YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERE DİNAMİK DENKLEMLER İLE YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE

GÖZDE KATİPOĞLU

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR AHMET YANTIR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SUNUM TARİHİ: 03.01.2020

BORNOVA / İZMİR
OCAK 2020

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Doktora tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri:	**İmza:**
Doç. Dr. Ahmet YANTIR Yaşar Üniversitesi	....
Doç. Dr.Serap TOPAL Eğe Üniversitesi	....
Doç. Dr. Refet POLAT Yaşar Üniversitesi	....
Doç. Dr. Erbil ÇETİN Ege Üniversitesi	....
Dr. Öğr. Üyesi Esra DALAN YILDIRIM Yaşar Üniversitesi	....

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

DİFERANSİYEL DENKLEMLERE DİNAMİK DENKLEMLER İLE YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE

Katipoğlu, Gözde
Doktora Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Ahmet YANTIR
Ocak 2020

Diferansiyel denklemler teorisinde nümerik analiz tam çözümü analitik yollar ile mümkün olmayan bir başlangıç değer probleminin (veya sınır değer probleminin) diskretize edilerek fark denklemlerine çevrilmesini ve iterasyonlar ile orijinal problemin yaklaşık çözümüne ulaşmayı hedefler. Burada oluşturulan iterasyonlarda yakınsaklık çok önemlidir.

Bu tezde diferansiyel bir problem çözümüne zaman skalası dizisi üzerinde tanımlı dinamik denklemlerin çözümlerinin dizisi ile yaklaşmayı hedefledik. "$\mathbb{T}_n$ zaman skalaları dizisi $\mathbb{T}$ 'ye yakınsıyor ise $\mathbb{T}_n$ üzerinde tanımlanan dinamik denklemlerin çözümlerinin oluşturduğu dizi $\mathbb{T}$ üzerindeki problemin çözümüne yakınsar mı? " sorusundan yola çıkarak, bu yakınsama için en uygun topolojiyi bulmayı amaçladık.

$\mathbb{T}$ zaman skalası, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olduğundan R üzerindeki kapalı kümeler topolojilerini ele aldık. Çeşitli kapalı küme topolojilerini inceledik ve Kuratowski topolojisine göre yakınsakılığın diferansiyel problemlere dinamik problemler ile kurulmuş olan nümerik algoritmalar geliştiren türde bir yakınsakılık olduğunu gösterdik. Tezin son bölümünde çeşitli zaman skalaları dizileri üzerinde dinamik denkemler için örnekler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Sürekli bağımlılık, Zaman skalası, dinamik denklemler, yaklaşık çözümler

ABSTRACT

ON APPROXIMATION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DYNAMIC EQUATIONS

Katipoğlu, Gözde
Ph. D., Mathematics
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet YANTIR
January 2020

In the theory of differeantial equations, numerical analysis aims to find the approximate solution of an initial value problem(or a boundary value problem) whose exact solution can not be found by analitic methods by discretizing the problem and iteratively find. For these iterations the convergence has great importance.

In this thesis, we aim to the solution of a differential poblem by the sequence of solutions dynamic problems defined on a sequence of time scales. Starting from the question " If the sequence of time scales $\mathbb{T}_n$ converges to the time scale $\mathbb{T}$, does the sequence constructed by solutions of dynamic equations on $\mathbb{T}_n$ converge to the solution of the dynamic equation on $\mathbb{T}$?" we aim to find the most proper topology for convergence.

Since $\mathbb{T}$ is closed subset of real numbers, we consider the closed set topologies on $\mathbb{R}$. We investigate several closed set topologies and show that Kurotowski convergence is the best option for approximating differantial problems by dynamic ones. Kurotowski convergence also extends the numerical algorithms.

Finally we illustrate our results by examples of dynamic equations on several sequences of time scales.

Keywords: Continuous dependence, time scale, dynamic equations, approximate solutions.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Ahmet YANTIR ‘a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gözde Katipoğlu

İzmir, 2020

YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "DİFERANSİYEL DENKLEMLERE DİNAMİK DENKLEMLER İLE YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Gözde KATİPOĞLU

İMZA

…………………………..

03 Ocak 2020

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
dis(a,B)	a noktası ile B kümesi arasındaki uzaklık
e(A,B)	A ve B kümelerinin excessi
h(A,B)	A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklık
Cl(X)	X kümesinin kapalı alt kümelerinin ailesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\sigma(t)$	ileri şıçrama operatörü
$\rho(t)$	geri sıçrama operatörü
$\mu(t)$	tanecik fonksiyonu
$f^{\Delta}(t)$	f fonksiyonunun $\boldsymbol{\Delta}$ -türevi
A^{+}	hit topoloji
A^{-}	miss topoloji
dist(x, A)	x noktasının A kümesine uzaklığı

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Fark denklemleri teorisi, matematiğin gelişmesinden sonra ortaya çıkan ilk teorilerden biridir. Bu teori zamana bağlı ayrık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır. Birçok doğa olayının ifade edilmesinde fark denklemleri kullanılmaktadır. Aynı zamanda diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde de kullanılmaktadır. Bu yüzden fark denklemleri teorisi ve diferansiyel denklemler teorisi birbirine çok yakın ve paralel olarak gelişmektedir.

Doğa olayları kesiksiz olduğu varsayılan ve zamanın sürekli olarak ilerlediği durumlarda oluşabildiği gibi ayrık zaman dilimlerinde verileri sağlayabildiğimiz durumlarda da oluşur. Bu iki durumu sırasıyla diferansiyel denklemler ve fark denklemleri ile modelleyebiliriz. Bunun yanında olayların kendi içinde süreklilik ve süreksizlik hallerinin aynı anda varlığı bir gerçektir. Dolasıyla her problemin diferansiyel denklemler ya da fark denklemleri ile matematiksel modelini kurmak mümkün değildir. Bu yüzden de yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur. İşte bu teoriye 'Zaman Skalası' denmektedir. (Bohner, Peterson 2003, Garay, Hilger, Kloeden, 2003)

Zaman skalası (ölçüm zinciri) kavramı ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger tarafından doktora tezinde tantılmıştır (Hilger, 1988). Hilger'in tez danışmanı Bernd Aulbach (1947-2005) bu yeni kavramın 3 ana amacı olduğunu belirtmiştir.

1) Sürekli ve ayrık analizin tek çatı altında toplanması: Zaman sklasının bu birleştirme özelliği diferansiyel ve fark denklemlerinin dinamik denklemler adı altında toplanmasını sağlamıştır.

2) Kq ve Cantor Kümesi gibi sabit sıçramalı olmayan zaman skalaları üzerinde diferansiyel teorisinin genişlemesi.

3) Sürekli problemlerin ayrıklaştırılması.

Yukarıda bahsi geçen zaman skalasında dinamik denklemler finans, kimya, fizik ve mühendislik gibi birçok uygulamalı alanda sonuçlar vermiştir. (Ahlbrandt, Bohner, and Ridenhour 2000; Atıcı, Biles, Lebedinsky 2006; Murray 2002) Teorinin bilim dünyası tarafından kabul edilmesi ile birlikte 90'lı yıllarda ve 2000'li yılların başlarında Aulbach tarafından belirtilmiş olan amaçlardan ilk ikisi bilim dünyasının çok ilgisini çekmiştir. Literatürde ayrık ve sürekli analizde yapılmış olan birçok çalışma ilk amaç doğrultusunda zaman skalası çatısında birleştirilmiştir. (Hilger 1990; Kaymakçalan, Lakshmikantham ve Sivasundaram, 1996; Hilger 1997; Agarwal ve Bohner 1999; Bohner ve Peterson, 2001; Agarwal, Bohner, O'Regan ve Peterson 2001; Bohner ve Peterson, 2003). Zaman skalasında analiz kavramı geliştikçe diferansiyel denklemler teorisi alanında yapılan birçok çalışma zaman skalası üzerinde daha genel halde sunulmuştır. (Aulbach and Hilger 1990; Atıcı, Guseinov ve Kaymakçalan 2000; Erbe, Mathsen ve Peterson 2000; Agarwal, Bohner ve Peterson, 2001; Agarwal, Bohner ve O'Regan 2001; Akın, Erbe, Kaymakçalan ve Peterson, 2001; Bohner ve Peterson 2001; Guseinov ve Kaymakçalan 2001; Bohner 2004; Cichon 2010) Çok değişkenli analizin de zaman skalası üzerinde tanımlanıp bu alanda çalışmaların ortaya çıkması çok uzun sürmemiştir. (Ahlbrandt and Morian 2001; Guseinov, Bohner 2004; Jackson 2006; Yantır, Soyoğlu 2015)

Bahsi geçen ikinci amaç ise zaman skalasının genişletme amacıdır ve quantum sayılar üzerinde birçok diferansiyel denklem (q-fark denklami) üzerine yapılan çalışmaları ve uygulamalarını içermektedir.

Aulbach tarafından en önemli amacının diskretizasyon olduğu belirtilmesine karşın bilim dünyası bir süre ilk iki amaca yönelmiş ve bu amaçtan uzak durmuştur. Biz bu tezde zaman skalasının diskretizasyon özelliği üzerinde elde ettiğimiz sonuçları paylaşacağız.

Diferansiyel problemlere ilişkin sonuçların fark denklemlerine taşınmasında teorik olarak çok büyük zorluklar bulunmamaktadır. Ancak tersi aşikar değildir. Bu noktada "süreklilik" kavramından dolayı bazı zorluklar çıkmaktadır. Bu zorluklar dinamik denklemler teorisi ile aşılabilmaktedir. Ayrıca bu teori birçok denklemin hem ayrık hem de sürekli hallerde incelenmesinden kaçınmayı sağlamıştır.

Bazı durumlarda sürekli diferansiyel problemler oldukça karmaşık olduğundan bunların fark denklemi veya zaman skalasında dinamik denklem olarak diskiritize edilmiş versiyonları üzerinde çalışmak ve bu denklemlerinde çözümlerini uygun limitler altında orjinal problemin çözümüne yakınsadığını göstermek oldukça faydalıdır. Zaman skalası teorisinin başından beri bu gerçek bilinmesine rağmen problemin zaman sklasında dinamik denklemler yardımı ile diskritize edip orjinal problemin çözümüne zaman skalasındaki denklemin çözümlerinin limiti olarak yaklaşılmasını konusunda çalışmalarına çok geç başlamış olması çok şaşırtıcıdır. Bu konudaki ilk çalışmlar yine Stefan Hilger tarafından başlatılmıştır.(Esty, Hilger 2009) Bu çalışmasında Fell topoloji kullanarak yapılan yakınsamanın diferansiyel problemlere dinamik denklemler ile yaklaşımda en optimal yakınsama olduğunu göstermiştir. Daha sonrasında literatürde bu konuda birkaç çalışma daha yapılmıştır.(Garay, Hilger 2001; Garay, Hilger, Kloeden 2003; Duke, Hall ve Oberste-Vorth 2004; Lawrance, Oberste-Vorth 2007; Garay, Vardai 2007; Garay, Vardai 2007; Oberste-Vorth 2008; Oberste-Vorth 2009) Son olarak Cichon, Yantır Hilger'in aksine diferansiyel problemin dinamik denklemler ile yaklaşımında en uygun topolojinin Kurotowski topoloji olduğunu göstermişlerdir. (Cichon, Yantir, 2015)

Burada aşağıdaki algoritma ile verilen yöntem izlenmektedir.

Eğer bir $\mathbb{T}$ zaman skalası reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$' ye (veya başka bir zaman skalası S' ye) " belli manada" yakın ise, bu durumda $\mathbb{T}$ üzerindeki dinamik denklemin çözümünün de $\mathbb{R}$'deki diferansiyel denklemin çözümüne yakın olması beklenir. Burada çözümlerin var olduğu kabul edilmiştir. Yani gerçekte zaman skalaları dizisinin $\mathbb{R}$' ye yakınsak olması durumunda çözümlerin de gerçek çözüme yakınsak olmasını bekleriz. (Cichon, Yantir, 2015)

Bu tezde farklı olarak zaman skalası için ortak noktalar yerine zaman skalalarının yakınsaklığının ele alındığını belirtebiliriz. Yaklaşılan zaman skalası ile kurulan zaman skalası dizisinin boştan farklı kesişimi olduğunu kabul etmek zorunda değiliz.

Bu tezde asıl amacımız dinamik denklemler için en uygun yakınsaklığı tanımlamaktır. Zaman skalası üzerinde bu yönde sonuçlar olmadığından önerdiğimiz algoritmayı var olan fark denklemleri algoritmalarıyla karşılaştırarak, daha önce tanıtılmış olan yakınsaklık türlerini birleştireceğiz. Böylece çözümü tek olmayan problemler için yani fark denklemleri ile ele alınamayan problemler için bile zaman skalası ile önerilen yakınsaklık metodunu kullanacağız.

