YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

NORMAL OLMAYAN MODAL LOJİKLER VE SEMANTİKLER

SÜLEYMAN POLAT

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MEHMET TERZİLER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SUNUM TARİHİ: 21.03.2019

BORNOVA / İZMİR
ŞUBAT 2019

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Doktora tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

<u>Jüri Üyeleri:</u>	**<u>İmza:</u>**
Prof. Dr.Mehmet TERZİLER Yaşar Üniversitesi	....
Prof. Dr.Fırat ATEŞ Balıkesir Üniversitesi	....
Doç. Dr.Tahsin ÖNER Ege Üniversitesi	....
Dr. Öğr. Üyesi Esra DALAN YILDIRIM Yaşar Üniversitesi	....
Dr. Öğr. Üyesi Şule AYAR ÖZBAL Yaşar Üniversitesi	....

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

NORMAL OLMAYAN MODAL LOJİKLER VE SEMANTİKLER

Polat, Süleyman
Doktora Tezi, Matematik
Danışman: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bu tezde; temel modal önermesel dil baz alınarak normal ve normal olmayan modal lojikler üzerine yapılan çalışmalar ayrıntılı kanıtlarla gözden geçirilmiştir. Bu lojikler için tanımlanan bağıntısal, topolojik, komşuluk ve cebirsel semantikler tezin son bölümünde karşılaştırılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

- Bağıntısal semantik komşuluk semantiğinin bir alt semantiğidir.
- Komşuluk semantiği cebirsel semantiğin bir alt semantiğidir.
- Her cebirsel (dolayısıyla her komşuluk, her bağıntısal) çatı klasiktir.

“Bağıntısal çatılar (a izomorf) olmayan normal komşuluk çatılarının olup olmadığı ve varsa bağıntısal çatılar (a izomorf) olan komşuluk çatılarının nasıl karakterize edildiği” sorusuna sırasıyla **esas süzgeç** ve **atomlu Boole cebiri** kavramları kullanılarak yanıt verilmiştir.

Ayrıca Sezgisel Önermeler Lojiği (IPL) için Kripke semantiği, Heyting semantiği ve topolojik semantiği sunuluyor. IPL’ nin bu semantiklere göre sağlam ve tam olduğu gösteriliyor.

Anahtar sözcükler: Normal Lojikler, Normal Olmayan Lojikler, Bağıntısal, Topolojik, Komşuluk, Cebirsel Semantikler, Tamlık, Tanımlanabilirlik, Alt semantik.

ABSTRACT

NON-NORMAL MODAL LOGICS AND SEMANTICS

Polat, Süleyman
PHD, Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

In this thesis; studies on normal and non-normal modal logics based on basic modal propositional language have been reviewed with detailed proofs. The relational, topological, neighborhood and algebraic semantics for these logics were compared in the last chapter of the thesis and the following results were obtained:

- The relational semantics is a subsemantics of the neighborhood semantics.
- The neighborhood semantics is a subsemantics of the algebraic semantics.
- Each algebraic (hence every neighborhood, every relational) frame is classical.

We give an answer to the following question using the notions of prime filters and atomik Boolean algebras, respectively:

"Are there normal neighborhood frames which are not (isomorphic to) relational frames and if available, how to characterize neighborhood frames which are (isomorphic to) relational frames"?

Also, we present three semantics for Intuitionistic Propositional Logic (IPL); namely, Kripke semantics, Heyting semantics, and topological semantics. We show that IPL is sound and complete with respect to these semantics.

Keywords: Normal Logics, Non-normal Logics, Relational, Topological, Neighborhood, Algebraic Semantics, Completeness, Definability, Subsemantics.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Prof.. Dr. Mehmet TERZİLER' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Süleyman Polat

İzmir, 2019

YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "NORMAL OLMAYAN MODAL LOJİKLER VE SEMANTİKLER" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Süleyman Polat

İMZA

…………………………….

25 Mart 2019

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Modal lojik Aristo' nun **gerekli** (necessary) ve **olası** (possible) sözcüklerini içeren önermeleri incelemesi ile başladı. Modal lojiğin erken tarihçesi için *(Bochenski, 1969)* ve *(Kneale, W., ve Kneale, M., 1962)* kaynaklarına; daha sonraki gelişimi için *(Goldblatt, R., 2006)* kaynağına başvurulabilir.

A bir önerme olmak üzere bir **modalite**; A' nın **doğruluk modu** hakkında bir iddiada bulunan yeni bir önerme oluşturmak için A' ya uygulanabilen bir sözcük ya da ifadedir. Bu tezde evrensel karakterli bir modalite için □ sembolü ve varlıksal karakterli olan için ◊ sembolü kullanılacaktır.

Modaliteli ya da modal operatörlü önermelerin ilk kayda değer analizi 1880-1906 yılları arasında MacColl tarafından yapılan *(MacColl, 1897)* ve *(MacColl, 1906)* çalışmalarla gerçekleştirildi. *(Read, 1998)* çalışmasında Read, MacColl' un önerdiği modal cebirin **T** modal lojiğine karşılık geldiğini savunur.

1930' lu yıllardan itibaren modal lojik için iki tür matematiksel semantik geliştirildi: **Cebirsel semantik** ve **bağıntısal semantik**. İlki, modal bağlaçları Boole cebirleri üzerindeki operatörler gibi yorumlar. İkincisi, elemanları **olası dünyalar** (possible worlds), zamanın anları ya da bilgisayarın durumları (states) olarak düşünülen ve genellikle **Kripke modelleri** adı verilen bağıntısal yapıları kullanır. Bu iki yaklaşım yakından ilişkilidir: bir bağıntısal yapının alt kümeleri bir **modal cebir** (operatörlü Boole cebiri) oluştururken, tersine bir modal cebir Stone Boole gösterilim teoreminin (Stone Representation Theorem) genişletilmesi yoluyla bir bağıntısal yapının alt kümelerinin bir cebirine gömülebilir.

Modal lojik için ilk çağdaş formel aksiyom sistemleri C. I. Lewis' e aittir. Lewis ve Langford birlikte beş farklı aksiyom sistemi, (S1)-(S5), tanımladılar *(Lewis, 1959).* Lewis, koşullu bağlacının cebirsel ve alışılmış anlamları arasındaki farka dikkat çektikten sonra **sıkı koşullu** (strict implication) operatörünü tanımlamak için bir

olanaksızlık (impossibility) operatörü ilkelini kullandı ve olası için ◊ sembolünü benimsedi.

(S1)-(S5) sistemlerinin tüm totolojileri teorem olarak içerdiği açık gibi görünse de kanıtlanmasının hayli ayrıntı gerektirdiği *(Hughes ve Cresswell, 1968)*' de gösterildi. Ancak bu sistemler, önermeler lojiği için bir baz doğrudan genişletilerek tanımlanırsa, sözü edilen ayrıntılı incelemeye gerek yoktur. Böyle bir yaklaşımı ilk kullanan Gödel' in aksiyomatik tarzı lojiklerin sunumu için standart bir uygulama olmuştur *(Gödel, 1933)*. Gödel' in

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$

ikinci aksiyomunu içeren ve $\frac{\alpha}{\Box\alpha}$ **gereklilik** (necessitation) kuralına kapalı bir lojiğe **normal** adı verilir. En küçük normal lojik, Kripke' nin onuruna, **K** ile gösterilir. Gödel tarzında normal olmayan (S1)-(S3) sistemlerinin ilk biçimlendirilmesi *(Lemmon, 1957)*' de yer alır.

Çağdaş önermeler lojiği, Boole düşüncesinde, cebir olarak başladı. Aynısı, MacColl düşüncesinde, çağdaş modal lojik için doğrudur. Lewis sistemlerinin oluşturulduğu zamana kadar cebir, aksiyomatik bir bilim olarak, iyi yapılandırılmış ve soyut cebir kavramı ilk kez Garett Birkhoff tarafından kullanılmıştır *(Birkhoff, 1935)*. Bundan birkaç yıl sonra cebirsel teknikler, modal cebirler (◊ operatörünü yorumlamak için ek işlemli Boole cebirleri) kullanılarak modal sistemlerin çalışılmasına uygulanmıştır. Aynı zaman aralığında **operatörlü kafesler** için gösterilim teoremleri, Boole cebirlerinin Stone gösterilimi *(Stone, 1936)* çalışmasıyla geliştirilmiştir. Bu çalışmaların modal lojiğin semantik incelemeleri üzerinde önemli etkileri olmuştur.

Modalite ya da modal operatörlerin topolojik yorumlarına Tang' ın *(Tang, 1938)* makalesinde yer verilmiştir. McKinsey ve Tarski **kapanış** (closure) operatörlerinin bir soyut cebirsel çalışmasını başlatarak Kurotowski aksiyomlarını sağlayan birli bir C işlemli Boole cebiri olan **kapanış cebirini** (closure algebra) tanımladılar. Bu cebirler üzerine yapılan *(Jónsson ve Tarski, 1948)* çalışması, McKinsey-Tarski' nin sonuçlarına doğrudan uygulandığında -kapalı olarak- **S4** lojiğinin habercisi gibidir.

Tarski Kripke semantiğini icat etmiş olabilir mi? Böyle bir soru spekülasyon meselesi kalabilir; ama Tarski aynı zaman diliminde modal lojik üzerinde çalışıyordu ve bağıntısal yapılardaki doğruluk (truth) ve gerçeklenebilirlik (satisfiability) kavramlarının formelleştirilmesi dahil, modeller kuramının gelişiminde öncü rolünü oynuyordu. *(Copeland, 1996)* makalesinde Copeland, Tarski' nin 1962 yılında Kripke' ye " o zamanlar Kripke' nin yaptıklarını tam olarak kavrayamadığını" belirtiyor. Kripke' nin *(Kripke, 1959)* özel makalesinde **S4**, **S5** ve benzer sistemler üzerine yaptığı çalışmalarının Tarski' nin ve Kanger' in *(Kanger, 1957)* çalışmalarından tamamen bağımsız olduğu ileri sürülür.

1970'li yıllardan itibaren modal lojik türleri-epistemik (bilgi) lojik, deontik lojik, zaman (temporal) lojiği, dinamik lojik v. b.- kuramsal olduğu kadar, özellikle bilgisayar bilimleri alanında, uygulamalı bilimlerde kullanılır oldu. Daha fazla bilgi için (*Gabbay, Hodkinson ve Reynolds, 1994), (Fagin, Halpern, Moses ve Vardi, 1995), (Chagrov ve Zakharyaschev, 2002), (Kracht, 1999)* ve *(Marx ve Venema, 1997)* kaynaklarına bakılabilir. Ancak temel başvuru eser Chellas' ın *(Chellas, 1980)* kitabıdır.

Modal lojiklerin çalışılmasında başat öge **tamlık** (completeness) sorunudur. Bir lojiğin tamlığı tanımlanan semantiğe bağlıdır. Farklı semantiklerin hemen hemen tamamı şu özelliği paylaşır: Verilen bir modal modelde (ya da modal dilin yorumunda) her formül ya **doğru** ya da **yanlış**tır. Örneğin Kripke semantiğinde, her (erişilebilir) olası dünyada doğru olan bir formüle doğrudur denir; topolojik semantikte uzayın her noktasında doğru olan bir formüle doğrudur denir. Ancak modal diller olasılığa dayalı olarak yorumlanırsa, verilen bir modelde her bir formül 0 ve 1 doğruluk değerleri arasında bir **olasılık değeri** alır. Dana Scott *(Scott, 2009)* tarafından önerilen bu semantik, standart dışı rassal elemanlara sahip yapı türlerinin inşası için zengin içerikler sağlamasına karşın tamlık ile ilgili temel sorulara hala yanıt bulamamıştır. Olasılık semantiğine *(Lando, 2012)* çalışmasında ayrıntılı yer verilmiştir. Klasik lojik için olasılık semantiği üzerine çalışmalar *(Popper, 1959), (Field, 1977)* ve *(Keisler, 1985)* kaynaklarında yer alır.

Saul Kripke'nin modal loijk için tanımladığı semantiğin –**Kripke semantiği-** üzerinden neredeyse altmış yıl geçti. Modal önermelerin analizinde bu semantik kökeni Leibnitz' e dayanan fikirleri açıklığa kavuşturur; **gereklilik** (necessity) düşüncesi sadece **gerçek** (real) dünyada değil, tüm **olası** (possible) dünyalarda geçerlidir. Olası dünyalar modelinin ardındaki sezgisel fikir, doğru durumlar dışında, diğer **olası durumların** (possible states) ya da **dünyaların** (worlds) olmasıdır.

Günümüzde Kripke semantiği sadece felsefi çevreler değil, ama aynı zamanda dil bilimi (linguistik), bilgisayar bilimleri ve matematikte standart bir semantiktir; yalınlığı ve esnekliği modeller için diğer hiçbir semantik ile kıyaslanamaz.

Yukarıda değinildiği üzere, Kripke' den önce Tarski, kapalı biçimde, topolojik uzayları betimleyen bir lojik üzerinde çalıştı: Yeniden düzenlendiğinde **S4** modal lojiğinin aksiyomlarının topolojik uzay için üç aksiyoma benzediğinin farkına vardı. Daha açık bir ifade ile $\Box$ modal operatörünü uzayın bir bölgesinin **içi** (interior) gibi yorumlayarak **S4** lojiğinin topolojik uzayların lojiği olduğunu gösterdi. McKinsey ve Tarski' nin daha önce belirtilen çalışmaları günümüzde modal lojik için **topolojik semantik** denilen semantiğe yol açtı. Bu semantiğe göre tamlık kanıtları Kripke semantiğinden önce verilmiş olmasına karşın topolojik semantik büyük ölçüde unutuldu. Bunun iki temel nedeni vardır; birincisi, **S4** dışında, Kripke semantiğinin farklı önermesel ve yüklemsel modal lojiklere uygulanabilir olmasının sağladığı esneklik ve ikincisi modellerin (çatıların) çizilebilir olmasından kaynaklanan çekiciliğidir. Bununla birlikte zaman lojiklerindeki ya da zamanı betimlemek için kullanılan modal lojikler ve zaman süreçlerindeki ilerlemeler uzayın modal lojiğine yönelik ilgi ve sorgulamaları birden hızlandırdı. Tarski' nin topolojik semantik üzerine yapmış olduğu öncü çalışması uzay ve uzaysal yapılar hakkında düşüncelerin sistemleştirilmesi için daha geniş bir projenin temel taşı olarak görülmeye başladı.

McKinsey ve Tarski **S4** lojiğinin kendi içinde yoğun ayrılabilir metrik uzay (metric space dense itself separable)' a göre tam olduğunu kanıtladılar *(McKinsey ve Tarski, 1944).* Bu sonuç **S4** lojiğinin $\mathbb{R}$ sayı doğrusuna göre tam olduğu anlamına gelir. Mints *(Mints, 1998)* ve Aiello *(Aiello, van Benthem ve Bezhanishvili, 2003)* **S4** lojiğinin Cantor uzayına ve $\mathbb{R}$ sayı doğrusuna göre tamlığını gösterdiler. Shehtman *(Shehtman, 1999)* her sonlu bağlantılı uzayın metrik ayrılabilir kendi içinde yoğun bir uzayın bir açık görüntüsü olduğunu gösterek McKinsey ve Tarski' nin sonucunu daha da güçlendirdi. Bezhanishvili ve Gehrke *(Bezhanishvili ve Gehrke, 2005)* **S4** lojiğinin $\mathbb{R}$ sayı doğrusuna göre tamlığının daha topolojik bir kanıtını verdiler.

Hemen doğal olarak akla gelen şu soruyu

"Modal lojik için neden her şeyden önce yeni bir semantik tanımlanır? Kripke semantiği yeterince iyi değil midir?"

yanıtlamanın iki yolu vardır. Birincisi; var olan modal dillerden hareket edilebilir ve bu diller için farklı semantiklerin ne olabileceği merak edilebilir. İkincisi, belirli matematiksel objeler –örneğin topolojik uzaylar- ele alınarak modal dillerin ne ölçüde bu objeleri tanımladığı, aralarında ayrım yapabildiği öğrenilmek istenebilir. Bu açıdan Kripke semantiğinin esnekliği önemli değildir ve bazılarına göre topolojik semantik mevcut modal diller için yeni bir semantiktir.

Bu tezde göz önünde bulundurulan bir diğer semantik, **komşuluk** (neighborhood) semantiğidir. Komşuluk modelleri standart Kripke modellerinin Dana Scott *(Scott, 1970)* ve Richard Montague *(Montague, 1970)* tarafından bağımsız olarak bulunan bir genellemesidir. Krister Segerberg *(Segerberg, 1971)* komşuluk modelleri ve klasik sistemlerle ilgili bazı temel sonuçlar elde etti. Chellas bu sonuçları ve bazı diğer çarpıcı bulguları kitabının 8. bölümünde topladı. Bu semantiğe son yirmi yılda ilgi arttı ve **normal olmayan** (non-normal) klasik lojiklere uygulanır oldu (*(Pacuit, 2007)* ve *(Hansen, 2003)*).

Bu tezin ikinci bölümünde temel kavramlar, $\mathbf{K4}$, $\mathbf{S4}$, $\mathbf{S4.2}$ ve $\mathbf{S5}$ gibi en yaygın normal modal lojikler tanıtıldıktan sonra Kripke (bağıntısal) semantiğine göre bu lojiklerin sağlam ve tam; kanonik modellerine göre de **kuvvetli** tam oldukları gösteriliyor.

Üçüncü bölümde topolojik semantik tanımlandıktan sonra, $\mathbf{S4}$ lojiğinin bu semantiğe göre sağlam ve tam olduğu gösteriliyor. Kripke semantiğine paralel biçimde, topolojik kanonik model tanımlanarak tamlık konusuna eğiliniyor. Daha sonra temel modal dilde tanımlanabilen ve tanımlanamayan topolojik uzaylara örnekler veriliyor.

Dördüncü bölümde bağıntısal semantiğin bir genellemesi olan komşuluk semantiği ve normal olmayan lojikler tanıtılıyor.

Beşinci bölümde cebirsel semantik ve modal cebirler tanıtılıyor. Alt semantik tanımı yapılarak bu dört semantik aralarında karşılaştırılıyor ve bağıntısal semantiğin, komşuluk semantiğinin bit alt semantiği; komşuluk semantiğinin cebirsel semantiğin bir alt semantiği olduğu ve her cebirsel (dolayısıyla her komşuluk, her bağıntısal) çatının da **klasik** olduğu sonucuna varılıyor.

Lojiğin klasik anlayışı doğruluk kavramına dayanır; bir önermenin doğruluğu mutlaktır ve her hangi bir akıl yürütme ya da eylemden bağımsızdır. Bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır; yanlış doğru olmayan ile aynı anlama sahiptir ve bu aşağıdaki üçüncünün olmazlığı yasası (tertium non datur ya da excluded middle) olarak ifade edilir:

"p önermesinin anlamı ne olursa olsun, $p \vee \neg p$ önermesi her zaman doğrudur."

Ancak $p \vee \neg p$ önermesi sınırlı bilgi içerir. Bunu açıklayan iki iyi bilinen örnek verilebilir. İlki,

"π sayısının ondalık gösteriminde bir yerde yedi tane 7 art arda bulunur."

Bu önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi kesin değildir. İkincisi,

"x^y rasyonel olacak şekilde x ve y irrasyonel sayıları vardır."

Bu önermenin kanıtı basittir $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rasyonel ise, $x = y = \sqrt{2}$ aksi halde $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ve $y = \sqrt{2}$ almak yeterlidir), ancak iki durumdan hangisinin doğru olduğu bilinmemektedir.

Bu örnekler klasik önermeler lojiğinin kusurlarından bazılarını açığa çıkarır ve neden sezgisel (intuitionistic) ya da inşacı (constructive) lojiğe ilgi duyulması gerektiğinin ipuçlarını verir. Sezgisel önermeler lojiği (**IPC**), klasik önermeler lojiğinden (**CP**) üçüncünün olmazlığı yasası ve olmayana ergi kuralı (reductio ad absurdum) çıkarılarak tanımlanabilir; o zaman **CP**' nin zayıflatılmış bir halidir ve bunun sonucu olarak **CP**' ye göre daha geniş semantik yorum aralığına sahiptir. Motive edici semantiğe sezgisel önermeler lojiğinin Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK) yorumu denir. Sezgisel lojiğin ortaya atılışını ve esaslarını ayrıntılı incelemek için *(Bezhanishvili ve de Jong, 2006), (Troelstra ve van Dalen, 2000)* ve *(van Dalen, 2004)* kaynaklarına bakılabilir.

Bu çalışmada **IPC** için üç model tartışılıyor: Kripke yapıları, Heyting cebirleri ve topolojik modeller. Modellerin özellikleri ile birlikte Kripke yapıları ve Heyting cebirleri arasındaki ilişki inceleniyor. Konu ile ilgili olarak (*Brown, 2014), (Kuznetsov, 2017)* ve *(Palmgren, 2009)* kaynaklarına bakılabilir.

BÖLÜM 2
TEMEL MODAL LOJİK

Temel modal lojiğin dili, Önermeler lojiğinin diline bir $\Diamond$ ya da $\Box$ sembolü eklenerek tanımlanır. $\Diamond$ ya da $\Box$ operatörünün yorumu, Kripke çatıları denilen yapılar arasındaki bağıntıları ifade etmek için kolaylıklar sağlar. Lojikte **doğruluk** (truth) önemli bir kavramdır ve bir modal dil farklı türden doğruluklara yol açar: **yerel** (local), **global** ve daha genel olan **geçerlilik** (validity). Yerel doğruluk bir noktada doğruluk, global doğruluk verilen bir yapının (çatı ya da model) her noktasında doğruluktur. Geçerlilik bir çatı üzerindeki tüm değerlendirmeler için global doğruluktur.

Geçerlilik kavramından sonra bir modal lojiğin tanımlanması gerekir. Bu bölümde **normal** denilen modal lojikler üzerine yoğunlaşılacaktır. Bir normal modal lojik belirli kapanış kurallarına kapalı bir formüller kümesidir. Bu bir lojik için **semantik** tanımdır. En küçük normal lojik **K** ile gösterilir ve **K'** ye yeni formüller eklenerek yeni normal modal lojikler üretilir.

Normal modal lojikler **sintaktik** açıdan da tanımlanabilir. Φ çatıların bir sınıfı olsun. Φ üzerinde geçerli formüllerin kümesi $\mathbf{L}_{\Phi}$ bir lojik üretir. Bu iki yaklaşımla tanımlanan lojiklerin hangi koşullar altında çakıştıklarını sormak doğal bir sorudur.

Bu soruyu yanıtlamak için **sağlamlık** (soundness) ve **tamlık** (completeness) kavramlarına ihtiyaç vardır. Kanıtladığımız teoremlerin çatılar sınıfında geçerli olup olmadığını nasıl biliriz? Kanıt sistemimizin çatılar sınıfındaki tüm geçerli önermeleri türetmek için yeterince güçlü olup olmadığını nasıl biliriz? Bir kanıt sisteminin bir şeye yaraması isteniyorsa, sırasıyla sağlamlık ve tamlık adı verilen bu koşullar çok önemlidir. Sağlamlık, semantik açıdan tanımlanan bir **L** normal modal lojiği için her $\varphi \in \mathbf{L}$ formülünün Φ çatılar sınıfı üzerinde doğru olması demektir. Tamlık ise, semantik olarak tanımlanan lojiğin çatılar sınıfında geçerli tüm formüllere sahip olması demektir. Böylece bir **L** lojiği sağlamdır ancak ve ancak $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_{\Phi}$ dir ve **L** lojiği tamdır ancak ve ancak $\mathbf{L}_{\Phi} \subseteq \mathbf{L}$ dir. O halde bir **L** lojiğinin bir Φ çatılar sınıfına göre sağlam ve tam olduğunu göstermek, **L** ile $\mathbf{L}_{\Phi}$' nin çakıştığını gerçeklemektir.

Genelde bir lojiğin sağlamlığını göstermek kolay iken tamlık için bu doğru değildir; **maksimal tutarlı** formüllerin kümelerinden oluşturulan **kanonik modeller** sayesinde tamlık sorusuna yanıt aranabilir. Aslında, Kanonik Modeller Teoremi, herhangi bir normal modal lojiğin kendi kanonik modeline göre (kuvvetli) tam olduğunu ifade eder.

Tamlık sonuçları saptandıktan sonra, ilginç fakat bir o kadar şaşırtıcı olan bir sonuç şudur:

“Bir normal modal lojiğe ait olmayan bir formül **sonlu** bir Kripke modelinde yanlışlanabilir.”

Bu özelliğe **sonlu çatı özelliği** (finite frame property), ffp, denir ve kanıtı **süzme** (filtration)yöntemi kullanılarak yapılır.

2.1. Temel Öğeler

Bu kesimde verilen kavramlar modal lojik kitaplarında, özellikle Blackburn ve Chellas’ ta yer alanlara paralellik gösterir.

Tanım 2.1.1. Temel modal dil, önerme harflerinin (sonsuz) sayılabilir At kümesi, klasik önerme bağlaçları ve birli bir $\Diamond$ operatörü aracılığıyla tanımlanır. Bu dilin formülleri aşağıdaki gibi oluşturulur:

- Her $p \in At$ bir formüldür.
- $\perp$ bir formüldür.
- φ bir formül ise $\neg\varphi$ bir formüldür.
- φ ve ψ birer formül ise $\varphi \vee \psi$ bir formüldür.
- φ bir formül ise $\Diamond\, \varphi$ bir formüldür.

Birinci mertebeden lojikte $\forall$ ve $\exists$ operatörleri arasında olduğu gibi $\Diamond$ modal operatörü için bir düallik (duality) vardır: $\Box\varphi \coloneqq \neg \Diamond \varphi\neg$. Bu ancak (Düal) aksiyomunu içeren modal lojikler için geçerlidir; bu tezde çalışılan normal modal lojiklerin tümü bu aksiyomu tanım gereği içerirler.

$\Diamond$ **elmas** (diamond) ve $\Box$ **kutu** (box) olarak adlandırılır ve sırasıyla **olası** ve **gerekli** gibi okunabilir. Ancak bir modal dil farklı yorumların çeşitliliğine olanak sağladığından olası/gerekli yorumu her zaman en iyisi değildir. Bu operatörlerin etkili iki yorumu vardır: **epistemik** (bilgi) okuması ve **kanıtlanabilir** (provable) okuması. Bu farklı okumalar modal lojiğin gücüne güç katarlar.

Tanım 2.1.2. Temel modal dil için bir **Kripke çatısı** bir $F = \langle W, \quad R \rangle$ ikilisidir öyle ki

i. W boştan farklı bir kümedir.

ii. R, W üzerinde bir ikili bağıntıdır.

W kümesinin elemanlarına **düğüm** (node), **durum** (state) ya da **dünya** (world) denir. R bağıntısına **erişilebilirlik** (accessibility) bağıntısı denir. Çatı denildiğinde Kripke çatısı kastedilecektir. Modal dilin bir Kripke modeli bir $\mathcal{M} = \langle F, \quad V \rangle$ ikilisidir öyle ki F bir çatı ve V, At' den $\mathcal{P}(W)$' ye tanımlı bir fonksiyondur. V fonksiyonuna **değerlendirme** (valuation) ve $\mathcal{M}$' ye F tabanlı model ya da F, $\mathcal{M}$' nin temelini oluşturan çatıdır denir. Model denildiğinde Kripke modeli anlaşılacaktır.

$w \in F$ yazıldığında $w \in W$ ve "F çatısı P özelliğine sahiptir" denildiğinde "R, P' ye sahiptir" anlaşılmalıdır. V fonksiyonu doğruluğun bir tanımını yapmak için verilir: p bir w dünyasında ancak ve ancak $w \in V(p)$ ise doğrudur; bu w dünyasının p özelliğine sahip olması şeklinde düşünülebilir.

Tanım 2.1.3. Bir $\mathcal{M} = \langle F, \quad V \rangle$ modeli ve $w \in W$ dünyası verildiğinde, bir φ formülünün $\mathcal{M}$' deki w dünyasında gerçeklendiği (ya da doğru olduğu) aşağıdaki gibi tümevarımla tanımlanır:

$\mathcal{M}, w \vDash p$ (ava)[1] $w \in V(p), p \in At$

$\mathcal{M}, w \vDash \perp$ (ava) hiçbir zaman

$\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi$ (ava) $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi$

$\mathcal{M}, w \vDash \varphi \vee \psi$ (ava) $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ya da $\mathcal{M}, w \vDash \psi$

$\mathcal{M}, w \vDash \Diamond \varphi$ (ava) bir $v \in W$ vardır öyle ki wRv ve $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ dir.

Σ bir formüller kümesi bir $\mathcal{M}$ modelinin bir w dünyasında doğrudur (ava) Σ' nın **tüm** elemanları w' de doğrudur ve bu $\mathcal{M}, w \vDash \Sigma$ ile gösterilir. $\mathcal{M}$' deki bir noktada doğru olan bir formüle **yerel doğru** (local true) ve her noktada doğru olan formüle **global doğru** denir.

(1)Ancak ve ancak, (ava) şeklinde kısaltılmıştır.

Tanım 2.1.4. Bir φ formülü için

- F çatısına dayalı $\langle F, \quad V\rangle$ modeli için φ, w dünyasında doğru ise φ, F' nin w dünyasında doğrudur denir ve $F, w \vDash \varphi$ ile gösterilir.
- F' nin her dünyasında doğru ise φ, F' de geçerlidir (valid) denir ve $F \vDash \varphi$ ile gösterilir.
- φ, Φ çatılar sınıfının her F çatısında geçerli ise Φ üzerinde geçerlidir denir ve $\Phi \vDash \varphi$ ile gösterilir.
- Tüm çatıların sınıfında geçerli ise, φ' ye geçerlidir denir ve $\vDash \varphi$ ile gösterilir.

Çatıların sınıfında geçerli olan tüm formüllerin $\mathcal{F}$ kümesine $\mathcal{F}$' nin lojiği denir ve $\mathbf{L}_{\mathcal{F}}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki örnek doğruluk ve geçerlilik kavramları arasındaki farkı açıklar.

Örnek 2.1.5. $\varphi \vee \psi$ formülü verilsin. Bir $\mathcal{M} = \langle F, \quad V\rangle$ modeli ve bir w dünyası için $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \vee \psi$ ise, o zaman φ ya da ψ (ya da her ikisi) w dünyasında doğrudur. Bunun yanı sıra, $F \vDash \varphi \vee \psi$ ise, genelde, $F \vDash \varphi$ ya da $F \vDash \psi$ doğru değildir. Bir karşıt örnek olarak $p \vee \neg p$ formülünü göz önünde bulundurmak yeterlidir. O nedenle **doğruluk yerel bir nitelik** iken **geçerlilik tamamen global**dir.

Nihayet bir modal lojiğin tanımı verilebilir.

Tanım 2.1.6. Tüm önermesel totolojileri içeren ve aşağıdaki kurallara kapalı modal formüllerin bir **L** kümesine **modal lojik** denir:

Modus ponens: $\varphi \in \mathbf{L}$ ve $\varphi \to \psi \in \mathbf{L}$ ise $\psi \in \mathbf{L}$ dir.

İkame (substitution): $\varphi \in \mathbf{L}$ ise, φ' nin tüm ikame örnekleri **L'** ye aittir.

L' nin elemanlarına teorem denir ve φ bir teorem ise $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ ile gösterilir.

Notasyon Modus Ponens MP olarak, ikame ise kısaca Subs olarak yazılacaktır. Öte yandan, lojik denildiğinde modal lojik kastedilecektir.

Önerme 2.1.7. Herhangi bir **L** lojiği $\wedge$ ve $\vee$ işlemlerine kapalıdır, yani, $\varphi_1 \in \mathbf{L}$ ve $\varphi_2 \in \mathbf{L}$ ise $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \mathbf{L}$ ve $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \mathbf{L}$ dir.

