksi takdirde (3.2.47) diferansiyel denklemi salınımlı ise (3.2.47) diferansiyel denklemi de salınımlıdır.

Hille tarafından bu teorem $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ fonksiyonlarının pozitif olması durumunda ifade edilmiştir. Ancak sonralarda Wintner p_1 ve p_2 fonksiyonlarının üzerinde çalışarak pozitiflik şartının yanısıra tüm koşullar için de bulunacağını ifade etmiş ve ispatlamıştır.

BÖLÜM 4
PRÜFER DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde Prüfer dönüşümünün tanımı yanısıra Sturm teorisiyle olan ilişkisi hakkında bilgi verilmiştir.

4.1 Giriş

Ünlü matematikçi $Heinz\ Prüfer$ (1896-7934) 1926 yılında, Prüfer dönüşümü adı altında Sturm Liouville diferansiyel denklemini bir doğrusal olmayan bir denklem sistemine dönüştürür. Bu sistemdeki denklemlerden biri doğrusal ve diğeri doğrusal olmayan denklemdir.

4.2 Prüfer Dönüşümü ve Sturm Teorisi

$r(x)$ fonksiyonu sıfırdan büyük ve I aralığı üzerinde tanımlı reel değerli kabulünde fonksiyonlar olmak üzere,

$$(r(x)y)' + p(x)y = 0 \qquad (4.2.1)$$

lineer homojen Sturm Liouville denklemini inceleyelim. $r(x) = 1$ ve $p(x)$ fonksiyonu sabit terim olup (4.2.1) denklemi sabit katsayılı bir lineer homojen Strum Liouville denkleminde çözüm fonksiyonları sinüs ve kosinüstür. Bilindiği üzere, sinüs fonksiyonunun salınımları dik koordinat sisteminde birim çemberdeki ordinat ekseni üzerinde bulunan değerler ile tanımlandığında, aynı noktaların apsisleri de kosinüs fonksiyonunda değerleridir. Ayriyetten sinüs fonksiyonunun türevi kosinüs fonksiyonudur. Tanımlanan bu iki fonksiyonu ele alırsak;

$$y = \sigma sin\theta$$

$$ry' = \sigma cos\theta \qquad (4.2.2)$$

bağıntıları ile verilen σ, θ fonksiyonları (4.2.1) denkleminin sıfırlarının incelenmesi üçüncü bölüme kıyasla daha kısa ve net ifadelerdir. Böylece, y fonksiyonu (4.2.1) denkleminin aşikar olmayan çözümü olduğu takdirde (4.2.2) bağıntılarının yardımıyla yapılan dönüşüme Prüfer dönüşümü denir.

(4.2.2) $y = \sigma sin\theta$ bağıntısının x'e göre türevi alınıp r ile çarpılırsa;

$$ry' = r\sigma' sin\theta + r\theta'\sigma cos\theta$$

bulunur. Daha düzenli yazıldığı takdirde;

$$r\sigma' sin\theta + r\sigma\theta' cos\theta = rcos\theta \tag{4.2.3}$$

denklemi elde edilir.

(4.2.2) denklemindeki ikinci bağıntının da türevi alınıp

$$\frac{d}{dx}(ry') = \sigma' cos\theta - \theta'\sigma sin\theta$$

(4.2.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sigma' cos\theta - \sigma\theta' sin\theta = -p(x)\sigma sin\theta \tag{4.2.4}$$

ifadesi elde edilir.

σ' ve θ' 'e göre lineer olan (4.2.3) ve (4.2.4) denklemlerinden

$$\sigma'(rsin\theta) + \theta'(r\sigma cos\theta) = \sigma cos\theta$$

$$\sigma' cos\theta + \theta'(-\sigma sin\theta) = -p(x)\sigma sin\theta$$

denklem sistemi oluşturulabilir. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{aligned} |A| &= -r\sigma sin^2\theta - r\sigma cos^2\theta \\ &= -r\sigma(sin^2\theta + cos^2\theta) \\ &= -r\sigma \end{aligned}$$

dır. (4.2.2) bağıntısından,

$$\sigma^2 = (ry')^2 + y^2$$

olduğundan, fonksiyonları aynı anda sıfır olmadığından $\sigma(x) \neq 0$'dır. Diyelim ki $\sigma > 0$ olsun. Determinant sıfırdan farklı olup (4.2.3) ve (4.2.4) denklemlerinden

$$\sigma' = \left(\frac{1}{r} - p\right)\sigma \sin\theta(x)\cos\theta(x)$$

$$\theta' = \frac{1}{r}\cos^2\theta(x) + p\sin^2\theta(x) \tag{4.2.5}$$

biçiminde denklem sistemi elde edilir.