Daha öncede belirtildiği gibi 3 numaralı amaca yönelik literatürde çok fazla çalışma yoktur. Duke, Garay, Hilger ve Kloeden 2003; Hall ve Oberste-Vorth 2004; Kloeden

2004; Kloeden 2006, Oberste-Vorth 2008; Esty ve Hilger 2009; Oberste-Vorth 2009; Adamec 2011; çalışmalarında zaman skalalarının yakınsaklığı üzerine bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Ancak hemen hemen tüm sonuçlar kompakt zaman skalaları için verilmiş ve Hausdorff yakınsaklığı ele alınmıştır. Bu kuvvetli bir gerekliliktir ve keyfi zaman skalasına genişletemez. Duke, Hall ve Oberste-Vorth 2004 Hausdorff yakınsaklığından farklı türde yakınsaklık ele alınmıştır. Bu çalışmada kendileri de bu türde verilen yakınsaklığı en iyi seçenek olmadığı belirtmişlerdir. Bu yakınsaklık tanımı ile yapılacak olan yaklaşımların sağlıklı olmadığı ispatlanacaktır.

Bunun dışında Fell topoloji Esty, Hilger 2009, Oberste-Vorth 2008 ve 2009 makalelerinde tarafından ele alınmıştır. Fakat şaşırtıcı olarak bu sonuçlar çok değerli analizde var olan yakınsaklık sonuçlarıyla aynıdır.

Bu tezde $\mathbb{R}$ ’nin kapalı alt kümelerinin aileleri üzerindeki topolojilerde yakınsaklıklar karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak da Kuratowski yakınsaklığın zaman skalalarının yakınsaklığı için en uygun seçim olduğu görülmüştür. Bu topolojileri karşılaştıran birçok açıklayıcı örnek sunulmuştur. Özellikle Euler fark denklemleri

$$z_{n+1} = z_n + h_n \; f(z_n)$$

için çok faydalı olan zaman skalaları üzerinde durulmuştur. Son olarak verdiğimiz sonuçları açıklayan bir örnek sunulmuştur. Tek çözümü olmayan bu tarzda problemlerin uygulaması olarak Cauchy problemi çözülmüştür.

BÖLÜM 2
ZAMAN SKALASINDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde zaman skalası kavramının bu tez için gerekli tüm tanım ve teoremleri verilmiştir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler ve zaman skalası hakkında daha detaylı bilgi için okuyucular zaman skalası üzerine yazılmış olan (Bohner, Peterson 2001; Bohner, Peterson 2003) kitaplara bakabilirler.

2.1.Zaman Skalası Üzerinde Operatörler

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt künesine "*zaman skalası*" denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Bu küme üzerindeki metirk $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan doğal metrikdir. Yani $s, t \in \mathbb{T}$ için $d(s, t) = |s - t|$ metriği ele alınmıştır ve kapalılık bu metriğe göre yorumlanmıştır.

Örnek 2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\{a\}$ tek nokta kümeleri, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi Cantor kümesi zaman skalasına birer örnektir.

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{Q}'$ irrasyonel sayılar kümesi, kapalı olmayan aralıklar zaman skalası belirtmez.

Tanım 2.3. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. $\mathbb{T}$ üzerinde

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T} \,; s > t\} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan σ operatörüne" *ileri sıçrama operatörü*" denir.

Tanım 2.4. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. $\mathbb{T}$ üzerinde

$$\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T} \,; s < t\} \tag{2.2}$$

ile tanımlanan ρ operatörüne "*geri sıçrama operatörü"* denir.

Tanım 2.5. (2.1) ve (2.2) kullanarak zaman skalası elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir,

- $\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına *sağ yoğun nokta*,
- $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına *sağ saçılımlı nokta*,

- $\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına <u>*sol yoğun nokta*</u>,
- $\rho(t) < t$ ise $t \in \mathbb{T}$ noktasına <u>*sol saçılımlı nokta*</u>

denir. Sağ ve sol yoğun noktalar <u>*yoğun nokta*</u>, sağ ve sol saçılımlı noktalar ise <u>*ayrık nokta*</u> olarak adlandırılır.

Tanım 2.6. $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ olmak üzere

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

ile tanımlanan μ fonksiyonuna "*tanecik (grainess) fonksiyonu* " denir.

Örnek 2.7.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}\,; s > t\} = \{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$$

elde edilir. O halde $\mu(t) = \sigma(t) - t = 1$'dir. Ayrıca

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}\,; s < t\} = \{t-1, t-2, t-3, \dots\} = t-1$$

olarak bulunur. O halde $\mathbb{Z}$'nin her noktası ayrıktır.

(ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa her $t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}\,; s > t\} = (t, \infty) = t$$

elde edilir. Benzer şeklide

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}\,; s < t\} = (-\infty, t) = t$$

olur. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olduğunda $\sigma(t) = \rho(t) = t$ olduğundan $\mathbb{T}$ 'nin her noktası yoğun noktadır. Dolayısıyla $\mu(t) = 0$ elde edilir.

(iii) $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ kümesi düşünelim. Yığılma noktası olan "0" kümeye dahil olduğu için $\mathbb{T}$ bir kapalı kümedir.

$t \neq 0$ için $t = 2^n$ olacak şeklide $\exists n \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda $t \in \mathbb{T}$ ise

$$\sigma(t) = 2^{n+1} = 2.2^n = 2t$$

olarak bulunur. Benzer şeklide

$$\rho(t) = 2^{n-1} = \frac{1}{2}t$$

olur. "0" noktası hariç her $t \in \mathbb{T}$ noktası için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t$'dir. Benzer şekilde

$$\rho(t) = \frac{t}{2}$$

olduğundan "0" noktası dışındaki her nokta ayrık noktadır.

Uyarı 2.8. Örnek 2.7. (i) ve (ii) görüleceği üzere $\mu(t)$ fonksiyonu sabit olabileceği gibi (iii) de de t'ye bağlı bir fonksiyonda olabilir.

2.2. Zaman Skalası Üzerinde Türev

Tanım 2.9. Zaman skalasında $\Delta -$ türevi tanımlayabilmek için $\mathbb{T}'$den elde edilen $\Delta -$ türevlenebilirlik bölgesi $\mathbb{T}^k$ bölgesi

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - \max \mathbb{T}, & \max\mathbb{T} < \infty \ ve\ max \text{ sol saçılmış ise} \\ \mathbb{T} \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

(2.3)

ile tanımlanır.

Tanım 2.10. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için t'nin bir $\mathcal{U}$ ($\exists\ \delta > 0$ *için* $\mathcal{U} = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ olacak şekilde) komşuluğu var ve her $s \in \mathcal{U}$ için

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s| \tag{2.4}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f^{\Delta}(t)$ değerine *f fonksiyonunun t-noktasındaki* $\Delta -$ *türevi* denir.

Tanım 2.10'da verilen (2.4) eşitsizliği pratikte çok uygulanabilir değildir. $s \to t$ giderken limit alındığında zaman skalası üzerinde (2.3) ile tanımlı türevlenebilirlik bölgesinden alınan her t noktası için (2.4) eşitsizliğinden aşağıdaki delta türev tanımı elde edilebilir.

Tanım 2.11. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \neq \sigma(t)}} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \tag{2.5}$$

limiti mevcut ise bu limite *f fonksiyonunun t noktasındaki* $\Delta -$ *türevi* denir ve $f^{\Delta}(t)$ ile gösterilir.

Zaman skalası üzerinde $\Delta -$türevi, $\mathbb{R}$ üzerindeki sürekli türev ve $\mathbb{Z}$ üzerindeki ileri fark türevinin genel halidir. Gerçekten

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ durumunda $\sigma(t) = t$ olduğu daha önce verilmişti. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

bulunur.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumunda $\sigma(t) = t + 1$ ‘dir. O halde

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t + 1 - s} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

elde edilir.

Örnek 2.12. Tanım 2.10. uygulanırsa $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tanımlı olan $f(t) = \alpha$ sabit fonksiyonu için $f^{\Delta}(t) = 0$ olur. Gerçekten $\varepsilon > 0$ ve $s \in \mathbb{T}$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0.(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$|f(\sigma(t)) - f(s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$|\alpha - \alpha| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

$$0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır. O halde $f^{\Delta}(t) = 0$’dir. Bu sonuç Tanım 2.10. ‘dan da rahatlıkla gösterilebilir.

Örnek 2.13. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $f(t) = t$ ise $f^{\Delta}(t) = 1$ olur. Gerçekten $\varepsilon > 0$ ve her $s \in \mathbb{T}$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1.(\sigma(t) - s)| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği her $\varepsilon > 0$ için sağlanır.

Örnek 2.14. $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{nh: n \in \mathbb{Z}\}$ zaman skalası üzerinde $f(t) = t^2$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}\,; s > t\} = \{t + nh : n \in \mathbb{N}\} = t + h$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda, $\forall t \in h\mathbb{Z}$ noktası için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{t^2 + 2th + h^2 - t^2}{h} = \frac{2th + h^2}{h} = 2t + h$$

bulunur.

Zaman skalasında türev ile süreklilik arasındaki ilişkiler aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 2.15. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında $\Delta -$türevlenebilir olsun. Bu durumda ifadeler doğrudur:

(i) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktasında sağ saçılmış ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

sağlanır.

(iii) t sağ yoğun olmak üzere f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olarak bulunur.

(iv) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f\big(\sigma(t)\big) = f(t) + \mu(t)\, f^\Delta(t)$$

elde edilir.

$\Delta -$türev ile ilgili bazı kurallar aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.16 $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve $t \in \mathbb{T}^k$ $\Delta -$türevlenebilir olsunlar. Bu durumda aşağıdakiler gerçekleşir.

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha f + \beta g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve

$$(\alpha f + \beta g)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t) + \beta g^\Delta(t)$$

yani $\Delta -$türev doğrusal bir operatördür.

(ii) $f.g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ türevlenebilirdir ve

$$(f.g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma((t))g^{\Delta}(t)$$

$$= f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^{\Delta}(t)$$

ile ifade edilir.

(iii) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

ile verilir.

Tanım 2.17. Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon sağ yoğun noktalarındaki sağdan limiti var (sonlu) ve sol yoğun noktalardaki soldan limiti var (sonlu) ise f fonksiyonuna "*regulated fonksiyon*" denir.

Tanım 2.18. Bir $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $\mathbb{T}$'nin sağ yoğun noktalarında sürekli ve sol yoğun noktalardaki soldan limite sahip ise f fonksiyonuna "*sağ yoğun süreklidir*" denir. $\mathbb{T}$ 'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı rd- sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

$f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $f^{\Delta}(t) \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ifadelerini sağlayan fonksiyonların oluşturdukları küme ise $C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

2.3.Zaman Skalasında Üstel fonksiyon

Tanım 2.19. Eğer her $t \in \mathbb{T}$ için $1 + \mu(t)\rho(t) \neq 0$ şartını sağlanırsa $\rho: T \rightarrow R$ tanımlanan fonksiyona "regresif" denir.

Tanım 2.20. Eğer $p \in \mathbb{R}$ ise üstel fonksiyon

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta_\tau\right) \quad s\,, t \in T$$

ile tanımlanır. Burada $\xi_{\mu(z)}$ silindirik dönüşümü

$$\xi_{\mu(z)} = \begin{cases} \frac{1}{h}\text{Log}(1 + zh)\,, & h > 0 \\ z \quad , & h = 0 \end{cases}$$

ile verilir.

BÖLÜM 3
ZAMAN SKALASI DİZİLERİNİN KAPALI KÜMELER TOPOLOJİLERİLERİNE GÖRE YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde kapalı kümeler üzerindeki topolojileri inceleyeceğiz. Fell topoloji, Hausdorff topoloji, Vietoris topoloji tanımları ve özellikleri ile ele alınacaktır. Kapalı kümeler topolojileri için daha detaylı bilgiler Beer tarafından verilmiştir. (Beer, 1993)

$\mathbb{T}$ zaman skalası $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesi olduğundan $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$'nin elemanıdır. Dolasıyla diferansiyel denklemlerle dinamik denklemlerle yaklaşımlar için gerekli olan yakınsakılıklar kapalı kümeler topolojileri üzerindeki yakınsaklıklar ile incelenebilir.

Bu yaklaşım şu ana fikir altında yürütülecektir: $\mathbb{T}_n$, $\mathbb{T}$ zaman skalasına yakınsayan bir zaman skalası dizisi olsun. Bu durumda bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde verilen problemin çözümü için problemi $\mathbb{T}_n$, zaman skalası üzerinde çözerek bu çözüme orijinal problemin çözümünün yaklaşık çözümü olarak davranacağız. $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde çözümün varlığı bu yaklaşım için ön şarttır. (Teklik gerek şart değildir.) Diğer yandan $\mathbb{T}$ zaman skalasına yakınsayan $\mathbb{T}_n$, zaman skalası dizisini oluşturabilmemiz için yakınsamayı ele aldığımız topolojinin metriklenebilir olması veya sadece kümeler dizisini kontrol edebilmemiz gerekmektedir.

Kapalı kümeler üzerinde birçok topoloji mevcut olmasına rağmen literatürde bu alanda yapılan az sayıda topolojiyle kısıtlanmış durumdadır. Kapalı kümeler topolojiler hakkında detaylı bilgi (Kuratowski 1966 ve Beer 1993) tarafından yazılan kitaplarda bulunabilir.

Biz bu tezde zaman skalaları dizilerinin topolojik yakınsaması yerine dizisel yakınsamasını inceleyeceğiz. Bu amaçla zaman skalası dizilerinde yakınsaklık üzerine literatürde yapılan çalışmalarıdan bahsetmekle başlayacağız.