Kanıt.

1. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1$	Hipotez
2. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_2$	Hipotez

3. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \to (\varphi_2 \to \varphi_1 \wedge \varphi_2)$ Totoloji

4. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_2 \to \varphi_1 \wedge \varphi_2$ MP 1, 3

5. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \wedge \varphi_2$ MP 2, 4

O halde $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, **L'** nin bir teoremidir, dolayısıyla $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \mathbf{L}$ dir.

Şimdi $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1$ verilsin ve φ_2 bir modal formül olsun. O zaman

1. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1$ Hipotez

2. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \to \varphi_1 \vee \varphi_2$ Totoloji

3. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \vee \varphi_2$ MP 1, 2

dır. $\varphi_1 \vee \varphi_2$, **L'** nin bir teoremi olduğu için **L'** ye aittir. ⊠

Bir normal lojik tanımını vermeden önce özel bir durumu ele almak öğretici olabilir.

L bir φ formülünü içeren fakat $\Box\varphi$' yi içermeyen bir lojik olsun. Böyle bir lojiği gerçekleyen bir çatı oluşturmak için, φ formülünün çatının tüm dünyalarında doğru olmasına karşın, $\Box\varphi$' nin doğru olmadığı bir w dünyasının ve bir değerlendirmenin oluşturulması gerekir. Böyle dünyalar **normal olmayan dünyalar** olarak adlandırılır çünkü $\varphi \in \mathbf{L}$ formülü için $\Box\varphi$ doğru değilse, bu dünyalar totolojilerin bile yanlış olduğu başka dünyaları görür. Durum böyle ise, normal olmayan bir modal lojik için bir model $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad R, \quad V \rangle$ biçimlidir; burada $N \subseteq W$ "normal dünyaların" kümesidir ve $W \setminus N$ deki elemanlara normal olmayan dünyalar denir. Eğer w normal olmayan bir dünya ise, o zaman bu dünyada doğruluk koşulları aşağıdaki gibi yapılır:

- $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ (ava) hiçbir zaman.
- $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond\, \varphi$ (ava) her zaman.

Buna göre, $\Box(p \vee \neg p)$ totolojisi w dünyasında yanlıştır. Normal olmayan lojikler için *(Graham, 2001)* kaynağına bakılabilir. Bu bölümde sadece normal modal lojikler ele alınmaktadır.

Tanım 2.1.8. Bir **L** lojiğine

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

(Düal) $\Diamond\, p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$

formüllerini içeriyor ve

(Nec) $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$ ya da $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ ise $\vdash_{\mathbf{L}} \Box\varphi$,

kuralına kapalı ise **normal**dir denir.

Bu bölümde lojik denildiğinde kastedilen normal lojik olacaktır. Lojiklerin kanonik modeller aracılığı ile tamlığı gösterilirken gerek duyulan bir kavram tutarlılık kavramıdır. Modal dillerin semantiğinin en önemli özelliklerinden birisi çelişki içermemesidir.; yani, bir formül bir dünyada hem doğru hem yanlış olamaz. Bunun yanı sıra sintaktik bakış açısına göre bir lojiğin çelişki içermediğinin hiçbir garantisi yoktur. Şimdi bu soruna değinilecektir.

Tanım 2.1.9. $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ ve ψ modal formüller olsun. Eğer $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ bir totoloji ise ψ formülü önermeler lojiğinde $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ hipotezlerinden **türetilebilir** (deducible) denir.

Lemma 2.1.10. Tüm modal lojikler önermeler lojiğindeki türetime kapalıdır.

Kanıt. **L** bir lojik olsun. ψ önermeler lojiğinde $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ hipotezlerinden türetilebilir olduğunda

$$\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1, \ \vdash_{\mathbf{L}} \varphi_2, \ \cdots, \ \vdash_{\mathbf{L}} \varphi_n \ ise \ \vdash_{\mathbf{L}} \psi$$

gösterilmelidir.

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ totolojisi verilsin. Önerme 2.1.7 uyarınca $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ dir ve tanım gereği $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$ olduğundan, MP' nin $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ ve $\vdash_{\mathbf{L}} (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \rightarrow \psi$' ye uygulanması sonucu $\vdash_{\mathbf{L}} \psi$ elde edilir. ⊠

Tanım 2.1.11. **L** bir lojik ve $\Gamma \cup \{\varphi\}$ bir formüller kümesi olsun. $\vdash_{\mathbf{L}} (\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n) \rightarrow \varphi$ olacak şekilde $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n \in \Gamma$ formülleri varsa, φ formülü **L** lojiğinde Γ' dan **türetilebilir** denir. Durum bu ise $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$, değilse $\Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \varphi$ yazılır.

Tanım 2.1.12. Bir **L** lojiği için $\Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \perp$ ise Γ formüller kümesine **L -tutarlı** (consistent) ve $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \perp$ ise **L-tutarsız** (inconsistent) denir.

Lemma 2.1.13. **L** bir lojik ve Γ bir formüller kümesi olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

(i) Γ **L**-tutarsızdır.

(ii) $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi$ olacak şekilde bir φ formülü vardır.

(iii) Tüm ψ formülleri için $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \psi$ dir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Γ **L** -tutarsız, yani $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \perp$ olsun. $\perp \to \varphi \wedge \neg\varphi$ bir totoloji olduğundan **L**' nin bir elemanı, yani $\vdash_{\mathbf{L}} \perp \to \varphi \wedge \neg\varphi$ dir. Öte yandan

$$\vdash_{\mathbf{L}} \perp \to \varphi \wedge \neg\varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \perp \to \varphi \wedge \neg\varphi$$

dir, çünkü $\perp \to \varphi \wedge \neg\varphi$' nin kanıtında Γ hipotezleri kullanılmaz. Böylece

1. $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \perp$	Hipotez
2. $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \perp \to \varphi \wedge \neg\varphi$	Totoloji
3. $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi$	MP 1, 2

istenilen sonucu verir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi$ verilsin. Her ψ formülü için $\varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ bir totoloji olduğundan $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ dir. Buradan haliyle $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$ olduğu açıktır. MP' nin $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi \to \psi$' ye uygulanması (iii) ile sonuçlanır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Aşikardır, çünkü her ψ formülü için $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \psi$ ise, özellikle $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \perp$ doğrudur ve Γ **L**-tutarsızdır. ⊠

Bu kesimi çok sık kullanılan bir lemma vererek sonlandıralım.

Lemma 2.1.14. Γ bir formüller kümesi ve keyfi bir φ formülü için

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \text{ (ava) } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \ \mathbf{L}\text{-tutarsızdır.}$$

Kanıt. Her şeyden önce Γ **L**-tutarsız ise sonuç açıktır, çünkü o zaman $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ haliyle tutarsızdır ve Lemma 2.1.13 uyarınca her ψ formülü için $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \psi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \psi$ olup, özellikle $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ elde edilir.

($\Rightarrow$): $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ varsayalım ve $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$' nin tutarsız olduğunu gösterelim. φ' nin Γ' dan türetiminde $\neg\varphi$ ek hipotez olarak kullanılmadığı için $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$' yi gerektirir. Öte yandan $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$ olduğu açıktır. Buradan $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\varphi$ elde edilir ve Lemma 2.1.13' den $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ kümesinin tutarsız olduğu sonuçlanır.

($\Leftarrow$): $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ **L**-tutarsız, yani $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \perp$ olsun. Önermeler lojiğinin Türetim Teoremi' nden bu, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi \to \perp$ ' yi gerektirir. Madem ki $\neg\varphi \leftrightarrow \varphi \to \perp$ olarak tanımlıdır, $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ elde edilir. ⊠

2.2. Kripke Semantiğine göre Sağlamlık ve Tamlık

Bir lojiğin tamlığının kanıtı iki kısımdan oluşur: sağlamlık (soundness) ve tamlık (completeness).

Sağlamlık kanıtının amacı; belirli sintaktik özelliklerin Kripke semantiğinde korunduğunu kanıtlamaktır. Özellikle, bir φ formülü bir **teorem** ya da ***Γ* formüller kümesinden türetilebilir** olma özelliğine sahipse, bu özelliklerin Kripke çatı tabanında φ' nin **geçerli** (valid) ya da Γ' nın bir **semantik sonucu** (semantic consequence) olduğu kanıtlanır. Sağlamlık kanıtı bir anlamda açıktır; $\vdash$ türetilebilirlik operatörünün kapanış özelliklerinin $\vDash$ mantıksal sonuç operatörü tarafından korunduğu gösterilir.

Tamlık kanıtının amacı; belirli semantik özelliklerin sintaksta korunduğunu kanıtlamaktır. Özellikle, bir φ formülü geçerli ya da bir Γ formüller kümesinin bir semantik sonucu olma özelliğine sahipse, bu özelliklerin Hilbert türü sintaksta bir teorem ya da Γ' dan türetilebilir olduğu gösterilir. Tamlık kanıtı şunu kanıtlamaktan geçer: φ bir teorem değilse ya da Γ' dan türetilemiyorsa, o zaman φ geçerli değildir ya da Γ' nın bir semantik sonucu değildir.

Burada yapı (structure), çatı (frame) ya da model aynı anlamda kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.1. $\mathcal{F}$ bir yapılar sınıfı olsun. Eğer $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_{\mathcal{F}}$ ise bir $\mathbf{L}$ lojiğine $\mathcal{F}$' ye göre sağlamdır denir.

Lemma 2.2.2. Bir $\mathbf{L}$ lojiği $\mathcal{F}$' ye göre sağlamdır ancak ve ancak her φ formülü ve $F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ için

$$\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \Rightarrow F \vDash \varphi$$

dir.

Kanıt. $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}_{\mathcal{F}}$ve $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ varsayalım. O zaman $\varphi \in \mathbf{L}$, dolayısıyla $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathcal{F}}$ dir. Buradan φ' nin $\mathcal{F}$' deki tüm yapılarda doğru olduğu, yani her $F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ için $F \vDash \varphi$ sonuçlanır.

Tersine, $\mathbf{L}_{\mathcal{F}}$' ye ait olmayan bir $\varphi \in \mathbf{L}$ formülü varsa, $F \nvDash \varphi$ olacak şekilde bir $F \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ bulunabilir, yani $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ iken $F \nvDash \varphi$ dir. ⊠

Bilinen normal modal lojiklerin sağlamlığı ayrıntılı olarak kanıtlanacaktır.

Tanım 2.2.3. Bir $F = \langle W, \quad R \rangle$ çatısı verilsin.

(i) F yansıyandır (ava) her $w \in W$ için wRw' dir.

(ii) F simetriktir (ava) her $w, u \in W$ için wRu ise uRw' dir.

(iii) F ters simetriktir (ava) her $w, u \in W$ için wRu ve uRw ise $w = u$' dur.

(iv) F geçişkendir (ava) her $w, u, v \in W$ için wRu ve uRv ise wRv' dir.

(v) F önsıralı (preorder) dır (ava) F yansıyan ve geçişkendir.

(vi) F önsıralı yönlüdür (ava) $\forall w, u, v \in W[wRu \wedge wRv \Rightarrow \exists t \in W(uRt \wedge vRt)]$ ' dir.

Tanım 2.2.4. $A_1, \ A_2, \ \cdots, \ A_n$ aksiyomlar olmak üzere $\mathbf{K}A_1A_2 \ldots A_n$ lojiğine $A_1, \ A_2, \ \cdots, \ A_n$ tarafından üretilen lojik denir.

K minimal lojiğine

(T) $\Box p \to p$

(4) $\Box p \to \Box\Box p$

(.2) $\Diamond \Box p \to \Box \Diamond p$

(5) $\Diamond \Box p \to p$

aksiyomları eklenerek iyi bilinen

$\mathbf{S4} = \mathbf{KT4}$

$\mathbf{S4.2} = \mathbf{KT4.2}$

$\mathbf{S5} = \mathbf{KT45}$

lojikleri tanımlanır.

Literatürde genellikle geçiştirilen ve **açık** olarak nitelendirilen aşağıdaki lemmanın kanıtı, sağlamlık kavramının iyi anlaşılması için ayrıntılı yapılacaktır.

Lemma 2.2.5. **K** , **S4**, **S4.2** ve **S5** lojikleri aşağıdaki sağlamlık sonuçlarını gerçeklerler:

(i) **K tüm** çatıların sınıfına göre sağlamdır.

(ii) **S4 yansıyan** ve **geçişken** çatıların sınıfına göre sağlamdır.

(iii) $\mathbf{S4.2}$ **yönlü önsıralı** çatıların sınıfına göre sağlamdır.

(iv) $\mathbf{S5}$ bağıntısı **denklik bağıntısı** olan çatıların sınıfına göre sağlamdır.

Kanıt.

(i) (K) aksiyomunun ve (Düal)' in keyfi çatılar sınıfında geçerli olduğu, MP ve (Nec) kurallarının geçerliliği koruduğu gösterilmelidir. $F = \langle W, \quad R \rangle$ keyfi bir çatı olsun.

- $F \vDash$(K): $F \vDash \Box(p \to q) \land \Box p$ varsayalım. O zaman her $w \in W$ için $F, w \vDash \Box(p \to q) \land \Box p$ ' dir; buradan $F, w \vDash \Box(p \to q)$ ve $F, w \vDash \Box p$ sonuçlanır. Böylece her $v \in W$ için $F, v \vDash p \to q$ ve $F, v \vDash p$ den MP uygulanınca $F, v \vDash q$ elde edilir. Bu ise $F, w \vDash \Box q$ demektir; w keyfi olduğu için $F \vDash$(K) gösterilmiş olur.

- MP kuralı geçerliliği korur: φ ve ψ formülleri için $F \vDash \varphi$ ve $F \vDash \varphi \to \psi$ verilsin. O zaman her $w \in W$ ve her V değerlendirme fonksiyonu için $\langle F, \quad V \rangle, w \vDash \varphi$ ve $\langle F, \quad V \rangle, w \vDash \varphi \to \psi$ ' dir. $\mathcal{M} = \langle F, \quad V \rangle$ bir model olduğundan son iki ifade $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \land (\varphi \to \psi)$ ' yi gerektirir. Böylece $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ sonuçlanır ve MP' nin geçerliliği koruduğu gösterilmiş olur.

- (Nec) kuralı geçerliliği korur: $F \vDash p$ ise her $w \in W$ için $F, w \vDash p$' dir. O halde wRv şeklindeki tüm $v \in W$ elemanları için $F, v \vDash p$ vardır, dolayısıyla $F, w \vDash \Box p$ elde edilir.

- $F \vDash$(Düal): $F \vDash \Diamond p$ verilsin. O zaman her $w \in W$ için $F, w \vDash \Diamond p$' dir. Şimdi $F, v \vDash \Box \neg p$ olacak şekilde bir $v \in W$ dünyası olsaydı, her $u \in W$ için ve vRu için $F, u \vDash \neg p$ elde edilirdi. Oysa $F, w \vDash \Diamond p$ durumunda $F, u \vDash p$ olacak şekilde bir $u \in W$ ve wRu vardır; o halde $F, u \vDash \neg p$ ve $F, u \vDash p$ çelişkilidir, dolayısıyla $F, w \vDash \neg \Box \neg p$ sonucuna ulaşılır.

  Tersine, $F \vDash \neg \Box \neg p$ verilsin. O zaman her $w \in W$ için wRv ve $F, v \vDash p$ olacak şekilde bir $v \in W$ dünyası vardır ve bu $F \vDash \Diamond p$ demektir.

Modeller totolojileri yanlışlamadığından tüm totolojiler de geçerlidir. O halde **K tüm** çatıların sınıfına göre sağlamdır.

(ii) **K'** nin sağlamlığı (i)' de gösterildi; geriye (T) ve (4) için kanıt yapmak kalıyor.

(T): $F = \langle W, \quad R\rangle$ yansıyan bir çatı ve $F \vDash \Box p$ olsun. O zaman her $w \in W$ için $F, w \vDash p$' dir. R yansıyan, yani her $w \in W$ için wRw olduğundan, $F, w \vDash p$ ya da $F \vDash p$' dir.

(4): Bu aksiyomun $\Diamond$ cinsinden dengi $\Diamond\Diamond\, p \rightarrow \Diamond\, p$' dir. $F = \langle W, \quad R\rangle$ geçişken bir çatı ve $F \vDash \Diamond\Diamond\, p$ olsun. O zaman her $w \in W$ için $F, w \vDash \Diamond\Diamond\, p$' dir. Şimdi $v, u \in W$ dünyaları için wRv ve $F, v \vDash \Diamond\, p$ ve vRu , $F, u \vDash p$ varsayalım. R bağıntısı geçişken olduğu için wRv ve vRu, wRu' yu gerektirir ve buradan da $F, w \vDash \Diamond\, p$ elde edilir.

(iii) (.2): $F = \langle W, \quad R\rangle$ yönlü önsıralı bir çatı ve $F \vDash \Diamond\, \Box p$ olsun. O zaman her $w \in W$ için $F, w \vDash \Diamond\, \Box p$' dir ve buradan $F, v \vDash \Box p$ olacak şekilde bir $v \in W$ vardır. Şimdi u, wRu şeklinde keyfi bir dünya olsun. Çatı yönlü olduğu için vRt ve uRt olacak şekilde bir t dünyası vardır. Bu durumda $F, t \vDash p$ elde edilir ve bu $F, u \vDash \Diamond\, p$ ' yi gerektirir. u keyfi olduğu için $F, w \vDash \Box\, \Diamond\, p$ sonuçlanır.

(iv) (5): $F = \langle W, \quad R\rangle$ denklik bağıntılı bir çatı olsun. $F \vDash \Diamond\, \Box p$ her $w \in W$ için wRv ve $F, v \vDash \Box p$ olacak şekilde bir $v \in W$ dünyasının var olduğunu ifade eder. Buradan vRu şeklindeki tüm $u \in W$ dünyaları için $F, u \vDash p$ elde edilir. R bağıntısı simetrik olduğu için $F, w \vDash p$ sonuçlandırılır. ⊠

Belli bir çatılar sınıfının ürettiği lojiğin semantik olarak tanımlanmış bir lojik tarafından kapsandığının gösterilmesi, yukarıda değinildiği üzere, tamlık kavramına yol açar. **Kuvvetli** ve **zayıf** olmak üzere iki tür tamlık vardır. Kuvvetli tamlık zayıf tamlığı gerektirir; bu bariz olgu kanonik modeller için ön planda yer alır çünkü kanonik modeller kuvvetli tamlığı gösterirler.

Tanım 2.2.6. $\mathcal{F}$ bir çatılar sınıfı ve $\Gamma \cup \{\varphi\}$ bir formüller kümesi olsun. $\mathcal{F}$' den oluşturulan tüm $\mathcal{M}$ modelleri ve $\mathcal{M}$' deki tüm w dünyaları için

$$\mathcal{M}, w \vDash \Gamma \Rightarrow \mathcal{M}, w \vDash \varphi$$

ise $\varphi, \mathcal{F}$ üzerinde Γ' nın bir **yerel semantik sonucu**dur denir ve $\Gamma \vDash_{\mathcal{F}} \varphi$ ile gösterilir. Eğer

$$\Gamma \vDash_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$$

ise **L** lojiği $\mathcal{F}$' ye göre **kuvvetli tam**dır denir. Herhangi bir φ formülü için

$$\mathcal{F} \vDash \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$$

ise **L** lojiği $\mathcal{F}$' ye göre **zayıf tam**dır denir.

Sonuç Teorem 2.2.7. $\mathcal{F}$' ye göre kuvvetli tam olan bir **L** lojiği $\mathcal{F}$' ye göre zayıf tamdır.

Kanıt. $\Gamma = \emptyset$ alınırsa kuvvetli tamlıktan $\emptyset \vDash_{\mathcal{F}} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ yazılır. Ama $\emptyset \vDash_{\mathcal{F}} \varphi, \mathcal{F} \vDash \varphi$ ile aynıdır, dolayısıyla $\mathcal{F} \vDash \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ elde edilir. ⊠

Sonuç Teorem 2.2.8. L bir lojik ve $\mathcal{F}$ bir çatılar sınıfı olsun. **L**, $\mathcal{F}$' ye göre zayıf tamdır ancak ve ancak $\mathbf{L}_{\mathcal{F}} \subseteq$ **L'** dir.

Kanıt. $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathcal{F}}$ varsayalım. O zaman $\mathbf{L}_{\mathcal{F}}$' nin tanımından ($\mathcal{F}$' de geçerli olan formüllerin kümesi) $\mathcal{F} \vDash \varphi$ yazılır. Hipotez uyarınca **L** zayıf tam olduğu için $\mathcal{F} \vDash \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$' dir; $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi,\ \varphi \in \mathbf{L}$ demek olduğu için**,** $\mathbf{L}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{L}$ elde edilir.

Tersine, $\mathbf{L}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbf{L}$ olsun ve $\mathcal{F} \vDash \varphi$ verilsin. O zaman $\varphi \in \mathbf{L}_{\mathcal{F}}$ dir ve hipotezden $\varphi \in \mathbf{L}$ olur, yani $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ elde edilir. ⊠

Lemma 2.2.9. (Çelişki Lemması) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ bir formüller kümesi ve $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{\mathbf{L}} \bot$ olsun. O zaman $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$' dir.

Kanıt. Lemma 2.1.14' ün kanıtına benzerdir. ⊠

Aşağıdaki bir açıdan kuvvetli tamlığı yeniden tanımlar.

Lemma 2.2.10. Bir **L** lojiği bir $\mathcal{F}$ yapılar sınıfına göre kuvvetli tamdır ancak ve ancak formüllerin her **L**-tutarlı Γ kümesi bir $F \in \mathcal{F}$ yapısı üzerinde gerçeklenebilirdir; yani, F' de bir w dünyası vardır öyle ki her $\varphi \in \Gamma$ için $F, w \vDash \varphi$' dir.

Kanıt. Γ **L**-tutarlı bir formüller kümesi olsun. O zaman $\Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \bot$' dır ve buradan **L**' nin $\mathcal{F}$' ye göre kuvvetli tam olması nedeniyle $\Gamma \nvDash_{\mathcal{F}} \bot$ elde edilir. O halde tanım gereği $\langle F,\ V\rangle, w \vDash \Gamma$ ve $\langle F,\ V\rangle, w \nvDash \bot$ olacak şekilde $F \in \mathcal{F}, w \in F$ ve bir V değerlendirme fonksiyonu vardır. Dolayısıyla $\langle F,\ V\rangle, w \vDash \Gamma$ kanıtlanmış olur.

Tersine, **L**' nin $\mathcal{F}$' ye göre kuvvetli tam olmadığını varsayalım. O zaman Çelişki Lemması' na göre $\Gamma \vDash_{\mathcal{F}} \varphi$ fakat $\Gamma \nvdash_{\mathbf{L}} \varphi$ olacak şekilde bir $\Gamma \cup \{\varphi\}$ formüller kümesi vardır. Yine aynı Lemma uyarınca $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ kümesi **L**-tutarlıdır fakat $\mathcal{F}$' deki herhangi bir yapı üzerinde gerçeklenebilir değildir. Böylece **L**, $\mathcal{F}$' ye göre kuvvetli tamdır. ⊠

Sonuç Teorem 2.2.11. Bir **L** lojiği bir $\mathcal{F}$ yapılar sınıfına göre zayıf tamdır ancak ve ancak her **L**-tutarlı formül bir $F \in \mathcal{F}$ yapısı üzerinde gerçeklenebilirdir.

Kanıt. Sonuç Teorem 2.2.7 ve Lemma 2.2.10' nun dolaysız kullanımı ile yapılır. ⊠

Lemma 2.2.10 her **L** -tutarlı formüller kümesinin gerçeklenebildiği bir yapı oluşturmayı ileri sürer. Bunun bir yolu ve en etkilisi, **maksimal tutarlı** kümelerden model oluşturmaktan geçer. Bu yaklaşım kanonik model tanımına neden olur; bu kavram (kuvvetli) tamlığı göstermenin, belki de, en temel algoritmasıdır.

2.3. Kanonik Modeller

Bir **L** lojiğinin tamlığını göstermenin bir yolu **L'** nin kanonik modelini inşa etmekten geçer. Böyle bir model maksimal **L**-tutarlı formüllerin kümesi aracılığıyla tanımlanır.

Tanım 2.3.1. L bir lojik ve Γ bir formüller kümesi olmak üzere, Γ **L**-tutarlı ve $\Gamma \subsetneq \Sigma$ şeklindeki her Σ formüller kümesi **L**-tutarsız ise Γ kümesine **maksimal L-tutarlı**, kısaca **L**-mtk ya da **L** belli ise kısaca mtk denir.

Maksimal tutarlı kümelerin bazı önemli özellikleri aşağıdaki lemmada toplanmıştır.

Lemma 2.3.2. L bir lojik ve Γ bir **L**-mtk olsun.

(i) Her φ formülü için $\varphi \in \Gamma$ ya da $\neg\varphi \in \Gamma$' dır.

(ii) Γ, MP' ye kapalıdır: $\varphi \in \Gamma$ ve $\varphi \to \psi \in \Gamma$ ise $\psi \in \Gamma$' dır.

(iii) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ (ava) $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$' dır.

(iv) $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ (ava) $\varphi \in \Gamma$ ya da $\psi \in \Gamma$' dır.

(v) $\mathbf{L} \subseteq \Gamma$' dır.

Kanıt.

(i) $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ve $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ kümelerinin ikisi de **L**-tutarsız olamaz çünkü aksi halde Çelişki Lemması' ndan $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ elde edilir ki bu Γ' nın **L**-tutarsız olması anlamına gelir. O nedenle $\Gamma \cup \{\varphi\}$ **L**-tutarlı olsun. Γ bir mtk olduğu için $\Gamma = \Gamma \cup \{\varphi\}$' dir, dolayısıyla $\varphi \in \Gamma$ elde edilir.

(ii) $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ fakat $\psi \notin \Gamma$ varsayalım. O zaman (i) uyarınca $\neg\psi \in \Gamma$ olur. Şimdi $\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi \vdash_{\mathbf{L}} \bot$ ya da $(\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi) \to \bot$ bir totolojidir, o halde **L**' ye aittir. Bu durum Γ' nın **L**-tutarlılığı ile çelişir; $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ ise ψ, Γ' ya ait olmalıdır.

(iii) (iv) şıkkının kanıtına tamamen benzerdir.

(iv) $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ve $\varphi \notin \Gamma$, $\psi \notin \Gamma$ varsayalım. Γ mtk olduğu için $\neg\varphi \in \Gamma$ ve $\neg\psi \in \Gamma$ olur. Ayrıca $(\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash_{\mathbf{L}} \bot$, Γ' nın tutarlılığı ile çelişir. O halde $\varphi \in \Gamma$ ya da $\psi \in \Gamma$ olmalıdır.

Tersine, $\varphi \in \Gamma$ ve keyfi ψ için $\varphi \vee \psi \notin \Gamma$ olsun. O zaman (i) uyarınca $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi \in \Gamma$' dır. Şimdi (iii)' den $\neg\varphi \in \Gamma$ elde edilir ki bu Γ' nın tutarlılığı ile çelişir. O halde $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olmalıdır.

(v) $\varphi \in \mathbf{L}$ olsun. O zaman $\{\neg\varphi\}$ **L**-tutarsızdır. Γ mtk olduğu için $\neg\varphi \notin \Gamma$ ve (i) nedeniyle $\varphi \in \Gamma$' dır. O halde $\mathbf{L} \subseteq \Gamma$' dır. ⊠

Tanım 2.3.3. Bir **L** normal modal lojiği için $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}$ kanonik modeli aşağıdakileri sağlayan bir $\langle W^{\mathbf{L}}, \quad R^{\mathbf{L}}, \quad V^{\mathbf{L}} \rangle$ üçlüsüdür:

(i) $W^{\mathbf{L}}$ tüm **L**-mtk' lerin kümesidir.

(ii) Her φ formülü için $\varphi \in u$, $\Diamond\, \varphi \in w$ ' yi gerektiriyorsa $R^{\mathbf{L}}$, $W^{\mathbf{L}}$ üzerinde $\langle w, \quad u \rangle \in R^{\mathbf{L}}$ ile tanımlı bir ikili bağıntıdır, yani

$$wR^{\mathbf{L}}u \text{ (ava) } \varphi \in u \Rightarrow \Diamond\, \varphi \in w$$

dir.

(iii) $V^{\mathbf{L}}$, $V^{\mathbf{L}}(p) = \{w \in W^{\mathbf{L}}: p \in w\}$ olarak tanımlanan değerlendirme fonksiyonudur.

$F^{\mathbf{L}} = \langle W^{\mathbf{L}}, \quad R^{\mathbf{L}} \rangle$ ikilisine **L'** nin kanonik çatısı denir.

Aşağıdaki **Doğruluk Lemması** uyarınca tutarlı bir formüller kümesinin maksimal tutarlı bir kümeye genişletilmesi uygun olur.

Lemma 2.3.4. (Lindenbaum Lemması) **L** bir lojik olsun. Σ formüllerin **L**-tutarlı bir kümesi ise, $\Sigma \subseteq \Sigma^+$ şeklinde bir Σ^+ **L**-mtk vardır.

Kanıt. $\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \cdots, \quad \varphi_n, \quad \cdots$ modal formüllerin bir sayımı ve

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\}, & \textit{eğer } \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} \textit{ tutarlı ise} \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}, & \textit{aksi halde} \end{cases}$$

olsun.

İddia 1 Her n için Σ_n **L**-tutarlıdır.

Kanıt. n üzerinde tümevarım yapılır.

$n = 0$ için iddia hipotez gereği doğrudur.

$n > 0$ için iddianın doğru olduğunu varsayalım.

$n+1$ için Σ_{n+1} ya $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$' dir ve tanımdan **L**-tutarlıdır ya da $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$' dir. Bu durumda $\Sigma_n \cup \{\varphi_n\}$ tutarsız olur ve Çelişki Lemması' ndan $\Sigma_n \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi_n$ elde edilir. Tümevarım hipotezinden Σ_n' nin tutarlı olması $\Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$' nin tutarlılığını gerektirir.

İddia 2 Her φ formülü için ya $\varphi \in \Sigma^+$' dır ya da $\neg\varphi \in \Sigma^+$' dır.

Kanıt. $\varphi \in \Sigma^+$ ve $\neg\varphi \in \Sigma^+$ ise bir n için $\varphi \in \Sigma_n$ ve $\neg\varphi \in \Sigma_n$' dir; bu Σ_n' nin tutarsız olduğunu ve İddia 1 ile çeliştiğini gösterir. Dahası $\varphi = \varphi_m$ olacak şekilde bir m vardır ve dolayısıyla ya $\varphi \in \Sigma_m$ ya da $\neg\varphi \in \Sigma_m$' dir.

İddia 3 Σ^+ bir **L**-mtk' dir.

Kanıt. Σ^+ tutarsız ise, $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \cdots \wedge \varphi^n \to \perp$ olacak şekilde sonlu bir $\varphi^1, \varphi^2, \cdots, \varphi^n$ formüller dizisi bulunabilir. Böyle bir dizi yeterince büyük bir k için Σ_k kümesine aittir; ama bu durum İddia 1 ile çelişir. O halde Σ^+ tutarlıdır.