Bu iki denkleme Prüfer sistemi, σ ve θ fonksiyonlarına da (4.2.1) denklemine istinaden Prüfer fonksiyonları denir. y fonksiyonu, (4.2.1) denkleminin çözümü olduğundan (4.2.2) bağıntıları ile tanımlı olan σ ve θ fonksiyonları (4.2.5) denklem sistemlerini sağlar. Bu ifadenin eğer tersi mümkünse yani; (σ, θ) Prüfer sisteminin bir çözümü ise, (4.2.3) denkleminden (4.2.2) denklemindeki ilk bağıntı ile tanımlı y fonksiyonu ikinci bağıntıyı destekleyen bir türeve sahiptir. Bu takdirde σ' ve θ' (4.2.4) denklemini sağladığından dolayı y fonksiyonu, (4.2.1) denkleminin çözümüdür. Böylece, (4.2.5) ve (4.2.1) denklemleri denktir.

Ayrıca (4.2.5) Prüfer sistemi lineer değildir. Fakat σ fonksiyonu için geçerli değildir. Yani, ikinci denklem $\theta' = F(r, \theta)$ tipindedir. Burada,

$$F(r,\theta) = \frac{1}{r}\cos^2\theta + p\sin^2\theta$$

olup *Lipschitz* şartını sağlar. Buna göre bu denklem bir $\theta(x_1) = \alpha$ başlangıç şartını adı altında tek bir çözüme sahiptir. Bu çözüm; birinci denklemde yerine koyulursa σ,

$$\sigma' = \left(\frac{1}{r} - p\right)\sigma \sin\theta(x)\cos\theta(x)$$

$$\frac{\theta'}{\theta} = \left(\frac{1}{r} - p\right)\sin\theta(x)\cos\theta(x)$$

$$\ln|\theta| = \int\left(\frac{1}{r(s)} - p(s)\right)\sin\theta(s)\cos\theta(s)ds$$

$$\sigma = e^{\int\left(\frac{1}{r(s)} - p(s)\right)\sin\theta(s)\cos\theta(s)ds} \tag{4.2.6}$$

biçiminde integral denklemi ile bulunabilir.

Prüfer dönüşümleri sonrasında bulunan σ ve θ fonksiyonları yardımı ile de (4.2.1) denkleminin çözümü rahatlıkla bulunabilir.

Prüfer dönüşümü aşağıdaki örnekle daha net bir şekilde anlaşılabilir.

Örnek 4.2.1.

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right) + p(x)y(x) = 0$$

homojen diferansiyel denkleminde; $p(x) = 1, r(x) = 1$ koşullarını sağlayan $y'' + y = 0$ diferansiyel denklemini Prüfer dönüşümü ile çözelim.

$$y = \sigma\sin\theta$$

$$y' = \sigma\cos\theta$$

$$y'' = \sigma' \cos\theta - \theta'\sigma \sin\theta$$

Denklemlerinin $y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminde yerine yerleştirirsek;

$$\sigma' \cos\theta - \theta'\sigma \sin\theta = -\sigma \sin\theta$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sigma \sin\theta) = \sigma' \sin\theta + \sigma\theta' \cos\theta$$

dır. $\frac{dy}{dx}$ yerine $\sigma \cos\theta$ yazılırsa;

$$\sigma' \sin\theta + \theta'\sigma \cos\theta = \sigma \cos\theta$$

bulunur. Devamında,

$$\sigma' \cos\theta - \theta'\sigma \sin\theta = -\sigma \sin\theta$$

$$\sigma' \sin\theta + \theta'\sigma \cos\theta = \sigma \cos\theta$$

eşitliği vardır. Ayrıca gerekli işlemler yapıldığı takdirde;