3.1.Temel Kavramlar ve Hausdorff Topoloji

Tanım 3.1. M'nin boş olmayan, kapalı tüm alt kümeleri $\mathrm{CL(M)}$ ile gösterilsin ve $\mathrm{X,Y,Z} \in \mathrm{CL(M)}$ ve $a, b \in M$ olsun. d, M kümesi üzerinde bir metrik olmak üzere

(i) $\mathrm{B}(a,\mathrm{r}) = \{\mathrm{b} \in \mathrm{M} : \mathrm{d(a,b)} < r\}$ kümesine a merkezli r yarı çaplı açık yuvar,

(ii) $B[a,r] = \{b \in M: d(a,b) \leq r\}$ kümesine a merkezli r yarı çaplı kapalı yuvar ,

(iii) $N_\varepsilon(X) = \{y \in M: d(y,x) < \varepsilon,\ x \in X\}$ kümesine X'in ε-komşuluğu

(iv) $H(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0: X \subset N_\varepsilon(Y)$ ve $Y \subset N_\varepsilon(Y)\}$ şeklinde tanımlanan uzaklığa *"Hausdurff uzaklığı"* denir.

Tanım 3.2. d, M kümesi üzerinde bir metrik ve $X \subset M$ olsun. y noktasının X kümesine uzaklığı

$$\mathrm{dist}(y,X) = \inf\{d(y,x):\ x \in X,\ y \in M\}$$

(3.1)

ile tanımlanır.

Tanım 3.3. (M,d) bir metrik uzay ve $X,Y \subset M$alt kümeleri için

$$e_d(Y,X) = \sup\{\mathrm{dist}(y,X);\ y \in Y\}$$

(3.2)

ile tanımlanan uzaklığa *"excess"* denir. $e_d(\phi, X) = 0$ olarak kabul edilir. Eğer metrik açık olarak verilmiş ise $e_d(Y,X) = \sup(\mathrm{dist}(y,X);\ y \in Y)$ formulasyonu kullanılır. Diğer durumlarda excess

$$e(Y,X) = \inf\{\varepsilon > 0 : Y \subset N_\epsilon(X)\} \tag{3.3}$$

ile tanımlanır.

Özellik 3.4. Tanım 3.3 kullanılarak aşağıdaki özellikler verilebilir.

(i) $e(A,B) \neq e(B,A)$,

(ii) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow e_d(Y_1,X) \leq e_d(Y_2,X)$,

(iii) $Y \subset X \Rightarrow e_d(Y,X) = 0$,

(iv) Y sınırsız ve X sınırlı $\Rightarrow e_d(Y,X) = \infty$.

İspat. (Beer, 1993)

Aşağıdaki örnek ile Özellik 3.4. açıklayalım:

Örnek 3.5. Excess tanımının simetrik olmadığını gösterelim.

$A = [0,5]$ ve $B = [5.6]$ kümeleri için excess tanımını kullanırsak

$$e(A,B) = \sup\{\inf\{d(y,x),\quad x \in [5.6]\};\ y \in [0,5]\} = 5$$

$$e(B,A) = \sup\{\inf\{d(y,x),\quad x \in [0,5]\};\ y \in [5.6]\} = 1$$

sonuçlarını elde ederiz. Buradan

$$e(A,B) \neq e(B,A)$$

olduğu görülür. Yani excess simetrik olmayan bir uzaklıktır.

$Y = [-n, n]$, $X = \mathbb{R}$ kümeleri için $Y \subset X$ olduğundan $e_d(Y,X) = 0$ elde edilir. Ayrıca (3.2) denkleminden

$$e_d([-n,n],R) = \sup(\mathrm{dist}(y,R);\ \ y \in [-n,n])$$

$$= \sup\{(\inf \mathrm{dist}(y,X);\ \ x \in R), y \in [-n,n]\}$$

bulunur. Bu durumda Y kümesinin ve $x \in \mathbb{R}$ noktasında olan uzaklığının infumum değeri 0 olur. Gerçekten $x \in \mathbb{R}$ için $x = y$ seçimi yapılırsa $e_d([-n,n],\mathbb{R}) = 0$ olduğu görülür.

$Y = \mathbb{R}$ ve $X = [-n, n]$ seçelim. (3.2) denkleminden

$$e_d(\mathbb{R},[-n,n]) = \sup(\mathrm{dist}(x,[-n,n]);\ \ x \in \mathbb{R})$$

$$= \sup\{(\inf d(x,y);\ y \in [-n,n]\ ), x \in \mathbb{R}\ \}$$

bulunur. Bu durumda x ℝ de herhangi bir nokta olduğu için istenildiği gibi eçilebilir. Bu da $y \in [-n,n]$ ve X arasındaki uzaklığı sonsuz yapabilir. $e_d(\mathbb{R},[-n,n]) = \infty$ olur.

3.2.Duke, Hall Oberste-Vorth Yaklaşımı

Zaman skalası dizilerinin yakınsaklığı için bir başka yaklaşım ise Duke-Hall ve Oberste-Vorth tarafından önerilmiştir. (Duke, Hall, Oberste-Vorth (2004), Tanım 22)

Tanım 3.6 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Eğer

- $\mathbb{T}_{\boldsymbol{n}} \subset \mathbb{T}$; $\quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}_2 \subset \cdots$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n = \mathbb{T}$

şartları sağlanıyor ise $\{\mathbb{T}_n\}$ dizisi $\mathbb{T}$'ye yakınsar denir ve $\mathbb{T}_n \nearrow \mathbb{T}$ile gösterilir.

Yazarlar çalışmalarında yukarıda tanımladıkları yakınsaklığın zaman skalası dizilerinin yakınsaklığı için en doğru seçim olmadığını kendileri de belirtmişlerdir. Tanım 3.6 Kuratowski limit tanımına benzemesine rağmen doğru bir tanım değildir.

Örneğin $T_n = [-n, n]$ seçersek $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n \neq \mathbb{R}$ elde edilir. Dolayısıyla üçüncü şart sağlanmamaktadır. Ama $\mathbb{T}_n = [-n, n]$ dizisi reel sayılar kümesine yakınsaktır.

Bir diğer örnek olarak $\mathbb{T}_n = [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ zaman skalası dizisini ele alırsak

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0,1)$$

bulunur yani açık kümedir. Dolayısıyla bir zaman skalası değildir. Dolayısıyla bu türde bir yakınsaklık Kuratowski yakınsaklığının doğru olmayan bir formudur.

3.3.Vietoris Topolojisi Yaklaşımı

Zaman skalaları dizilerinin yakınsaklığı için bir diğer yakınsaklık Vietoris topolojisine göre yakınsaklıktır..

Tanım 3.7. X bir topolojik uzay olsun. $U_1, \ldots, U_k \subseteq X$ için;

$$< U_1, \ldots, U_k >= \left\{F: F \in Cl(X), F \subseteq \cup_i^k U_i, F \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, F \cap U_k \neq \emptyset\right\}$$

ile tanımlansın. Burada iki özel durum şu şekilde tanımlanır.

$$U \subseteq X \text{ için} < U >= \{F: F \in Cl(X), F \subseteq U\}$$

ve

$$< U, X >= \{F: F \in Cl(X), F \cap U \neq \emptyset\}.$$

O halde;

$$< U_1, \ldots, U_k >=< \cup_i^k, U_i > \cap_{i=1}^k < U_i, X >$$

eşitliği elde edilir. $Cl(X)$ kümesi üzerinde $< U >$ ve $< U, X >$ formundaki tüm kümelerin açık olduğu en küçük topolojiye "*Vietoris topoloji*" denir.

Esty, Hilger (Esty N., Hilger S.,2009) ve Oberste-Vorth (Oberste-Vorth R., 2008 ve Oberste-Vorth R., 2009) Vietoris topolojiye göre yakınsaklığı incelemişlerdir. Ancak aşağıdaki uyarılarda da belirtildiği gibi Fell topolojinin zaman skalaları dizileri için daha uygun bir seçim olmasından dolayı çalışmalarını Fell topoloji üzerine yoğunlaştırmışlardır. Aşağıda verilmiş olan uyarı sebebiyle çalışmalar Fell topolojisine kaydırılmıştır.

Uyarı 3.8. (Beer 1993) Vietoris topoloji X kümesinin kapalı alt kümeleri ailesi üzerinde $\forall x \in X$ için $A \to dist(x, A)$ fonksiyonunun sürekli olduğu en zayıf topolojidir.

Uyarı 3.9. Kompakt uzaylar üzerinde (sınırlı zaman skalaları için) Vietoris topoloji ve Fell topoloji denktir.

Vietoris topolojinin kompakt uzaylar için Kuratowski topolojisine de denk olduğu tezin ilerleyen kısımlarında da belirtilmiştir.

3.4. Fell Topolojisi Yaklaşımı

Son olarak; Fell topoloji Esty ve Hilger (Esty N., Hilger S., (2009)) tarafından ele alınmıştır. X topolojik uzayı olsın. $Cl(X)$ üzerinde Fell topolojisi aşağıda tanımlanmış iki küme ailesi tarafından üretilir ve literatürde hit&miss topoloji olarak da adlandırılır.

$$A^{-} = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \quad \text{(Hit topoloji)}$$

(3.4)

ve

$$A^{+} = \{B \in 2^X : B \subset A\} \quad \text{(Miss topoloji)} \tag{3.5}$$

Tanım 3.10. $W \subset X$ açık alt küme olmak üzere, W^{-} açık alt baz tarafından üretilen topolojiye 2^X üzerindeki *alt Fell topoloji* denir.

Tanım 3.11. $C \subset X$'in kompakt tümleyeni olmak üzere, C^{+} açık alt bazı tarafından üretilen topolojiye 2^X üzerindeki *üst Fell topoloji* denir.

Tanım 3.12. X bir topolojik uzay ve A bir sıralı küme olsun. A'dan X'e tanımlı her fonksiyona *ağ* (*net)* denir.

Kaba haliyle net bir dizinin genel halidir. Netler iki farklı limite yakınsayabilir. Bu sebeple yerel kompakt uzaylar dışında Fell topolojisi seçimi doğru bir seçim olmayabilir. Ancak tüm zaman skalaları yerel kompakt uzay olduğundan zaman skalası üzerinde Fell topoloji ile çalışmak doğru bir seçim olabilir.

Ancak yukarıda verilen tanımlar, kümelerin yakınsaklığını gösterirken uygulanabilirliği çok zor olan tanımlardır. Ancak Beer (Beer (1993)) ve Esty, Hilger

(Esty N., Hilger S., (2009),) tarafından aşağıda verilen önerme ile Fell topolojideki yakınsaklığı kümelerin excess'i cinsinden hesaplanabilir.

Önerme 3.13. $\mathbb{R}$ 'nin kapalı alt kümelerinin dizisi A_n Fell topolojiye göre A kümesine yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\forall K \subset \mathbb{R}$ için;

$$\lim_{n\to\infty} e(K \cap A, A_n) = 0 \text{ ve } \lim_{n\to\infty} e(K \cap A_n, A) = 0$$

olmasıdır.

$A = \mathbb{R}$ durumunda Önerme 3.13'ün 2.şart her zaman sağlanır.

Duke, Hall ve Oberste 2004; Esty, Hilger 2009; Kulik, Tindel 2008; Oberste-Vorth 2008; Oberste-Vorth 2009; Adamec 2011 tarafından ele alınan problemler için Fell topolojinin en uygun seçim olduğu önerilmiştir. Fakat biz Kuratowski yakınsaklığın daha doğru seçim olduğunu, bu prosedürü basitleştirerek ispatlayacağız.

Yakınsak zaman skalalarının bazı özellikleri ve bunlarla ilgili örnekler literatürde birçok yazar tarafından ele alınmıştır (Esty, Hilger 2009; Oberste-Vorth 2008; Oberste-Vorth 2009 Ademec 2011)

3.5.Kuratowski Toplolоji Yaklaşımı

Kuratowski-Painleve yaklaşımında yakınsaklık çok-değerli analizdeki, çok değerli fonksiyonların alt ve üst yarı-süreklilik özelliklerine bağlıdır. Bir diferansiyel problem için çözüm kümeleri çok değerli fonksiyon oluşturduğundan, bu türde bir yaklaşım çok doğal bir yaklaşımdır.

Kuratowski yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.14. X bir küme, (A_n) ise X'in alt kümelerinin bir dizisi olsun.

$$Ls\, A_n = lim\, sup\, A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n \tag{3.6}$$

$$Li\, A_n = lim\, inf\, A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n \tag{3.7}$$

ile tanımlanan kümelere sırasıyla $(\boldsymbol{A_n})$ dizisinin üst limiti ve alt limiti denir.