Σ^+' nın maksimal olduğunu göstermek için $\Sigma^+ \subseteq \Gamma$ varsayalım ve φ bir tanık, yani $\varphi \notin \Sigma^+$ olsun. O zaman İddia 2' den $\neg\varphi \in \Sigma^+$ ve tanımdan $\Sigma^+ \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$ elde edilir. $\Sigma^+ \subseteq \Gamma$ nedeniyle $\Gamma \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$ ve $\varphi \in \Gamma$ olması Γ' nın tutarsızlığını gerektirir. O halde Σ^+ **L**-mtk' dir. ⊠

Uyarı 2.3.5. Tanım 2.3.3.' deki $R^{\mathbf{L}}$ ikili bağıntısı

$$wR^{\mathbf{L}}u \text{ (ava) } \Box\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in u$$

gibi de tanımlanabilir, hatta

$$wR^{\mathbf{L}}u \text{ (ava) } \{\varphi : \Box\varphi \in w\} \subseteq u$$

olarak da ifade edilebilir. Hesaplamalarda tanımın bu biçimi kolaylıklar sağlar. O zaman Tanım 2.3.3. (ii)' nin kullanılacak denk ifadesi

$$wR^{\mathbf{L}}u \text{ (ava) } \{\Diamond\, \varphi : \varphi \in u\} \subseteq w$$

dir.

Önerme 2.3.6. $R^{\mathbf{L}}$ bağıntısının bu iki tanımı denktir.

Kanıt. $wR^{\mathbf{L}}u$ (ava) her φ için ($\Box\varphi \in w \Rightarrow \varphi \in u$)

(ava) her φ için ($\varphi \notin u \Rightarrow \Box\varphi \notin w$)

(ava) her φ ve w, u mtk için ($\neg\varphi \in u \Rightarrow \neg\Box\varphi \in w$)

(ava) her φ için ($\neg\varphi \in u \Rightarrow \Diamond\, \neg\varphi \in w$)

(ava) her φ' için ($\varphi' \in u \Rightarrow \Diamond\, \varphi' \in w$) (ikame). ⊠

Yukarıdaki kanıtın son adımına aşağıdaki teorem açıklık getirmektedir.

Teorem 2.3.7. *(Chellas, Teo. 4. 29, s. 158)* **L** bir normal modal lojik ve Γ, Γ' **L**-mtk' ler olsun. O zaman

$$\{\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\} \subseteq \Gamma' \text{ (ava) } \{\Diamond\, \varphi : \varphi \in \Gamma'\} \subseteq \Gamma$$

dır. Başka bir deyişle,

her φ için ($\Box\varphi \in \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma'$) (ava) her φ için ($\varphi \in \Gamma' \Rightarrow \Diamond\, \varphi \in \Gamma$)

dır.

Kanıt. ($\Rightarrow$) Sol taraf verilmiş olsun ve $\varphi \in \Gamma'$ diyelim. O zaman

$$\begin{aligned} \varphi \in \Gamma' &\Rightarrow \neg\varphi \notin \Gamma' && (\Gamma' \text{ tutarlı}) \\ &\Rightarrow \Box\neg\varphi \notin \Gamma && (\text{hipotez}) \\ &\Rightarrow \neg\Box\neg\varphi \in \Gamma && (\Gamma \text{ mtk}) \\ &\Rightarrow \Diamond\, \varphi \in \Gamma \end{aligned}$$

dır.

($\Leftarrow$) Sağ taraf verilmiş olsun ve $\Box\varphi \in \Gamma$ diyelim. O zaman

$$\begin{aligned} \Box\varphi \in \Gamma &\Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi \in \Gamma \\ &\Rightarrow \Diamond\, \neg\varphi \notin \Gamma && (\Gamma \text{ tutarlı}) \\ &\Rightarrow \neg\varphi \notin \Gamma' && (\text{hipotez}) \\ &\Rightarrow \varphi \in \Gamma' && (\Gamma' \text{ mtk}) \end{aligned}$$

dır. ⊠

Aşağıdaki lemma bir lojiğin kanonik model aracılığıyla tamlığının kanıtlanabilmesi için yeterince maksimal tutarlı kümenin olduğunu ifade etmektedir.

Lemma 2.3.8. (Varlık Lemması) Herhangi bir **L** lojiği için ve $w \in W^{\mathbf{L}}$ dünyası için $\Diamond \varphi \in w$ ise, o zaman $wR^{\mathbf{L}}v$ ve $\varphi \in v$ olacak şekilde bir $v \in W^{\mathbf{L}}$ vardır.

Kanıt. $\Diamond \varphi \in w$ olsun ve $v^- = \{\varphi\} \cup \{\psi : \Box\psi \in w\}$ tanımlayalım. v^- tutarlıdır, aksi halde Çelişki Lemması uyarınca $\{\psi : \Box\psi \in w\} \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$, yani $\vdash_{\mathbf{L}} \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \neg\varphi$ olacak şekilde $\psi_1, \cdots, \psi_n$ formülleri vardır. O zaman

$$\vdash_{\mathbf{L}} \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \neg\varphi) \qquad \text{(Nec)}$$

$$\vdash_{\mathbf{L}} \Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to \Box\neg\varphi \qquad \text{(K)}$$

Ve $\Box(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n) \to (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n)$ her modal lojiğin bir teoremi olduğu için

$$\vdash_{\mathbf{L}} (\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\neg\varphi$$

elde edilir. Şimdi w' nin bir mtk olması ve her $i < n$ için $\Box\psi_i \in w$ nedeni ile $\Box\psi_1 \wedge \cdots \wedge \Box\psi_n \in w$ elde edilir. Tutarlılık gereği $\Box\neg\varphi \in w$ ve (Düal) sayesinde $\neg \Diamond \varphi \in w$ sonuçlanması, $\Diamond \varphi \in w$ hipotezi ile çelişir çünkü w bir mtk' dir. O halde v^- tutarlı olmak zorundadır.

Lindenbaum Lemması uyarınca v, v^-‘ nin bir mtk-genişlemesi olsun. İnşadan $\varphi \in v$' dir ve her ψ formülü için $\Box\psi \in w, \psi \in v$' yi gerektirir. Yapılan bu analiz $wR^{\mathbf{L}}u$' nin aşağıdaki argümanla verilmesini sağlar:

$\varphi \in v$ olsun ve $\Diamond \varphi \notin w$ varsayalım. w bir mtk olduğu için $\neg \Diamond \varphi \in w$' dir. Buradan (Düal) sayesinde $\Box\neg\varphi \in w$ elde edilir ve dolayısıyla $\neg\varphi \in v$' ye ulaşılır ki bu v' nin bir mtk olması ile çelişir. Neticede $\varphi \in v$ ise $\Diamond \varphi \in w$ olmalıdır. ⊠

Nihayet "**doğruluk = elemanı olma**" denklemini yerine getirecek her şey mevcuttur.

Lemma 2.3.9. (Doğruluk Lemması) Herhangi bir **L** normal modal lojiği için ve her φ formülü için

$$\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, w \vDash \varphi \text{ (ava) } \varphi \in w$$

dir.

Kanıt. φ' nin karmaşıklığı üzerine tümevarımla yapılır. Temel adım tanımdan ve Boole bağlaçları durumları Lemma 2.3.2' den açıktır.

Modal durum için

$\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, w \vDash \Diamond\, \varphi$ (ava) $\exists v\, (wR^{\mathbf{L}}v \wedge \mathcal{M}^{\mathbf{L}}, v \vDash \varphi)$ (ava) (Tümevarım hipotezi) $\exists v\, (wR^{\mathbf{L}}v \wedge \varphi \in v) \Rightarrow$ ($R^{\mathbf{L}}$' nin tanımından) $\Diamond\, \varphi \in w$' dir.

Tersine, $\Diamond\, \varphi \in w$ varsayalım. Yukarıdaki denklik aracılığı ile bir v bulmak yeterlidir öyle ki v mtk, $wR^{\mathbf{L}}v$ ve $\varphi \in v$ olsun. Ama bu Varlık Lemması' nın tam olarak sağladığı bir durumdur. ⊠

Aşağıdaki teorem bu kesimde buraya kadar oluşturulan ve incelenenleri toparlamaktadır.

Teorem 2.3.10. (Kanonik Model Teoremi) Her normal modal lojik kanonik modeline göre kuvvetli tamdır.

Kanıt. **L** bir normal modal lojik ve Σ formüllerin tutarlı bir kümesi olsun. Lindenbaum Lemması uyarınca $\Sigma \subseteq \Sigma^{+}$ şeklinde bir Σ^{+} -mtk vardır. Doğruluk Lemması' ndan $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, \Sigma^{+} \vDash \Sigma$' dir ve kanıt Lemma 2.2.10 aracılığı ile tamamlanır. ⊠

Lemma 2.3.11. $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}$ kanonik modelli herhangi bir **L** normal modal lojiği için aşağıdakiler vardır.

(i) (4)∈ **L** ise $R^{\mathbf{L}}$ geçişkendir.

(ii) (T) ∈ **L** ise $R^{\mathbf{L}}$ yansıyandır.

(iii) (T), (4), (.2) ∈ **L** ise $R^{\mathbf{L}}$ yönlü önsıralamadır.

(iv) (5) ∈ **L** ise $R^{\mathbf{L}}$ simetriktir.

Kanıt.

(i) $w, v, u \in \mathcal{M}^{\mathbf{L}}$ için $wR^{\mathbf{L}}v$ ve $vR^{\mathbf{L}}u$ ise $wR^{\mathbf{L}}u$ olduğu gösterilmelidir: $\varphi \in u \Rightarrow \Diamond\, \varphi \in w$ gösterilmelidir.

1.	$\varphi \in u$	(Hipotez)
2.	$\Diamond\, \varphi \in v$	$(vR^{\mathbf{L}}u)$
3.	$\Diamond\Diamond\, \varphi \in w$	$(wR^{\mathbf{L}}v)$
4.	$\Diamond\Diamond\, \varphi \rightarrow \Diamond\, \varphi \in w$	((4)∈ **L** ve w bir mtk)
5.	$\Diamond\, \varphi \in w$	MP 3, 4

olup, $R^{\mathbf{L}}$ geçişkendir.

(ii) Her $w \in W^{\mathbf{L}}$ için $wR^{\mathbf{L}}w$ olduğu gösterilmelidir.

1. $\varphi \rightarrow \Diamond\, \varphi$ ((T)$\in$ **L**)
2. $\varphi \in w$ (Hipotez)
3. $\varphi \rightarrow \Diamond\, \varphi \in w$ (Lemma 2.3.2 (v))
4. $\Diamond\, \varphi$ MP 2, 3

olup, $R^{\mathbf{L}}$ yansıyandır.

(iii) (T), (4)$\in$ **L** nedeniyle geriye (.2)$\in$ **L** $\Rightarrow R^{\mathbf{L}}$ yönlü önermesinin kanıtlanması kalıyor; yani her $w, v, u \in W^{\mathbf{L}}$ için

$$(wR^{\mathbf{L}}v \wedge wR^{\mathbf{L}}u \Rightarrow \exists t^{+}(vR^{\mathbf{L}}t^{+} \wedge uR^{\mathbf{L}}t^{+}))$$

gösterilmelidir. Bunun için

$$t = \{\varphi : \Box\varphi \in v\} \cup \{\neg\psi : \Diamond\, \psi \notin u\}$$

şeklinde tanımlanan kümenin **L**-tutarlı olduğunun ve Lindenbaum Lemması sayesinde **L**-mtk olduğunu sağlayan bir t^{+} kümesine genişletilebildiğinin gösterilmesi gerekiyor.

- t **L**-tutarlıdır: Gerçekten, aksi halde $i \leq n$ ve $j \leq m$ için

$$\Box\varphi_i \in v,\ \Diamond\, \psi_j \notin u \text{ ve } \vdash_{\mathbf{L}} (\bigwedge_{i\leq n} \varphi_i \wedge \bigwedge_{j\leq m} \neg\psi_j) \rightarrow \bot$$

olacak şekilde φ_i ve ψ_j formülleri vardır. $\varphi = \bigwedge_{i\leq n} \varphi_i$ ve $\neg\psi = \bigwedge_{j\leq m} \neg\psi_j$ diyelim; o zaman $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \bot$' dir ve her **L**-mtk için $\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow \bot$ ya da $\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}$-mtk elde edilir. Buradan $\varphi \rightarrow \psi,\ v$' ye aittir. $\Box$, $\wedge$ üzerine dağılmalı olduğu için $\Box\varphi \in v$' dir ve bu $\Box\psi \in v$' yi gerektirir çünkü $\Box\psi \notin v$ ise $\neg\Box\psi = \Diamond\, \neg\psi$' dir; yani $vR^{\mathbf{L}}s$ ve $\varphi \wedge \neg\psi \in s$ olacak şekilde bir $s \in W^{\mathbf{L}}$ vardır ancak bu, s' nin tutarlılığı ile çelişir. Dolayısıyla $\Box\psi \in v$' dir ve buradan $\Box\, \Diamond\, \psi \in w$ sonuçlanır. (.2)$\in$ **L** hipotezinden $\Box\, \Diamond\, \psi \in w$' dir ve bunun $\Diamond\, \psi \in u$' yu gerektirmesi bir çelişkiye neden olur. Neticede t **L**-tutarlıdır. Lindenbaum Lemması uyarınca t' nin bir t^{+}-mtk genişlemesi vardır. Şimdi $\Box\varphi \in v \Rightarrow \varphi \in t^{+}$' dan $vR^{\mathbf{L}}t^{+}$ sonuçlanır ve ayrıca $\Diamond\, \psi \notin u \Rightarrow \psi \notin t^{+}$' dır, yani $\psi \in t^{+} \Rightarrow \Diamond\, \psi \in u$ vardır. Buradan $uR^{\mathbf{L}}t^{+}$ çıkar, yani $R^{\mathbf{L}}$ yönlüdür.

(iv) (5): $\varphi \rightarrow \Box\, \Diamond\, \varphi \in \mathbf{L}$ olsun. $(\varphi \rightarrow \Box\, \Diamond\, \varphi) \leftrightarrow (\Diamond\, \varphi \rightarrow \varphi)$ denkliği (Düal) ve (İkame) kullanılarak gösterilir. Şimdi $w \in W^{\mathbf{L}}$ için $\varphi \in w$ olsun. O zaman (iii)' deki argüman ışığında $\Box \lozenge \varphi \in w$ olur. $wR^{\mathbf{L}}v$ verilmiş olsun. Varlık Lemması' nın bir sonucu olarak

$$\Box \lozenge \varphi \in w \wedge wR^{\mathbf{L}}v \Rightarrow \lozenge \varphi \in w$$

elde edilir; oysa $\varphi \in w$ idi, o halde $vR^{\mathbf{L}}w$ sonuçlanır. ⊠

Tamlık sonuçlarının gerçekleştirilmesinde tek sorun, doğru parçaların seçilmesi ve kombine edilmesinde yatar.

Teorem 2.3.12. Aşağıdakiler vardır:

(i) **K tüm** çatıların sınıfına göre;

(ii) **S4** tüm **yansıyan** ve **geçişken** çatıların sınıfına göre;

(iii) **S4. 2 yönlü önsıralı** çatıların sınıfına göre;

(iv) **S5 denklik bağıntılı** çatıların sınıfına göre;

kuvvetli tamdır.

Kanıt. Söz konusu lojik için Γ formüllerin tutarlı bir kümesi olsun. O zaman teoremin kanıtı için Lemma 2.2.10 uyarınca bir $\langle F, \quad V \rangle$ modeli bulmak yeterli olacaktır öyle ki

(a) $\langle F, \quad V \rangle, w \vDash \Gamma$ şeklinde $\langle F, \quad V \rangle$' de bir w dünyası olsun;

(b) F iddia edilen özellikleri sağlasın.

Γ^{+}, Γ' yı genişleten bir mtk olsun. $\langle F, \quad V \rangle$, (a) koşulunu Γ^{+} dünyasında sağlar. Geriye (b) koşulunun kanonik model için geçerli olduğunu göstermek kalıyor; bu ise Lemma 2.3.11 tarafından yerine getirilmişti. ⊠

2.4. Süzme ve Sonlu Çatı Özelliği

Verilen bir (tutarlı ve normal) **L** lojiği için kanonik model, $\nvdash_{\mathbf{L}} \varphi$ şeklindeki her φ formülünü bir dünyada çürütür. Bu özellik çok iyi olmakla birlikte modelin kendisi **büyük** ve **kullanışsız** olabilir. Bu durumda, matematiğin –özellikle cebirin-genelinde olduğu gibi, modelin **küçültülmesine** gidilir.

Tanım 2.4.1. Her $\varphi \notin \mathbf{L}$ ve bir $w \in F$ için $F, w \nvDash \varphi$ ve $F \vDash \mathbf{L}$ olacak şekilde sonlu bir F çatısı varsa, **L** lojiği **sonlu çatı özelliği**ne (finite frame property) sahiptir denir. Bu özellik kısaca ffp olarak gösterilir.

Süzme (filtration) denilen bir yöntemle bazı lojiklerin ffp' ye sahip olduğu gösterilebilir. Burada, bir örnek olarak, sadece $\mathbf{S4.2}$ ' nin durumu ele alınıyor. Süzmenin amacı verilen bir modeli bir denklik bağıntısı aracılığı ile **küçültmek**tir.

$\mathcal{M} = \langle W, \quad R, \quad V\rangle$ bir model ve Σ formüllerin alt kümelere kapalı bir kümesi olsun. $w, v \in W$ için

$$\mathcal{M}, w \vDash \varphi \text{ (ava) } \mathcal{M}, v \vDash \varphi$$

her $\varphi \in \Sigma$ için gerçekleniyorsa w ve v dünyaları Σ-denktir denir ve $w{\sim_\Sigma}v$ yazılır. Bu, W üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve bir w dünyasının $\sim_\Sigma$ altında denklik sınıfı $[w]_\Sigma = \{v \in W : w{\sim_\Sigma}v\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.2 Bir $\mathcal{M}$ modelinin Σ **aracılığıyla bir süzmesi** $F^f = \langle W^f, \quad S\rangle$ çatısına dayanan bir $\mathcal{M}^f = \langle F^f, \quad U\rangle$ modelidir öyle ki

(i) $W^f = \{[w] : w \in W\}$

(ii) her $p \in \Sigma$ değişkeni için $U(p) = \{[w] : w \in V(p)\}$

(iii) her $w, v \in \Sigma$ için $wRv \Rightarrow [w]S[v]$

(iv) $[w]S[v]$ ise $w, v \in W$ ve $\Box\varphi \in \Sigma$ için

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi \Rightarrow \mathcal{M}, v \vDash \varphi$$

dir.

Uyarı 2.4.3. (iii) ve (iv) koşulları S' yi genellikle tek biçimde belirlemez. Aslında herhangi bir süzme için

$$\overline{S} = \{([w], \quad [v]) : her\ \varphi \in \Sigma\ (\mathcal{M}, w \vDash \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, v \vDash \varphi)\}$$

$$\underline{S} = \{([w], \quad [v]) : bazı\ w', v' \in W(w{\sim}w' \wedge v{\sim}v' \wedge w'Rv')\}$$

olmak üzere,

$$\underline{S} \subseteq S \subseteq \overline{S}$$

olduğu gösterilebilir. $\underline{S}$ kümesine Σ aracılığıyla $\mathcal{M}$ ' nin **en ince süzmesi** (finest filtration) ve $\overline{S}$ kümesine **en kaba süzme** (coarsest filtration) denir. Burada $\underline{S}$ kullanılacaktır.

Sonuç 2.4.4. Tanım 2.4.2' deki notasyonlar altında

$$|F^f| \leq 2^{|\Sigma|}$$

dir.

Kanıt. F^f kümesinden $2^{|\Sigma|}$ kümesine bir bire-bir dönüşüm tanımlanmalıdır. Aşağıdakini göz önünde bulunduralım:

$h: F^f \to 2^{|\Sigma|}$

$$[w] \mapsto f_w,\ f_w(\varphi) = \begin{Bmatrix} 1, & \mathcal{M}, w \vDash \varphi \ ise \\ 0, & aksi\ halde \end{Bmatrix}$$

- h iyi-tanımlıdır: $[w] \in F^f$; $v, u \in [w]$ ve her $\varphi \in \Sigma$ için $f_v(\varphi) = 1$ (ava) $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$ (ava) $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ (ava) $\mathcal{M}, u \vDash \varphi$ (ava) $f_u(\varphi) = 1$

  $\sim_\Sigma$ denklik bağıntısının tanımı kullanılarak elde edilir. O halde h bir denklik sınıfının elemanı seçiminden bağımsızdır, dolayısıyla iyi-tanımlıdır.

- h bire-bir' dir: $f_w \neq f_v$ varsayalım. Genellikten bir şey yitirmeksizin, bir $\varphi \in \Sigma$ vardır ve $f_w(\varphi) = 1$ ve $f_v(\varphi) = 0$' dır. O zaman $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ve $\mathcal{M}, v \vDash \neg\varphi$ (*) olur. Ama $\varphi \in \Sigma$ olduğu için (*),$[w] \neq [v]$ demektir. Böylece h bir bire-bir dönüşümdür ve kanıt tamamlanır. ⊠

Teorem 2.4.5. (Süzme Teoremi) $\mathcal{M}$ bir model ve $\mathcal{M}^f$ alt formüllere kapalı bir Σ formüller kümesi aracılığıyla $\mathcal{M}$' nin bir süzmesi olsun. O zaman her $w \in \mathcal{M}$ dünyası ve her $\varphi \in \Sigma$ formülü için

$$\mathcal{M}, w \vDash \varphi \text{ (ava) } \mathcal{M}^f, [w] \vDash \varphi$$

dir.

Kanıt. φ formülünün karmaşıklığı üzerine tümevarımla yapılır.

- Temel adım Tanım 2.4.2. (ii), Boole kombinasyonları için doğruluk tanımları ve tümevarım hipotezi ile dolaysız olarak gerçeklenir.

- Modal adım için $\Box\varphi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ olsun. $[w]S[v]$ şeklindeki her $[v]$ için $\mathcal{M}^f, [v] \vDash \varphi$ gösterilmelidir. Böyle bir $[v]$ verildiğinde Tanım 2.4.2. (iv) uyarınca $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$' dir ve tümevarım hipotezinden $\mathcal{M}^f, [v] \vDash \varphi$ elde edilir (Σ' nın kapanış özelliklerinden dolayı $\varphi \in \Sigma$ olduğu açıktır).

Tersine, $\mathcal{M}^f, [w] \vDash \varphi$ varsayalım ve v, wRv olacak şekilde bir dünya olsun. O zaman Tanım 2.4.2. (iii) uyarınca $[w]S[v]$' dir. Böylece $\mathcal{M}^f, [v] \vDash \varphi$' dir ve buradan tümevarım hipotezi ve kapanış özellikleri $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$' yi gerektirir. v keyfi bir dünya olduğundan $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ elde edilir. ☒

Teorem 2.4.6. $\mathbf{S4.2}$ lojiği sonlu çatı özelliğine sahiptir.

Kanıt. $\varphi \notin \mathbf{S4.2}$ olsun. O zaman bağıntısı köklü (yani bir en küçük elemanı olan) yönlü önsıralı öyle bir $\mathcal{M} = \langle W, \quad R, \quad V\rangle$ modeli vardır ki bir w dünyası için $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi$ sonuçlansın. Şimdi $\Gamma = \Gamma_\varphi = \{\psi\colon \psi, \varphi' nin\ alt\ formülü\}$ kümesi aracılığıyla $\mathcal{M}^f, \mathcal{M}$' nin en ince süzmesi olsun. $\mathcal{M}^f$' nin, yani R^f' nin geçişken kapanışının Γ aracılığıyla $\mathcal{M}$' nin bir süzmesi olduğu gösterilir. $(\mathcal{M}^f)^t, \mathcal{M}^f$' nin geçişken kapanışı ise Süzme Teoremi $(\mathcal{M}^f)^t, w \nvDash \varphi$' yi gerektirir.

Her formül sonlu olduğu için Γ_φ kümesi sonludur ve Sonuç 2.4.4 uyarınca $(\mathcal{M}^f)^t$ sonludur. $(\mathcal{M}^f)^t$' nin bir $\mathbf{S4.2}$ çatıya sahip olduğu açıktır. Böylece $\mathbf{S4.2}$ sonlu çatı özelliğini sağlar. ☒

BÖLÜM 3
TOPOLOJİK SEMANTİK, TAMLIK VE TANIMLANABİLİRLİK

Matematiğin temelleri ve aksiyomatik geometrinin gelişimi arasındaki tarihsel bağlara rağmen uzaysal yapılar için kayda değer lojikler eksik idi. Bu durumu dile getiren en iyi örnekler Tarski tarafından verildi *(McKinsey and Tarski, 1944)*. $\Diamond$ operatörünü gerçel sayılar üzerinde **kapanış operatörü** (closure operator) olarak yorumlayarak **S4** lojiğinin tamlığını kanıtladılar. Bu doğrultuda ancak *(Segerberg, 1973)*' deki iki boyutlu modal lojikler, *(Goldblatt, 1980)*' deki Minkowski uzay-zaman lojiği, *(Shehtnam, 1983)*' deki fiziksel yapıların lojikleri, *(Chellas, 1980)*' deki 1960' larda Montague ve Scott tarafından önerilen komşuluk semantiği, *(Benthem, 1983)*' deki görece yakınlık için lojikler, *(Esakia, 2004)*' deki topolojik modal lojikler ve *(Stebletsova ve Venema, 2001)*' deki çalışmalar topolojik uzayların modal lojik alanına girmesini sağladı.

Bu bölümde, modal önermesel dil bazında, bazı lojiklerin belirli topolojik uzayları tanımladığı ayrıntılı olarak gösterilmektedir. Ayrıca, **S4** lojiğinin, kanıtları literatürde de bulunabilen, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$' ye göre tamlığı ele alınmaktadır.

3.1. Topolojik Önbilgiler

Bu bölümde yer alan temel topolojiksel kavramlar *(Engelking, 1989)*' dan alınmıştır.

Tanım 3.1.1. Bir topolojik uzay, X bir küme, $\wp(X)$ X' in kuvvet kümesi ve τ, $\wp(X)$' in aşağıdaki üç koşulu sağlayan bir alt kümesi olmak üzere bir $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ ikilisidir:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) $U, V \in \tau$ ise $U \cap V \in \tau$' dur,

(iii) $\{U_i\}_{i \in I} \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$' dur.

τ koleksiyonunun elemanlarına **açık kümeler**, açık kümelerin X ' e göre tümleyenlerine **kapalı kümeler** ve $x \in X$ elemanını içeren bir açık kümeye x' in **açık komşuluğu** denir.

$\mathcal{B}, \tau$' nun bir alt kümesi olsun. Her açık küme $\mathcal{B}$' nin bir alt ailesinin elemanlarının birleşimi olarak temsil edilebiliyorsa, $\mathcal{B}$' ye τ topolojisi için bir **baz** denir.

Önerme 3.1.2. Bir X kümesinin alt kümelerinin bir $\mathcal{B}$ ailesi X üzerindeki bir topoloji için bir bazdır ancak ve ancak (i) her bir $x \in X$ için $x \in U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{B}$ vardır ve (ii) her $U, V \in \mathcal{B}$ için $x \in U \cap V$ ise $x \in W \subseteq U \cap V$ olacak şekilde $W \in \mathcal{B}$ vardır.

$A \subseteq X$ ve $x \in X$ verilsin. x' in $U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık komşuluğu varsa, x noktasına A' nın bir **iç noktası** (interior point) denir ve A' nın tüm iç noktalarının kümesi $I(A)$ ya da $Int(A)$ veya Å ile gösterilir. Bir A kümesinin içi A' nın kapsadığı en büyük açık kümedir. Bir $x \in X$ noktasının her bir U açık komşuluğu için $A \cap (U - \{x\})$ boştan farklı bir küme ise x, $A \subseteq X$ kümesinin bir **limit noktası**dır denir. A' nın limit noktalarının kümesine A' nın **türevi** denir ve $d(A)$ ya da A' ile gösterilir. $A \cup d(A)$ kümesi A' nın **kapanışı** (closure) olarak adlandırılır ve $C(A)$ ya da $Cl(A)$ veya A^{-} ile gösterilir. $C(A)$ kümesi A' yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.

İç ve kapanış operatörlerinin aşağıdaki özellikleri sağladığı iyi bilinmektedir. $A, B \subseteq X$ için

$$I(X) = X \qquad\qquad C(\emptyset) = \emptyset$$

$$I(A \cap B) = I(A) \cap I(B) \qquad\qquad C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$$

$$I(A) \subseteq A \qquad\qquad A \subseteq C(A)$$

$$I(A) \subseteq I(I(A)) \qquad\qquad C(C(A)) \subseteq C(A)$$

$$I(A) \subseteq X - C(X - A),$$

burada $X - A$, A' nın X' e göre tümleyenini gösterir.

Tanım 3.1.3. T bir topolojik uzay olsun. X' in bir A alt kümesine

(i) hem açık hem kapalı ise açık kapalı (clopen);

(ii) $C(A) = X$ ise yoğun (dense);

(iii) $I(A) = \emptyset$ ise **hiçbir yerde yoğun olmayan** küme (nowhere dense set);

(iv) $A \subseteq d(A)$ ise kendi içinde yoğun (dense-in-itself)

denir.

Bir T topolojik uzayı için $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ ise $\{U_i\} \subseteq \tau$ ailesine X' in bir **açık örtüsü** (open cover) denir.

Tanım 3.1.4. Bir T topolojik uzayına

(i) X' in her alt kümesi açık ise **ayrık** (discrete);

(ii) X' in tek açık alt kümeleri $\emptyset$ ve X ise **kaba** (coarse);

(iii) $d(X) = X$ ise **kendi içinde yoğun**;

(iv) X' in her açık örtüsü sonlu bir açık örtüye sahipse **kompakt** (compact);

(v) X' in tek açık kapalı alt kümeleri $\emptyset$ ve X ise **bağlantılı** (connected);

(vi) X' in her bir açık alt kümesinin kapanışı açık kapalı ise **aşırı bağlantısız** (extremelly disconnected);

(vii) X' in her bir alt kümesinin sınırının içi boş ise **atomik**

denir.

Tanım 3.1.5. Bir T topolojik uzayına

(i) X' in farklı noktalarının her bir ikilisi için noktalardan birini içeren ve diğerini içermeyen bir açık küme varsa bir $\boldsymbol{T_0}$**-uzayı**;

(ii) Her bir $x \in X$ için $\{x\}$, U' da kapalı olacak şekilde x' in bir U açık komşuluğu varsa bir $\boldsymbol{T_d}$**-uzayı** ya da $\boldsymbol{T_{1/2}}$**-uzayı** (denk olarak, T bir T_d-uzayıdır ancak ve ancak $d(d(A)) \subseteq d(A)$' dır);

(iii) X' in farklı noktalarının her bir ikilisi için noktalardan tam olarak birini içeren bir açık küme varsa bir $\boldsymbol{T_1}$**-uzayı** (denk olarak, T bir T_1-uzayıdır ancak ve ancak her bir $\{x\}$, X' de kapalıdır);

(iv) Her bir $x, y \in X$ ikilisi için her bir x ve y' nin ayrık açık komşulukları varsa bir $\boldsymbol{T_2}$**-uzayı** ya da **Hausdorff uzayı**

denir.

Aşağıdaki önerme açıktır:

Önerme 3.1.6. Her T_2-uzayı bir T_1-uzayı, her T_1-uzayı bir T_d-uzayı ve her T_d-uzayı bir T_0-uzayıdır. Fakat tersi doğru değildir. ⊠

Tanım 3.1.7. $T = \langle X, \ \tau\rangle$ ve $T' = \langle Y, \ \tau'\rangle$ topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun.

(i) $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ ise f dönüşümüne **sürekli** (continuous) denir.

(ii) $U \in \tau$ için $f(U) \in \tau'$ ise f dönüşümüne **açık** (open) denir.

(iii) f dönüşümü sürekli ve açık ise **iç** (interior) olarak adlandırılır.

3.2. Topolojik Semantik

Topolojik semantikte topolojik uzaylar Kripke semantiğindeki Kripke Çatılarına benzer rol oynarlar. Topolojik modeller Kipke modellerine karşılık gelir.