$$AX = b \quad X = \begin{pmatrix} \sigma' \\ \theta' \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -\sigma \sin\theta \\ \sigma \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sigma \sin\theta \\ \sin\theta & \sigma \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \sigma$$

olduğundan,

$$\sigma' = \frac{|A_1|}{|A|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = c_1$$

biçiminde kolayca hesaplanır. Benzer şekilde $\theta' = 1$ olup $\theta = x + c_2$ dir. Dolayısıyla,

$$y = c_1 \sin x \;\Rightarrow\; y_1(x) = c_1 \sin x$$

$$y' = c_2 \cos x \;\Rightarrow\; y_2(x) = c_2 \cos x$$

çözümleri elde edilir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Bu tezde ağırlıklı olarak ikinci mertebe Sturm Liouville diferansiyel denklemi incelenmiştir.

Sturm Liouville denkleminin incelenmesinden önce diferansiyel denklemler teorisinin temel tanım ve teoremleri sunulmuş ve yüksek mertebeden diferansiyel denklemler ile sistemler arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

İkinci mertebeden doğrusal Sturm-Liouville (SL) denklemi

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dy}{dt}\right] + q(t)y = -\lambda w(t)y$$

ile verilen, özdeğer problemi olarak da bilinen adi diferansiyel denklemler teorisinin en önemli denklemlerinden biridir. Bu denkleme ait salınım teorisi alanında pek çok sonıç vardır. Salınım teorisi mekanikten elektriğe, optikten ekonomi ve sosyal bilimlere, biyolojiden fiziğe bir çok alanda uygulamaları bulunan bir alandır ve Sturm karşılaştırma teoremine dayanmaktadır. Çözümleri bilinen/bulunabilen bir denklemin katsayıları ile başka bir denklemin katsayıları karşılaştırılarak çözümleri bilinmeyen denklemin çözümlerinin sıfırlarının varlığı ve yerleri konusunda fikir sahibi olmamızı sağlar. Dolayısıyla herhangi bir denklem çözülemiyor olsa bile çözümlerinin sıfırlarını bilmek birçok fayda sağlamaktadır.

Ayrıca bu tezde Prüfer dönüşümü ele alınmıştır. Prüfer dönüşümü Sturm Liouville diferansiyel denklemini bir doğrusal olmayan bir denklem sistemine dönüştürür. Bu sistemdeki denklemlerden biri doğrusal ve diğeri doğrusal olmayan denklemdir. Doğrusal olmayan denklem sadece tek değişken içermektedir. Dolayısıyla çözüldüğünde diğer doğrusal denklemin çözümü de rahatlıkla bulunabilir.

KAYNAKÇA

COLE, R., (1968) Theory of Ordinary Differential Equation Appleton –Century-Crofts, New York.

ERKIP, A., (1992) Introduction to Theoretical Aspects of Ordinary Differential Equations, METU-ANKARA.

HARTMAN, P., (1964)Ordinary Differential Equations, Wiley New York.

HILLE, E., (1969) Lectures on Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, Reading.

HUMI, M. And MILLER, W., (1988) Second Course in Ordinary Differential Equation for Scientits and Engineers. Springer Verlag, New York.

LEIGHTON, W., (1970) Ordinary Differential Equations, Wordsworth, Belmont, Calif.

LEIGHTON, W., (1968), Some elementary sturm theory, Journal of Differential Equations 4, 187-193

LEVIN, A. Ju., (1960), A Comparison principle for second order differential equations, Soviet Math. Dokl. 1 1313-1316.

RAO, R.M., (1980) Ordinary Differential Equations, Edward, Arnold Limited, London.

ROSS, L.s. , (1984)Differential Equations, Wiley, New York.

SWANSON, C.A., (1968) Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, New York.

ZETTL, A., (2005), Sturm–Liouville Theory, in: Mathematical Surveys and Monographs, vol. 121, American Mathematical Society.