Örnek 3.15. $\boldsymbol{A_n} = \{1,2,3, \dots, n\}$ kümesinin Kuratowski yakınsaklığa göre alt ve üst limitlerini inceleyelim. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden sırasıyla

$$lim\, sup\, A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$= \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} \{1,2,3, \dots, n\}$$

$$=\cap_{m=1}^{\infty}\{\{1,2,\dots,m\}\cup\{1,2,\dots,m+1\}\cup\{1,2,\dots,m+2\}\cup\dots\}$$

$$=\cap_{m=1}^{\infty}\mathbb{N}$$

$$=\mathbb{N}$$

$$lim\ inf\ A_n=\cup_{m=1}^{\infty}\cap_{n=m}^{n}A_n=\cup_{m=1}^{\infty}\cap_{n=m}^{\infty}\{1,2,\dots,n\}$$

$$=\cup_{m=1}^{\infty}[\{1,2,\dots,m\}\cap\ \{1,2,\dots,m+1\}\cap\{1,2,\dots,m+2\}\cap\dots]$$

$$=\cup_{m=1}^{\infty}\{1,2,\dots,m\}=\mathbb{N}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$lim\ sup\ A_n=lim\ inf\ A_n=\mathbb{N}$$

elde edilir.

Örnek 3.16. $\boldsymbol{A_n}=\{n,n+1,\dots\}$ kümesinin Kuratowski yakınsaklığa göre alt ve üst limitlerini inceleyelim. (3.6) ve (3.7) denklemlerinden sırasıyla

$$lim\ sup\ A_n=\cap_{m=1}^{\infty}\cup_{n=m}^{\infty}A_n\ =\cap_{m=1}^{\infty}\cup_{n=m}^{\infty}\{n,n+1,\dots\}$$

$$=\cap_{m=1}^{\infty}[\{m,m+1,\dots\}\cup\{m+1,m+2,\dots\}\cup\{m+2,m+3,\dots\}\cup\dots\}$$

$$=\cap_{m=1}^{\infty}\{m,m+1,\dots\}=\{1,2,3,\dots\}\cap\{2,3,4,\dots\}\cap\dots=\emptyset$$

$$lim\ inf\ A_n=\cup_{m=1}^{\infty}\cap_{n=m}^{\infty}A_n$$

$$=\cup_{m=1}^{\infty}[\{m,m+1,\dots\}\cap\{m+1,m+2,\dots\}\cap\{m+2,m+3,\dots\}\cap\dots$$

$$=\cup_{m=1}^{\infty}\emptyset=\emptyset$$

elde edilir. O halde

$$lim\ sup\ A_n=lim\ inf\ A_n=\emptyset$$

elde edilir.

Tanım 3.17. Eğer $LiA_n=LsA_n=A$ olacak şekilde bir A kümesi varsa A_n dizisi A kümesine Kuratowski anlamında yakınsaktır denir ve $Lim\ A_n=A$ şeklinde yazılır.

Tanım 3,14'de X uzayı keyfi bir topolojik uzaydır. Ek olarak X bir normlu uzay ise; LsA_n ve LiA_n aşağıdaki gbi tanımlanabilirler.

Tanım 3.18. X bir normlu uzay ve M_n X uzayında bir dizi olsun. (M_n) dizisinin üst limiti ve alt limiti sırasıyla

$$LsM_n=lim\ sup\ M_n=inf_{m\geq 1}sup_{n\geq m}M_n=inf_m\ sup\{M_m,M_{m+1},\dots\}\qquad(3.8)$$

ve

$$LiM_n = lim\ sup\ M_n = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m} M_n = sup_m\ inf\{M_m, M_{m+1}, \dots\} \qquad (3.9)$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.19. $M_n = \{(-1)^n: \ n \in \mathbb{N}\}$ kümesini ele alalım. LsM_nve LiM_n değerlerini (3.8) ve (3.9) formülleri yardımıyla hesaplayalım.

$$LsM_n = lim\ sup(-1)^n = inf_{m\geq 1} sup_{n\geq m}(-1)^n$$
$$= inf_m sup\{(-1)^m, (-1)^{m+1}, \dots\} = inf_m sup\{-1,1\} = inf\ 1 = 1$$

Benzer şekilde

$$LiM_n = lim\ inf\ (-1)^n = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m}(-1)^n$$
$$= sup_m inf\{(-1)^m, (-1)^{m+1}, \dots\} = sup_m inf\{-1,1\} = sup(-1) = -1$$

bulunur. Bu durumda $M_n = \{(-1)^n: \ n \in \mathbb{N}\}$ Kuratowski anlamında yakınsak değildir.

Örnek 3.20. $M_n = \{\frac{n}{n+1}: \ n \in \mathbb{N}\}$ olsun. LsM_nve LiM_n değerlerini (3.8) ve (3.9) formülleri yardımıyla hesaplayalım.

$$LsM_n = lim\ sup \frac{n}{n+1} = inf_{m\geq 1} sup_{n\geq m} \frac{n}{n+1} = inf_m sup\{\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m+2}, \dots\}$$
$$= inf_m 1 = 1$$

bulunur. Benzer şekilde

$$LsM_n = lim\ inf \frac{n}{n+1} = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m} \frac{n}{n+1} = sup_m inf\{\frac{m}{m+1}, \frac{m+1}{m+2}, \dots\}$$
$$= sup_m \frac{m}{m+1} = \sup\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} = 1$$

elde edilir. Bu durumda $M_n = \{\frac{n}{n+1}: \ n \in \mathbb{N}\}$ kümesi Kuratowski anlamında $\{1\}$ kümesine yakınsar.

Örnek 3.21. $M_n = \{n: n \in \mathbb{N}\}$ olsun.

$$\mathrm{LsM_n} = \lim \sup \quad \mathrm{n} = \inf_{\mathrm{m}\geq 1} \sup_{\mathrm{n}\geq \mathrm{m}} \mathrm{n} = \inf_{\mathrm{m}} \sup\{\mathrm{m}, \mathrm{m}+1, \mathrm{m}+2, \dots\}$$
$$= inf_m \infty = \infty$$

ve benzer şekilde

$$LiM_n = lim\ inf\ n = sup_{m\geq 1} inf_{n\geq m} n = sup_m inf\{m, m+1, m+2, \ldots\}$$
$$= sup_m(m) = \infty$$

elde edilir.

Tanım 3.14 keyfi topolojik uzaylar için iken Tanım 3.18 normlu uzaylar için verilmiştir. Literatürde çoğu makalede metrik uzaylar için Tanım 3.18 Kuratowski yakınsaklık olarak ele alınmıştır.

Genel olarak Kuratowski yakınsaklık topolojik bir yakınsaklık değildir. (Mrowka, 1970),

Tanım 3.22. Bir X topolojik uzayı eğer sayılabilirliğin 2.aksiyomunu sağlıyorsa yani X'nin X'e ait herhangi bir alt kümesi $U, \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ açık kümeler ailesinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, ikinci sayılabilirdir.

Teorem 3.23. Eğer X bir T_2 uzay ise Kuratowski yakınsaklık topolojik yakınsaklıktır (Mrowka, 1970).

Tanım 3.24. X bir topolojik uzayı olsun. Eğer X' in her noktasının kompakt komşuluğu varsa X'e yerel kompakt denir.

Tanım 3.25. X üzerindeki topoloji τ bir metrik tarafından üretiliyorsa X 'e metriklenebilir topolojik uzay denir.

Reel sayılar kümesi Hausdorff uzay ve yerel kompakt olduğundan bu türde metriklenebilir topolojik uzaydır (Beer, 1985).

Teorem 3.26. (Beer, 1993) X uzayının kapalı alt kümeleri ailesi üzerindeki Fell topolojisinin metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart X uzayının yerel kompakt ve ikinci sayılabilir olması gerekir.

Dolayısıyla zaman skalaları reel sayılar kümesinin kapalı alt kümeleri olduğundan Teorem 3.26 gereği netler yerine zaman skalaları dizileri ele alınabilir. Bu yaklaşım, literatürde Duke, Hall, Oberste-Vorth, 2004 ve Esty, Hilger, 2009 tarafından kullanılan bir yaklaşımdır.

Teorem 3.27. $Cl(\mathbb{R})$ uzayında $\mathbb{T}_n$ dizisinin Fell topolojisine göre S'ye yakınsaması için gerek ve yeter şart her $K \subset \mathbb{R}$ kompakt kümesi için;

$$\lim_{n\to\infty} e(K \cap S, \mathbb{T}_n) = 0 \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty} e(K \cap \mathbb{T}_n, S) = 0 \tag{3.11}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Aynı zamanda yukarıdaki teorem Esty ve Hilger'in (Esty, Hilger, 2009) neden netler yerine dizileri kullandığını açıklar.

Teorem 3.27'un diziler yerine netleri kullanan hali Beer (Beer, 1993) tarafından verilmiştir. (Esty, Hilger, 2009) Teorem 3.27 ile Beer'in sonuçlarını daha kullanılabilir hale genellemişlerdir.

Sonuç 3.28. (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset Cl(X)$ olsun ve (A_λ) $Cl(X)$ de bir net olsun. Bu durumda

$$A = \lim_{\tau_F} A_\lambda$$

olması için gerek ve şart her X'in her kompakt K alt kümesi için;

$$\lim_{\lambda} e_d(A \cap K, A_\lambda) = 0 \tag{3.12}$$

ve

$$\lim_{\lambda} e_d(A_\lambda \cap K, A) = 0 \tag{3.13}$$

olmasıdır.

Kuratowski yakınsaklık için dizilerin bazı özelliklerini verelim. Bu özellikler netler içinde tanımlanabilir ancak bizim problemimizde netler için olan sonuçlar gerekli değildir.

Zaman skalaları dizilerinde yaklaşım özellikleri için hem Fell topoloji hem de Kuratowski topoloji uygundur. Fakat Kuratowski topoloji daha kolay ve kullanışlı olduğundan bu tezde Kuratowski topolojiyi kullandık.

τ_F ile X üzerindeki Fell topoloji ve τ_K ile de X üzerindeki Kuratowski topolojiyi gösterelim.

Yardımcı Teorem 3.28. (Nogura, Shakhmatov D., 1996) Herhangi bir X topolojik uzayı için $\tau_F \subset \tau_K$ 'dir.

Kapalı kümeler üzerinde için Fell ve Kuratowski topolojilerinin denkliği Beer (Beer, 1993) tarafından verilmiştir.

Önerme 3.29. X yerel kompakt topolojik uzay olsun. X'in kapalı alt kümelerin dizisinin Fell topolojiye göre yakınsak olması için gerek ve yeter şart Kuratowski topolojiye göre yakınsak olmasıdır. Bu durumda limitler çakışıktır.

Aşağıda Beer (Beer, 1993) tarafından verilmiş olan önermenin özel hali verilmiştir (Esty, Hilger, 2009). Bu önerme ayrıca Hilger'in doktora tezinde bahsedilen sonuçlarındaki kompakt kümelerin önemini ortaya koyar.

Önerme 3.30. (A_n), X yerel kompakt metrik uzayının kapalı kümeler dizisi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

$[K_1]$: $A \subset LiA_n$ ve X'in (her kompakt K alt kümesi) için $Ls(K \cap A_n) \subset A$'dir.

$[K_2]$: A_n Fell topolojiye göre A kümesine yakınsar.

Uyarı 3.31. Kompakt kümeler için Fell topoloji ile Hausdorff topoloji denktir. (Beer, 1993)

Uyarı 3.31 sonlu zaman skalaları için neden Hausdorff topolojinin yeterli olduğunu net bir şekilde açıklar.

Beer tarafından verilen bu sonuçtan sonra Adamec (Adamec, 2011) , Garay, Hilger ve Kloeden (Garay, Hilger ve Kloeden, 2003) ve Kloeden (Kloeden,2006) çalışmalarında elde ettikleri sonuçlarda Hausdorff topolojiyi kullanarak zaman skalaları dizileri için yakınsaklık ispatları yapmışlardır.

Kuratowski yakınsaklığa dizisel denk topolojilerle ilgili sonuçlar için (Beer, Lopez, 2010a-2010b) ve kapalı kümeler aileleri üzerindeki topolojiler ile ilgili genel bilgiler için (Beer, 1993) kaynakları incelenebilir.

Sabit bir zaman skalasına Kuratowski anlamında yakınsak bir zaman skalaları dizisi olup olmadığı problemi ise Beer tarafından verilmiş aşağıdaki sonuç ile cevaplanabilir.

Önerme 3.32. (Beer, 1993) X ikinci sayılabilir Hausdorff uzayı ve A_n'de $Cl(X)$ içerisinde bir dizi olsun. Bu durumda A_n'ın Kuratowski anlamında yakınsak bir alt dizisi vardır.

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ yukarıdaki önermenin koşullarını sağlar. Yani ikinci sayılabilir Hausdorf uzayıdır. Dolayısıyla zaman skalaları da kapalı olduğundan $\mathbb{T}_n \subseteq Cl(\mathbb{R})$ dizisinin Kuratowski anlamında yakınsak bir alt dizisi vardır. Özel durumlar için ele alınan problemi $\mathbb{T}_n$ üzerinde kolaylıkla çözebileceğimiz $\mathbb{T}_n$ zaman skalaları dizisi oluşturmalıyız. Bu tarzda sonuçlar orijinal problemin yakınsaklık çözümleri olacaktır.

Özel Durum:

Bu bölümde zaman skalalarının farklı türden yakınsaklıklarını karşılaştıralım. Karşılaştırmalarımızı $\mathbb{T}_n = h_n.Z_+$ (Euler zaman skalası üzerinde yapalım.) $h_n \to 1$ durumunda $\mathbb{T}_n \to Z_+$ (Fell topolojide) sonucu Esty ve Hilger (Esty, Hilger, 2009) tarafından ispatlanmıştır.