Tanım 3.2.1. Bir **topolojik model** bir $V: At \to \wp(X)$ değerlendirme fonksiyonu ile donatılmış bir $\langle X, \ \tau\rangle$ topolojik uzayıdır ve $\mathcal{M} = \langle T, \ V\rangle$ ya da $\mathcal{M} = \langle X, \ \tau, \ V\rangle$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. Modal formüllerin doğruluğu $\mathcal{M} = \langle X, \ \tau, \ V\rangle$ modelinin x noktalarında tümevarımla tanımlanır:

$\mathcal{M}, x \vDash p$ (ava) $x \in V(p), \ p \in At$

$\mathcal{M}, x \vDash \neg\varphi$ (ava) $\mathcal{M}, x \nvDash \varphi$

$\mathcal{M}, x \vDash \varphi \wedge \psi$ (ava) $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ ve $\mathcal{M}, x \vDash \psi$

$\mathcal{M}, x \vDash \varphi \to \psi$ (ava) $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ ise $\mathcal{M}, x \vDash \psi$

$\mathcal{M}, x \vDash \Box\varphi$ (ava) $\exists U \in \tau(x \in U \wedge \forall y \in U: \mathcal{M}, y \vDash \varphi)$.

$\mathcal{M}, x \vDash \Diamond \varphi$ (ava) $\forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in U: \mathcal{M}, y \vDash \varphi)$.

Tanım 3.2.3. (Modellerde Doğruluk) $\mathcal{M} = \langle X, \ \tau, \ V\rangle$ bir model ve φ bir formül olsun. Her $x \in X$ için $\mathcal{M}, x \vDash \varphi$ ise φ formülü $\mathcal{M}$' de **doğru** (true) dur, aksi halde **yanlış** (false) tır denir ve sırasıyla $\mathcal{M} \vDash \varphi$ ve $\mathcal{M} \nvDash \varphi$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. (Uzaylarda Geçerlilik) $T = \langle X, \ \tau\rangle$ bir topolojik uzay, φ bir formül ve $\mathcal{C}$ uzayların bir sınıfı olsun. Her $V: At \to \wp(X)$ değerlendirme fonksiyonu için $\mathcal{M} \vDash \varphi$ ise $\varphi, \ T$' de **geçerli** (valid) ya da $T, \ \varphi$' yi geçerli kılar denir ve $T \vDash \varphi$ ile gösterilir. Eğer her $T \in \mathcal{C}$ için $T \vDash \varphi$ ise, $\varphi, \ \mathcal{C}$ sınıfında geçerlidir denir ve $\mathcal{C} \vDash \varphi$ ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme formüllerin topolojik modellerdeki yorumunu vermektedir. Son iki şık dışındaki durumlar Kripke modellerindekilerle aynıdır. $\Box$ ve $\Diamond$ modal operatörleri sırasıyla topolojik iç ve kapanış operatörleri olarak yorumlanmıştır.

Önerme 3.2.5. $\mathcal{M} = \langle X, \quad \tau, \quad V\rangle$ bir model olsun. V fonksiyonunun tanımından, her $p \in At$ için

$$V(p) = \{x \in X : \mathcal{M}, x \vDash p\}$$

olgusu her φ modal formülü için

$$V(\varphi) = \{x \in X : \mathcal{M}, x \vDash \varphi\}$$

olarak genişletilebilir. O zaman her φ, ψ formülleri için aşağıdakiler vardır.

1. $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$.
2. $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$.
3. $V(\neg\varphi) = X - V(\varphi)$.
4. $V(\varphi \to \psi) = (X - V(\varphi)) \cup V(\psi)$.
5. $\mathcal{M} \vDash \varphi \to \psi$ (ava) $V(\varphi) \subseteq V(\psi)$.
6. $V(\top) = X$, burada $\top = \neg\bot$' dir.
7. $V(\bot) = \emptyset$.
8. $V(\Box\varphi) = I\big(V(\varphi)\big)$.
9. $V(\Diamond\, \varphi) = C(V(\varphi))$.

Kanıt. Sadece 8 ve 9 şıkları gösterilecektir.

8' in kanıtı: φ bir formül ve $x \in X$ olsun.

$$\begin{aligned}
x \in V(\Box\varphi) &\Leftrightarrow \mathcal{M}, x \vDash \Box\varphi \\
&\Leftrightarrow \exists U \in \tau(x \in U \wedge \forall y \in U(\mathcal{M}, y \vDash \varphi)) \\
&\Leftrightarrow \exists U \in \tau(x \in U \wedge \forall y \in U(y \in V(\varphi))) \\
&\Leftrightarrow \exists U \in \tau(x \in U \wedge \forall y \in X(y \in U \Rightarrow y \in V(\varphi))) \\
&\Leftrightarrow \exists U \in \tau(x \in U \wedge U \subseteq V(\varphi)) \\
&\Leftrightarrow x \in I(V(\varphi))
\end{aligned}$$

olduğu için $V(\Box\varphi) = I\big(V(\varphi)\big)$ elde edilir.

9' un kanıtı: φ bir formül ve $x \in X$ olsun.

$x \in V(\Diamond\, \varphi) \Leftrightarrow \mathcal{M}, x \vDash \Diamond\, \varphi$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}, x \vDash \neg\Box\neg\varphi$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}, x \nvDash \Box\neg\varphi$

$\Leftrightarrow \forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in U(\mathcal{M}, y \nvDash \neg\varphi))$

$\Leftrightarrow \forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in U(\mathcal{M}, y \vDash \varphi))$

$\Leftrightarrow \forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in U(y \in V(\varphi)))$

$\Leftrightarrow \forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in X(y \in U \wedge y \in V(\varphi)))$

$\Leftrightarrow \forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in X(y \in U \cap V(\varphi)))$

$\Leftrightarrow \forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow U \cap V(\varphi) \neq \emptyset)$

$\Leftrightarrow x \in C(V(\varphi))$

olduğu için $V(\Diamond\, \varphi) = C\big(V(\varphi)\big)$ elde edilir. ⊠

Tanım 3.2.6. (Sağlamlık ve Tamlık) L bir lojik ve $\mathcal{C}$ uzayların bir sınıfı olsun. Her φ modal formülü için

$$\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \Rightarrow \mathcal{C} \vDash \varphi$$

ise **L** lojiği $\mathcal{C}$ sınıfına göre **sağlam** (sound) ve

$$\mathcal{C} \vDash \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathbf{L}} \varphi$$

ise **L** lojiği $\mathcal{C}$ sınıfına göre **tam** (complete) dır denir.

Tanım 3.2.7. Açık kümelerinin **keyfi** kesişimi bir açık küme olan bir topolojik uzaya **Alexandroff uzayı** denir.

Kripke çatıları ve topolojik uzaylar arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.2.8. $F = \langle X, \quad R\rangle$ yansıyan ve geçişken bir çatı ve $\tau,\ F$' nin tüm **yukarıya kapalı** (upward closed) kümelerinin, yani

$$U \in \tau \Leftrightarrow \forall x, y \in X\ \big((x \in U \wedge xRy) \Rightarrow y \in U\big),$$

kümesi olsun. O zaman $\tau,\ X$ üzerinde bir topolojidir, yani $T = \langle X, \quad \tau\rangle$ bir topolojik uzaydır. Üstelik, T bir Alexandroff uzayıdır.

Kanıt. $\emptyset$ ve X kümelerinin yukarıya kapalı olduğu açıktır. $\{A_i\}_{i\in I}$ yukarıya kapalı kümelerin bir ailesi olsun. O zaman her $x, y \in X$ için

$x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ ve $xRy \Leftrightarrow \exists j \in I\ (x \in A_j)$ ve xRy

$\Leftrightarrow \exists j \in I\ (y \in A_j)$

$\Leftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} A_i$

olduğu için $\bigcup_{i\in I} A_i$ yukarıya kapalı bir kümedir.

$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ve $xRy \Leftrightarrow \forall j \in I\ (x \in A_j)$ ve xRy

$\Leftrightarrow \forall j \in I\ (y \in A_j)$

$\Leftrightarrow y \in \bigcap_{i\in I} A_i$

olduğu için $\bigcap_{i\in I} A_i$ yukarıya kapalı bir kümedir.

Her bir yansıyan ve geçişken F çatısı için F' nin yukarıya kapalı kümelerinin kümesinin bir Alexandroff uzayı tanımladığı açıktır. Böyle bir uzaya ***F*' ye karşılık gelen uzay** denir. $\boxtimes$

Karşılık gelen uzay kavramı aşağıdaki önemli sonucu açığa çıkarır.

Önerme 3.2.9. $T = \langle X, \ \tau\rangle$ bir $F = \langle X, \ R\rangle$ yansıyan ve geçişken çatıya karşılık gelen uzay olsun. O zaman **her** V fonksiyonu, **her** $x \in X$ elemanı ve **her** φ modal formülü için

$$\langle X, \ R, \ V\rangle, x \vDash \varphi \Leftrightarrow \langle X, \ \tau, \ V\rangle, x \vDash \varphi$$

dir.

Kanıt. φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır. Modal bağlaç dışında Boole bağlaçları durumları açıktır. $\mathcal{M} = \langle X, \ R, \ V\rangle$, F üzerinde bir model ve $\mathcal{N} = \langle X, \ \tau, \ V\rangle$, T üzerinde bir model olsun. Şimdi $\varphi = \Box\psi$ modal durumu için

$$\mathcal{M}, x \vDash \psi \Leftrightarrow \mathcal{N}, x \vDash \psi$$

tümevarım hipotezi altında, her $x \in X$ için

$$\mathcal{M}, x \vDash \Box\psi \Leftrightarrow \mathcal{N}, x \vDash \Box\psi$$

denkliği gösterilmelidir. Bunun için F' de ve T' de $\Box$ operatörünün yorumlarını kullanmak yeterlidir.

$\mathcal{M}, x \vDash \psi \Leftrightarrow \forall y \in X(xRy \Rightarrow \mathcal{M}, y \vDash \psi)$

$\Leftrightarrow \forall y \in X(xRy \Rightarrow \mathcal{N}, y \vDash \psi)$

$\Leftrightarrow \exists U \in \tau(x \in U \wedge \forall y \in U\ (\mathcal{N}, y \vDash \psi))$

$\Leftrightarrow \mathcal{N}, x \vDash \Box\psi$

dir. $\boxtimes$

Önerme 3.2.9 yansıyan ve geçişken bir çatıya karşılık gelen uzayın formüllerin geçerliliğini koruduğunu gösterir ve bu olgu bazı lojiklerin tamlığını kanıtlamak için kullanılabilir.

Tanım 3.2.10. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ bir topolojik uzay ve A, X' in bir alt kümesi olsun. A kümesinin içi $I(A)$, kapanışı $C(A)$ ve **sınırı** (border or frontier) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$I(A) = \{x \in X : \exists U \in \tau\ (x \in U\ ve\ U \subseteq A)\}$

$C(A) = \{x \in X : \forall U \in \tau\ (x \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)\}$

$Fr(A) = C(A) \cap C(X - A)$.

Önerme 3.2.11. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ yansıyan ve geçişken bir $F = \langle X, \quad R \rangle$ çatısına karşılık gelen uzay ve A, X' in bir alt kümesi olsun. O zaman

$I(A) = \{x \in X : \forall y \in X\ (xRy \Rightarrow y \in A)\}$

$C(A) = \{x \in X : \exists y \in X\ (xRy\ ve\ y \in A)\}$

dir.

Kanıt. $x \in X$ için

$x \in I(A) \Leftrightarrow \exists U \in \tau\ (x \in U\ ve\ U \subseteq A)$

$\Leftrightarrow \exists U \in \tau(\forall y \in X\ (xRy \Rightarrow y \in U)\ ve\ U \subseteq A)$

$\Leftrightarrow \forall y \in X\ (xRy \Rightarrow y \in A)$

ve

$x \in C(A) \Leftrightarrow x \in X - I(X - A)$

$\Leftrightarrow x \notin I(X - A)$

$\Leftrightarrow \exists y \in X\ (xRy\ ve\ y \notin X - A)$

$$\Leftrightarrow \exists y \in X\ (xRy\ ve\ y \in A)$$

olduğu Tanım 3.2.10 ve $I(A)$ ile $C(A)$ arasındaki ilişkinin bir sonucudur. ⊠

Bu kesimde yer alan tanım ve sonuçlarla ilgili daha fazla bilgi için *(Gabelaia, D., 2001)* ve *(Saito, T., 2005)* kaynaklarına başvurulabilir.

3.3. S4 Lojiğinin Topolojik Tamlığı

S4 lojiğinin aksiyomları ve kuralları topoloji bağlamında aşağıdaki gibi açıklanabilir:

Aksiyom/kural	Adı	Açıklaması
$\Box T$	(Nec)	Uzayın tamamı açıktır.
$(\Box p \land \Box q) \leftrightarrow \Box(p \land q)$	(R)	Açık kümeler sonlu kesişime kapalıdır.
$\Box p \to p$	(T)	Bir kümenin içi küme tarafından kapsanır.
$\Box p \to \Box\Box p$	(4)	İç operatörü eşgüçlüdür.

Lemma 3.3.1. Her normal modal lojik

$$\text{(RM)} \qquad \frac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$$

kuralına ve (R) $(\Box\varphi \land \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \land \psi)$ teoremine sahiptir.

Kanıt. (Chellas, Teorem 4.2, s. 114). ⊠

Teorem 3.3.2. L, (RM) kuralına kapalı bir lojik olsun ve

$$\text{(C)} \qquad (\Box\varphi \land \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \land \psi)$$

$$\text{(K)} \qquad \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

verilsin. O zaman

$$\vdash_{\mathbf{L}} \mathrm{C} \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{L}} \mathrm{K}$$

dir.

Kanıt. ⇒: (C) **L**' nin bir teoremi olsun. (K)' nın **L**' de bir teorem olduğunun kanıtı için ÖL (Önermeler Lojiği) ve ÖLK (Önermeler Lojiğinin Kuralı) kısaltmalarını kullanalım.

1. $\vdash_{\mathbf{L}} (\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$ ÖL

2. $\vdash_{\mathbf{L}} \Box(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \Box\psi$ 1, RM

3. $\vdash_{\mathbf{L}} (\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi)) \to \Box(\varphi \wedge (\varphi \to \psi))$ C

4. $\vdash_{\mathbf{L}} (\Box\varphi \wedge \Box(\varphi \to \psi)) \to \Box\psi$ 2, 3, ÖLK

5. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ 4, ÖLK

$\Leftarrow$: (K), **L**' nin bir teoremi olsun.

1. $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ ÖL

2. $\vdash_{\mathbf{L}} \Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ 1. RM

3. $\vdash_{\mathbf{L}} \Box(\varphi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\varphi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$ K örneği

4. $\vdash_{\mathbf{L}} \Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$ 2, 3, ÖLK

5. $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \leftrightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$ 4, ÖLK. ⊠

Teorem 3.3.3. **Top** topolojik uzayların sınıfını göstersin ve $\Box$ modal operatörü topolojik iç olarak yorumlansın. O zaman **S4** lojiği **Top** sınıfına göre sağlamdır.

Kanıt. **S4**' ün aksiyomlarının **Top** sınıfında geçerli olduğu ve kurallarının geçerliliği koruduğu gösterilmelidir.

- **Top** $\vDash$ (T):

  $T \in \mathbf{Top}$, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir topolojik model ve bir $x \in X$ için $\mathcal{M}, x \vDash \Box p$ olsun. O zaman tanımdan

  $$\exists U \in \tau \, (x \in U \; ve \; \forall y \in U \, (\mathcal{M}, y \vDash p)$$

  dir. $x \in U$ nedeniyle $\mathcal{M}, x \vDash p$ özellikle doğrudur. O halde **Top** $\vDash$ (T) doğrudur.

- **Top** $\vDash$ (4):

  $T \in \mathbf{Top}$ keyfi bir uzay, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir topolojik model ve her $x \in X$ için $\mathcal{M}, x \vDash \Box p$ varsayalım. O zaman tanım gereği

  $$\exists U \in \tau \, (x \in U \; ve \; \forall y \in U \, (\mathcal{M}, y \vDash p)$$

  dir. Ama bu durumda her bir $y \in U$ için $\mathcal{M}, y \vDash \Box p$ sonuçlanır ve bu

  $\mathcal{M}, x \vDash \Box\Box p$' yi gerektirir. Böylece **Top** $\vDash$ (4) gerçeklenmiş olur.

- **Top** $\vDash$ (K):

$T \in \mathbf{Top}$ keyfi bir uzay, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir topolojik model ve her $x \in X$ için $\mathcal{M}, x \vDash \Box(p \rightarrow q)$ ve $\mathcal{M}, x \vDash \Box p$ varsayalım. O zaman

$\exists U \in \tau\ (\exists V \in \tau\ ((x \in U\ ve\ x \in V)\ ve\ \forall y \in U\ (\mathcal{M}, y \vDash p \rightarrow q)\ \ ve$

$\forall z \in V\ (\mathcal{M}, z \vDash p)))$

dir. Şimdi $W = U \cap V$ alalım; o zaman W, x' in bir açık komşuluğudur ve her $w \in W$ için $\mathcal{M}, w \vDash p \rightarrow q$ ve $\mathcal{M}, w \vDash p$' dir. Buradan her bir $w \in W$ için $\mathcal{M}, w \vDash q$ elde edilir ve bu ise $\mathcal{M}, x \vDash \Box q$' yu gerektirir. Böylece $\mathbf{Top} \vDash$ (K) gerçeklenmiş olur.

- Modus Ponens **Top** sınıfında geçerliliği korur:

$T \in \mathbf{Top}$ keyfi bir uzay, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir topolojik model ve her $x \in X$ için $\mathcal{M}, x \vDash p$ ve $\mathcal{M}, x \vDash p \rightarrow q$ varsayalım. O zaman Önerme 3.2.5 uyarınca sırasıyla $x \in V(p)$ ve $x \in (X - V(p)) \cup V(q)$' dir. Buradan $x \in V(q)$, yani $\mathcal{M}, x \vDash q$ sonuçlanır ve böylece iddia doğrulanmış olur.

- (Nec) kuralı **Top** sınıfında geçerliliği korur:

$\Box\varphi$ formülü **Top** sınıfında geçerli $\mathcal{M}, x \nvDash \Box\varphi$ olacak şekilde bir $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ modeli ve $x \in X$ vardır. Bu durum $\mathcal{M}, y \nvDash \varphi$ olmasına yol açar ve φ formülünün geçerliliği ile çelişir. O halde φ, **Top** sınıfında geçerli ise $\Box\varphi$ de geçerlidir. ⊠

S4 lojiğinin topolojik semantiğe göre tamlığı ilk kez *(McKinsey and Traski, 1944)* tarafından gösterildi. Burada, *(Aiello et al., 2003)* ve *(Bezhanishvili and Gehrke 2005)* kaynaklarından esinlenilerek, söz konusu tamlık modern notasyon ve yeni bilgiler ışığında yeniden ayrıntılı olarak veriliyor.

3.3.1. S4 Lojiğinin Bağıntısal Semantikle İlişkisi

Alexandroff uzayları ve **S4**-çatıları arasındaki bağlantı Önerme 3.2.8 ve Önerme 3.2.9' da kurulmuştu. Tanım 3.2.7 denk biçimde şöyle ifade edilebilir: X uzayı bir Alexandroff uzayıdır ancak ve ancak X' in her noktasının bir en küçük açık komşuluğu vardır. Şimdi $F = \langle X, \quad R \rangle$ bir **S4**-çatısı ve A, X' in bir alt kümesi olsun.

$x \in A$ ve xRy, $y \in A$' yı gerektiriyorsa A kümesine **aşağıya kapalı** (downward closed) denir.

Bir $F = \langle X, \quad R \rangle$ **S4**-çatısı verildiğinde X' in üzerinde F' nin yukarıya kapalı kümeleri açık kümeler olarak alınarak τ_R topolojisi tanımlanır. Buradan F' nin aşağıya kapalı alt kümelerinin kapalı kümeler olduğu ortaya çıkar. Elde edilen uzayın bir Alexandroff uzayı olduğu Önerme 3.2.8' de kanıtlanmıştı. Şimdi $x \in X$ için en küçük komşuluğun

$$R(x) = \{y \in X : xRy\}$$

bir $A \subseteq X$ kümelerinin kapanışının

$$R^{-1}(A) = \{x \in X : \exists y \in A, xRy\}$$

ve A' nın içinin

$$X - R^{-1}(X - A) = \{x \in X : (\forall y \in X)\ (xRy \Rightarrow y \in A)\}$$

olduğunu göstermek kolaydır.

$T = \langle X, \quad \tau \rangle$ bir topolojik uzay olsun. X üzerinde

$$xR_\tau y \Leftrightarrow x \in C(\{y\})$$

şeklinde tanımlanan R_τ bağıntısına **specialization** sıralama adı verilir.

Önerme 3.3.1.1. *(Aiello et al., 2003)*

$T = \langle X, \quad R \rangle$ bir topolojik uzay ve R_τ, X üzerindeki specialization bağıntısı olsun. O zaman

(a) R_τ bir önsıralama bağıntısıdır.

(b) R_τ ters simetriktir (ava) T bir T_0-uzayıdır.

(c) $R = R_{\tau_R}$ ve $\tau \subseteq \tau_{R_\tau}$' dur.

(d) $\tau = \tau_{R_\tau}$ (ava) T bir Alexandroff uzayıdır. $\boxtimes$

Tanım 3.3.1.2. $F_1 = \langle W_1, \quad R_1 \rangle$ ve $F_2 = \langle W_2, \quad R_2 \rangle$ Kripke çatıları verilsin. F_1' den F_2' ye bir ***p*-morfizma** aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f: W_1 \to W_2$ fonksiyonudur:

(i) wR_1u ise $f(w)R_2f(u)$' dur,

(ii) sR_2t ve $s = f(u)$, $u \in W_1$ ise bir $w \in W_1$ için uR_1w ' dir.

Önerme 3.3.1.3. *(Aiello, et al., 2003)*

(a) Alexandroff uzayları ve **S4**-çatıları arasında bir bire-bir eşleme vardır.

(b) Alexandroff T_0- uzayları ve kısmi sıralı **S4**-çatıları arasında bir bire-bir eşleme vardır.

(c) Sonlu topolojik uzaylar ve sonlu **S4**-çatıları arasında bir bire-bir eşleme vardır.

(d) Sonlu T_0- uzayları ve kısmi sıralı **S4**-çatıları arasında bir bire-bir eşleme vardır.

(e) Sürekli dönüşümler ve sıra-koruyan dönüşümler arasında bir bire-bir eşleme vardır.

(f) Açık dönüşümler ve p-morfizmalar arasında bir bire-bir eşleme vardır. ⊠

Sonuç Teorem 3.3.1.4. Bağıntısal semantiğe göre tam olan **S4**' ün her normal genişlemesi topolojik semantiğe göre de tamdır. ⊠

3.3.2. S4 Lojiğinin Kanonik Topolojik Modeli

Sonuç Teorem 3.3.1.4 standart modal modellerin genel topolojik semantiğin özel bir durumu olduğunu ifade eder. O nedenle **S4**' ün bilinen tamlığı ve aksiyomlarının topolojik sağlamlığı dolaysız olarak topolojik tamlığı verir. Böyle olsa bile burada bu sonucun doğrudan bir model kuramsal kanıtı *(Aiello et al., 2003)*' den esinlenilerek yapılacaktır.

Tanım 3.3.2.1. (Kanonik Topolojik Uzay) Kanonik topolojik uzay $T^{\mathbf{L}} = \langle X^{\mathbf{L}}, \quad \tau^{\mathbf{L}} \rangle$ ikilisidir öyle ki:

(i) $X^{\mathbf{L}}$ tüm maksimal tutarlı kümelerin kümesidir;

(ii) $\hat{\varphi} \coloneqq \{x \in X^{\mathbf{L}} : \varphi \in X\}$ olmak üzere $\tau^{\mathbf{L}}$,

$B^{\mathbf{L}} = \{\hat{\varphi} : \varphi \ bir \ formül\}$

temel kümelerin keyfi birleşimleri tarafından üretilir. Başka bir deyişle

temel kümeler

$$U_p = \{x \in X^{\mathbf{L}} : \varphi \in x\}$$

biçimli ailelerdir.

İlk önce $T^{\mathbf{L}}$' nin bir topolojik uzay olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.3.2.2. $B^{\mathbf{L}}$ topoloji için bir baz oluşturur.

Kanıt. Bunun için $B^{\mathbf{L}}$' nin aşağıdaki iki koşulu gerçeklediği gösterilmelidir:

(B1) Her bir $U_\varphi, U_\psi \in B^{\mathbf{L}}$ ve $x \in U_\varphi \cap U_\psi$ için $x \in U_\theta \subseteq U_\varphi \cap U_\psi$ olacak şekilde bir $U_\theta \in B^{\mathbf{L}}$ vardır.

(B2) Her bir $x \in X^{\mathbf{L}}$ için $x \in U_\varphi$ olacak şekilde $U_\varphi \in B^{\mathbf{L}}$ vardır.

(Nec) kuralı, her bir $x \in X^{\mathbf{L}}$ için $\Box T \in x$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $X^{\mathbf{L}} = \widehat{\Box T}$' dir ve (B2) gerçeklenir. $\widehat{\Box(\varphi \wedge \psi)} = \widehat{\Box\varphi} \cap \widehat{\Box\psi}$ eşitliği (K) aksiyomu kullanılarak gösterilir. O zaman $U_\varphi \cap U_\psi \in B^{\mathbf{L}}$ elde edilir; böylece $B^{\mathbf{L}}$ sonlu arakesitlere kapalıdır, başka bir ifade ile (B1) gerçeklenmiş olur. $\boxtimes$

Tanım 3.3.2.3. (Kanonik Topolojik Model) Kanonik topolojik model $\mathcal{M}^{\mathbf{L}} = \langle T^{\mathbf{L}}, \quad V^{\mathbf{L}} \rangle$ ikilisidir öyle ki:

(i) $T^{\mathbf{L}}$ kanonik topolojik uzaydır;

(ii) $V^{\mathbf{L}}(p) = \{x \in X^{\mathbf{L}} : p \in x\}$' dir.

$V^{\mathbf{L}}$ değerlendirme fonksiyonu maksimal tutarlı bir kümedeki bir önerme değişkeninin doğruluğunu o kümede elemanı olma bağıntısı ile eşitler. Bu uyumun tüm formüllere yayıldığı aşağıdaki lemmada gösterilmektedir.

Lemma 3.3.2.4. (Doğruluk Lemması) $\mathcal{M}^{\mathbf{L}} = \langle T^{\mathbf{L}}, \quad V^{\mathbf{L}} \rangle$ kanonik modeli verilsin ve φ keyfi bir modal formül olsun. O zaman $x \in X$ için

$$\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, x \vDash_{\mathbf{L}} \varphi \text{ (ava) } x \in \hat{\varphi}$$

dir.

Kanıt. φ formülünün karmaşıklığı üzerine tümevarım ile yapılır.

Önce Boole bağlaçları durumları için maksimal tutarlı kümelerin iyi bilinen

$$\widehat{\neg\varphi} = X^{\mathbf{L}} - \hat{\varphi}$$

$$\widehat{\varphi \wedge \psi} = \hat{\varphi} \cap \hat{\psi}$$

özdeşliklerini sağladığını kaydetmek yeterlidir.

Modal durumun kanıtı:

$\Leftarrow$: $x \in \widehat{\Box\varphi}$ olsun. Tanım gereği temel bir küme olduğu için $\widehat{\Box\varphi}$ açıktır. Ayrıca (T) aksiyomu uyarınca $\widehat{\Box\varphi} \subseteq \hat{\varphi}$ olması nedeniyle x' in her $y \in U$ için $y \in \hat{\varphi}$ olacak şekilde bir $U = \widehat{\Box\varphi}$ açık komşuluğu vardır ve tümevarım hipotezinden $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, y \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$ elde edilir. O halde $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, x \vDash_{\mathbf{L}} \Box\varphi$' ye ulaşılır.

$\Rightarrow$: $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, x \vDash_{\mathbf{L}} \Box\varphi$ varsayalım. O zaman $x \in \widehat{\Box\varphi}$' dir ve her $y \in \widehat{\Box\varphi}$ için $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, y \vDash_{\mathbf{L}} \varphi$ olacak şekilde bir $\widehat{\Box\varphi} \in B^{\mathbf{L}}$ baz kümesi vardır. Tümevarım hipotezinden her $y \in \widehat{\Box\varphi}$ için $y \in \hat{\varphi}$, dolayısıyla $\widehat{\Box\varphi} \subseteq \hat{\varphi}$ elde edilir. Bu, **S4**' ün $\Box\psi \to \varphi$' yi kanıtlayabildiği anlamına gelir. Ama bu durumda **S4**, $\Box\Box\psi \to \Box\theta$' yı kanıtlayabilir ve buradan (4) aksiyomu sayesinde $\Box\psi \to \Box\theta$' yı da kanıtlayabildiği görülür. Böylece $\widehat{\Box\psi} \subseteq \widehat{\Box\theta}$' dır ve x dünyası $\widehat{\Box\theta}$' ya aittir. ☒

Artık aşağıdaki temel sonucun kanıtı perçinleştirilebilir.

Teorem 3.3.2.5. (Tamlık) Γ bir formüller kümesi olsun. O zaman

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{L}} \varphi \text{ ise } \Gamma \vdash_{\mathbf{S4}} \varphi$$

dir.

Kanıt. Karşıt ters kanıt için $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S4}} \varphi$ varsayalım. O zaman $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ kümesi tutarlıdır ve Lindenbaum Lemması' na göre bir x mtk' ye genişletilebilir. Doğruluk Lemması 3.3.2.4 uyarınca $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}, x \vDash_{\mathbf{L}} \neg\varphi$, dolayısıyla $\mathcal{M}, x \nvDash_{\mathbf{L}} \varphi$ sonuçlanır. $\mathcal{M}^{\mathbf{L}}$ karşıt modeli oluşturularak kanıt tamamlanır. ☒

Sonuç Teorem 3.3.2.6. S4 tüm topolojik uzayların sınıfının lojiğidir. ☒

Sadece sonlu çoklukta maksimal tutarlı küme olduğunda ve dolayısıyla kanıtlanamayan formüller sonlu modeller üzerinde çürütülebildiğinde aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç Teorem 3.3.2.7.

(i) **S4** tüm sonlu topolojik uzayların sınıfının lojiğidir.

(ii) **S4** topolojik uzayların sınıfına göre sonlu model özelliğine sahiptir.☒

Bu kesim, bazı özel uzaylara göre **S4'** ün tamlığını gösteren sonuçlar kanıtsız olarak ifade edilerek sonlandırılacaktır. $\mathbb{Q}$ rasyonel doğruyu, $\mathbb{R}$ gerçel doğruyu ve $\mathbb{C}_a$ Cantor uzayını göstersin.

Teorem 3.3.2.8. *(Aiello et al., 2003)* **S4** $\mathbb{C}_a$ uzayının lojiğidir. ☒

Teorem 3.3.2.9. *(Benthem et al., 2005)* **S4** $\mathbb{Q}$' ya göre tamdır. $\boxtimes$

Teorem 3.3.2.10. *(Bezhanishvili ve Gehrke, 2005)* **S4** $\mathbb{R}$' ye göre tamdır. $\boxtimes$

3.4. Temel Modal Dilde Tanımlanabilir Topolojik Uzaylar

Bu kesimde bazı topolojik uzay sınıflarının temel modal dilde tanımlanabilirliği gösteriliyor. Tanımlanabilirlik hakkında daha fazla bilgi edinmek için *(Balder ten Cate et al., 2009)*, *(Gabelaia, 2001)* ve *(Saito, 2005)* kaynaklarına başvurulabilir.