Daha ilginç olan durum ise $h_n \to 0$ durumudur. Eğer

$$\mathbb{T}_n = h_n Z \to \mathbb{R}$$

yakınsaması gerçekleşirse herhangi bir diferansiyel problem fark denklemleri yerine çok daha genel olan dinamik denklemler ile diskretize edilebilir demektir.

Sezgisel olarak $h_n \to 0$ durumunda bu dizinin $\mathbb{R}_+$'ya gitmesi beklenir (Duke, Hall, Oberste-Vorth, 2010). Farklı topolojiler için bu sonucu gerçekleyelim ve ele alınan topolojiler için yakınsaklıkları karşılaştıralım. Yapacağımız bu karşılaştırma neden Kuratowski topolojinin ele alındığını ve neden zaman skalaları dizileri için en uygun topoloji olduğunu açıklayacaktır.

Kolaylık için

$$h_n = \frac{1}{10^n}$$

seçelim, Böylelikle

$$\mathbb{T}_n = \frac{1}{10^n}.Z_+$$

olacaktır. $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ zaman skalasına yakınsaklık hangi topolojilere göre söz konusu olup olmadığını detaylıca inceleyelim.

- **Hausdorf Topoloji**

$$h(\mathbb{T}_n, \mathbb{T}) = +\infty$$

olduğundan $\mathbb{T}_n$ dizisi Hausdorff topolojiye göre $\mathbb{T} = [0, +\infty)$ kümesine yakınsamaz.

- **Duke, Hall, Oberste-Vorth Topolojisi**

Duke, Hall, Oberste-Vorth tarafından verilen tanım (Tanım 3.6) kurgusunda hata vardır.

$$h_n = \frac{1}{10^n}$$

$\mathbb{T}_n$ dizisi artan bir dizidir. Fakat

$$h_n = \frac{1}{\pi^n}$$

seçimi durumunda $\mathbb{T}_n$ artan olmayacaktır. Ayrıca tanımın 3. koşulu da sağlanmamaktadır. Yani;

$$\cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n = \cup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} Z_+ \neq \mathbb{R}_+.$$

Bu tanım teorik olarak da doğru değildir. Kapalı kümelerin sonsuz birleşimi kapalı olmak zorunda değildir. O halde bu tanım ile kapalı kümeler dizisi olan zaman skalaları dizisinin sonsuz birleşiminin yine bir zaman skalası oluğunu söylememiz mümkün değildir. Dolayısıyla (3) koşulunun sağlanmasının garantisi yoktur.

- **Fell topoloji**

Önerme 3.13 daha kullanılılabilir olduğundan tanım yerine Önerme 3.13'ü kullanalım. Bu aynı zamanda Kuratowski ve Fell topolojilerinin denklik şartlarını ortaya koymamızı sağlayacaktır.

$K \subset \mathbb{R}_+$ olacak şekilde keyfi bir kompakt olsun. Bu durumda

$$K \cap \mathbb{T} = K \cap \mathbb{R}_+ = K$$

olacaktır. Excess tanımından;

$$e(K \cap \mathbb{T}, \mathbb{T}_n) = \frac{1}{10^n}$$

elde edilir.

Bu durumda Önerme 3.30'ün ilk koşul sağlanmış olur. Şimdi ise ikinci koşulun sağlandığını gösterelim. Keyfi A, B kümeleri için;

"$e(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset \bar{B}$'dır. " gerçeğinden hareketle $K \subset \mathbb{T}_n \subset \mathbb{T}$ olduğundan herhangi bir n tam sayısı için $e(K \cap \mathbb{T}_n, \mathbb{T}) = 0$'dır.

O halde Önerme 3.13 gereği

$$\mathbb{T}_n = \frac{1}{10^n}.Z_+ \to \mathbb{R}_+$$

elde edilir.

Bizim ana sonucumuzun Esty ve Hilger'in (Esty, Hilger, 2009) ana sonucuna olan avantajı ortaya koymak adına verilen dizinin Fell topolojiye göre yakınsaklığını direkt Esty ve Hilger'in tanımı yardımıyla gösterelim.

$V = \mathbb{R}_+ \in V^+$ alalım. O halde herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{T}_n \subset \mathbb{R}^+ \subset V$'dir. Bu ise tüm T_n zaman skalalarının V^+'ya ait olduğuna, yani

$$\mathbb{T}_n = \frac{1}{10^n}.Z_+$$

zaman skalaları dizisinin üst Fell topolojiye göre $\mathbb{R}_+$'ya yakınsadığını gösterir.

Şimdi ise alt Fell topolojiye göre yakınsaklığı gösterelim. k sonlu olmak üzere $U_1, U_2, \dots, U_k$ açık kümeleri için

$$\mathbb{R}_+ \in U_1^- \cap U_2^- \cap \dots \cap U_k^-.$$

$i = 1,2, \dots, k$ için $u_i \in U_i$ olacak şekilde keyfi u_i noktaları seçelim. U_i'ler açık olduğundan bu noktalar u_i merkezli, δ_i yarıçaplı açık yuvarlar U_i'lerin alt kümesi olacak şekilde $\delta_i > 0$ sayıları seçilebilir.

$$\delta = min_{i=1,2,\dots,k} \delta_i$$

ile tanımlayalım .

$\frac{1}{10^n}$ sıfıra yakınsak olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{10^{n^*}} < \delta$$

olacak şekilde $n^* \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. O halde $\forall n > n^*$ ve keyfi $i = 1,2, \dots, k$ için

$$u_i + \frac{1}{10^n} \leq u_i + \delta \in U_i$$

elde edilir. Son olarak bu tarzdaki tüm n indisleri için;

$$\mathbb{T}_n = \frac{1}{10^n} Z_+ \in U_1^- \cap U_2^- \cap \dots \cap U_k^-$$

bulunur. Bu ise $\mathbb{T}_n$ dizisinin $\mathbb{R}_+$'ya alt Fell topolojiye göre yakınsak olması demektir. O halde ispat biter.

- **Kuratowski Topoloji**

Şimdi ise Kuratowski topolojiye göre yakınsaklığı iki farklı yol ile gösterelim.

[K1] Keyfi $x \in \mathbb{R}_+$ seçelim. int(x), x pozitif reel sayısının tamsayı kısmını göstersnb. O halde

$$int(x) \leq x \leq int(x) + 1$$

eşitsizliği sağlanır yani herhangi bir n tamsayısı için;

$$\frac{int(10^n x)}{10^n} \leq x \leq \frac{int(10^n x) + 1}{10^n}$$

eşitsizliği elde edilir.

$int(10^n x)$, $int(10^n x) + 1 \in IN$ olduğundan;

$$\frac{int(10^n x)}{10^n} \;,\; \frac{int(10^n x)+1}{10^n} \in \mathbb{T}_n$$

olacaktır. Yukarıda verilen iki dizi de x'e yakınsar. (x'in ondalık yaklaşımlarıdır.) O halde $x \in Lim\, \mathbb{T}_n$ ve sonuç olarak $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+ = Lim\, \mathbb{T}_n$'dir.

[K2] Kuratowski yakınsaklığı tanım yardımıyla gösterelim.

$$\mathbb{T}_n = \frac{1}{10^n}.Z^+$$

için $\mathbb{T}_n \subset \mathbb{T}_{n+1} \subset IR_+$'dır. Artan dizilerin;

$$Lim\, \mathbb{T}_n = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n}$$

özelliğini kullanalım. Burada limit Kuratowski anlamında limittir. Burada kapanış metrik topolojisine göre alındığından aynı zamanda dizisel kapanıştır. Bu durumda göstermemiz gereken son kümenin $\mathbb{R}_+$'ya eşit olmasıdır. Gerçekten keyfi $x \in \mathbb{R}_+$ aldığımızda, yukarıda oluşturulan dizi x'e yakınsar. O halde $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{T}_n$'nin dizisel kapanışı $\mathbb{R}_+$ eşittir.

3.6.Yakınsaklık Örnekleri

Fell topoloji'nin zaman skalasında bize verdiği bütün yakınsamalarını sağladığını kontrol etmek istiyoruz. Bunun için alışılmış metrik ile $\mathrm{M} = \mathbb{R}$ ve Fell Topolji ile üretilmiş $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ alınır. $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ için de kapalı olduğundan $\mathrm{CL}(\mathbb{R})$ 'nin doğal elemanıdır. Bu durumda kapalı kümeler topolojileri ile çalışmak doğaldır.

Aşağıdaki örneklerde zaman skalası dizilerinin Fell topolojiye göre yakınsamalarını inceleyelim.

Örnek 3.33.

$\mathbb{T}_n = \left\{z + \frac{1}{n}; \quad z \in \mathbb{Z}\right\} \in CL(\mathbb{R})$ kümesi Fell topolojisine göre $\mathbb{Z}$ kümesine yakınsar ancak Vietoris topolojisine göre yakınsak değildir.

$\mathbb{T}_n$ dizisi $\mathbb{T}_1 = \{z + 1; \quad z \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{T}_2 = \left\{z + \frac{1}{2}; \quad z \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\cdots, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots\right\}$

şeklindedir. $\mathbb{T}_n \xrightarrow{Fell} \mathbb{Z}$ olduğunu göstermek için upper ve lower Fell topolojilere göre inceleyelim.

$\mathbb{Z} \in V^+$ olsun. V^c kompakt olduğundan sınırlıdır. Bu durumda $V^c \subset (-r, r)$ olacak şekilde $r \in R^+$ seçilebilir.

$z \in \mathbb{Z} \cap (-r, r)$ için

$$\delta_z = d(z, V^c)$$

sayısını tanımlayalım V^c kompakt ve $z \in V$ olduğundan $\delta_z > 0$ olduğu açıktır.

$$\delta = \min\{\delta_z\,;\ z \in \mathbb{Z} \cap (-r, r)\,\}$$

olsun $\frac{1}{N} < \delta$ olacak şekilde yeterince büyük $N \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda

$|z| \geq r$ için $z + \frac{1}{n} \in V$

$|z| < r\ için\ z + \frac{1}{n} < z + \delta < z + \delta_z$

elde edilir. Bu durumda $z + \frac{1}{n} \in V$ bulunur.

(i) ve (ii) 'den $\mathbb{T} \subset V$ bulunur . O halde üst Fell topolojiye göre $\mathbb{T}_n \xrightarrow{Fell} \mathbb{Z}$ dir.

$\mathbb{Z} \in U_1^- \cap U_2^- \cap U_3^- \cdots \cap U_n^-$ olsun. $i = 1,2,\cdots,k$ için $z_I \in \mathbb{Z} \cap U_I$ olsun U_i kümesi açık olduğundan $B(z_i, \delta_i) \subset U_i$ olacak şekilde $\delta_i > 0$ vardır.

$\delta = \min\{\delta_i;\ i = 1,2,\cdots,k\ \}$

seçilirse ve $\frac{1}{N} < \delta$ olacak şekilde $n \geq N$ için T_n kümesini ele alırsak her $i = 1,2,\cdots,k$ için $z_i + \frac{1}{n} \in T_n$ ve $z_i + \frac{1}{n} \in U_i$ olur. Bu durumda $T_n \in U_1^- \cap U_2^- \cap U_3^- \cdots \cap U_k^-$ elde edilir. Yani $\mathbb{T}_n$ alt Fell topolojiye göre $\mathbb{Z}$'ye yakınsar.

Sonuç olarak $\mathbb{T}_n \xrightarrow{Fell} \mathbb{Z}$ dir.

Örnek 3.34.

$$f(t) = tz = \{tz\,; z \in \mathbb{Z}\ ve\ t \in [0,1]\}$$

tanımlayalım $t \to 1$ durumunda

$$f(t) \to \mathbb{Z}$$

yakınsaması vardır.

Benzer şekilde sırasıyla alt ve üst Fell topolojiye göre yakınsaklıkları göstereceğiz. $\mathbb{Z} \in V^+$ olsun $t \in (1-\delta, 1]$ için $f(t) \in V^+$ olacak şekilde yeterince küçük $\delta > 0$ sayısının var olduğunu göstermek istiyoruz. V^c kompakt olduğundan $V^c \subset (-r, r)$ olacak şekilde yeterince büyük $r \in \mathbb{R}^+$ vardır.

$|z| \geq 2r$ olacak şekilde $z \in \mathbb{Z}$ seçelim Bu şarta uyan her bir z için

$$B(z, \delta_z) \subset V$$

şartını sağlayacak şekilde $\delta_z$seçelim ve

$$\Delta = min\{\delta_z; z \in \mathbb{Z}\}$$

şeklinde tanımlayalım. Son olarak

$$\delta = min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\Delta}{2r}\right\}$$

olarak alalım.

$\delta \leq \frac{1}{2}$, $t \geq \frac{1}{2}$ olduğundan ve $z \in \mathbb{Z}$ elemanları $|z| \geq 2r$ olacak şekilde seçildiğinden $|tz| \geq r$ elde edilir. Buradan $tz \notin V^c$ ise $tz \in V'$ dir. Dolayısıyla $f(t) \in V^+$ bulunur. $|z| < 2r$ olacak şekilde $z \in \mathbb{Z}$ elemanlarını ele alalım.

$$d(tz, z) = \lceil tz - z \rceil < \lceil z \rceil \lceil t-1 \rceil = \lceil z \rceil (t-1) < \lceil z \rceil \delta < 2r\frac{\Delta}{2r} < \Delta \leq \delta_z$$

elde edilir. O halde $T_z \in B(z, \delta_z) \subset V$. Bu durumda $f(t) \in V^+$ yani üst fell topolojiye göre $\mathbb{Z}$'ye yakınsar.

Alt Fell topolojiye göre yakınsakılığı ispatlamak için $z \in U_1^- \cap U_2^- \cap U_3^- \cdots \cap U_k^-$ olsun. $i = 1,2,\cdots,k$ için $z_i \in \mathbb{Z} \cap U_i$ olacak şekilde z_i seçelim ve

$$B(z_i, \delta_i) \subset U_i$$

olacak şekilde δ_i tanımlayalım. $i = 1,2,\cdots,k$ için $\lceil z_i \rceil < r$ olacak şeklide yeterince büyük $r \in \mathbb{R}^+$ seçelim.

$$\Delta = \min\{\delta_i;\ i = 1,2,\cdots,k\}$$

ve

$$\delta = \frac{\Delta}{r}$$

olarak tanımlayalım. $t \in (1-\delta, 1]$ için f(t)'yi ele alalım. $i = 1,2,\cdots,k$ için $z_i \in f(t)$,

$$d(tz_i, z_i) = |z_i d(t,1)| < |z_i||t-1| < r\delta < r\frac{\Delta}{r} < \Delta < \delta_i$$

olduğundan $tz_i \in B(z_i, \delta_i) \subset U_i$ elde edilir. O halde $tz_i \in f(t) \cap U_i$ yani $f(t) \in U_i^-$ bulunur. Bu ise $f(t)$'nin alt Fell topolojiye göre $\mathbb{Z}$ yakınsadığını gösterir.

Teorem 3.35. (M, d) metrik uzay ve X_0, $X_n \in CL(M)$ olsun. X_n'nin X_0'a Fell topolojiye göre yakınsaması için gerek ve yeter koşul M'nin tüm kompakt alt kümeleri olan K için

$$\lim_{n\to\infty} e_d(K \cap X_0, X_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_d(K \cap X_n, X_0) = 0$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat. (Esty, Hilger 2009)

Başlangıçta ilk durum yeterli gibi gözükmesine rağmen, Excess tanımında simetrik özelliği olmadığı için her ikisi de gereklidir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 3.36.

$CL(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı $X_n = \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \{1\}$ dizisini ele alalım. Bu dizi $(-\infty, 0]$ kümesine Fell topolojiye göre yakınsar gibi gözükse de yakınsak değildir. Bunun için Teorem 3.35'in birinci durumu gösterelim. X_n dizisinin elemanları

$X_1 = (-\infty, -1] \cup \{1\}$, $X_2 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$, $X_3 = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \{1\}$, ...

olmak üzere $[-k, 0] \subset \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \cup \{1\}$ olduğundan dolayı Özellik 3.4.'in üçüncü özelliğinden yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} e_d(K \cap X_0, X_n) = \lim_{n\to\infty} e_d(K \cap (-\infty, 0], X_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} e_d\left([-k, 0], \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \cup \{n\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup\left(d(y, \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] \cup \{n\}, \qquad y \in [-k, 0]\right)$$

$$= 0$$

elde edilir.

Şimdi ise Teorem 3.35'in ikinci durumunu inceleyelim.

$$\lim_{n\to\infty} e_d(K \cap X_n, X_0) = \lim_{n\to\infty} e_d\left(K \cap \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right) \cup \{n\}, (-\infty, 0]\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} e_d([-k, 0] \cup \{n\}, (-\infty, 0])$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup(\inf(d(x, y), y \in (-\infty, 0]\,), x \in [-k, 0] \cup \{n\})$$

$$\neq 0$$

Bu durumda Teorem 3.35'in ikinci koşulu sağlanmaz. Yani $X_n \to X_0$ yakınsakılığı yoktur.

Sonuç 3.37. (M, d) metrik uzayı olmak üzere X_n, $CL(M)$ de bir dizi olsun. X_n'nin M kümesinde Fell topolojiye göre yakınsaması için gerek ve yeter koşul M'nin alt kümesi olan K kümesi için

$$\lim_{n\to\infty} e_d(K, x_0) = 0$$

sağlanmasıdır.

BÖLÜM 4
DİNAMİK DENKLEMLERİN SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Zaman skalasında dinamik denklemler son 30 yıl içersin de birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaların sonucu olarak zaman skalası kavramının ortaya attığı iki sonuçtan bahsedebiliriz.

(i) Zaman skalasında dinamik denklemler, diferansiyel denklemlerin aşikar olmayan genellemesidir.

(ii) Dinamik denklemlerin çözümü zaman skalasına sürekli bağımlıdır.

1. Sonuç doğru olmasına yani herhangi bir dinamik denklemin çözümünün uygun diferansiyel denklemlerin çözümlerine gömülebiliyor olmasında rağmen literatürde en çok 1. Sonuca yönelik çalışmalar vardı. Bunun yanında 2. Sonuç doğru olmasına rağmen literatürde bu konu ile ilgili çok az çalışma yapılmıştır. (Garay, Hilger, Kloeden 2003; Duke Hall, ve Oberste-Vorth 2004; Kloeden 2006; Oberste-Vorth 2008; Esty, Hilger, 2009; Cichon, Yantir 2015)

Bu bölümde amacımız 2. Sonucun doğruluğunu ispatlamaktır. Bu amaçla Euler poligonları kullanacağız. Bu nümerik analiz için yeni bir kapı açacaktır. Bu sayede diferansiyel denklem çözümlerine zaman skalasında dinamik denklemler ile yaklaşım mümkün olacaktır.

Yukarıda bahsedilmiş iki problem de (Hilger, Garay 2001) tarafından ele alınmıştır. $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde

$$y^{\Delta} = f(t, y) \quad t \in \mathbb{T}, y \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

dinamik denklem sistemi çözümlerini sürekli bağımlılığı (4.1) de ele almıştır. (4.1) denklem yerine sistem

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\Delta s \tag{4.2}$$

integral denklemini ele alarak “fonksiyonlar arasındaki uzaklık” analitik konseptini ”eğriler arasındaki uzaklık” geometrik konsept ile değiştirmişlerdir. Bu fikir diferansiyel (veya dinamik) denklemler teorisinde farklı bir fikirdir. Çünkü herhangi bir norm için eğrilerin kapalılığı fonksiyonların kapalılığını getirmez.

4.1. Hipotezler ve Temel Bilgiler

$\mathcal{F}$, $\mathbb{R}'$nin boştan farklı kapalı kümeler ailesi olsun. Zaman skalası tanımı gereği $\mathcal{F}$ tüm zaman skalası ailesidir.

$$\mathbb{T}_{a,b} = \{A \epsilon \mathcal{F}, \langle a,b \rangle \subset A \subset [a,b]_{\mathbb{R}}\} \tag{4.3}$$

ile tanımlansın. Yani $[a,b]$ aralığının a ve b noktalarını içeren tüm kapalı alt kümeleri $\mathbb{T}_{a,b}$ ile gösterilir. $-\infty < t_0 < T < \infty$ olmak üzere $\mathbb{T}_{t_0,T}$ zaman skalası üzerinde n-boyutlu

$$y^{\Delta} = f(t,y) \;\; t \in \mathbb{T}, y \in \mathbb{R}^n \tag{4.4}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{4.5}$$

dinamik denklem sistemini ele alalım.

$$D = \{(t,y) \in \mathbb{R}x\mathbb{R}^n, \qquad t_0 \le t \le T, \|y - y_0\| \le M\lfloor t - t_0 \rfloor\}$$

silindiri üzerinde 2 problemini çalışacağız. f fonksiyonu aşağıdaki hipotezi sağlasın.

(H1) f fonksiyonunun D kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğunu ve

$$\|f(t,y') - f(t,y'')\| \le L\|y' - y''\| \tag{4.6}$$

Lipschitz koşulunu sağladığını söyleyebiliriz. O halde

$$\sup\{\|f(t',y') - f(t'',y'')\| = |t' - t''| < \delta \;\; \|y' - y''\| \le M\delta, (t',y'), (t'',y'') \in D\}$$

şeklinde tanımlanan süreklilik modülü $\varepsilon(\delta)$ artan bir fonksiyondur öyle ki $\delta \to 0^+ \Longrightarrow \varepsilon(\delta) \to 0$. Bu durumda $\delta > 0$ terimini $\varepsilon(\delta) \le M$ olacak şekilde seçebiliriz.

Tanım 4.1. $A \in \mathbb{T}_{a,b}$ bir zaman skalası olsun.

$$\mathrm{P} = \{\mathrm{a} = \mathrm{t}_0 < \mathrm{t}_1 < \cdots < \mathrm{t}_\mathrm{n} = \mathrm{b}\} \tag{4.7}$$

ile tanımlı sonlu ve $P \subset [a,b]_R$ kümesine $[a,b]_R$ *parçalanması* denir. (Bohner, Peterson 2003)

Her $h > 0$ sayısı için $[a,b]_R$ nin

$$t_i - t_{i-1} \le h \tag{4.8}$$

veya

$$t_i - t_{i-1} > h \text{ ve } \sigma(t_{i-1}) = t_i \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir parçalanması vardır. (Bohner, Peterson 2003). Bu parçalanmaya "h- normal parçalanış " denir.

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{T}_{a,b}$ ve $h > 0$ olsun. Sırasıyla $[a,b]_R$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri için $P_1, P_2, \ldots, P_n$ parçalanmaları aşağıdaki algoritmaya göre tanımlayalım.

(i) $Q = \left\{a + ih; i = 0,1,2, \ldots \left\|\frac{b-a}{n}\right\|\right\} \cup \{b\}$, $[a,b]_R$ bir parçalanması olmak üzere $P = \emptyset \cup Q$ olsun.

(ii) $k = 1,2, \ldots, n$ için A_k zaman skalasını

$$A_k = [a,b]_R \setminus \bigcup_{j=1}^{w(k)} \left(\alpha_j^k, \beta_j^k\right)_R \ , w(k) \in \{1,2, \ldots, \infty\}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\left(\alpha_j^k, \beta_j^k\right)_R$ $j = 1,2, \ldots, w(k)$ aralıklarından ikili ayrık ve tek türlü belirlenilebilen aralıklardır. Eğer $w(k) = 0$ ise

$$\bigcup_{j=1}^{w(k)} \left(\alpha_j^k, \beta_j^k\right)_R = \emptyset$$

bulur. Böylece $A_k = [a,b]_R$ olur. Eğer $t \in Q$ noktası $\left(\alpha_j^k, \beta_j^k\right)_R$ aralığına dahil ise bu durumda α_j^k ve β_j^k uç noktaları P kümesine eklenir.

(iii) $k = 1,2, \ldots,, n$ için A_k zaman skalası P_k parçalanması

$$P_k = P \cap A_k$$

$\mathbb{T}_{t_0,T}$ zaman skalası üzerinde çalıştığımızdan ve $\mathbb{T}_{t_0,T}$, $\mathbb{R}'$nin kompakt alt kümesi olduğundan Hausdorf metriği $\vec{d}$ çalışabiliriz.

$$\vec{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sup\{\inf\{|a - b|; \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}, \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$$

$$\vec{d}(B, A) = \sup\{\inf\{|a - b|; \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $A, B \in \mathbb{T}_{t_0,T}$ için

$$\vec{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \max\{\vec{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B}), \vec{d}(\mathrm{B}, \mathrm{A})\}$$

olur.

Eğer $A = [t_0, T]_{\mathbb{R}}$ alırsak, aşağıda verilen ana sonucun ilk kısmı adi diferansiyel denklemler teorisinden çok iyi bilinen bir sonuçtur. A'yı aşikar olmayan zaman skalası kabul ederek ispatı iki bölüm halinde yapacağız. İlk bölümde varlık ve teklik sonucunu ispatlayacağız. Bu ispat aşağı yukarı literatürdeki ispatların benzeridir. İkinci bölüm ise çözümlerin sürekli bağımlılığıdır.