Tanım 3.4.1. $\mathcal{C}$ bir topolojik uzaylar sınıfı ve Γ bir formüller kümesi olsun. Her bir $T \in \mathcal{C}$ ve her bir $\varphi \in \Gamma$ için

$$T \in \mathcal{C} \Leftrightarrow T \vDash \varphi$$

ise Γ, $\mathcal{C}$ ' yi **tanımlar** denir. $\mathcal{C}$ sınıfını tanımlayan bir Γ varsa $\mathcal{C}$ temel dilde **tanımlanabilir** denir.

Lemma 3.4.2. $\varphi \to \Box\varphi$ formül taslağını geçerli kılan bir topolojik uzay ayrıktır.

Kanıt. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ bir topolojik uzay ve $T \vDash \varphi \to \Box\varphi$ olsun. Gösterilmesi gereken X' in her alt kümesinin açık, yani $\tau = \wp(X)$, olduğudur. Bunun için her bir $A \subseteq X$ alt kümesinin $A = I(A)$ eşitliğini sağladığını gerçeklemek yeterlidir. Şimdi $p \to \Box p$, $\varphi \to \Box\varphi$ formülünün bir örneği, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir model ve $V(p) = A$ olmak üzere hipotez gereği $\mathcal{M} \vDash p \to \Box p$' dir.

Önerme 3.2.5 uyarınca aşağıdakiler vardır:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash p \to \Box p &\Leftrightarrow V(p) \subseteq V(\Box p) \\
&\Leftrightarrow V(p) \subseteq I(V(p)) \\
&\Leftrightarrow A \subseteq I(A) \\
&\Leftrightarrow A = I(A).
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Lemma 3.4.3. $\varphi \to \Box\varphi$ formül taslağı her ayrık uzayda geçerlidir.

Kanıt. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ bir ayrık uzay, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir model ve φ keyfi bir formül olsun. Gösterilmesi gereken $\mathcal{M} \vDash \varphi \to \Box\varphi$' dir. T bir ayrık uzay olduğu için $V(\varphi)$ bir açık kümedir, dolayısıyla $V(\varphi) = I(V(\varphi))$' dir. Şimdi yine Önerme 3.2.5 ışığında aşağıdakiler vardır.

$$V(\varphi) = I(V(\varphi)) \Leftrightarrow V(\varphi) \subseteq I(V(\varphi))$$

$$\Leftrightarrow V(\varphi) \subseteq V(\Box\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi \to \Box\varphi. \qquad \boxtimes$$

Teorem 3.4.4. $\varphi \to \Box\varphi$ formül taslağı tüm ayrık topolojik uzayların sınıfını tanımlar. $\boxtimes$

Genel topolojide çok yaygın olmayan atomik topolojik uzayların sınıfını tanımlayan $\Box \lozenge \varphi \to \lozenge \Box\varphi$ formül taslağı modal lojikte önemli bir yer tutar ve (M) ya da bazen (.1) ile gösterilir.

Lemma 3.4.5. (.1) taslağını geçerli kılan bir topolojik uzay atomiktir.

Kanıt. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ (.1) taslağını geçerli kılan bir uzay ve A, X' in bir alt kümesi olsun. Gösterilmesi gereken $I\big(Fr(A)\big) = \emptyset$' dir. Bunun için (.1) taslağının $\Box \lozenge p \to \lozenge \Box p$ örneğini göz önünde bulunduralım ve $V(p) = A$ olsun. O zaman I ve C operatörleri arasındaki ilişki ve Önerme 3.2.5 uyarınca aşağıdakiler vardır.

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \vDash \Box \lozenge p \to \lozenge \Box p &\Leftrightarrow V(\Box \lozenge p) \subseteq V(\lozenge \Box p) \\
&\Leftrightarrow I(V(\lozenge p)) \subseteq C(V(\Box p)) \\
&\Leftrightarrow I(C(V(p))) \subseteq C(I(V(p))) \\
&\Leftrightarrow I(C(A)) \subseteq C(I(A)) \\
&\Leftrightarrow I\big(C(A)\big) \cap \Big(X - C\big(I(A)\big)\Big) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow I\big(C(A)\big) \cap (X - \Big(X - I\big(X - I(A)\big)\Big)) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow I\big(C(A)\big) \cap I\big(X - I(A)\big) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow I\big(C(A)\big) \cap I(X - (X - C(X - A))) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow I(C(A) \cap C(X - A)) = \emptyset \\
&\Leftrightarrow I\big(Fr(A)\big) = \emptyset. \qquad \boxtimes
\end{aligned}$$

Lemma 3.4.6. (.1) taslağı her atomik topolojik uzayda geçerlidir.

Kanıt. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ bir atomik topolojik uzay, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir model ve φ bir formül olsun. Gösterilmesi gereken $\mathcal{M} \vDash \Box \lozenge \varphi \to \lozenge \Box\varphi$' dir. Lemma 3.4.5' in kanıtından aşağıdakiler açıktır:

$$I\big(Fr(V(\varphi))\big) = \emptyset \Leftrightarrow I\big(C(V(\varphi))\big) \subseteq C\big(I(V(\varphi))\big)$$

$$\Leftrightarrow V(\Box \lozenge \varphi) \subseteq V(\lozenge \Box\varphi)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \Box \lozenge \varphi \rightarrow \lozenge \Box\varphi. \qquad \boxtimes$$

Teorem 3.4.7. (.1) taslağı tüm atomik uzayların sınıfını tanımlar. $\boxtimes$

Artık $\mathbf{S4.1} = \mathbf{KT4} + \Box \lozenge \varphi \rightarrow \lozenge \Box\varphi$ lojiği için aşağıdaki iki sonuç ifade edilebilir.

Teorem 3.4.8. $\mathbf{S4.1}$ lojiği tüm atomik topolojik uzayların sınıfına göre sağlamdır. $\boxtimes$

Teorem 3.4.9. *(Saito, s. 29)* $\mathbf{S4.1}$ lojiği tüm atomik topolojik uzayların sınıfına göre tamdır. $\boxtimes$

Aşırı bağlantısız topolojik uzaylar da genel topolojide çok bilinen uzaylar değildir. Bununla birlikte modal lojikte çok önemli bir formül olan ve (G) ya da (.2) ile gösterilen $\lozenge \Box\varphi \rightarrow \Box \lozenge \varphi$ formül taslağı bu uzayları tanımlar.

Lemma 3.4.10. (.2) taslağını geçerli kılan bir topolojik uzay aşırı bağlantısızdır.

Kanıt. $T = \langle X, \ \tau\rangle$ (.2) taslağını geçerli kılan bir topolojik uzay ve $U \in \tau$ olsun. Gösterilmesi gereken $C(U)$' nun açık, yani $C(U) = I(C(U))$ olduğudur. (.2) taslağı T' de geçerli olduğu için $V(p) = U$, $(X, \ \tau, \ V) \vDash \lozenge \Box p \rightarrow \Box \lozenge p$ olacak şekilde bir $\mathcal{M} = \langle T, \ V\rangle$ modeli vardır. Şimdi bir kez daha Önerme 3.2.5' den aşağıdakiler açıktır:

$$\mathcal{M} \vDash \lozenge \Box p \rightarrow \Box \lozenge p \Leftrightarrow V(\lozenge \Box p) \subseteq V(\Box \lozenge p)$$

$$\Leftrightarrow C(V(\Box p)) \subseteq I(V(\lozenge p))$$

$$\Leftrightarrow C(I(V(p))) \subseteq I(C(V(p)))$$

$$\Leftrightarrow C(I(U)) \subseteq I(C(U))$$

$$\Leftrightarrow C(U) \subseteq I(C(U)).$$

Ama $I(C(U)) \subseteq C(U)$ kapsamı her zaman geçerli olduğu için $C(U) = I(C(U))$ elde edilir. $\boxtimes$

Lemma 3.4.11. (.2) taslağı her aşırı bağlantısız topolojik uzayda geçerlidir.

Kanıt. $T = \langle X, \ \tau\rangle$ aşırı bağlantısız topolojik uzay, $\mathcal{M} = \langle T, \ V\rangle$ T üzerinde bir model ve φ bir formül olsun. Gösterilmesi gereken $\mathcal{M} \vDash \lozenge \Box p \rightarrow \Box \lozenge p$' dir. Hipotez gereği $C\left(I(V(\varphi))\right) = I(C(I(V(\varphi))))$ ' dir. Bu eşitlikten hareketle aşağıdakiler açıktır:

$$C\left(I(V(\varphi))\right) = I(C(I(V(\varphi)))) \Leftrightarrow C\left(I(V(\varphi))\right) \subseteq I(C(I(V(\varphi))))$$

$$\Leftrightarrow C\left(I(V(\varphi))\right) \subseteq I(C(V(\varphi)))$$

$$\Leftrightarrow C(V(\Box\varphi)) \subseteq I(V(\Diamond\, \varphi))$$

$$\Leftrightarrow V(\Diamond\, \Box\varphi) \subseteq V(\Box\Diamond\, \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \Diamond\, \Box p \rightarrow \Box\, \Diamond\, p.$$

⊠

Teorem 3.4.12. (.2) taslağı aşırı bağlantısız topolojik uzayların sınıfını tanımlar. ⊠

Teorem 3.4.13. S4. 2 lojiği aşırı bağlantısız uzayların sınıfına göre sağlamdır. ⊠

Teorem 3.4.14. S4. 2 lojiği aşırı bağlantısız uzayların sınıfına göre tamdır. ⊠

Son bir örnek olarak **S5** uzayının tanımlanabilir olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.4.15. (B) taslağı her kaba topolojik uzayda geçerlidir.

Kanıt. $\mathcal{M} = \langle T, \quad V \rangle$ bir $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ kaba topolojik uzay üzerinde bir model ve φ bir formül olsun. Gösterilmesi gereken $\mathcal{M} \vDash \varphi \rightarrow \Box\, \Diamond\, \varphi$' dir. T kaba topolojik uzay olduğu için $C(V(\varphi)) = X$, dolayısıyla $I(C(V(\varphi))) = X$' dir. Buradan

$$V(\varphi) \subseteq X \Leftrightarrow V(\varphi) \subseteq I(C(V(\varphi)))$$

$$\Leftrightarrow V(\varphi) \subseteq I(V(\Diamond\, \varphi))$$

$$\Leftrightarrow V(\varphi) \subseteq V(\Box\, \Diamond\, \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi \rightarrow \Box\, \Diamond\, \varphi$$

istenilen sonucu elde edilir. ⊠

X bir küme ve R, X üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Her $x, y \in X$ için xRy ise R bağıntısına evrensel bağıntı denir. Bir evrensel bağıntı yansıyan ve geçişken olduğu için bir $F = \langle X, \quad R \rangle$ evrensel çatısının tüm yukarıya kapalı alt kümelerinin kümesi X üzerinde bir topoloji tanımlar ve aşağıdaki sonuç vardır.

Lemma 3.4.16. Bir evrensel çatıya karşılık gelen uzay kaba uzaydır.

Kanıt. $T = \langle X, \quad \tau \rangle$ bir $F = \langle X, \quad R \rangle$ evrensel çatısına karşılık gelen uzay ve $U \in \tau$ olsun. Gösterilmesi gereken $U = \emptyset$ ya da $U = X$' dir. U, F' ye karşılık gelen uzayın bir açık kümesi olduğu için F' nin yukarıya kapalı bir kümesidir. F' nin evrensel olması $U = \emptyset$ ya da $U = X$ olmasını gerektirir. ⊠

Teorem 3.4.17. S5 lojiği kaba topolojik uzayların sınıfına göre sağlamdır. ⊠

Teorem 3.4.18. S5 lojiği kaba topolojik uzayların sınıfına göre tamdır. ⊠

Aşağıdaki listede temel modal dilde tanımlanamayan bazı topolojik uzaylar yer alıyor. Bununla birlikte dile ek modal operatörler eklenerek bu uzayların tanımlanabilir olduğu *(Gabelaia, 2001)* ve *(Saito, 2005)*' de gösterilmiştir.

- Kompakt uzaylar
- Bağlantılı uzaylar
- Kompakt olmayan uzaylar
- Bağlantısız uzaylar
- T_0-uzayları
- T_1-uzayları
- T_2-uzayları

3.5. Türev olarak ◊ operatörü

Temel modal dilin **ifade gücünü** (expressivity power) arttırmanınn iki doğal yolu vardır. Birisi dile yeni modal operatörler eklemek, diğeri ise ◊ modal operatörünü, kapanış operatöründen daha güçlü ifadeye sahip bir topolojik operatör olarak yorumlamaktır. Bu kesimde ◊ operatörünün, ilk kez *(McKinsey ve Tarski, 1944)* tarafından önerilen, türev olarak yorumlanmasının sonuçları ele alınıyor. $T = \langle X, \quad \tau\rangle$ bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ verilsin. $C(A) = A \cup d(A)$ olduğu için türev operatörü kapanış operatöründen daha fazla ifade gücüne sahiptir. d operatörünün tanımından aşağıdaki denkliği anımsatmakta yarar vardır:

$$x \in d(A) \Leftrightarrow x\text{' in her bir } U \text{ açık komşuluğu için } A \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset.$$

Tanım 3.5.1. $\mathcal{M} = \langle T, \quad V\rangle$ bir topolojik model ve φ bir formül olsun. φ' nin bir $x \in X$ noktasında d-doğruluğu φ' nin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) $\mathcal{M}, x \vDash_d p$ (ava) $x \in V(p)$

(ii) $\mathcal{M}, x \vDash_d \neg\varphi$ (ava) $\mathcal{M}, x \nvDash_d \varphi$

(iii) $\mathcal{M}, x \vDash_d \varphi \wedge \psi$ (ava) $\mathcal{M}, x \vDash_d \varphi$ ve $\mathcal{M}, x \vDash_d \psi$

(iv)$\mathcal{M}, x \vDash_d \varphi \to \psi$ (ava) $\mathcal{M}, x \vDash_d \varphi$ ise $\mathcal{M}, x \vDash_d \psi$

(v)$\mathcal{M}, x \vDash_d \Box\varphi$ (ava) $(\exists U \in \tau(x \in U\ ve\ \forall y \in U - \{x\},\ \mathcal{M}, y \vDash_d \varphi)$

(vi)$\mathcal{M}, x \vDash_d \Diamond\, \varphi$ (ava) $(\forall U \in \tau(x \in U \Rightarrow \exists y \in U - \{x\},\ \mathcal{M}, y \vDash_d \varphi)$.

Eğer φ her $x \in X$ noktasında d-doğru ise φ formülü $\mathcal{M} = \langle T, \quad V\rangle$ modelinde doğru, T üzerindeki her modelde d-doğru ise d-geçerlidir denir. φ formülü **Top** sınıfının her ögesinde d-geçerli ise **Top**' da d-geçerlidir denir.

Örnek 3.5.2. Top $\vDash_d p \wedge \Box p \to \Box\Box p$' dir.

Gerçekten; $T \in$ **Top**, $\mathcal{M} = \langle T, \quad V\rangle$ bir topolojik model ve $x \in X$ için $\mathcal{M}, x \vDash_d p \wedge \Box p$ varsayalım. O zaman $\mathcal{M}, x \vDash_d p$ ve $\mathcal{M}, x \vDash_d \Box p$' dir. Tanım 3.5.1. (v) uyarınca her bir $y \in U - \{x\}$ için $\mathcal{M}, x \vDash_d \Box p$, $\mathcal{M}, y \vDash_d p$' yi gerektirir. O halde her $y \in U$ için $\mathcal{M}, y \vDash_d p$' dir ve $\mathcal{M}, y \vDash_d \Box p$' dir ki bu $\mathcal{M}, x \vDash_d \Box\Box p$ demektir.

(K) aksiyom taslağının **Top'** da d-geçerli olduğunu ve (Nec) kuralının d-geçerliliği koruduğunu belirtelim.

Tanım 3.5.3. K $+ (p \wedge p) \to \Box\Box p$ modal lojiğine **zayıf** (weak) **K4** lojiği denir ve **wK4** olarak gösterilir.

wK4, **K4**' den daha zayıf olduğu için d-semantiğine göre sağlamdır. Bu lojiğin d-semantiğine göre tamlığı *(Esakia, 2001)*' de gösterilmiştir. **wK4** lojiğinin topolojik uzayların d-lojiği olduğu; **S4** lojiği ile aralarındaki ilişki aşağıda ele alınıyor. Burada verilen sonuçların çoğu *(Esakia, 2001 ve 2004), (Bezhanishvili, et al., 2005)* ve *(Shehtman, 1990 ve 2006)*' da bulunabilir.

Tanım 3.5.4. $F = \langle W, \quad R\rangle$ çatısına her $u, v, w \in W$ için $(wRv\ ve\ vRu\ ve\ w \neq u \to wRu)$ ise **zayıf geçişken** (weakly transitive) denir.

wK4 lojiğinin tüm zayıf geçişken çatıların sınıfına göre sağlam ve tam olduğu ve de **wK4**' ün sonlu model özelliğine sahip olduğu *(Esakia, 2001)*' de gösterilmiştir. Bunun üzerine zayıf geçişken çatılar **wK4**-çatılar olarak adlandırılmaktadır.

Tanım 3.5.5. Her $w, r \in W$ ve $w \neq r$ için rRw olacak şekilde bir r varsa r elemanına F' nin **kökü** (root) ve $F = \langle W, \quad R\rangle$ zayıf geçişken çatıya **köklü** (rooted) **çatı** denir.

Teorem 3.5.6. *(Esakia, 2001)* **wK4** lojiği köklü yansımasız sonlu **wK4**-çatılarına göre tamdır. ⊠

Tanım 3.5.7. $F = \langle W, \quad R\rangle$ bir **wK4**-çatı olsun. F' nin $\overline{R} := R \cup \{(x,x) : x \in X\}$ olmak üzere yansımalı kapanışı (reflexive closure) $\overline{F} = \langle X, \quad \overline{R}\rangle$ ve $\underline{R} \coloneqq R \backslash \{(x,x) : x \in X\}$ olmak üzere yansımasız kapanışı (irreflexive closure)

$\underline{F} = \langle X, \quad \underline{R}\rangle$' dir.

Bir **wK4**-çatı F için $\overline{F}$' nin bir **S4**-çatı ve $\underline{F}$' nin yansımasız bir **wK4**-çatı olduğu açıktır. Ayrıca bir **wK4**-çatı F verildiğinde $\overline{F}$' nin bir Alexandroff uzayı olduğunu göstermek kolaydır. Bir $A \subseteq X$ alt kümesinin $\overline{F}$' deki türevi $d_R(A)$ ile gösteriliyor.

Lemma 3.5.8. *(Esakia, 2001)* F bir **wK4**-çatı ve $A \subseteq X$ olsun. $R^{-1} = \{x \in X : \exists y \in X \ ve \ xRy\}$, A' nın kapanışı olmak üzere $\overline{F}$' de $d_R(A) = \underline{R}^{-1}(A)$' dır.

Kanıt. $R(x) = \{y \in X : xRy\}$ olsun. Şimdi

$x \in d_R(A)$ (ava) x' in her bir U açık komşuluğu için $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

(ava) $\overline{R}(x) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

(ava) $\underline{R}(x) \cap A \neq \emptyset$

(ava) $x \in \underline{R}^{-1}(A)$

elde edilir. ⊠

$T = \langle X, \quad \tau\rangle$ bir topolojik uzay olsun. X üzerinde R_d

$$xR_d y \text{ (ava) } x \in d(y)$$

olarak tanımlanıyor.

Lemma 3.5.9. *(Esakia, 2001)* $\langle X, \quad R_d\rangle$ bir yansımasız **wK4**-çatıdır.

Kanıt. R_d' nin yansımasızlığı $x \notin d(x)$ olgusunun sonucudur. Şimdi $xR_d y$, $yR_d z$ ve $x \neq z$ olsun. O zaman $x \in d(y)$ ve $y \in d(z)$ ve de $x \neq z$' dir. Buradan sırasıyla x' in her bir U açık komşuluğu ve y' nin her bir V açık komşuluğu için $y \in U - \{x\}$ ve $z \in V - \{y\}$' dir. Mademki $x \neq z$' dir, x' in her bir U açık komşuluğu için $z \in U - \{x, y\} \subseteq U - \{x\}$ sonuçlanır. Böylece $x \in d(z)$, dolayısıyla $xR_d z$ elde edilir ki bu R_d' nin zayıf geçişken olduğunu gösterir. ⊠

Lemma 3.5.10. *(Esakia, 2001)*

(i) F bir **wK4**-çatı ise $R_{d_R} \subseteq R$' dir.

(ii) F yansımasız **wK4**-çatı ise $R_{d_R} = R$' dir.

(iii) T bir topolojik uzay ise $R_d^{-1}(A) \subseteq d(A)$' dır.

(iv) T bir Alexandroff uzayı ise $R_d^{-1}(A) = d(A)$' dır.

Kanıt.

(i) $xR_{d_R}y \Rightarrow d_R(y) \Rightarrow x \in R^{-1}(y) \Rightarrow xRy$ olduğu için $R_{d_R} \subseteq R$ elde edilir.

(ii) $xR_{d_R}y \Leftrightarrow d_R(y) \Leftrightarrow x \in \underline{R}^{-1}(y) \Leftrightarrow x \in R^{-1}(y) \Leftrightarrow xRy$ olduğu için $R_{d_R} = R$' dir.

(iii) $x \in R_d^{-1}(A) \Rightarrow \exists y(xR_dy \ ve \ y \in A) \Rightarrow \exists y(x \in d(y) \ ve \ d(y) \subseteq d(A)) \Rightarrow x \in d(A)$ olduğu için $R_d^{-1}(A) \subseteq d(A)$' dır.

(iv) $x \in d(A) \Leftrightarrow \overline{R}_d(x) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow R_d(x) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in R_d^{-1}(A)$ olduğu için $R_d^{-1}(A) = d(A)$' dır. ⊠

Sonuç Teorem 3.5.11. Herhangi bir boştan farklı X kümesi için aşağıdakiler arasında bir bire-bir eşleme vardır:

(i) X üzerindeki Alexandroff topolojileri;

(ii) X üzerindeki yansıyan ve geçişken bağıntılar;

(iii) X üzerindeki yansımasız ve zayıf geçişken bağıntılar. ⊠

Bu sonuca göre Alexandroff uzayları, **S4**-çatıları ve yansımasız **wK4**-çatıları arasında bir bire-bir eşleme vardır. Şu ana kadar verilen sonuçların bir ürünü olarak bölümün son teoremini ifade ediyoruz.

Teorem 3.5.12. *(Esakia, 2001)*

(i) **wK4** topolojik uzayların d-lojiğidir.

(ii) **wK4** sonlu topolojik uzayların d-lojiğidir.

(iii) **wK4** topolojik uzayların **Top** sınıfına gore sonlu model özelliğine sahiptir. ⊠

BÖLÜM 4
NORMAL OLMAYAN MODAL LOJİKLER VE KOMŞULUK SEMANTİĞİ

Modal lojiklerin zayıf sistemlerinin çalışılmasını özendirdirmek için her biri standart ya da bağıntısal modellerde geçerli olan aşağıdaki formülleri ve çıkarım kurallarını göz önünde bulundurmak yardımcı olacaktır:

(Düal) $\Box\varphi \leftrightarrow \neg \Diamond \neg\varphi$

(K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

(M) $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

(C) $(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi)$

(N) $\Box T$

(Nec) $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$

(RE) $\frac{\varphi\leftrightarrow\psi}{\Box\varphi\leftrightarrow\Box\psi}$

Bu formül ve kurallar temel modal dilin çeşitli yorumları altında göreceli olarak anlamlıdır. Bunun birlikte, aralarında bir ya da daha fazlasının geçerliliğinin sorgulanabileceği yorumlar vardır. Bu modal lojiklere normal olmayan modal lojikler denir ve semantik açıdan incelenmeleri için Montague ve Scott tarafından önerilen komşuluk semantiği ele alınacaktır. Komşuluk semantiği bağıntısal semantiğin en genel türüdür. Bu bağlamda tanımlanan modellere komşuluk modelleri ya da N-modeller denir; Chellas bunları minimal modeller olarak adlandırır. Olası dünyalar semantiğinde bir önerme olası dünyaların bir kümesi ile özdeşleştirilirken komşuluk semantiğinde her bir w∈W olası dünyası $\wp$(W)' nin bir altkümesi ile ilişkilendirilir.

4.1. Komşuluk Çatıları ve Modelleri

Bir komşuluk modelinin tanımı çok yalındır: W kümesinin her bir ögesi $\wp$(W)' nin bir altkümesi ile ilişkilendirilir.

Tanım 4.1.1. W boştan farklı bir küme olsun. Bir $N: W \rightarrow \wp(\wp(W))$ fonksiyonuna **komşuluk fonksiyonu** ve $\langle W, \quad N\rangle$ ikilisine bir **komşuluk çatısı** denir.

Bir komşuluk fonsiyonunu bağıntısal olarak, yani $N \subseteq W \times \wp(W)$, tanımlamak uygun olabilir. Bu durumda $w \in W$ ve $X \subseteq W$ için $X \in N(w)$ yerine wNX yazılabilir.

Tanım 4.1.2. Bir $F = \langle W, \quad N\rangle$ komşuluk çatısı üzerinde bir model, $V: At \rightarrow \wp(W)$ değerlendirme fonksiyonu olmak üzere $\langle W, \quad N, \quad V\rangle$ üçlüsüdür.

Modal formüllerin komşuluk modellerinde doğruluğu, bağıntısal yapılar için olanla çok benzerdir.

Tanım 4.1.3. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ bir komşuluk modeli ve $w \in W$ olsun. Bir φ formülünün w noktasında doğruluğu φ' nin karmaşıklığı üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$[| \varphi |]_{\mathcal{M}} = \{ w \mid \mathcal{M}, w \vDash \varphi \}$, φ' nin doğruluk kümesini göstersin.

1. $\mathcal{M}, w \vDash p$ (ava) $w \in V(p)$
2. $\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi$ (ava) $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi$
3. $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi$ (ava) $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \psi$
4. $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ (ava) $[| \varphi |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$
5. $\mathcal{M}, w \vDash \Diamond \varphi$ (ava) $W - [| \varphi |]_{\mathcal{M}} \notin N(w)$.

Her $\varphi \in \Gamma$ için $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ olacak şekilde bir $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ modeli ve $w \in W$ dünyası varsa Γ formüller kümesine **gerçeklenebilir** denir. $\{\varphi\}$ gerçeklenebilir ise φ gerçeklenebilirdir.

5' inci için aşağıdaki denklikler açıktır:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}, w \vDash \Diamond \varphi &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \neg\Box\neg\varphi && \text{(Düal)} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \Box\neg\varphi && \text{(2.)} \\ &\Leftrightarrow [| \neg\varphi |]_{\mathcal{M}} \notin N(w) && \text{(4.)} \\ &\Leftrightarrow [| \varphi |]_{\mathcal{M}}^{c} \notin N(w) \\ &\Leftrightarrow W - [| \varphi |]_{\mathcal{M}} \notin N(w) \end{aligned}$$

burada $[| \varphi |]_{\mathcal{M}}^{c}$, $[| \varphi |]_{\mathcal{M}}$' nin W' deki tümleyenidir.

Tanım 4.1.4. $F = \langle W, \quad N \rangle$ bir komşuluk çatısı ve $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V \rangle$ bir komşuluk modeli olsun. Her $w \in W$ için $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ise φ formülü $\mathcal{M}$ üzerinde **geçerlidir** denir. F üzerindeki tüm $\mathcal{M}$ modelleri ve her bir $w \in W$ için $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ise φ formülü çatıdaki w dünyasında **geçerlidir** denir ve $F, w \vDash \varphi$ ile gösterilir. Her $w \in W$ için $F, w \vDash \varphi$ ise φ formülü F **üzerinde geçerlidir** denir ve $F \vDash \varphi$ ile gösterilir.

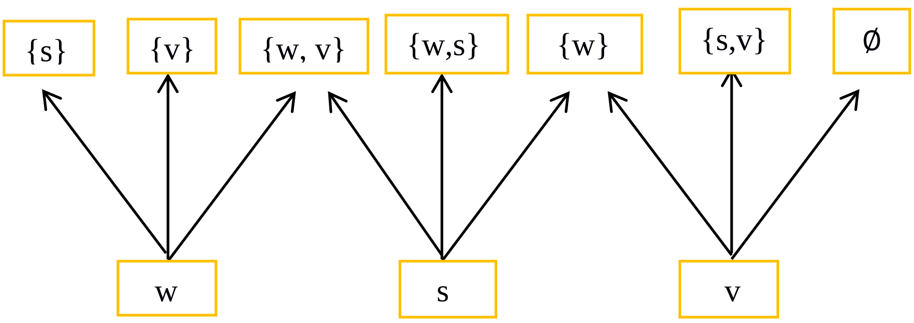
Notasyon 4.1.5. Her bir $N: W \to \wp(\wp(W))$ komşuluk fonksiyonuna, $X \subseteq W$ için $m_N(X) = \{x \mid X \in N(w)\}$ ile tanımlanan bir $m_N: \wp(W) \to \wp(W)$ fonksiyonu karşılık getirilebilir. Sezgisel olarak, $m_N(X)$, X ' in gerekli olduğu dünyaların kümesidir. Doğruluk tanımının kolay bir uygulaması olarak aşağıdaki denklemler geçerlidir.

- $[\mid p \mid]_{\mathcal{M}} = V(p)$
- $[\mid \neg\varphi \mid]_{\mathcal{M}} = W - [\mid \varphi \mid]_{\mathcal{M}}$
- $[\mid \varphi \wedge \psi \mid]_{\mathcal{M}} = [\mid \varphi \mid]_{\mathcal{M}} \cap [\mid \psi \mid]_{\mathcal{M}}$
- $[\mid \Box\varphi \mid]_{\mathcal{M}} = m_N([\mid \varphi \mid]_{\mathcal{M}})$
- $[\mid \Diamond \varphi \mid]_{\mathcal{M}} = W - m_N(W - [\mid \varphi \mid]_{\mathcal{M}})$.

Bir komşuluk modelinin ayrıntılı örneğini verelim.

Örnek 4.1.6. *(Pacuit, 2016)* $W = \{w, s, v\}$, $N: W \to \wp(\wp(W))$ komşuluk fonksiyonu, $N(w) = \{\{s\}, \{v\}, \{w, v\}\}$, $N(s) = \{\{w, v\}, \{w, s\}, \{w\}\}$, $N(v) = \{\{w\}, \{s, v\}, \emptyset\}$ gibi ve $V: \{p, q\} \to \wp(W)$ değerlendirme fonksiyonu da $V(p) = \{w, s\}$, $V(q) = \{s, v\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V \rangle$ modeli aşağıdaki gibi çizilebilir:

Tablo 1.



Bu modelde bazı formüllerin doğruluğu hesaplanabilir.

- $[| \, p \, |]_{\mathcal{M}} = V(p) = \{w, s\} \in N(s)$ olduğu için $\mathcal{M}, s \vDash \Box p$' dir.
- $[| \, \neg p \, |]_{\mathcal{M}} = [| \, p \, |]^{c}_{\mathcal{M}} = W - V(p) = \{v\} \notin N(s)$ olduğu için $\mathcal{M}, s \vDash \lozenge \, p$' dir.
- $[| \lozenge \, p \, |]_{\mathcal{M}} = \{x \mid \mathcal{M}, x \vDash \lozenge \, p\}$' dir. Şimdi $\mathcal{M}, x \vDash \lozenge \, p \Leftrightarrow W - [| \, p \, |]_{\mathcal{M}} \notin N(x)$, yani $\{v\} \notin N(x)$' dir. $\{v\}$, $N(s)$ ve $N(v)$' de bulunmadığı için $[| \lozenge \, p \, |]_{\mathcal{M}} = \{s, v\}$ elde edilir ve bu da $\mathcal{M}, v \vDash \Box \lozenge \, p$' yi gerektirir. $[| \, p \, |]_{\mathcal{M}} = \{w, s\}$, $[| \, \Box p \, |]_{\mathcal{M}} = \{s\} \in N(w)$' yi gerektirir ve buradan $\mathcal{M}, w \vDash \Box\Box p$ sonuçlanır.

Bu hesaplamalardan aşağıdakiler vardır:

- $[| \, \Box\Box p \, |]_{\mathcal{M}} = \{w\} \in N(s) \cap N(v) \Rightarrow \mathcal{M}, s \vDash \Box\Box\Box p$ ve $\mathcal{M}, v \vDash \Box\Box\Box p$.
- $[| \, \Box\Box\Box p \, |]_{\mathcal{M}} = \{w, v\} \in N(w) \cap N(s) \Rightarrow \mathcal{M}, w \vDash \Box\Box\Box\Box p$ ve $\mathcal{M}, s \vDash \Box\Box\Box\Box p$.
- $[| \bot |]_{\mathcal{M}} = \emptyset \in N(v) \Rightarrow \mathcal{M}, v \vDash \Box \bot$.

Uyarı 4.1.7. Komşuluk modelleri ve bağıntısal modeller arasındaki fark bir örnekle açıklanabilir. $\mathcal{M}$ modelini Örnek 4.1.6' daki gibi alalım. O zaman $\mathcal{M}, w \vDash \Box(p \wedge q)$ iken $\mathcal{M}, w \nvDash \Box p$' dir. Ama bunu sağlayan bir bağıntısal model inşa etmek olası değildir. Gerçekten $\mathcal{M}, w \nvDash \Box p$ ise wRx ve $\mathcal{M}, x \nvDash p$ olacak şekilde bir $x \in W$ vardır. Ama p' nin yanlış olduğu tek dünya v' dir. Eğer wRv ise $\mathcal{M}, v \nvDash p$ ve buradan $\mathcal{M}, v \nvDash p \wedge q$ olacağından $\mathcal{M}, w \nvDash \Box(p \wedge q)$ sonuçlanır.

Temel modal dil aşağıda tanımlanan $[\,\rangle, \langle\,], \langle\,\rangle$ ve $[\,]$ modalitelerle genişletilebilir. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ bir komşuluk modeli ve $w \in W$ olsun.

Tanım 4.1.8.

(a) $\mathcal{M}, w \vDash \langle\,]\varphi$ (ava) her $v \in X$ için $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$ olacak şekilde bir $X \in N(w)$ vardır.

(b) $\mathcal{M}, w \vDash [\,\rangle\varphi$ (ava) her $X \in N(w)$ için $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$ olacak şekilde bir $v \in X$ vardır.

(c) $\mathcal{M}, w \vDash \langle\,\rangle\varphi$ (ava) bir $X \in N(w)$ vardır öyle ki $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$ için bir $v \in X$ bulunsun.

(d) $\mathcal{M}, w \vDash [\,]\varphi$ (ava) her bir $X \in N(w)$, her $v \in X$ için $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$.

Önerme 4.1.9. Aşağıdaki formüller tüm komşuluk modelleri üzerinde geçerlidir.

(i) $\langle\,]\varphi \leftrightarrow \neg[\,\rangle\neg\varphi$

(ii) $[\,]\varphi \leftrightarrow \neg\langle\,\rangle\neg\varphi$. ⊠

Lemma 4.1.10. *(Pacuit, 2016)* $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ bir komşuluk modeli olsun. Her bir $w \in W$ için

(a) $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}, w \vDash \langle\,]\varphi$' dir.

(b) $\mathcal{M}, w \vDash [\,\rangle\varphi$ ise $\mathcal{M}, w \vDash\Diamond\,\varphi$' dir.

Kanıt. Önerme 4.1.9 (i) uyarınca sadece (a) şıkkının kanıtlanması yeterli olacaktır. $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ verilsin; o zaman $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$' dir. Bu durumda her bir $v \in X$ için $\mathcal{M}, v \vDash \varphi$ ($X = [|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}}$) olacak şekilde bir $X \in N(w)$ olduğu açıktır ki bu $\mathcal{M}, w \vDash \langle\,]\varphi$ demektir. ⊠

Uyarı 4.1.11. Lemma 4.1.10' daki her iki önermenin tersi doğru değildir. Örnek 4.1.6' yı göz önünde bulunduralım. $\{s\} \in N(w)$ ve $\{s\} \in [|\ p\ |]_{\mathcal{M}} = \{w, s\}$ olduğu için $\mathcal{M}, w \vDash \langle\,]p$' dir ve böylece $\langle\,]\varphi \to \Box\varphi$ komşuluk modelleri üzerinde geçerli değildir. Başka bir deyişle, bir modal operatör için iki tanım genelde denk değildir. Bununla birlikte monoton komşuluk çatılarında denklik vardır *(Hansen, 2003)*. $\langle\,]$ modaliteleri ile çalışmanın kuramsal motivasyonları *(Areces ve Figueira, 2009)*' da açıklanmaktadır.

4.2. M, C ve N Formülleri ve Komşuluk Modelleri

M, C ve N aksiyom taslakları standart modellerde geçerli formüllerdir. Bu kesimde bu formüllerin komşuluk modelleri sınıfında geçerli olmadıkları, ancak ek bilgilerle geçerli olabildikleri kanıtlanacaktır. Önce aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 4.2.1. $\mathcal{K}$ komşuluk modellerinin sınıfı olsun. O zaman

(i) $\vDash_{\mathcal{K}}\Diamond\,\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$

(ii) $\vDash_{\mathcal{K}}\ \varphi \leftrightarrow \psi$ ise $\vDash_{\mathcal{K}} \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$

dir.

Kanıt.

(i) $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ bir komşuluk modeli ve $w \in W$ olsun. $\Diamond$ operatörünün tanımından aşağıdakiler açıktır:

$$\mathcal{M}, w \vDash\Diamond\,\varphi \Leftrightarrow W - [|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \notin N(w)$$

$$\Leftrightarrow [|\ \neg\varphi\ |]_{\mathcal{M}} \notin N(w)$$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \nvDash \Box\neg\varphi$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \neg\Box\neg\varphi.$

(ii) $\vDash_{\mathcal{K}} \varphi \leftrightarrow \psi$ ise o zaman $\mathcal{K}$ sınıfındaki her $\mathcal{M}$ modeli için $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} = [|\ \psi\ |]_{\mathcal{M}}$' dir. Buna göre herhangi bir $w \in \mathcal{M}$ için $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$ ancak ve ancak $[|\ \psi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$ elde edilir. Böylece $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, w \vDash \Box\psi$ sonuçlanır. Madem ki $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$' nin keyfi bir modelidir, $\vDash_{\mathcal{K}} \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$ bulunur. ☒

Teorem 4.2.2. M, N ve C taslaklarının hiç biri $\mathcal{K}$ sınıfında geçerli değildir.

Kanıt. Bunun için her bir formülü yanlışlayan bir komşuluk modeli tanımlamak yeterlidir.

- **N için** $W = \{w\}$ tek dünyadan oluşsun; $N(w) = \emptyset$ alalım ve V keyfi olsun O zaman $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ modeli için $\mathcal{M}, w \vDash \Box T \Leftrightarrow [|\ T\ |]_{\mathcal{M}} = W \in N(w) = \emptyset$ gerçeklenmez. Ama $N(w) = \{\emptyset\}$ gibi tanımlansaydı aynı sonuç elde edilmekle beraber,

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box \perp \Leftrightarrow [|\perp|]_{\mathcal{M}} = \emptyset \in N(w) = \{\emptyset\}$$

  gibi gibi doğru bir sonuç üretirdi.

- **M için** $\mathcal{M}$ modeli olarak, $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ nüshası için $W = \{w, u\}$; $N(w) = \{\emptyset\}$; $V(p) = \{w\}, V(q) = \{u\}$ alalım. O zaman

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box(p \wedge q) \Leftrightarrow [|\ p \wedge q\ |]_{\mathcal{M}} = [|\ p\ |]_{\mathcal{M}} \cap [|\ q\ |]_{\mathcal{M}} = \{w\} \cap \{u\} = \emptyset \in N(w)$$

  nedeniyle $\Box(p \wedge q), w$ dünyasında doğrudur. Ancak

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box p \Leftrightarrow [|\ p\ |]_{\mathcal{M}} = \{w\} \notin N(w)$$

ve

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box q \Leftrightarrow [|\ q\ |]_{\mathcal{M}} = \{u\} \notin N(w)$$

  olduğundan hem $\Box p$ hem $\Box q, w$ dünyasında yanlıştır. Dolayısıyla $\mathcal{M}$ modeli M için bir karşıt modeldir.

- **C için** $\mathcal{M}$ modeli olarak, $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$ nüshası için $W = \{w, u\}$; $N(w) = \{\{w\}, \{u\}\}$; $V(p) = \{w\}, V(q) = \{u\}$ alınsın. O zaman

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box p \Leftrightarrow [|\ p\ |]_{\mathcal{M}} = \{w\} \in N(w)$$

ve

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box q \Leftrightarrow [|\ q\ |]_{\mathcal{M}} = \{u\} \in N(w)$$

nedeniyle $\mathcal{M}, w \vDash \Box p \wedge \Box q$ sonuçlanır. Ancak

$$\mathcal{M}, w \vDash \Box(p \wedge q) \Leftrightarrow [|\ p \wedge q\ |]_{\mathcal{M}} = [|\ p\ |]_{\mathcal{M}} \cap [|\ q\ |]_{\mathcal{M}} = \{w\} \cap \{u\} = \emptyset \notin N(w)$$

olduğundan $\mathcal{M}, w \nvDash \Box(p \wedge q)$ sonuçlanır. Böylece $\mathcal{M}$ modeli C için bir karşıt modeldir. ⊠

Bu teoremin bir sonucu olarak, $\mathcal{K}$ sınıfında geçerli formüllerin kümesi aşağıdaki çıkarım kurallarına genelde kapalı değildir:

RN : $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

RM : $\dfrac{\varphi \to \psi}{\Box\varphi \to \Box\psi}$

RR : $\dfrac{(\varphi \wedge \psi) \to \theta}{(\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box\theta}$

RK: $\dfrac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi}{(\Box\varphi_1 \wedge \Box\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \Box\varphi_n) \to \varphi}$ $\quad (n \geq 0)$

Ayrıca

(R) $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$

(K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

taslakları da $\mathcal{K}$ sınıfında genelde geçerli değildir.

M, N ve C taslaklarının $\mathcal{K}$ ' da geçerli olmasını sağlayan ek bilgiler aşağıda açıklanıyor *(Chellas, 1980).*

$\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V \rangle$ komşuluk modelindeki her w dünyası ve her X, Y önermeleri (yani dünyalardan oluşan kümeler) için

(m) $X \cap Y \in N(w)$ ise $X \in N(w)$ ve $Y \in N(w)$

(c) $X \in N(w)$ ve $Y \in N(w)$ ise $X \cap Y \in N(w)$

(n) $W \in N(w)$

koşullarını tanımlayalım.

Önerme 4.2.3. (m) koşulu

(m') $X \subseteq Y$ ve $X \in N(w)$ ise $Y \in N(w)$

koşuluna denktir.

Kanıt. (m) ve $X \subseteq Y$ ve $X \in N(w)$ varsayalım. $X \cap Y = X \in N(w)$, $Y \in N(w)$' yi gerektirir. Şimdi (m') ve $X \cap Y \in N(w)$ varsayalım. O zaman $X \cap Y \subseteq X$ olduğu için (m'), $X \in N(w)$' yi gerektirir; keza $X \cap Y \subseteq Y$' den dolayı yine zaman $Y \in N(w)$ vardır. ⊠

N fonksiyonuna ya da komşuluk modeline

- (m) koşulunu sağlıyor ise **ekli** (supplemented) ya da **monoton** denir.
- (c) koşulunu sağlıyor ise **kesişimlere kapalı** denir.
- (n) koşulunu sağlıyor ise **birim içeren** denir.
- (m) ve © koşullarını sağlıyor ise **yarı-süzgeç** (quasi-filter) denir.
- (n) koşulunu sağlayan yarı-süzgece ise **süzgeç** (filter) denir.

Bir ekli modelde $N(w)$ birimi içerdiğinden boştan farklıdır.

Teorem 4.2.4. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ bir komşuluk modeli olsun.

(i) $\mathcal{M}$ modeli ekli ise M taslağı geçerlidir.

(ii) $\mathcal{M}$ modeli kesişimlere kapalı ise C taslağı geçerlidir.

(iii) $\mathcal{M}$ modeli birim içeren ise N taslağı geçerlidir.

Kanıt.

(i) $\mathcal{M}, w \vDash \Box(\varphi \wedge \psi)$ varsayalım. O zaman $[|\ \varphi \wedge \psi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$, yani $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \cap [|\ \psi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$' dir. $\mathcal{M}$ modeli ekli olduğu için $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$ ve $[|\ \psi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$, yani $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \Box\psi$ elde edilir.

(ii) $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi \wedge \Box\psi$ varsayalım. O zaman $\mathcal{M}, w \vDash \Box\varphi$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \Box\psi$, yani $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$ ve $[|\ \psi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$' dir. $\mathcal{M}$ modeli arakesitlere kapalı olduğu için $[|\ \varphi\ |]_{\mathcal{M}} \cap [|\ \psi\ |]_{\mathcal{M}} \in N(w)$, yani $\mathcal{M}, w \vDash \Box(\varphi \wedge \psi)$ elde edilir.

(iii) $\mathcal{M}$ birimi içeren bir model ise, $\mathcal{M}$' deki her w dünyası için $N(w)$, $[|\ T\ |]_{\mathcal{M}}$' yi içerir. Bu ise $\Box T$' nin $\mathcal{M}$ modelinde geçerli olduğunu gösterir. ⊠

Gözlem 4.2.5. Yukarıda tanımlanan komşuluk modellerinin sınıfları bazı önemli lojik sistemlerini belirler. Bunlar genelde, öz olarak içerildikleri anlamında, en küçük normal modal lojik **K**' dan daha zayıftırlar. Aslında **K,** süzgeçlerin sınıfı tarafından belirlenir. **K'** yı ayrıca **artırılmış** (augmented) komşuluk modellerinin sınıfı da belirler.

Aşağıdaki tanımlar ve önerme *(Chellas, 1980)*' den alınmıştır.

Tanım 4.2.6. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V \rangle$ bir komşuluk modeli olsun. Her bir $w \in W$ için $N^+(w)$, $N(w)$' nin üst küme kapanışı yani, her w ve $\mathcal{M}$' deki her X için

$$X \in N^+(w) \text{ ancak ve ancak } Y \subseteq X \text{ ve } Y \in N(w)$$

olmak üzere $\mathcal{M}^+ = \langle W, \quad N^+, \quad V \rangle$ komşuluk modeline $\mathcal{M}$ modelinin **eklemesi** denir.

Her X için $X \subseteq X$ nedeniyle $N(w) \subseteq N^+(w)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla her w için $N^+(w) = N(w)$ durumunda bir komşuluk modeli ekli olarak karakterize edilebilir.

Tanım 4.2.7. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V \rangle$ bir komşuluk modeli olsun. Her w ve X için $X \in N^-(w)$ ancak ve ancak bazı $n > 0$ ve $X_1, X_2, \dots, X_n \in N(w)$

için $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ olmak üzere $\mathcal{M}^- = \langle W, \quad N^-, \quad V \rangle$ komşuluk modeline $\mathcal{M}$ modelinin **arakesit kapanışı** denir.

Her X kendisinin kesişimi ile aynı olduğu için $N(w) \subseteq N^-(w)$' dir. Dolayısıyla bir komşuluk modeli arakesitlere kapalıdır ancak ve ancak kendi öz arakesit kapanışıdır.

Önerme 4.2.8. $\mathcal{M}^{+-}$ ve $\mathcal{M}^{-+}$ modelleri aynıdır.

Kanıt. $X \in N(w)^{+-}$ olsun. O zaman bir $Y_i \in N(w)$ için her bir X_i, Y_i' nin bir üst kümesi olmak üzere,

$$X = \bigcap_i X_i = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$$

dir. Böylece $N^-(w), X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$' nin bir alt kümesi olan $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_n$' yi içerir ve buradan $X \in N^{-+}(w)$, yani $N^{+-}(w) \subseteq N^{-+}(w)$ elde edilir. $N^{-+}(w) \subseteq N^{+-}(w)$ kapsamı aynı şekilde kanıtlanır. O halde $\mathcal{M}^{+-} = \mathcal{M}^{-+}$' dir.

Tanım 4.2.7. $\mathcal{M} = \langle W, \quad N, \quad V \rangle$ bir komşuluk modeli olsun. $\mathcal{M}^{\pm} = \mathcal{M}^{+-} = \mathcal{M}^{-+}$ olmak üzere, $\mathcal{M}^{\pm} = \langle W, \quad N^{\pm}, \quad V \rangle$ komşuluk modeline $\mathcal{M}$ modelinin **yarı-süzmesi** (quasi-filtering) denir.

Böylece bir yarı-süzgeç kendi öz yarı-süzmesi ile bir olan bir komşuluk modelidir. Öte yandan, bir komşuluk modelinin eklemesi, arakesit kapanışı ya da yarı-süzmesi genelde denk bir model üretmez.

BÖLÜM 5
SEMANTİKLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Önceki bölümlerde modal lojik bağıntısal, topolojik ve komşuluk semantiklerine göre ele alındı. Bu bölümde bir diğer semantik -cebirsel- tanımlanacak ve dört semantiğin aralarındaki ilişkiler ortaya çıkarılacaktır. Hangi semantik olursa olsun bir şekilde bağıntısal semantik ile olan bağlarını korumaktadır.

5.1. Cebirsel Semantik: Modal Cebirler

Cebirsel semantiğin ana fikri, modal formülleri terimler olarak kabul etmek ve uygun cebir tipinde onları değerlendirmektir. Modal lojik için uygun cebir türü Operatörlü Boole cebirleri (Boolean Algebras with Operations), BAO, dir.

5.1.1. Motivasyon

Cebirde Gösterilim Teoremi (Representation Theorem) soyut matematiksel yapıları somut küme-kuramsal yapılarla göstermeyi amaçlar. Lojikte bu, tamlık teoremlerinin amaçladığına hayli benzer bir durumdur: Her soyut cebir bir somut cebire izomorftur. İki örnek verelim.

Cayley Teoremi Her sonlu grup bir permütasyonlar kümesine izomorftur.

Stone Gösterilim Teoremi Her soyut Boole cebiri bir kümeler cismine izomorftur.

Jónsson ve Tarski (1952) BAO için aşağıdaki teoremi kanıtladılar:

Her soyut BAO bir bağıntısal yapı olarak gösterilebilir.

Bu teorem günümüzde modal lojik için köşe taşı teorem olarak değerlendirilir.

5.1.2. Modal Cebirler

L bir modal lojik ve $\mathcal{F}$ önermesel modal formüllerin kümesi olsun. $\mathcal{F}$ üzerinde bir $\sim$ denklik bağıntısı

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \mathbf{L} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

gibi tanımlansın. Burada amaç her **L** lojiği ve her φ formülü için cebirsel semantiğin tamlığını ifade eden aşağıdaki teoremi kanıtlamaktır.

Teorem 5.1.2.1. **L** $\vdash \varphi$ ancak ve ancak φ her **L**-modal cebirde geçerlidir.

Kanıt için bazı kavram ve sonuçlar verilecektir.

Tanım 5.1.2.2. Bir Boole cebiri (2, 2, 1, 0, 0) tipli bir $\mathcal{B} = (B, \quad +, \quad \times, \quad ', \quad 0, \quad 1)$ cebirsel yapıdır öyle ki $+$ ve $\times$ işlemleri değişmeli, birleşmeli ve birbiri üzerine dağılmalıdır ve 1-li işlem $'$, tümleyen, $x + x' = 1$ ve $x \times x' = 0$ denklemlerini sağlar. Sıfırlı işlemler ya da sabitler, 0 ve 1, $x \times 1 = x$ ve $x + 0 = x$ denklemlerini sağlar.

Boole cebirleri önermeler lojiğinin bir cebirsel yansımasıdır. Bunun için $+$ işlemini $\vee$, $\times$ işlemini $\wedge$, $'$ işlemini $\neg$, 0 sabitini $\perp$ ve 1 sabitini $\top$ ve nihayet $=$ bağıntısını $\leftrightarrow$ olarak yorumlamak yeterlidir.

Tanım 5.1.2.3. Bir operatörlü Boole cebiri, BAO, bir $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \quad m)$ ikilisidir öyle ki $\mathcal{B}$ bir Boole cebiri ve m, $\mathcal{B}$ üzerinde $m(x + y) = m(x) + m(y)$ ve $m(0) = 0$ denklemlerini sağlayan 1-li bir operatördür.

Önerme 5.1.2.4. m operatörü modal dilin seçimine göre tanımlanabilir. Eğer $\Diamond$ operatörü ile çalışılıyorsa m tanımdaki denklemleri sağlar; $\Box$ söz konusu ise o zaman m operatörünün $m(x \times y) = m(x) \times m(y)$ ve $m(1) = 1$ denklemlerini sağlaması istenir.

Bu denklem ikililerinin lojik karşılıkları

$$\Diamond\, (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\Diamond\, \varphi \vee \Diamond\, \psi)$$

$$\Diamond \perp \leftrightarrow \perp$$

ve

$$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$$

$$\Box\top \leftrightarrow \top$$

dir. Böylece temel modal dilin tüm bileşenlerinin cebirsel yansımaları açıklık kazanmış olur.

Operatörlü Boole cebirlerinde temel modal dil alışılmış cebirsel tarzla yorumlanır; öyle ki; $\mathcal{A}$ bir BAO ve φ bir modal formül olsun. Her bir önerme değişkeni cebirin bir elemanı ve her bir lojik operatörü karşılık gelen cebirsel işlem olarak yorumlanır. Daha açık biçimde $Prop$ önerme değişkenlerinin kümesi olmak üzere, cebirsel değerlendirme denilen, $V: Prop \to \mathcal{A}$ fonksiyonunu tanımlayalım. V her bir önerme değişkenini $\mathcal{B}$' nin bir elemanına uygulamaktadır. V' nin doğal olarak $\mathcal{F}$ kümesine aşağıdaki gibi genişletildiği açıktır:

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) + V(\psi)$$

$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \times V(\psi)$$

$$V(\neg\varphi) = V(\varphi)'$$

$$V(\Diamond\, \varphi) = m(V(\varphi))$$

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dizisi $\mathcal{A}$ ' da hem önerme değişkenlerine hem biraysel değişkenlere bir **atama** olarak değerlendirilebilir. Bunun üzerine bir φ formülünün $\mathcal{A}$' da doğruluğu ve geçerliliği tanımlanabilir.

Tanım 5.1.2.5. Bir φ formülü $\mathcal{A}$' da $\vec{a}$ ataması altında doğrudur eğer ve yalnız eğer atamanın değeri 1' dir, yani $V\big(\varphi(\vec{a})\big) = 1$. Eğer her V için $V(\varphi) = 1$ ise, φ formülü $\mathcal{A}$' da geçerlidir denir. **L** lojiğinin her formülü $\mathcal{A}$' da geçerli ise $\mathcal{A}$' ya **L**' nin bir modal cebiri ya da **L**-modal cebiri denir.

Gözlem 5.1.2.6. $\boldsymbol{L}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ ' da geçerli formüllerin kümesi olsun. Bu kümeye bazen $\mathcal{A}$ cebirinin lojiği de denir. $\mathcal{A}$' da geçerli $u = w$ denklemi $\boldsymbol{L}(\mathcal{A})$' da $\boldsymbol{L} \vdash u \leftrightarrow w$ ya da $u \leftrightarrow w = 1$' e denktir; $u \to w,\ u' + w$ ve $u \leftrightarrow w,\ (u \to w) \times (w \to u)$ olarak alınır. Bunun üzerine aşağıdaki sonuç açıktır.

Önerme 5.1.2.7. $\mathcal{A}$ herhangi bir cebir olsun.

(i) $\boldsymbol{L}(\mathcal{A})$ tüm klasik totolojileri içerir ancak ve ancak $\mathcal{A}$ bir Boole cebiridir.

(ii) $\boldsymbol{L}(\mathcal{A})$ bir lojiktir ancak ve ancak $\mathcal{A}$ bir Boole cebiridir ve $m(1) = 1$, $m(x \to y) \to (mx \to my) = 1$ denklemleri $\mathcal{A}$' da doğrudur. ⊠

Bu önerme ışığında Boole cebirinde $m1 = 1$ ve $m(x \to y) \to (mx \to my) = 1$ denklem ikilisi $m1 = 1$ ve $m(x \times y) = mx \times my$ denklem ikilisine denk olduğu için **K**-modal cebirlerinin tanımı daha genel olan aşağıdaki tanıma denktir.

Tanım 5.1.2.8. Bir modal cebir bir $\mathcal{A} = (\mathcal{B},\ m)$ ikilisidir öyle ki $\mathcal{B}$ bir Boole cebiridir ve m, $\mathcal{B}$ üzerinde $m(1) = 1$ ve $m(x \times y) = mx \times my$ doğru olacak şekilde birli bir işlemdir.

5.2. Cebirsel Tamlık

$\boldsymbol{L}$ bir lojik; $\sim$, $\mathcal{F}$ üzerinde

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \mathbf{L} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

olarak tanımlanan denklik bağıntısı ve $[\varphi]_{\mathbf{L}} = \{\psi \in \mathcal{F} \colon \varphi \sim_{\mathbf{L}} \psi\}$, φ formülünün denklik sınıfı olsun. $\mathcal{F}/_{\sim_{\mathbf{L}}} = \{[\varphi]_{\mathbf{L}} \colon \varphi \in \mathcal{F}\}$ kümesi üzerinde $+,\ \times,\ ',\ 0,\ 1$ işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$[\varphi]_{\mathbf{L}} + [\psi]_{\mathbf{L}} = [\varphi \vee \psi]_{\mathbf{L}}$$

$$[\varphi]_{\mathbf{L}} \times [\psi]_{\mathbf{L}} = [\varphi \wedge \psi]_{\mathbf{L}}$$

$$[\varphi]'_{\mathbf{L}} = [\neg\varphi]_{\mathbf{L}}$$

$$0 = [\bot]_{\mathbf{L}}, \qquad 1 = [\neg\bot]_{\mathbf{L}} = [\top]_{\mathbf{L}}.$$

O zaman $\mathcal{U} = \left(\mathcal{F}/_{\sim_{\mathbf{L}}},\ \ +,\ \ \times,\ \ ',\ \ 0,\ \ 1\right)$ bir Boole cebiridir ve Klasik önermeler lojiğinin özellikleri $\mathcal{U}$' da ifade edilebilir. Modal operatör $\square$, $\mathcal{F}/_{\sim_{\mathbf{L}}}$ üzerinde

$$m[\varphi]_{\mathbf{L}} = [\square\varphi]_{\mathbf{L}}$$

olarak alınır.

Tanım 5.2.1. $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = (\mathcal{U},\ \ m)$ cebirine **L** modal lojiğinin Lindenbaum-Tarski cebiri denir.

L lojiği olarak **K**' yı seçelim ve Teorem 5.1.2.1' i yeniden ifade edelim:

Teorem (Cebirsel Tamlık Teoremi) φ herhangi bir modal formül, **K** minimal normal modal lojik ve V keyfi bir cebirsel değerlendirme olmak üzere;

$$\varphi \in \mathbf{K} \text{ ancak ve ancak } V(\varphi) = 1$$

dir.

Kanıt. Kanıt için kilit nokta **K** lojiği için Lindenbaum-Tarski cebirini oluşturmaktır. $[\varphi] = \{\psi \colon \psi \sim_{\mathbf{K}} \varphi\} = \{\psi \colon \mathbf{K} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\}$ denklik sınıfları için $\mathcal{A}_{\mathbf{K}} = \{[\varphi] \colon \varphi \in \mathcal{F}\}$, **K**' nın Lindenbaum-Tarski cebiri olsun. $\mathcal{A}_{\mathbf{K}}$ üzerinde işlemler alışılmış şekilde bağlaçlar yardımıyla tanımlanır. Tüm ve sadece **K**-kanıtlanabilir formüller bu cebirde 1 değerini alır, dolayısıyla teoremin sonucu elde edilir. ⊠

Gözlem 5.2.2. Aslında bu teorem daha da güçlendirilebilir:

"Her normal lojik bir cebirler sınıfına göre tamdır."

Bunun kanıtı **K** için yapılan kanıtı kopyalamak ve ek aksiyomların koşullarını sağlayan Lindenbaum-Tarski cebiri ile çalışarak yapılır.

Normal modal lojikler için çatılara göre genel bir tamlık sonucu yoktur. O halde cebirsel be bağıntısal semantikler arasında önemli bir fark bulunmuş oldu.

5.3. Semantiklerin Karşılaştırılması

Bu kesimde bağıntısal, komşuluk ve cebirsel semantikler karşılaştırılıyor ve bağıntısal semantiğin komşuluk semantiğinin bir alt semantiği olduğu, komşuluk semantiğinin de cebirsel semantiğin bir alt semantiği olduğu kanıtlanıyor.

Tanım 5.3.1. S_1 ve S_2 aynı önermesel modal dil için iki semantik olsun. S_1' deki yapılardan S_2' deki yapılara formüllerin geçerliliğini koruyan ve bire-bir olan bir dönüşüm varsa S_1 semantiği S_2 semantiğinin bir alt semantiğidir denir.

Teorem 5.3.2. Bağıntısal semantik komşuluk semantiğinin bir alt semantiğidir.

Kanıt. $F = \langle W, \ R \rangle$ bir Kripke çatı olsun ve $w \in W$ için $wR = \{v \in W: wRv\}$ tanımlayalım. F çatısı ile bağlantılı $N_F = \langle W, \ N^R \rangle$ komşuluk çatısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$N^R: W \to \wp(\wp(W))$$

$$w \mapsto N^R(w) = \{U \subseteq W: wR \subseteq U\}.$$

O zaman $F \to N_F$ dönüşümü bire-birdir. Başka bir deyişle, $N_{F_1} = \langle W, \ N^{R_1} \rangle$ ve $N_{F_2} = \langle V, \ N^{R_2} \rangle$ komşuluk çatıları için $N_{F_1} = N_{F_2}$ ise $F_1 = F_2$ olduğu gösterilmelidir. Burada $F_1 = \langle W, \ R_1 \rangle$ ve $F_2 = \langle V, \ R_2 \rangle$ olduğunu belirtelim. Şimdi, $N_{F_1} = N_{F_2}$ ise $W = V$ ve $N^{R_1} = N^{R_2}$ ' dir. Amaç $R_1 = R_2$ olduğunu göstermektir. $N^{R_1} = N^{R_2}$ durumu, tanımları gereği, $\{U \subseteq W: wR_1 \subseteq U\} = \{U \subseteq W: wR_2 \subseteq U\}$ ve buradan da $wR_1 = wR_2$ eşitliğini gerektirir. O halde $R_1 = R_2$' dir ve F' den N_F' ye önüşüm bire-birdir.

Formüllerin geçerliliğinin korunması.

φ herhangi bir önermesel modal formül olsun. $V: At \to \wp(W)$ değerlendirme fonksiyonu $N_F = \langle W, \ N^R \rangle$ çatısı üzerindeki değerlendirme fonksiyonu ile çakışır, çünkü W kümesi her iki çatıda aynıdır. V fonksiyonunun formüllere genişlemesinde

$$F \vDash \varphi \Leftrightarrow N_F \vDash \varphi$$

iddiasını kanıtlayacağız.