Yardımcı Teorem 4.2. Hipotez H1 ve $t_0 = t^0 < t^3 < T$ olsun. $A = (t^0, t^3)$ ve B zaman skalsı olmak üzere

$A \subset B \subset [t^0, t^3]_{\mathbb{R}}$ ve $\tilde{d}(A,B) < \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\epsilon(\delta)}{2})$

$P_b := (t_i^B)_{i=0}$ ve $[t^0, t^3]_{\mathbb{R}}$, B üzerinde h-normal parçalanması olsun. $y_B^h(t)$ başlangıç probleminin Euler poligonu olsun.

$$y^{\Delta} = f(t,y), y(t_0) = y_0, \;\; t \in B$$

$$t_2 = min\{t \in P_b:\; t^3 - \tilde{d}(A,B) \le t \le t^3\}$$

$t \in [t^0, t^3]_{\mathbb{R}}$ için

$$\left\|y_B^h(t) - \left(y^0 + (t - t^0) f(t^0, y^0)\right)\right\|$$
$$\le \begin{cases} \epsilon(\delta)(t^3 - t^0), & t^3 - t^0 \le 2\tilde{d}(A,B) \\ \epsilon(\delta)\left[(t^3 - t^0) + \tilde{d}(A,B)\right], & t^3 - t^0 < \delta \\ \epsilon(\delta)\left[(t^3 - t^0) + 2M\tilde{d}(A,B)\right]. & t^3 - t^0 \ge \delta \end{cases}$$

İspat. (Adamec, 2011)

4.2.Varlık-Teklik ve Sürekli Bağımlılık

Teorem 4.3. (H1) hipotezi sağlansın. Bu durumda her hangi $A \in T_{t_0,T}$ zaman skalası için

$$\begin{cases} y^{\Delta} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad t \in A, y \in \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

başlangıç değer probleminin A zaman skalası üzerinde tek bir y_A çözümü vardır.

Ek olarak ϵ>0 için öyle δ >0 vardır ki $d(A,B) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $A, B \in T_{t_0,T}$ zaman skalası için

$$sup_{t \in A \cap B} \|y_A(t) - y_B(t)\| < \epsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. "y_A çözümünün varlık ve tekliği "

$P_A^h = \{t_j^h\}$, $[t_0, T]_{\mathbb{R}}$ aralığının A zaman skalasına göre h-normal parçalanması ve y_A^h da Euler poligonu olsun.

$$\|y_A^h - y_0\| \le M\lceil t - t_0 \rceil$$

olduğundan y_A^h tüm $[t_0, T]_{\mathbb{R}}$ aralığı üzerinde tanımlıdır.

İddia 1: (4.9) başlangıç değer probleminin en çok bir çözümü vardır.

Bu iddia (4.6) Lipschitz koşulundan direkt olarak sağlanır.

İddia 2: $h_1 \to 0$ şartını sağlayan uygun bir dizi için $\{y_A^{h_i}\}$ Euler poligonları dizisi $[t_0, T]_{\mathbb{R}}$üzerinde sürekli y_A fonksiyonuna düzgün yakınsar.

ϵ>0 keyfi bir sabit olsun. $(t', y'), (t'', y'') \in D$ noktaları için

$$\lceil t - t' \rceil < \delta \text{ ve } \|y' - y''\| < M\delta \Longrightarrow \|f(t', y') - f(t'', y'')\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını alalım.

$0 < h_1 < \delta$ seçelim ve

$$P_A^{h_1} = \{t_0 = t_0^{h_1} < t_1^{h_1} < \cdots < t_N^{h_1} = T\}$$

parçalanmasını ele alalım.

(i) $0 < h_2 < h_1$ ve $\tilde{y}_A^1$ da y_0 değerinden başlayan $[t_0^{h_1}, t_1^{h_1}]_{\mathbb{R}}$ aralığında $P_A^{h_2}$ ve $[t_1^{h_1}, T]_{\mathbb{R}}$ aralığında $P_A^{h_1}$parçalanmasına bağlı olan $[t_0, T]_R$aralığında tanımlı Euler Poligonu olsun. Bu durumda

$$\|y_A^{h_1}(t) - \tilde{y}_A^1(1)\| \le \varepsilon(1 - t_0^{h_1}), \quad t_0^{h_1} < t < t_1^{h_1} \tag{4.11}$$

olur. Gerçekten

$$t_1^{h_1} - t_0^{h_1} \le h_1 < \delta$$

şartı için, Yardımcı Teorem 4.1'den ve

$$t_1^{h_1} - t_0^{h_1} > h_1$$

için h-normal parçalanışları inşaasından $[t_0^{h_1}, t_1^{h_1}]_{\mathbb{R}}$ aralığı A zaman skalasının komplementidir. Bu durumda $[t_0^{h_1}, t_1^{h_1}]_{\mathbb{R}}$ aralığı üzerinde $y_A^{h_1} = \tilde{y}_A^1$ elde edilir.

(4.1) Lipschitz koşulundan $t_1^{h_1} \le t_i^{h_1} \le t \le t_{i+1}^{h_1} \le T$ için

$$\left\|y_A^{h_1}(t)-\tilde{y}_A^1\,(1)\right\|$$

$$=\left\|y_A^{h_1}\left(t_i^{h_1}\right)+\left(t-t_i^{h_1}\right)f\left(t_i^{h_1},y_A^{h_1}\left(t_i^{h_1}\right)\right)-\tilde{y}_A^1\left(t_i^{h_1}\right)-\left(t-t_i^{h_1}\right)f\left(t_i^{h_1},\tilde{y}_A^1\left(t_i^{h_1}\right)\right)\right\|$$

$$\leq\left\|y_A^{h_1}\left(t_i^{h_1}\right)-\tilde{y}_A^1\left(t_i^{h_1}\right)\right\|+\left(t-t_i^{h_1}\right)\left\|f\left(t_i^{h_1},y_A^{h_1}\left(t_i^{h_1}\right)\right)-f\left(t_i^{h_1},\tilde{y}_A^1\left(t_i^{h_1}\right)\right)\right\|$$

$$\leq(1+L)\left(t-t_i^{h_1}\right)\left\|y_A^{h_1}\left(t_i^{h_1}\right)-\tilde{y}_A^1\left(t_i^{h_1}\right)\right\|$$

$$\leq(1+L)\left(t-t_i^{h_1}\right)\ldots\left(1+L\left(t_2-t_1^{h_1}\right)\right)\left\|y_A^{h_1}\left(t_i^{h_1}\right)-\tilde{y}_A^1\left(t_i^{h_1}\right)\right\|$$

$$\leq e^{L\left(t-t_i^{h_1}\right)}e^{L\left(t_i^{h_1}-t_{i-1}^{h_1}\right)}\ldots e^{L\left(t_2^{h_1}-t_1^{h_1}\right)}\varepsilon\left(t_1^{h_1}-t_0^{h_1}\right)$$

$$=\varepsilon e^{L\left(t-t_i^{h_1}\right)}\left(t_1^{h_1}-t_0^{h_1}\right)$$

elde edilir.

(ii) $\tilde{y}_A^2$, y_0 değerinden başlayan $[t_0^{h_1},t_1^{h_1}]_{\mathbb{R}}$ aralığında $P_A^{h_2}$ ve $[t_2^{h_1},T]_{\mathbb{R}}$ aralığında $P_A^{h_1}$ parçalanmasına bağlı olan $[t_0,T]_{\mathbb{R}}$ aralığında tanımlı Euler Poligonu olsun. Bir önceki adıma benzer şekilde

$$\|\tilde{y}_A^1(t)-\tilde{y}_A^2\,(t)\|\leq\varepsilon e^{L\left(t-t_2^{h_1}\right)}\left(t_2^{h_1}-t_1^{h_1}\right),\ t_2^{h_1}<t<T$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise benzer şekilde çözümlerin birbirine yakınsamasını ifade eder.

(iii) Son olarak, benzer işlemler N kez tekrarlandığında

$$\tilde{y}_A^N\ \equiv\tilde{y}_A^{h_2},\qquad t\in[t_0,T]_R$$

ve

$$t_i^{h_1}\leq t\leq t_{i+1}^{h_1}\ ,i=1,2,\ldots,N-1$$

için ise

$$\left\|y_A^{h_1}(t)-\ y_A^{h_2}(t)\right\|$$

$$\leq\varepsilon\left[e^{L\left(t-t_1^{h_1}\right)}\left(t_1^{h_1}-t_0\right)+e^{L\left(t-t_2^{h_1}\right)}\left(t_2^{h_1}-t_1^{h_1}\right)+\cdots+e^{L\left(t-t_i^{h_1}\right)}\left(t_i^{h_1}-t_{i-1}^{h_1}\right)\right]\leq\varepsilon\int_{t_0}^{t}e^{L(t-\xi)}d\xi=\frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L(t-t_0)}-1\right)$$

bulunur. Buradan bu parçalanma A zaman skalası için $h_2$normal parçalanma olduğu söylenebilir. O halde

$$\{y_A^{h_i}\}_{i=1}^{\infty}$$

Euler poligonları dizisi Cauchy dizisi olur. O halde $y_A$sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu ise **İddia 2**'nin ispatıdır.

Teklik özelliği ise **İddia 2**'nin A zaman skalasının herhangi h_i -normal parçalanmasının $h_i \to 0$ olacak şekildeki

$$\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$$

dizisi için doğru olduğunu gösterir.

İddia 3 İddia 2 de geçen $y_A$limiti her $t \in A$ noktası için Δ-türevlenebilirdir ve (4.10) başlangıç değer problemini sağlar.

Bu $\Delta -$ türevlenebilirlik tanımı (Tanım 2.10) gereği $s \in (t-\delta, t+\delta)$ için

$$\left\| y_A\big((t+\mu_A(t)\big) - y_A(s) - f(t, y_A(t))(t+\mu_A(t)-s) \right\| \leq \varepsilon |t+\mu_A(t)-s| \quad (4.12)$$

denkleminin sağlanması demektir. t noktasında yoğun, ayrık, sağ yoğun, sol saçılmış ve sol yoğun sağ saçılmış olması durumlarına göre aşağıdaki incelemeleri yapalım.

Her dört durumda da

$$\left\| y_A^h(t+\mu_A(t)) - y_A^h(s) - f(t, y_A^h(t))(t+\mu_A(t)-s) \right\| \leq \varepsilon |t+\mu_A(t)-s| \quad (4.13)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

(i) $t \in A$ yoğun bir nokta ve $0 < h < \delta$ olsun. Eğer $s \in (t-\delta, t]_A$ ise $[s,t]$ aralığının A'ya göre

$$s = t_N < t_{N-1} < \cdots < t_1 < t_0 = t$$

h-normal parçalanmasını ele alalım. Bu durumda buna bağlı Euler poligonu y_A^h

$$\begin{aligned} &\left\| y_A^h(t+\mu_A(t)) - y_A^h(s) - f(t, y_A^h(t))(t+\mu_A(t)-s) \right\| \\ &\qquad \leq \left\| y_A^h(s) - [y_A^h(t) + (s-t) f(t, y_A^h(t)) \right\| \leq \varepsilon |s-t| \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Yani (4.12) eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $s \in (t, t+\epsilon)_A$ için de (4.12) eşitsizliği sağlanır.

(ii) $t \in A$ ayrık bir nokta ve h > 0 yeterince küçük bir değer olsun. Bu durumda $(t-\epsilon, t+\epsilon)_A$ aralığı tek noktadan oluşur yani $(t-\epsilon, t+\epsilon)_A = \{t\}$ ve böylece

$s = t$ olur. O halde

$$\left\|y_A^h(t+\mu_A(t)) - y_A^h(s) - f(t, y_A^h(t))(t+\mu_A(t)-s)\right\|$$
$$= \left\|[y_A^h(t) + \mu_A(t))f(t, y_A^h(t))] - y_A^h(t) - f(t, y_A^h(t))\mu_A(t)s)\right\| = 0$$

elde edilir yani (4.12) eşitsizliği sağlanır.

(iii) t'nin sağ yoğun sol yayılmış ve sol yoğum sağ yayılmış olduğu durumlarda da (4.12) eşitsizliğinin sağlandığını **(i)** ve **(ii)** benzer şekilde gösterilebilir.

Özetle, h→0 için (4.12) eşitsizliğinde limite geçersek (4.11) eşitsizliği sağlanmış olur. O halde y_A fonksiyonu $\Delta -$ türevlenebilirdir ve (4.9) başlangıç değer probleminin çözümüdür.

Çözümün sürekli bağımlığı

Şimdi ise çözümün, temel zaman skalası üzerinde sürekli bağımlı olduğunu gösterelim.

$h > 0$ olsun. $P_A^h, P_B^h, P_{A\cup B}^h$ parçalanmaları ise A, B ve $A \cup B$ zaman skalaları üzerinde h-normal parçalanmaları ve $y_A^h, y_B^h, y_{A\cup B}^h$ ve $[t_0, T]_{\mathbb{R}}$ zaman skalası üzerindeki bu parçalanmalara göre tanımlanan Euler poligonları göstersinler. Bu durumda

$$sup_{t\in A\cap B}\|y_A(t) - y_B(t)\| \leq$$
$$sup_{t\in A\cap B}\left\|y_A(t) - y_A^h(t) + y_A^h(t) - y_{A\cup B}^h(t) + y_{A\cup B}^h(t) - y_B^h(t) + y_B^h(t) - y_B(t)\right\|$$
$$\leq sup_{t\in A\cap B}\left\|y_A(t) - y_A^h(t)\right\| + sup_{t\in A\cap B}\left\|y_A^h(t) - y_{A\cup B}^h(t)\right\|$$
$$+ sup_{t\in A\cap B}\left\|y_{A\cup B}^h(t) - y_B^h(t)\right\| + sup_{t\in A\cap B}\left\|y_B^h(t) - y_B(t)\right\|$$
$$\leq sup_{t\in A}\left\|y_A(t) - y_A^h(t)\right\| + sup_{t\in A\cup B}\left\|y_A^h(t) - y_{A\cup B}^h(t)\right\|$$
$$+ sup_{t\in A\cup B}\left\|y_{A\cup B}^h(t) - y_B^h(t)\right\| + sup_{t\in B}\left\|y_B^h(t) - y_B(t)\right\|$$

elde edilir. $h \to 0$ iken

$$sup_{t\in A}\left\|y_A(t) - y_A^h(t)\right\| \to 0$$

ve

$$sup_{t\in B}\left\|y_B^h(t) - y_B(t)\right\| \to 0$$

olduğundan $\tilde{d}(A, A \cup B)$ yeterince küçük ve $h \to 0$ için

$$sup_{t \in A \cup B} \left\| y_A^h(t) - y_{A \cup B}^h(t) \right\| \to 0$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Bu ispatı $0 < h < d$ ve

$\tilde{d}(A, B) < \frac{\min(\delta, \varepsilon(\delta))}{2}$ kabulleri ile üç adımda yapacağız.