Kanıt φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır. φ' nin atomik ve Boole bağlaçlı yapısı için kanıt açıktır. Modal durumu ele alalım.

$\varphi = \Box\psi$ olsun. $\mathcal{M}^R = \langle W, \quad R, \quad V\rangle$ bağıntısal ve $\mathcal{M}^N = \langle W, \quad N, \quad V\rangle$ komşuluk modelleri verilsin. Herhangi bir $w \in W$ dünyası için

$$\mathcal{M}^R, w \vDash \Box\psi \Leftrightarrow \forall v \in W(v \in wR \Rightarrow \mathcal{M}^R, v \vDash \psi),$$

yani $wR \subseteq [| \psi |]^{\mathcal{M}^R}$' dir. Ama bu,

$$\mathcal{M}^N, w \vDash \Box\psi \Leftrightarrow [| \psi |]^{\mathcal{M}^N} \in N(w)$$

ile aynı şeyi söyler. Böylece modeller keyfi ya da V keyfi olduğu için

$$F \vDash \varphi \Leftrightarrow N_F \vDash \varphi$$

elde edilir. ⊠

Teorem 5.3.3. Komşuluk semantiği cebirsel semantiğin bir alt semantiğidir.

Kanıt. Bir $\mathcal{N} = \langle W, \quad N\rangle$ komşuluk çatısı ile bağlantılı bir $\mathcal{A}_{\mathcal{N}} = (\mathcal{B}, \quad m_N)$ operatörlü Boole cebiri çatısını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$\mathcal{B} = (\wp(W), \cup, \cap, {}^c, \emptyset, W)$, bir W kümesinin kuvvet kümesinin oluşturduğu Boole cebiri ve $U \subseteq W$ için

$$m_N(U) = \{w \in W: U \in N(w)\}.$$

O zaman $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ dönüşümü bire-birdir. Gerçekten, $\mathcal{N}_1 = \langle W_1, \quad N_1\rangle$ ve $\mathcal{N}_2 = \langle W_2, \quad N_2\rangle$ komşuluk çatıları için $\mathcal{A}_{\mathcal{N}_1} = \mathcal{A}_{\mathcal{N}_2}$ varsayalım ve buradan $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ olduğunu gösterelim. Şimdi $\mathcal{A}_{\mathcal{N}_1} = \mathcal{A}_{\mathcal{N}_2}$, $W_1 = W_2$ ve $m_{N_1} = m_{N_2}$' yi gerektirir. Bu ise her $X \subseteq W_1 (= W_2)$ için $\{w \in W_1: X \in N_1(w)\} = \{w \in W_1: X \in N_2(w)\}$ demektir. Buradan her $X \subseteq W_1$ ve her $w \in W_1$ için $X \in N_1(w) \Leftrightarrow X \in N_2(w)$ ya da $N_1(w) = N_2(w)$ sonuçlanır. $w \in W_1$ keyfi olduğu içinde $N_1 = N_2$ ve dolayısıyla $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2$ elde edilir.

Formüllerin geçerliliğinin korunması.

Herhangi bir φ formülü için

$$\mathcal{N} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \vDash \varphi$$

gösterilmelidir. Bunun için $[| \ \varphi \ |]$ kümesinin komşuluk semantiğinde karşılık geldiği kümenin (W' nin bir alt kümesi) cebirsel semantikte karşılık gelen küme ile aynı olduğunu göstermek yeterlidir.

φ formülünün karmaşıklığı üzerinde tümevarımla kanıt yapılacaktır.

- $\varphi = p$. O zaman $V(p), \mathcal{N}$ ve $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$' de aynı kümedir.
- $\varphi = \neg\psi$. O zaman $[| \ \varphi \ |] = [| \ \neg\psi \ |]$ her iki semantikte W dünyalar kümesine göre $[| \ \varphi \ |]^c$ kümesine karşılık gelir.
- $\varphi = \psi \to \theta$. O zaman $\mathcal{N}$' de:

$$\begin{aligned} [| \ \varphi \ |] &= [| \ \psi \to \theta \ |] \\ &= [| \ \neg\psi \vee \theta \ |] \\ &= [| \ \neg\psi \ |] \cup [| \ \theta \ |] \\ &= [| \ \psi \ |]^c \cup [| \ \theta \ |] \end{aligned}$$

  kümesi $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$' de aynı kümeye karşılık gelir.

- $\varphi = \Box\psi$. O zaman komşuluk semantiğinde

$$[| \ \varphi \ |] = \{w \in W : [| \ \psi \ |] \in N(w)\}$$

  doğruluk kümesi $m_N([| \ \varphi \ |])$ ile aynı kümedir.

Böylece herhangi bir φ temel önermesel modal formülü için

$$\mathcal{N} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{N}} \vDash \varphi$$

kanıtlanmış olur. ⊠

Bu iki teorem; bir bağıntısal çatının belli türden bir komşuluk çatısı ve bir komşuluk çatısının da belli türden bir cebirsel çatı olduğunu gösterir.

Bağıntısal, komşuluk ve cebirsel çatılar arasındaki bire-bir eşlemeleri görebilmek için bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 5.3.4. Bir semantik altında normal lojik belirleyen bir çatıya **normal** denir.

Tanım 5.3.5. Bir semantik altında klasik lojik belirleyen bir çatıya **klasik** denir.

Önerme 5.3.6. $\mathcal{A} = (\mathcal{B},\ \ m)$ bir cebirsel (Boole) çatısı ve V, $\mathcal{B}$ üzerinde bir değerlendirme fonksiyonu olsun. O zaman herhangi φ, ψ formülleri için aşağıdakiler vardır.

(i) $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$ (ya da $V(\varphi) \times V(\psi)$)

(ii) $V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$ (ya da $V(\varphi) + V(\psi)$)

(iii) $V(\varphi \to \psi) = 1 \Leftrightarrow V(\varphi) \leq V(\psi)$

(iv) $V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow V(\varphi) = V(\psi)$

Kanıt. (i) ve (ii) şıkları aşikardır.

(iii) $$\begin{aligned} V(\varphi \to \psi) = V(\neg\varphi \vee \psi) = 1 &\Leftrightarrow V(\neg\varphi) \cup V(\psi) = 1 \\ &\Leftrightarrow (V(\varphi) \cap V(\psi)^c)^c = 1 \\ &\Leftrightarrow V(\varphi) \cap V(\psi)^c = 0 \\ &\Leftrightarrow V(\varphi) \leq V(\psi). \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 &\Leftrightarrow V((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) = 1 \\ &\Leftrightarrow V(\varphi \to \psi) \cap V(\psi \to \varphi) = 1 \\ &\Leftrightarrow V(\varphi \to \psi) = 1 \text{ ve } V(\psi \to \varphi) = 1 \\ &\Leftrightarrow V(\varphi) \leq V(\psi) \text{ ve } V(\psi) \leq V(\varphi) \\ &\Leftrightarrow V(\varphi) = V(\psi). \end{aligned}$$ ⊠

Teorem 5.3.7. Her cebirsel (dolayısıyla her komşuluk, her bağıntısal) çatı klasiktir.

Kanıt. $\mathcal{A} = (\mathcal{B},\ \ m)$ bir cebirsel çatı olsun. $\mathcal{A}$' nın $\varphi \leftrightarrow \psi / \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$ kuralını gerçeklediğini ya da bu kuralın $\mathcal{A}$' da geçerli olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\mathcal{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$ ve V, $\mathcal{A}$ üzerinde herhangi bir değerlendirme fonksiyonu olsun. O zaman $V(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ ve Önerme 5.3.6 (iv)' den $V(\varphi) = V(\psi)$ elde edilir, dolayısıyla $m(V(\varphi)) = m(V(\psi))$, yani $V(\Box\varphi) = V(\Box\psi)$' dir. Bu ise Önerme 5.3.6 (iv) uyarınca $V(\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi) = 1$ demektir ve buradan $\mathcal{A} \vDash \Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi$ gösterilmiş olur. ⊠

Lemma 5.3.8. *(Gerson, 1974)* **L** bir klasik lojik olsun. **L**, $\varphi / \Box\varphi$ kuralına kapalı olsun. O zaman $\mathbf{L} \vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ ancak ve ancak $\mathbf{L} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$' dir. ⊠

Aşağıda verilen sonuçlar *(Gerson, 1974)*' den esinlenerek kanıtlanmıştır.

Teorem 5.3.9. $\mathcal{A} = (\mathcal{B}, \quad m)$ cebirsel çatısı normaldir ancak ve ancak $m(1) = 1$ ve her $x, y \in B$ için $m(x \wedge y) = m(x) \wedge m(y)$' dir.

Kanıt.

Koşul Gerektir: $\mathcal{A}$' nın normal olduğunu var sayalım. O zaman $\mathcal{A} \vDash p \to q$ ise $\mathcal{A} \vDash \Box(p \to q)$, yani $V(\Box(p \to q)) = 1$' dir. Ama $V(\Box(p \to q)) = m(V(p \to q)) = 1$, dolayısıyla $m(1) = 1$' dir. Şimdi $x, y \in B$ için $V(p) = x$ ve $V(q) = y$ olsun. $\mathcal{A}$ normal varsayıldığı için Lemma 5.3.8 uyarınca $\mathcal{A} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ ve buradan $V(\Box(p \wedge q)) = V(\Box p \wedge \Box q)$ ya da $m(V(p \wedge q)) = m(V(p)) \wedge m(V(q))$, yani $m(x \wedge y) = m(x) \wedge m(y)$ elde edilir.

Koşul Yeterdir: $m(1) = 1$ ve her $x, y \in B$ için $m(x \wedge y) = m(x) \wedge m(y)$ varsayalım, $\mathcal{A}$' nın normal olduğunu göstermemiz gerekiyor. V, $\mathcal{A}$ üzerinde herhangi bir değerlendirme fonksiyonu, φ bir formül ve $\mathcal{A} \vDash \varphi$ olsun. O zaman $V(\varphi) = 1$' dir ve buradan $V(\Box\varphi) = m\big(V(\varphi)\big) = m(1) = 1$ olur ki bu $\mathcal{A} \vDash \Box\varphi$ demektir. Öte yandan hipotez uyarınca $m\big(V(p) \wedge V(q)\big) = m(V(p)) \wedge m(V(q))$ eşitliği $\mathcal{A}$' nın Teorem 5.3.7 gereği normal olduğunu gösterir. ⊠

Tanım 5.3.10. W boştan farklı bir küme ve $\wp(W), W$' nin kuvvet kümesi olsun. $\wp(W)$' nin aşağıdaki koşulları sağlayan her $\mathcal{F}$ alt kümesine bir **süzgeç** (filter) denir.

(f1) $W \in \mathcal{F}$ $(\mathcal{F} \neq \emptyset)$;

(f2) $U, V \in \mathcal{F}$ ise $U \cap V \in \mathcal{F}$

(f3) $U \in \mathcal{F}$ ve $U \subseteq V$ ise $V \in \mathcal{F}$' dir.

Boş kümeyi içermeyen bir süzgece **öz süzgeç** (proper filter) denir.

Teorem 5.3.11. Bir $\mathcal{N} = \langle W, \quad N\rangle$ komşuluk çatısı normaldir ancak ve ancak her bir $w \in W$ için $N(w)$ bir süzgeçtir.

Kanıt.

Koşul Gerektir: $\mathcal{N}$ çatısının normal olduğunu varsayalım ve her $w \in W$ için $N(w)$' nin *(f1), (f2), (f3)* koşullarını sağladığını gösterelim.

(f1) $N(w) \neq \emptyset$: her $w \in W$ için $p \to p$ bir totoloji olduğundan $\mathcal{N}, w \vDash p \to p$' dir. $\mathcal{N}$' nin normal olması, $\mathcal{N}, w \vDash \Box(p \to p)$' yi gerektirir ki bu w dünyasının $p \to p$'

nin $[| \, p \to p \, |] = W$ doğruluk kümesine ait olması demektir. Komşuluk semantiği tanımından

$$\mathcal{N}, w \vDash \Box(p \to p) \Rightarrow [| \, p \to p \, |] = W \in N(w)$$

sonuçlanır ve bu $N(w)$' nin boş olmadığını gösterir.

(f2) $X \in N(w)$ ve $Y \in N(w)$ ve V değerlendirme fonksiyonu için $V(p) = X,\ V(q) = Y$ diyelim. Komşuluk semantiği tanımından $w \in [| \, \Box p \, |] \cap [| \, \Box q \, |] = [| \, \Box p \wedge \Box q \, |]$ ve Lemma 5.3.8' den $w \in [| \, \Box(p \wedge q) \, |]$ elde edilir. Böylece $X \cap Y = [| \, p \wedge q \, |] \in N(w)$' dir.

(f3) $X \in N(w)$ olsun ve $X \subseteq Y$ varsayalım. $V,\ V(p) = Y$ ve $V(q) = X$ şeklinde bir değerlendirme fonksiyonu olsun. O zaman $V(p \wedge q) = [| \, p \wedge q \, |] = Y \cap X = X \in N(w)$, dolayısıyla $w \in [| \, \Box(p \wedge q) \, |]$' dir. Şimdi $p \wedge q \to p$' nin bir totoloji, $\mathcal{N}$' nin normal ve $\mathcal{N} \vdash p \wedge q \to p$ olmasından $\mathcal{N} \vdash \Box(p \wedge q) \to \Box p$ sonuçlanır. Böylece $V(\Box(p \wedge q) \to \Box p) = 1$' dir ve $w \in [| \, \Box(p \wedge q) \, |]$ olduğu için $w \in [| \, \Box p \, |]$, yani $Y = [| \, \Box p \, |] \in N(w)$ olmalıdır.

Neticede her bir $w \in W$ için $N(w)$' nin bir süzgeç olduğu gösterilmiş oldu.

Koşul Yeterdir: Her bir $w \in W$ için $N(w)$' nin bir süzgeç olduğunu varsayalım. $\mathcal{N}$' nin normal olduğunu göstermek için Teorem 5.3.7 ve Lemma 5.3.8 sayesinde $\varphi / \Box\varphi$ kuralının geçerliliği koruduğunu ve $\mathcal{N} \vdash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$\mathcal{N} \vDash \varphi$ varsayalım; o zaman her V değerlendirme fonksiyonu için $\varphi,\ W$' nin her dünyasında doğrudur, yani $[| \, \varphi \, |] = W$' dir. Şimdi *(f1)* ve *(f2)*' den her $w \in W$ için $W \in N(w)$' dir, dolayısıyla $[| \, \Box\varphi \, |] = W$ olması $\mathcal{N} \vDash \Box\varphi$ demektir. Böylece $\varphi / \Box\varphi$ gereklilik kuralının geçerliliği koruduğu gösterilmiş oldu.

Şimdi $w \in V(\Box(p \wedge q)) = [| \, \Box(p \wedge q) \, |]$ varsayalım. Buradan $[| \, p \wedge q \, |] \in N(w)$ çıkar ve $[| \, p \wedge q \, |] \subseteq [| \, p \, |] \cap [| \, q \, |] \subseteq [| \, p \, |],\ [| \, q \, |]$ olduğu açıktır. Böylece *(f3)* uyarınca $[| \, p \, |] \in N(w)$ ve $[| \, q \, |] \in N(w)$' dir; bu ise $w \in [| \, \Box p \, |] \cap [| \, \Box q \, |] = [| \, \Box p \wedge \Box q \, |]$' yı gerektirir. Şimdi $w \in [| \, \Box p \wedge \Box q \, |]$ ise $w \in [| \, \Box p \, |]$ ve $w \in [| \, \Box q \, |]$ ya da $[| \, p \, |] \in N(w)$ ve $[| \, q \, |] \in N(w)$' dir. Ayrıca *(f2)*' den $[| \, p \wedge q \, |] \in N(w)$ ya da $w \in [| \, \Box(p \wedge q) \, |]$' ye ulaşılır. Neticede $[| \, \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q) \, |] = W$ olur ki bu $\mathcal{N} \vDash \Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ demektir. Böylece $\mathcal{N}$' nin normal olduğu kanıtlanmış olur. $\boxtimes$

Gözlem 5.3.12. Bir noktanın komşuluklarının kümesi üzerinde öyle bir komşuluk fonksiyonu tanımlanabilir ki oluşan komşuluk çatısı normal olmasın. Bu yüzden bağıntısal çatıları komşuluk çatıları olarak değerlendirirsek her komşuluk çatısının bir bağıntısal çatı olmadığını görürüz. Ancak kendimizi normal çatılara kısıtlarsak şöyle bir soru sorulabilir:

"Bağıntısal çatılar (a izomorf) olmayan normal komşuluk çatıları var mıdır ve varsa bağıntısal çatılar (a izomorf) olan komşuluk çatıları nasıl karakterize edilebilir?"

Bu soruya aşağıdaki teoremde yanıt veriliyor.

Teorem 5.3.13. Bir $\mathcal{N} = \langle W, \quad N\rangle$ komşuluk çatısı bir bağıntısal çatıya izomorftur ancak ve ancak her bir $w \in W$ için $N(w)$ bir esas süzgeçtir.

Kanıt.

Koşul Gerektir: Bir $F = \langle U, \quad R\rangle$ bağıntısal çatısı için $\mathcal{N}$' nin $\mathcal{N}_F$' ye izomorf olduğunu varsayalım. Aslında $\mathcal{N}$' nin $\mathcal{N}_F$ olduğunu, böylece $W = U$ ve $N = N^R$ alınabildiğini varsayabiliriz. O zaman $w \in W$ için $N(w) = N^R(w) = \{X \subseteq W: wR \subseteq X\}$' dir ve bu, wR tarafından üretilen esas süzgeçtir.

Koşul Yeterdir: Her $w \in W$ için $N(w)$' nin bir esas süzgeç olduğunu varsayalım ve $\mathcal{N} = \mathcal{N}_F$ olduğunu gösterelim. W üzerinde bir R bağıntısını

$$wRv \Leftrightarrow v \in N, \text{her } N \in N(w) \text{ için}$$

olarak tanımlayalım. $N(w)$ esas süzgeç olduğundan $N \in N(w)$ ise $M \subseteq N$ olacak şekilde bir $M \in N(w)$ vardır. O halde $wRv \Leftrightarrow v \in M$ ve buradan da $N \in N^R(w) \Leftrightarrow wR = \{v: v \in M\} = M$ sonuçlanır. Bu ise $N^R(w) = N(w)$, yani $N^R = N$ demektir. Dolayısıyla $\mathcal{N} = \mathcal{N}_F$ gösterilmiş oldu. ⊠

Tanım 5.3.14. Her alt kümesinin bir supremumu ve bir infimumu olan bir Boole cebirine **tam** (complete) Boole cebiri denir. Boole cebirinin bir **atom**u sıfırdan farklı bir a elemanıdır öyle ki cebirin herhangi bir b elemanı için $0 < b < a$ doğru olmasın. Her sıfırdan farklı elemanı bir atomun üzerinde olan bir Boole cebirine **atomik** denir.

Teorem 5.3.15. Bir $\mathcal{U} = \langle \mathcal{B}, \quad m\rangle$ cebirsel çatısı bir komşuluk çatısına izomorftur ancak ve ancak $\mathcal{B}$ bir tam atomik Boole cebiridir.

Kanıt. (Gerson, 1974). ⊠

BÖLÜM 6
SEZGİSEL ÖNERMELER LOJİĞİ İÇİN SEMANTİKLER

Klasik önermeler lojiğinin bir formülünün standart semantiği, formüldeki önerme değişkenlerine $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ Boole cebrinde ya da iki elemanlı diğer her hangi bir Boole cebrinde bir doğruluk değeri atanarak tanımlanır. $\mathbb{P} = \{p, q, r, \dots\}$ sonsuz sayılabilir çoklukta önerme değişkenlerinin kümesini göstermek üzere böyle bir atama $V\colon \mathbb{P} \to \mathbf{2}$ fonksiyonu ile yapılır ve bu fonksiyona bir değerlendirme (valuation) fonksiyonu denir. $\mathbb{F}_C$ önermeler lojiğinin formüller kümesini göstermek ü zere V fonksiyonu $\mathbb{F}_C$ kümesine aşağıdaki gibi genişletilebilir: Her $\varphi,\ \psi \in \mathbb{F}_C$ için

$$V(\neg\varphi) = \neg V(\varphi)$$
$$V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \wedge V(\psi)$$
$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \vee V(\psi)$$
$$V(\varphi \to \psi) = V(\varphi) \to V(\psi)$$

Burada $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\mathbb{P}$ üzerinde önerme bağlaçları ve $\neg$ değilleme işlemidir. Gerektiğinde, $\neg\varphi, \varphi \to\perp$ olarak alınacaktır ve $\perp$ yanlışı, $\top$ ise doğruyu gösterecektir. Her $V\colon \mathbb{P} \to \mathbf{2}$ için $V(\varphi) = \top$ (ya da 1) ise φ formülüne geçerli (valid) formül denir. Klasik önermeler lojiğinin Tamlık Teoremi (Completeness Theorem)' ne göre φ formülü $\mathbf{CP}$' de kanıtlanabilirdir ancak ve ancak φ formülü geçerlidir. $\mathbf{2}$ Boole cebiri yerine keyfi bir $\mathbb{B}$ Boole cebiri alınabilir ve değer atama kavramı bu cebire genişletilebilir. Her $V\colon \mathbb{P} \to \mathbb{B}$ fonksiyonu için $V(\varphi) = \top$ ise φ formülü $\mathbb{B}$-geçerlidir denir. Şimdi $\mathbf{CP}$ lojiği için iyi bilinen tamlık teoreminin aşağıdaki versiyonu ifade edilebilir:

φ formülü $\mathbf{CP}$ lojiğinde kanıtlanabilirdir ancak ve ancak her $\mathbb{B}$ Boole cebiri için $\mathbb{B}$-geçerlidir. $\boxtimes$

Aynı şekilde **IPC** için bir semantik tanımlanabilir, ancak bu durumda doğruluk değerleri Boole cebiri yerine bir $\mathbb{H}$ Heyting cebirine ait olacaktır. Bir $\mathbb{H}$-değerlendirme bir $V: \mathbb{P} \to \mathbb{H}$ fonksiyonudur ve formüllerin kümesine genişletilebilir. Her $V: \mathbb{P} \to \mathbb{H}$ değerlendirmesi için $V(\varphi) = \top$ ise φ formülü $\mathbb{H}$-geçerlidir denir.

Tanım 6.1. (Heyting gerektirme) Γ sonlu bir formüller kümesi ve φ bir formül olsun. Her V $\mathbb{H}$-değerlendirmesi için $V(\wedge\Gamma) \leq V(\varphi)$ ise Γ, φ formülünü Heyting gerektirir ya da Γ, φ' nin bir $\mathbb{H}$-sonucudur denir ve $\Gamma \vDash \mathbb{H}\varphi$ ile gösterilir.

Notasyon 6.2. Bu tanımda $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ ise $\wedge\Gamma$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ ifadesinin kısa yazılışıdır. Ayrıca sezgisel önermeler lojiği **IPC**' ya da **Int** olarak ve önermeler lojiği **CP** olarak kısaltılacaktır.

Sezgisel önermeler lojiği, $\varphi \vee \neg\varphi$ ya da $\neg\neg\varphi \to \varphi$ çifte değilleme yasası olmadan kısaca klasik önermeler lojiği olarak tanımlanabilir. Aksiyomları ve kuralları aşağıdaki gibidir:

Aksiyomlar $\varphi, \ \psi \in \mathbb{F}_C$ için

- $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
- $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
- $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$

Kurallar

$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi}\ (\wedge I)$ $\qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\ (\wedge E1)$ $\qquad \frac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\ (\wedge E2)$

$$\frac{\begin{array}{c} -h \\ \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi\to\psi}\ (\to I, h) \qquad \frac{\varphi\to\psi \quad \varphi}{\psi}\ (\to E\ ya\ da\ MP)$$

$\frac{\varphi}{\varphi\vee\psi}\ (\vee I1)$ $\qquad \frac{\psi}{\varphi\vee\psi}\ (\vee I2)$ $\qquad \frac{\perp}{\varphi}\ (\perp E)$

6.1. Boole Cebirleri ve Heyting Cebirleri

Burada Boole cebiri ve Heyting cebirinin tanımları hatırlatılmakla birlikte her iki cebir için farklı ancak denk tanımların verilebildiği gösteriliyor.

6.1.1. Boole Cebirleri

Bir Boole cebiri $\mathbb{B} = \langle B, \quad \wedge, \quad \vee, \quad ', \quad 0, \quad 1\rangle$ genellikle tipli bir yapı olarak tanımlanır öyle ki B üzerinde tanımlanan $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemleri birleşmeli, değişmeli, birbiri üzerine dağılmalı ve eşgüçlü (idempotent)' dür; birli işlem $'$ çifte değillemeyi (her $b \in B$ için $(b')' = b$) sağlar ve $0,\ 1$ elemanları sırasıyla en küçük ve en büyük elemanlardır. Bir Boole cebiri kafes (lattice) kavramı aracılığıyla da tanımlanabilir.

Tanım 6.1.1.1. Bir kafes, $\mathbb{L} = \langle L, \quad \vee, \quad \wedge\rangle$, (2, 2) tipli bir yapıdır öyle ki her $a, b, c \in L$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanır:

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (L1)$^{\partial}$ $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

(L2) $a \vee b = b \vee a$ (L2)$^{\partial}$ $a \wedge b = b \wedge a$

(L3) $a \vee a = a$ (L3)$^{\partial}$ $a \wedge a = a$

(L4) $a \vee (a \wedge b) = a$ (L4)$^{\partial}$ $a \wedge (a \vee b) = a$

(L3) ve (L3)$^{\partial}$ eşgüçlülük aksiyomlarının her biri (L4) ve (L4)$^{\partial}$ yutma (absorption) aksiyomlarından türetilebilir ancak bir kafesi Tanım 6.3.1.1 altında tanımlamak gelenektir. L üzerinde $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ ya da $a \wedge b = a$ gibi bir sıralama bağıntısı tanımlanabilir.

Tanım 6.1.1.2. L bir kafes olsun. Her $a \in L$ için $a = a \vee 0$ olacak şekilde bir *sıfır* elemanı $0 \in L$ varsa ve her $a \in L$ için $a = a \wedge 1$ olacak şekilde bir *bir* (ya da *birim*) elemanı $1 \in L$ varsa, L kafesine *sınırlı kafes* denir.

Tanım 6.1.1.3. Bir dağılmalı kafes aşağıdaki dağılma aksiyomlarından birini sağlayan kafestir. Her $a, b, c \in L$ için

(D) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $(D)^{\partial}$ $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Tanım 6.1.1.4. L sınırlı bir kafes ve $a \in L$ olsun. Eğer $a \wedge b = 0$ ve $a \vee b = 1$ ise $b \in L$ elemanı a' nın bir *tümleyeni*dir. a elemanının tek bir tümleyeni varsa o tümleyen a' ile gösterilir. Her elemanı tek tümleyene sahip bir kafese *tümlenmiş* kafes denir.

Nihayet bir Boole cebiri kafes açısından şöyle tanımlanabilir:

Tanım 6.1.1.5. Bir Boole cebiri sınırlı, dağılmalı ve tümlenmiş bir kafestir.

Tanım 6.1.1.1' deki her bir aksiyom düale sahiptir ve **CP**' nin iyi bilinen Düalite İlkesi gereği $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerinden birinden vazgeçilebilir. Böylece Boole cebirlerinin yeni bir tanımı yapılabilir. Ayrıntı için *(Kato, 2015)* kaynağına bakılabilir.

Tanım 6.1.1.6. Bir Boole cebiri aşağıdaki koşulu sağlayan (2, 1) tipli bir $\mathbb{B} = \langle B, \quad \vee, \quad ' \rangle$ yapısıdır:

$u \in B$ elemanı vardır öyle ki

1. B üzerinde $p' \vee q = u$ olarak tanımlanan $p \leq q$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı
2. $p \vee q = \sup\{p, q\}$

olsun.

Böyle bir $u \in B$ elemanı varsa, her $p \in B$ için $u = p' \vee p$ olduğu için u tektir. Bu tek elemana birim denir ve 1 ile gösterilir.

Teorem 6.1.1.7. Tanım 6.1.1.5 ve Tanım 6.1.1.6 denktir.

Kanıt (Kato, 2015) de verilmiştir.

6.1.2. Heyting Cebirleri

Bir Boole cebiri tümleyen işlemi *zayıflatılarak* genelleştirilebilir. Bunu yerine getirmenin bir yolu sözde tümleyeni (pseudo-complement) tanımlamaktan geçer.

L, 0 elemanlı bir kafes ve $a \in L$ olsun. $a^* = \max\{b \in L : b \wedge a = 0\}$, a' nın sözde tümleyeni olsun. Aşağıda verilen Heyting cebiri tanımında $\rightarrow$ gerektirme işlemi $a^* = a \rightarrow 0$ sözde tümleyen kavramı ile ilişkilendirilebilir.

Tanım 6.1.2.1. Bir Heyting kafesi ya da Heyting cebiri

$$c \leq a \rightarrow b \text{ ancak ve ancak } a \wedge c \leq b$$

şeklinde *gerektirme* adı verilen bir $\rightarrow$ ikili işleme sahip sınırlı ve dağılmalı bir kafestir.

Bir Heyting cebiri; $\vee$, $\wedge$ ve $\rightarrow$ işlemlerinin belirli aksiyomları sağladığı 0 ve 1 elemanlı bir $\mathbb{H} = \langle H, \quad \leq \rangle$ kısmi sıralı yapı olarak da tanımlanabilir. Ayrıca sadece denklemlere dayalı Heyting cebiri tanımlamak da mümkündür.

Teorem 6.1.2.2. L bir (dağılmalı) kafes olsun. L' nin bir Heyting cebiri olması için bir gerek ve yeter koşul L üzerinde aşağıdakilerin gerçeklendiği bir $\rightarrow$ ikili işlemin olmasıdır: her $a, b, c \in L$ için

1. $a \rightarrow a = 1$;
2. $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$;
3. $b \wedge (a \rightarrow b) = b$;
4. $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

Kanıt.

Koşul Gerektirir: L bir Heyting cebiri ve $a, b, c \in L$ olsun.

1. $a \wedge c \leq a$ olduğu açıktır ve Tanım 6.1.2.1 gereği $c \leq a \rightarrow a$ olarak yazılır. Bu ise $a \rightarrow a = 1$' e denktir.
2. $a \wedge b \leq b$ olduğu açıktır ve Tanım 6.1.2.1 uyarınca $b \leq a \rightarrow b$' ye denktir. Her kafeste monotonluk yasaları ($a \leq b$ ve $c \leq d$ ise $a \wedge c \leq b \wedge d$ ve $a \vee c \leq b \vee d$) geçerli olduğu için $b \leq a \rightarrow b$, $a \wedge b \leq a \wedge (a \rightarrow b)$' yi gerektirir. Diğer eşitsizlik için $a \rightarrow b = \bigvee\{c \in H: a \wedge c \leq b\}$ ile birlikte supremum (burada $\bigvee$ ile gösteriliyor) tanımı $a \rightarrow b \leq b$' yi verir. Bir kez daha monotonluktan $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$ elde edilir ve böylece ikinci eşitliği gösterilmiş olur.
3. $b \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ olduğu açıktır. Ters yön için $b = \inf\{b,\ a \rightarrow b\}$ olduğunu göstermek gerekir. Şimdi $b \leq b$ açıktır ve Tanım 6.1.2.1 gereğince $b \leq a \rightarrow b$, $a \wedge b \leq b$' ye denktir. Böylece $b \wedge (a \rightarrow b) = b$' dir.
4. Alıştırma olarak bırakılmıştır.

Koşul Yeterdir: $\mathbb{L}$ teoremin ifadesinde yer alan dört koşulu sağlayan bir kafes ve $a, b \in L$ olsun.

$c \leq a \rightarrow b$ varsayalım. O zaman monotonluktan $a \wedge c \leq a \wedge (a \rightarrow b)$ ve 2. den $a \wedge c \leq a \wedge b$ elde edilir. Ama $a \wedge b \leq b$' dir, böylece $a \wedge c \leq b$ elde edilir. $a \wedge c \leq b$ varsayalım. O zaman $a \wedge c = (a \wedge a)c = a \wedge (a \wedge c) \leq a \wedge b = a \wedge (a \rightarrow b)$, sırasıyla eşgüçlülük, hipotez ve 2. den yazılır. Her dağılmalı kafeste sadeleştirme yasası ($a \wedge b = a \wedge c$ ve $a \vee b = a \vee c$ ise $b = c$' dir) geçerli olduğu için $c \leq a \to b$ bulunur. ⊠

Burada Heyting cebirleri, Boole cebirleri ve kafesler arasında var olan ilişkileri açıklayan örnekler veriliyor.

Örnek 6.1.2.3. Her Boole cebiri bir Heyting cebiridir. Bunun için $a \to b \coloneqq a' \vee b$ almak yeterlidir.

Örnek 6.1.2.4. Gerektirme işlemi

$$a \to b = \begin{cases} b, & a > b \ ise \\ 1, & aksi \ halde \end{cases}$$

gibi tanımlanırsa, her tam sıralı küme bir Heyting cebiridir.

Her Heyting cebiri bir Boole cebiri değildir. Gerçekten, → işlemi Örnek 6.1.2.4' deki gibi tanımlandığında, Boole cebiri olmayan en basit Heyting cebiri tam sıralı $\mathbb{H} = \{0, 1/2, 1\}$ kümesidir: $\mathbb{H}$ üzerinde $\vee, \wedge, \to$, ve $'$ işlemleri aşağıdaki çizelgelerdeki gibi tanımlandığında, Boole cebirlerinde geçerli olan üçüncünün olmazlığı yasası

$$(1/2) \vee (1/2)' = 1/2 \vee (1/2 \to 0) = 1/2 \vee 0 = 1/2$$

nedeniyle yanlışlanır.

$\wedge$	0	$1/2$	1
0	0	0	0
$1/2$	0	$1/2$	$1/2$
1	0	$1/2$	1

$\vee$	0	$1/2$	1
0	0	$1/2$	1
$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
1	1	1	1

$\to$	0	$1/2$	1
0	1	1	1
$1/2$	0	1	1
1	0	$1/2$	1

$'$	
0	1
$1/2$	0
1	0

Örnek 6.1.2.5. Her sonlu dağılmalı kafes bir Heyting cebiridir.

Bunu göstermek için L sonlu, dağılmalı bir kafes olmak üzere

$$a \to b \coloneqq \bigvee\{c \in L : c \wedge a \leq b\}$$

almak yeterlidir.

Örnek 6.1.2.6.

- τ, $\mathbb{R}^2$' nin tüm açık kümelerinin ailesi;
- $\cup$ ve $\cap$ işlemleri küme birleşim ve küme kesişim;
- Her $U, V \in \tau$ için I iç operatörü ve ^{c} kümesel tümleyen olmak üzere

$$U \to V \coloneqq I(U^{c} \cup V)$$

- $U' = I(U^{c})$
- $0 = \emptyset$ ve $1 = \mathbb{R}^2$

olmak üzere $\mathbb{H} = \langle \tau, \quad \cup, \quad \cap, \quad \to, \quad ', \quad 0, \quad 1 \rangle$ bir Heyting cebiridir.

Bu örnekte gösterilmeye değer tek özellik $U, V, W \in \tau$ için

$$U \cap W \subseteq V \Leftrightarrow W \subseteq U \to V$$

denkliğidir. Önce her U, V, W için

$$U \cap W \subseteq V \Leftrightarrow W \subseteq U^{c} \cup V$$

denkliğini gösterelim. $U \cap W \subseteq V$ olsun ve $W \nsubseteq U^{c} \cup V$ varsayalım. O zaman öyle bir $w \in W$ elemanı vardır ki $w \notin U^{c} \cup V$ olsun. Buradan $w \notin U^{c}$ ve $w \notin V$, dolayısıyla $w \in U$' dur. Böylece $w \in U \cap W \subseteq V$' den $w \in V$ sonuçlanır ki bu $w \notin V$ ile çelişir.

Şimdi $W \subseteq U^{c} \cup V \Leftrightarrow I(U^{c} \cup V)$ denkliğini kanıtlamak için bir gözlemde bulunalım. X bir açık küme ise $X \subseteq Y$, $X \subseteq I(Y)$' yi gerektirir. Böylece, $X = W$ alırsak, $\Rightarrow$ yönü gösterilmiş olur. Ters yön için ise $I(U^{c} \cup V) \subseteq U^{c} \cup V$ olduğunu not etmek yeterlidir.

6.2. Sezgisel Önermeler Lojiği için Modeller

Sezgisel önermeler lojiği için semantiklere geçmeden önce bir noktanın açıklanması gerekmektedir. **IPC**' nin karakteristik özelliklerinden biri her sezgisel önermenin doğru ya da yanlış olmamasıdır; bu özellik **IPC**' yi . **CP**' den ayıran en temel karakteristiktir. Alt kümeler bağlamında bu, her alt kümenin bir tümleyene sahip olmayabileceği anlamına gelir. Örneğin, $\wp(\{a, b\})$ kuvvet kümesinin $H = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ alt kümesi $0 = \emptyset$ ve $1 = \{a, b\}$ seçkin elemanlı ve $\cup$,$\cap$ işlemli dağılmalı bir kafestir. Ancak $\{a\}$ elemanının $\{a\} \cap A = 0$ ve $\{a\} \cup A = 1$ olacak şekilde bir A tümleyeni yoktur.

6.2.1. IPC için Kripke Semantiği

IPC için bir Kripke modeli bir $\mathcal{M} = \langle W, \quad R, \quad V \rangle$ üçlüsünden oluşur; burada W *olası dünyaların* boştan farklı bir kümesi; R, W üzerinde bir önsıralama (yani, yansıyan ve geçişken) bağıntısı ve $V, \mathbb{P}$' den $\wp(W)$ kuvvet kümesine tanımlı değerlendirme fonksiyonudur. Bazen V fonksiyonu $V: \mathbb{P} \times W \to \{0, 1\}$ şeklinde de tanımlanır. Burada V fonksiyonunun R bağıntısına göre monoton olması istenir: her $w, u \in W$ için wRu ise $V(p, w) \leq V(p, u)$' dır. Diğer bir deyişle, $V(p, w) = 1$ ve wRu ise $V(p, u) = 1$' dir. V fonksiyonuna üst kapalı (upper closed) fonksiyon da denir. $R(w) \coloneqq \{u \in W: wRu\}$ tanımını yapalım.

Bir formül farklı dünyalarda doğru ya da yanlış olabilir. φ formülü modelin bir w dü nyasında doğru ise bu $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ile gösterilir; $\vDash$ (ya da $\vDash$) bağıntısına zorlama bağıntısı (forcing relation) denir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

- $\mathcal{M}, w \vDash p$ (ava) $V(p, w) = 1$ ya da $w \in V(p)$.
- $\mathcal{M}, w \vDash \neg\varphi$ (ava) her $u \in R(w)$ için $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi$.
- $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \land \psi$ (ava) $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \psi$.
- $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \lor \psi$ (ava) $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ya da $\mathcal{M}, w \vDash \psi$.
- $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \to \psi$ (ava) her $u \in R(w)$ için $\mathcal{M}, w \nvDash \varphi$ ya da $\mathcal{M}, w \vDash \psi$. Ya da, denk olarak, ancak ve ancak her $u \in R(w)$ için $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$, $\mathcal{M}, w \vDash \psi$' yi gerektirir.

Bu tanım zorlama bağıntısının monotonluğunu, yani $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ve $u \in R(w)$ ise $\mathcal{M}, u \vDash \varphi$, korumak amacıyla tasarlanmıştır.

Uyarılar 6.2.1.1.

1. Kripke modelinin evreni W yalnız bir olası dünyadan oluşuyorsa o zaman model **CP** için bir modele dönüşür.
2. V fonksiyonu üst kapalı idi: $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ve $u \in R(w)$ ise $\mathcal{M}, u \vDash \varphi$' dir. Şimdi $w \in R(u)$ ve $u \in R(w)$ olsun. O zaman $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ancak ve ancak $\mathcal{M}, u \vDash \varphi$' dir. Bu durum, formüllerin geçerliliği bağlamında R bağıntısının bir kısmi sıralama bağıntısı olarak alınabileceğini gösterir.

Bir lojiğin bir semantiğe göre *sağlam* (sound) olduğunu göstermek için aksiyomlarının o semantik altında geçerli olduğu ve çıkarım kurallarının geçerliliği koruduğu gösterilmelidir. Bu φ formülü **IPC** ya da **Int** in bir teoremi ise bu $\vdash \mathbf{Int}\varphi$ ile gösterilir.

Teorem 6.2.1.2. (Sağlamlık Teoremi) $\mathcal{M} = \langle W, \ \ R, \ \ V \rangle$ herhangi bir Kripke modeli ve w, W' nin herhangi bir dünyası olsun. Eğer $\vdash \mathbf{Int}\varphi$ ise o zaman $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$' dir.

Kanıt. Önce modus ponens (MP) çıkarım kuralının geçerliliği koruduğunu gösterelim. $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$ verilsin. O zaman her $u \in R(w)$ için ya $\mathcal{M}, u \nvDash \varphi$ ya da $\mathcal{M}, u \vDash \psi$' dir. R bağıntısı yansıyan olduğu için $u = w$ alabiliriz. Böylece $\mathcal{M}, u \vDash \varphi$ verildiğinde $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ sonuçlanmak zorundadır.

Aksiyomların bu semantiğe göre geçerli olduğunu gerçeklemek için en kapsamlı olanı, $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$, ele alacağız; diğerleri benzer şekilde çalışılır. $\alpha \rightarrow \beta$ biçiminde bir formülün bir w dünyasında doğru olduğu, her $u \in R(w)$ için $\mathcal{M}, u \vDash \alpha$ ise $\mathcal{M}, u \vDash \beta$ olduğu gösterilir. Buna göre her hangi bir $u \in R(w)$ için $\mathcal{M}, u \vDash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ varsayalım. Gösterilmesi gereken $\mathcal{M}, u \vDash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$' dir. Bir kez daha $\mathcal{M}, v \vDash \varphi \rightarrow \psi$ olacak şekilde keyfi bir $v \in R(u)$ dünyası verilsin ve $\mathcal{M}, v \vDash \varphi \rightarrow \chi$ olduğunu gösterelim.

Nihayet $\mathcal{M}, w \vDash \varphi$ olacak şekilde $w \in R(v)$ dünyası verilsin ve $\mathcal{M}, w \vDash \chi$ olduğunu gösterelim. R bağıntısının yansıyan, geçişken oluşundan ve V fonksiyonunun monotonluğundan, $u \in R(w)$ ve $v \in R(w)$ nedeni ile $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$' dir. MP kuralı $\vDash$ için uygulanabilir olduğundan $\mathcal{M}, w \vDash \psi$ ve $\mathcal{M}, w \vDash \psi \rightarrow \chi$' den $\mathcal{M}, w \vDash \chi$ sonuçlandırılır. ⊠

Bu teorem bir formülün **Int**' de türetilemediğinin bir kanıtı olarak kullanılır.

Örnek 6.2.1.3. $\vdash_{\mathbf{CP}} p \vee \neg p$ olduğu iyi bilinmektedir. Ancak $\nvdash_{\mathbf{Int}} p \vee \neg p$, dolayısıyla $p \vee \neg p$ önermesinin **Int**' de geçerli olmadığını kanıtlamak için Kripke modelinin en az iki elemanlı bir evrene sahip olması gerekir. $W = \{w, u\}$ ve R, W üzerinde yansıyan olsun. $V(p) = \{u\}$, yani $V(p, u) = 1$ ve $V(p, w) = 0$ alırsak, $\mathcal{M}, w \nvDash p$ ve $\mathcal{M}, w \nvDash \neg p$' dir çünkü $u \in R(w)$ için $\mathcal{M}, u \vDash p$ dir. O halde $\mathcal{M}, w \nvDash p \vee \neg p$ elde edilir. Teorem 6.2.1.2' nin karşıt tersinden $\nvdash_{\mathbf{Int}} p \vee \neg p$ sonuçlanır.

Sağlamlık teoreminin tersi olan tamlık teoremi (completeness theorem) her hangi bir Kripke modelinin her dünyasında doğru olan bir formülün $\mathbf{Int}$' de kanıtlanabilir olduğunu ifade eder.

Teorem 6.2.1.4. (Tamlık Teoremi) Her hangi bir Kripke modeli $\mathcal{M} = \langle W, \quad R, \quad V \rangle$ ve her $w \in W$ için $\mathcal{M}, u \vDash \varphi$ ise $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$' dir.

Kanıt için *(Kuznetsov, 2017)* kaynağına bakılabilir.

6.2.2. IPC için Heyting Cebiri Modeli

Teorem 6.2.2.1. (Sağlamlık Teoremi) $\mathbb{H}$ bir Heyting cebiri, Γ formüllerin sonlu bir kümesi ve $V: \mathbb{P} \to \mathbb{H}$ bir değerlendirme fonksiyonu olsun. $\Gamma \vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ ise o zaman $\Gamma \vdash_{\mathbb{H}} \varphi$' dir.

Kanıt. **IPC** ' nin kurallarının Heyting gerektirmesini koruduklarını göstermemiz gerekmektedir.

$\Gamma \vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ türetiminde uygulanan son kuralın $(\wedge I)$ olduğunu varsayalım. O zaman $\varphi = \psi \wedge \chi$' dir ve $\Gamma_1 \subseteq \Gamma, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ alt kümeleri için $\Gamma_1 \vdash_{\mathbf{Int}} \psi$ ve $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{Int}} \chi$ türetimleri vardır; yani $V(\wedge\Gamma_1) \leq V(\psi)$ ve $V(\wedge\Gamma_2) \leq V(\chi)$ ' dir. Buradan $V(\wedge\Gamma) \leq V(\wedge\Gamma_1) \wedge V(\wedge\Gamma_2) \leq V(\psi) \wedge V(\chi) \leq V(\psi \wedge \chi)$ elde edilir ve böylece $(\wedge I)$ kuralı korunmuş olur.

$\Gamma \vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ türetiminde son uygulanan kuralın $(\to I)$ olduğunu varsayalım. O zaman $\varphi = \psi \to \chi$ ve $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash_{\mathbf{Int}} \chi$ ' dir; böylece tümevarım hipotezinden $V(\wedge\Gamma) \wedge V(\psi) = V(\wedge\Gamma \cup \{\psi\}) \leq V(\chi)$ olur. Ama Heyting cebirinde $\to$ işleminin tanımından ve değerlendirme fonksiyonun tanımından $V(\wedge\Gamma) \leq V(\psi) \to V(\chi) = V(\psi \to \chi)$ elde edilir, dolayısıyla $(\to I)$ kuralı korunmuş olur. Kalan kurallar Heyting cebirinin karşılık gelen özellikleri kullanılarak benzer şekilde korunur. ⊠

Teorem 6.2.2.2. (Tamlık Teoremi) φ formülü **IPC** de kanıtlanabilirdir ancak ve ancak her bir Heyting cebiri $\mathbb{H}$ için φ $\mathbb{H}$-geçerlidir; yani

$$\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi \Leftrightarrow \vdash_{\mathbb{H}} \varphi$$

dir.

Kanıt.

Koşul Gerektir: φ, **IPC**' de kanıtlanabilir ise $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$' nin bir türetimi vardır. O halde Teorem 6.4.2.1 uyarınca herhangi bir $\mathbb{H}$-değerlendirme V için $1 \leq V(\varphi)$' dir ve böylece φ, $\mathbb{H}$-geçerlidir.

Koşul Yeterdir: $\mathbb{F}_i$, **IPC** formüllerinin kümesi olsun ve $\mathbb{F}_i$ üzerinde $(\varphi \sim \psi) \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{Int}} (\varphi \leftrightarrow \psi)$ denklik bağıntısını tanımlayalım. $\mathbb{H} = {}^{\mathbb{F}_i}/_{\sim}$, $\sim$ bağıntısına göre $[\varphi] = \{\psi \in \mathbb{F}_i : \varphi \sim \psi\}$denklik sınıflarının kümesi olsun. $\mathbb{H}$ üzerinde $[\varphi] \sim [\psi] \Leftrightarrow \vdash_{\mathbf{Int}} (\varphi \leftrightarrow \psi)$ kısmi sıralama bağıntısını tanımlayalım. $\mathbb{H}$ üzerinde $[\varphi] \wedge_{\mathbb{H}} [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi] \vee_{\mathbb{H}} [\psi] = [\varphi \vee \psi]$ ve $[\varphi] \rightarrow_{\mathbb{H}} [\psi] = [\varphi \rightarrow \psi]$ şeklinde tanımlanan işlemlerin temsilci elemandan bağımsız olduğu ve $0_{\mathbb{H}} = [0]$, $1_{\mathbb{H}} = [1]$ alındığında $\langle H, \ \leq, \ \vee_{\mathbb{H}}, \ \wedge_{\mathbb{H}}, \ \rightarrow_{\mathbb{H}}, \ 0_{\mathbb{H}}, \ 1_{\mathbb{H}} \rangle$ yapısının bir Heyting cebiri oluşturduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $V(\varphi) = 1_{\mathbb{H}}$ ise o zaman $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi \leftrightarrow 1$' dir ve böylece $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ elde edilir. ⊠

Bu semantiğe göre **CP**' de geçerli ancak **IPC**' de geçerli olmayan formül örnekleri verilebilir.

Örnek 6.2.2.3. $H = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \wp(\{a, b\})$ kümesi $\cup$ ve $\cap$ işlemleri altında $0 = \emptyset$ ve $1 = \{a, b\}$ seçkin elemanlı dağılmalı bir kafestir. $p \in P$ için $V(p) = \{a\}$ olsun. O zaman $V(\neg p) = \neg\{a\} = \emptyset$ 'dir.

$\nvdash_{\mathbf{Int}} \neg\neg p \rightarrow p$' dir çünkü

$$V(\neg\neg p \rightarrow p) = V(\neg\neg p) \rightarrow V(p) = 1 \rightarrow V(p) = V(p) = \{a\} \neq \{a, b\} = 1$$

dir.

$\vdash_{\mathbf{Int}} \neg\neg p \rightarrow p$' dir çünkü

$$V(\neg p \vee \neg\neg p) = V(\neg p) \vee V(\neg\neg p) = \emptyset \cup \{a, b\} = 1$$

dir.

6.2.3. IPC için Topolojik Modeller

Her formülün değerlendirmesi bir açık küme olacak şekilde, **IPC**' nin formüllerini bir $\langle X, \ \tau \rangle$ topolojik uzayının alt kümeleri olarak yorumlayacağız. Önerme değişkenleri için $V: \mathbb{P} \rightarrow \tau$ fonksiyonunun formüllere genişletilmesi, yine aynı V kullanılarak, $V: \mathbb{F}_i \rightarrow \tau$ olarak tanımlanacaktır. $\varphi, \psi \in \mathbb{F}_i$ için $V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$ ve

$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$ kümeleri τ kümesine aittir. Ancak $V(\varphi \to \psi)$ kümesi $(X - V(\varphi)) \cup V(\psi)$ gibi tanımlanırsa, $\to$ işlemi hatalı tanımlanmış olur çünkü $(X - V(\varphi)) \cup V(\psi)$ bir açık küme olmayabilir. Uygun tanım $V(\varphi \to \psi) = I(X - V(\varphi)) \cup V(\psi)$ dir. Nihayet $V(\perp) = \emptyset$ olmak üzere, $V(\neg\varphi) = V(\varphi \to \perp) = I(X - V(\varphi)) \cup V(\perp) = I(X - V(\varphi))$ olarak tanımlanacaktır.

Bir $\langle X, \quad \tau \rangle$ topolojik uzayı üzerindeki V değerlendirmesi altında $V(\varphi) = X$ ise φ formülü doğru olarak değerlendirilir. Bu yorum altında üçüncünün olmazlığı yasası geçerli değildir. Gerçekten, $\mathbb{R}^n$' deki bir φ açık kümesi (örneğin bir açık yuvar) ne φ ye ne de tümleyeninin içine, $I(\mathbb{R}^n - \varphi)$, ait noktalardan oluşan bir sınıra sahiptir; bir sınır noktasının her komşuluğu φ nin ve tümleyeninin noktalarını içerir.

Bir topolojik model bir $\mathcal{M} = \langle W, \quad R, \quad V \rangle$ üçlüsüdür.

Teorem 6.2.3.1. (Sağlamlık Teoremi) $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ ise o zaman φ, her $\mathcal{M} = \langle W, \quad R, \quad V \rangle$ topolojik modelinde doğrudur.

Kanıt. Önce MP kuralının geçerliliği koruduğunu gösterelim: $V(\varphi) = X$ ve $V(\varphi \to \psi) = X$ ise $V(\psi) = X$' dir. Ama bu açıktır: $V(\varphi \to \psi) = I(X - V(\varphi)) \cup V(\psi) = I(X - X) \cup V(\psi) = I(\emptyset) \cup X = \emptyset \cup X = X$.

IPC' nin aksiyomlarından sadece $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ aksiyomunu değerlendirelim; kalan aksiyomlar benzer şekilde çalışılır. Göstermemiz gereken $V(\varphi \to (\psi \to \varphi)) = X$ olduğudur. Öncelikle $V(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \subseteq X$ açıktır. Diğer kapsama için $\to$ gerektirmesinin yorumunu ve I iç operatörünün monotonluğunu (yani $A \subseteq B$ ise $I(A) \subseteq I(B)$) kullanmak yeterlidir.

$$\begin{aligned}
V(\varphi \to (\psi \to \varphi)) &= I(X - V(\varphi)) \cup V(\psi \to \varphi) \\
&= I(X - V(\varphi)) \cup I(X - V(\psi)) \cup V(\varphi) \\
&\supseteq I(X - V(\varphi)) \cup V(\varphi) \\
&\supseteq X
\end{aligned}$$

olup, $V(\varphi \to (\psi \to \varphi)) = X$ dir ve $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ aksiyomu bu semantik altında geçerlidir. ⊠

(Okur $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$ aksiyomunun geçerliliğini denetlemek isteyebilir!)

IPC' nin topolojik semantiğe göre tamlığını ilk kez ifade eden ve kanıtlayan McKinsey ve Tarski *(McKinsey ve Tarski, (1944)*' dir.

Teorem 6.2.3.2. (Tamlık Teoremi) Her $n \geq 1$ için $\vdash_{\mathbf{Int}} \varphi$ ancak ve ancak standart topoloji $\mathbb{R}^n$ üzerindeki her V değerlendirmesi için $V(\varphi) = \mathbb{R}^n$' dir. ⊠

SONUÇ

Bu tezde temel modal önermesel dil bazında normal ve normal olmayan lojikler için bağıntısal, topolojik, komşuluk ve cebirsel semantikleri verilmiş ve sonunda aralarındaki ilişkiler ortaya çıkarılmıştır.

Temel modal önermesel dile $\forall$ ve $\exists$ niceleyicilerinin dahil edilmesi ile oluşturulan birinci mertebe dil için niceliksel modal lojikler tanımlanır ve semantikleri çalışılır. Bu konuda *(Fitting ve Mendelsohn, 1998)* kaynağına başvurulabilir.

Temel modal önermesel dilin $\Box$ ve $\Diamond$ operatörleri çok argümanlı tanımlanarak modal lojiğin bir genişlemesi elde edilebilir. Bu, genelde, dinamik lojiklere yol açar *(Harel, Kozen ve Tiuryn, 2000).*

Çalışılan bir diğer lojik, temel modal önermesel dil üzerine kurulu **Sezgisel Önermeler Lojiği** (Intuitionistic Propositional Logic)' dir. Bu lojiğin semantik çalışması için *(Polat ve Terziler, 2018), (Brown., 2014)* ve *(Moniri ve Maleki, 2015)* kaynaklarına başvurulabilir.

Nihayet **ifade edilebilirlik gücü** (expressivity power) açısından modal lojiğin bir diğer genişlemesi olan Melez Lojikler (Hybrid Logics) önemli araştırma alanı sunmaktadır. Bunun için *(Areces ve ten Cate, 2007)* kaynağına başvurulabilir.

KAYNAKÇA

Aiello, M., Van Benthem, J., & Bezhanishvili, G. (2003). Reasoning about space: the modal way. *Journal of Logic and Computation*, *13*(6), 889-920.

Areces, C., & ten Cate, B. (2007). 14 Hybrid logics. In Studies in Logic and Practical Reasoning (Vol. 3, pp. 821-868). Elsevier.

Areces, C., & Figueira, D. (2009, July). Which semantics for neighbourhood semantics?. In IJCAI (pp. 671-676).

Bezhanishvili, G., & Gehrke, M. (2005). Completeness of S4 with respect to the real line: revisited. *Annals of Pure and Applied Logic*, *131*(1-3), 287-301.Day, R.G. (1998). *Kalite Fonksiyonu Yayılımı*, Wisconsin, ASQC Quality Press Milwaukee.

Bezhanishvili, N., & de Jongh, D. (2006). Intuitionistic logic. Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam.

Birkhoff, G. (1935, October). On the structure of abstract algebras. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* (Vol. 31, No. 4, pp. 433-454). Cambridge University Press.

Bochenski, I. M. (1961). A History of Formal Logic, trans. by Ivo Thomas (Notre Dame, Indiana.

Brown, C. E., (2014). Semantics of intuitionistic propositional logic, Heyting algebras and Kripke models.

Chagrov, A., & Zakharyaschev, M. (1997). Modal Logic, volume 35 of Oxford logic guides.

Chellas, B. F. (1980). *Modal logic: an introduction*. Cambridge university press. Saaty, L.T. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, USA, McGrow-Hill Company.

Copeland, B. J. (1996). Logic and Reality: Essays on the Legacy of Arthur Prior. In *Prior's life and legacy* (pp. 1-10). Oxford University Press.

Esakia, L. (2001). Weak transitivity-restitution. Logical investigations, 8, 244-255.

Fagin, R., Halpern, J., Moses, Y., & Vardi, M. (1995). Reasoning about Knowledge MIT Press Cambridge. *MA Google Scholar*.

Field, H. H. (1977). Logic, meaning, and conceptual role. *The Journal of Philosophy*, *74*(7), 379-409.

Fitting, M., & Mendelsohn, R. L. (1998). Quantified Modal Logic. In First-Order Modal Logic (pp. 81-115). Springer, Dordrecht.

Gabbay, D. M., Hodkinson, I., & Reynolds, M. (1994). Temporal Logic Mathematical Foundations and Computational Aspects (Vol. 1). Oxford Press.

Gerson, M. S. (1974). A comparative study of modal propositional semantics.--(Doctoral dissertation, Simon Fraser University. Theses (Dept. of Mathematics)).

Goldblatt, R. (2006). Mathematical modal logic: A view of its evolution. In *Handbook of the History of Logic* (Vol. 7, pp. 1-98). North-Holland.

Gödel, K. (1933). Eine Interpretation des Intuitionistis-chen Aussagenkalkuls. *Ergebnisse eines mathematisches Kolloquiums*, *4*, 39-40.

Graham, P. (2001). An Introduction to Non-Classical Logic.

Hansen, H. H. (2003). *Monotonic modal logics*. Institute for Logic, Language and Computation (ILLC), University of Amsterdam.

Harel, D., Kozen, D., & Tiuryn, J. (2001). Dynamic logic. In Handbook of philosophical logic (pp. 99-217). Springer, Dordrecht.

Hughes, G. E., & Cresswell, M. J. (1968). An Introduction to Modal. *Logic, Londres, Methuen*.

Jónsson, B., & Tarski, A. (1948). Boolean algebras with operators. *Bulletin of American Mathematical Society*, *54*, 79-80.

Kato, T. (2015). Boolean algebra and Propositional Logic.

Kanger, S. (1957). Provability in Logic, volume 1 of Studies in Philosophy. *Almqvist and Wicksell, Stockholm*.

Keisler, H. J. (1985). Probability quantifiers. *Model-theoretic logics*, *3*, 539-556.

Kneale, W., Kneale, W. C., & Kneale, M. (1962). *The development of logic*. Oxford University Press.

Kojima, K. (2012). Relational and neighborhood semantics for intuitionistic modal logic. Reports on Mathematical Logic, 2012(47), 87-113.

Kracht, M. (1999). Tools and techniques in modal logic, volume 142 of Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

Kripke, S. A. (1959). Semantic anaysis of modal logic. *The Journal of Symbolic Logic, 24,* 323-324.

Kuznetsov, S. (2017). Lecture Notes on Logic, University of Pennsylvania.

Lando, T. A. (2012). *Probabilistic Semantics for Modal Logic*(Doctoral dissertation, UC Berkeley).

Lemmon, E. J. (1957). New foundations for Lewis modal systems. *The Journal of Symbolic Logic*, *22*(2), 176-186.

Lewis, C. I., & Langford, H. (1959). Symbolic logic, 1932. *Dover, New York.*

MacColl, H. (1897). Symbolic reasoning. *Mind*, *6*(24), 493-510.

MacColl, H. (1906). *Symbolic Logic and its applications*. Longmans, Green, and Company.

Marx, M., Venema, Y., & Logics, M. D. M. (1997). Kluwer Academic Press.

McKinsey, J. C. C., & Tarski, A. (1944). The algebra of topology. *Annals of mathematics*, 141-191.

Mints, G. (1998). A completeness proof for propositional S4 in Cantor space. *Logic at work: Essays dedicated to the memory of Helena Rasiowa. Physica-Verlag, Heidelberg*.

Moniri, M. & Maleki, F. S. (2015). Neighborhood semantics for basic and ıntuitionistic logic. *Logic and Logical Philosophy, 24,* 334-355.

Montague, R. (1970). Universal grammar. *Theoria*, *36*(3), 373-398.

Pacuit, E. (2007). Neighborhood Semantics for Modal Logic An Introduction.

Palmgren, E. (2009). Semantics of intuitionistic propositional logic. Lecture Notes for Applied Logic.

Polat, S., & Teziler, M. (2018). Sezgisel önermeler lojiği için semantikler. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *20(2)*, 425-436.

Popper, K. (1959). The logic of science discovery. *Hutchinson & Co*.

Read, S. (1998). Hugh MacColl and the algebra of strict implication. *Nordic journal of philosophical logic*, *3*, 59-84.

Scott, D. (1970). Advice on modal logic. In *Philosophical problems in logic* (pp. 143-173). Springer, Dordrecht.

Scott, D. (2009). Mixing modality and probability. *Lecture notes*.

Segerberg, K. (1971). An essay in classical modal logic.

Shehtman, V. (1999). Everywhere» and «here. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, *9*(2-3), 369-379.

Stone, M. H. (1936). The theory of representation for Boolean algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, *40*(1), 37-111.

Troelstra, A. S., & van Dalen, D. (2000). Constructivism in Mathematics: An Introduction. Vol. II, Vol. 123 of. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.

Tsao-Chen, T. (1938). Algebraic postulates and a geometric interpretation for the Lewis calculus of strict implication. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *44*(10), 737-744.

Van Dalen, D. (2004). Logic and structure. Springer.

Witczak, T. (2017). Intuitionistic modal logic based on neighborhood semantics without superset axiom. arXiv preprint arXiv:1707.03859.