(1) $\alpha_i = \max\{t \in P_A^h : P_{A \cup B}^h \cap [t_0, t]_{\mathbb{R}} = P_A^h \cap [t_0, t]_{\mathbb{R}}\}$ ve

$$\beta_i = \begin{cases} \sigma_A(\alpha_i), & \alpha_i < T \\ \alpha_i, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olsun.

$$A_1 = \big((A \cup B) \cap [t_0, \beta_i]_{\mathbb{R}}\big) \cup (A \cap [t_0, \beta_i]_{\mathbb{R}})$$

zaman skalasını ve bu zaman skalası üzerinde

$$P_{A_j}^h = \left(P_{A \cup B}^h \cap [t_0, \beta_i]_{\mathbb{R}}\right) \cup \left(P_A^h \cap [\beta_i, t]_{\mathbb{R}}\right)$$

h-normal parçalanmasına bağlı $y_{A_j}^h$ Euler poligonunu ele alalım. α_i tanımından $t_0 \leq t \leq \alpha_1$ için

$$y_A^h(t) = y_{A_1}^h(t)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.2'den de $\alpha_1 \leq t \leq \beta_1$ için

$$\left\| y_A^h(t) - y_{A_1}^h(t) \right\| \leq \frac{3}{2} \varepsilon(\delta)(\beta_1 - \alpha_1) + E_1 \qquad (4.13)$$

elde edilir. Burada

$$0 \leq E_1 \leq 2m\tilde{d}(A, A_1)$$

dir. (4.6) Lipschitz şartından $\beta_1 \leq t \leq T$ için

$$\left\| y_A^h(t) - y_{A_1}^h(t) \right\| \leq \frac{3}{2} \varepsilon(\delta) e^{l(t-\beta_1)} \left\| y_A^h(\beta_1) - y_{A_1}^h(\beta_1) \right\|$$

bulunur. Bu ise (4.13) eşitsiliği ile ele alındığında $\beta_1 \leq t \leq T$ için

$$\left\| y_A^h(t) - y_{A_1}^h(t) \right\| \leq \frac{3}{2} \varepsilon(\delta) e^{l(t-\beta_1)}(\beta_1 - \alpha_1) + e^{l(t-\beta_1)} E_1$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(2) α_i, β_i noktaları yukarıdaki gibi tanımlansın. $A_0 = A, A_1, \ldots, A_j$ zaman skalası ve bunların h-normal parçalanmalarını ve bu parçalanmalara gore $y_{A_j}^h$ Euler poligonunu ele alalım.

$$\alpha_{i+1} = \max\{t \in P_A^h : P_{A\cup B}^h \cap [t_0, t]_{\mathbb{R}} = P_A^h \cap [t_0, t]_{\mathbb{R}}\}$$

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \sigma_A(\alpha_i), & \alpha_i < T \\ \alpha_i, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

noktalarını tanımlayalım.

$$A_{i+1} = \big((A \cup B) \cap [t_0, \beta_i]_{\mathbb{R}}\big) \cup (A \cap [\beta_i, T]_{\mathbb{R}})$$

ile tanımlanan zaman skalasını ve bu zaman skalası için $P_{A_{j+1}}^h$ h-normal parçalanmasını ve buna bağlı $y_{A_{j+1}}^h$ Euler poligonunu ele alalım. Bir önceki adımda yapılan işlemler tekrarlandığında $\beta_{i+1} \le t \le T$ için

$$\left\| y_{A_i}^h(t) - y_{A_{i+1}}^h(t) \right\| \le \frac{3}{2}\varepsilon(\delta) e^{l(t-\beta_{i+1})}(\beta_{i+1} - \alpha_{i+1}) + e^{l(t-\beta_{i+1})} E_{i+1} \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$0 \le E_{i+1} \le 2m\tilde{d}(A_i, A_{i+1}) \,.$$

dir.

(3) Benzer adımlar N defa tekrarlandığında

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subseteq A_N = A \cup B$$

olacak şekilde N tane zaman skalasından oluşan bir dizi elde edilir. Bunlar üzerindeki Euler poligonları $y_{A_j}^h$ (4.14) eşitsizliğini sağlar.

$t \in [t_0, T]_{\mathbb{R}}$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda C_1 ve C_2, h'dan bağımsız sabitler olmak üzere

$$\left\|y_A^h - y_{A\cup B}^h\right\| \le \sum_{i=0}^{N-1} \left\|y_{A_i}^h(t) - y_{A_{i+1}}^h(t)\right\|$$

$$\le \frac{3}{2}\varepsilon(\delta)\left[e^{l(t-\beta_1)}(\beta_1-\alpha_1)+\cdots+e^{l(t-\beta_{N-1})}(\beta_{N-1}-\alpha_{N-1})\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{N(h)} e^{l(t-\beta_i)}\,E_1 \le \frac{3}{2}\varepsilon(\delta)\int_{t_0}^{T} e^{l(t-s)}ds + \sum_{i=1}^{N(h)} e^{l(t-\beta_i)}\,E_1$$

$$\le \frac{3}{2}\varepsilon(\delta)\frac{1}{L}\left(e^{l(t-t_0)}-1\right)+\sum_{i=1}^{N(h)} e^{l(t-\beta_i)}\,E_1$$

$$\le C_1\varepsilon(\delta)+C_2\tilde{d}(A, A\cup B)$$

elde edilir. O halde

$$sup_{t_0\le t<T}\left\|y_{A\cup B}^h(t)-y_B^h(t)\right\| \to 0$$

limiti de yukardaki 3 adım takip edilerek bulunabilir. O halde $h \to 0$ iken

$$sup_{t\in A\cap\cap B}\|y_A(t)-y_B(t)\| \to 0$$

bulunur. Bu ise çözümlerin sürekli bağımlılığının ispatıdır.

BÖLÜM 5

ÖRNEKLER

Örnek 5.1. Zaman skalası üzerinde

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) & = 2\sqrt{x} \\ x(0) & = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

ile tanımlanan başlangıç değer probleminin çözümlerini inceleyelim.

Durum 1. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{x'(t)}{2\sqrt{x}} = 1$$

ve dolayısıyla $\sqrt{x(t)} = t - c$ elde. edilir. Bu durumda $x(t) = (t-c)^2$ bulunur. Başlangıç koşulundan $c = 0$ bulunur. O halde problemin çözümü

$$x(t) = t^2$$

olarak elde edilir.

Durum 2. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}, h > 0$ olsun.

$$x^{\Delta}(t) = \frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)}$$

ve $\sigma(t) = t + h$ olduğundan

$$2\sqrt{x(t)} = \frac{x(t+h) - x(t)}{t + h - t}$$

bulunur. Şimdi sırasıyla noktaları yerleştirerek iterasyon yöntemi ile sonuca ulaşmaya çalışalım.

$t = 0$ için

$$2\sqrt{x(0)} = \frac{x(h) - x(0)}{h}$$

bulunur. Başlangıç koşulu da ele alındığında $x(h) = 0$ bulunur.

$t = h$ için benzer şekilde $x(2h) = 0$ bulunur. Bu durumda diğer değerler de hesaplandığunda $x(3h) = x(4h) = \cdots = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde $\mathbb{T} = K_q$ üzerinde de problem sonuç $x(t)$ =0 çözümünü üretir.

Yani (5.1) başlangıç değer probleminin $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{T} = K_q$ zaman skalalarında sadece aşikar çözümü vardır. Bu sebeple zaman skalası üzerinde dinamik denklemler Örnek 6.2'de olduğu şekliyle de yazılabilir.

Örnek 5.2. Şimdi farklı zaman skalaları üzerinde

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) & = 2\sqrt{x(\sigma(t))} \\ x(0) & = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Durum 2. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}, h > 0$ olsun. $\sigma(t) = t + h$ olduğundan

$$2\sqrt{x(t+h)} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

bulunur.

$t = 0$ alınırsa

$$x(h) = 4h^2$$

elde edilir. $t = h$ durumunda ise

$$x(2h) = (1 + \sqrt{5})^2 h^2$$

bulunur. $t = 2h$ ise

$$x(3h) = \left(1 + \sqrt{1 + (1 + \sqrt{5})^2}\right)^2 h^2$$

elde edilir. Görüldüğü gibi değerler t_0'dan bağımsız h yeterince küçük seçildiğinde çözüm 0 yakınsar.

$$x(h) = 4h^2$$

$$x(2h) = (1 + \sqrt{5})^2 h^2$$

$$x(3h) = \left(1 + \sqrt{1 + (1 + \sqrt{5})^2}\right)^2 h^2$$

$$\vdots$$

Genellediğimizde ise (6,2) probleminin çözümü iteratif olarak

$$x_{k+1} = h + \sqrt{h^2 + x_k} \tag{5.3}$$

formunda elde edeceğiz.

Teorem 5.3.

$$\begin{cases} x'(t) &= 2\sqrt{x} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

y(t) herhangi bir çözüm olmak üzere $(T_n)_n$ zaman skalası dizisi olmak üzere

$$(T_n)_n = (h_n Z)_n$$

$$x^{\Delta}(t) \;= 2\sqrt{x(\sigma(t))}$$

olacak şekilde zaman skalasında bir x(t) çözümü vardır ve $\epsilon > 0, t \in T_n$

$$|x(t) - y(t)| < \epsilon$$

sağlanır.

Örnek 5.4.

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) &= 2\sqrt{x(\sigma(t))} \\ x(0) &= 0 \end{cases}$$

tanımlanan başlangıç değer problemini inceleyelim.

$T_n = \frac{1}{h}Z$ olmak üzere $T_1 = Z$ $\sigma(t) = t + 1$ olmak üzere $t = 0$ için

$$x^{\Delta}(t) = \frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\sigma(t) - t}$$

olduğundan $x^{\Delta}(t) = x(t) - x(0) = x(t)$ elde edilir. Diğer yandan $x^{\Delta}(0) = 2\sqrt{x(1)}$ olduğundan $x(1) = 0$ aşikar çözüm üreteceğinden $x(1) = 4$

$t = 1$ için

$$x^{\Delta}(1) = \frac{x(2) - x(1)}{1} = 2\sqrt{x(2)}$$

elde edilir. Buradanda

$$2\sqrt{x(2)} - x(2) + 4 = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise

$$x(2) = (1+\sqrt{5})^2$$

demektir.

Benzer $t = 2$ için

$$x(3) = \left(1 + \sqrt{1 + \left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)^2$$

elde edilir.

Şimdi ise $T_2 = \frac{1}{2}Z$ zaman skalası üzerinde aynı problemi ele alalım

$t = 1/2$ için

$$\mathrm{x}^{\Delta}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{x}(0)}{\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$x^{\Delta}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{x}(0) = 2\sqrt{x\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ve dolayısıyla

$$\mathrm{x}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

elde edilir. $t = 1$ için benzer şekilde

$$x(1) = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

ve $t = 3/2$ için

$$x\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)^2$$

bulunur.

$T_2 = \frac{1}{3}Z$ zaman skalsı üzerinde problemin çözümüne bakalım.

$t = 1/3$ için

$$\mathrm{x}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$t = 2/3$ için

$$x\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

ve $t = 1$için

$$x(1) = \frac{1}{9}\left(1+\sqrt{1+\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)^2$$

elde edilir. Genel olarak $T_n = \frac{1}{n}Z$ olmak üzere

$t = 1/n$ için

$$\mathrm{x}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{4}{n^2}$$

$t = 2/n$ için

$$\mathrm{x}\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

ve $t = \frac{3}{n}$ için

$$\mathrm{x}\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1+\sqrt{1+\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right)^2$$

bulunur.

KAYNAKÇA

Adamec L. (2011), *A note continuous dependence of solutions of dynamic equations on time scales,* Journal of Difference Equations and Applications, 17 647-656.

Ahlbrandt C. and Morian C. , (2001), *Partial differential equations on time scales*, J. Conput. Appl. Math. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R.P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

Ahlbrandt C., Bohner M. and Ridenhour J., (2000), *Hamitonian systems on time scales,* J. Math. Anal. Appl, 250: 561-578,

Akın E. (2000).*Boundary value problems for a differential equation on a measure chain,* Panamer. Math. J, 10 (3):17:30,

Akın E., Erbe L, Kaymakçalan B. and Peterson A., (2001). *Oscillation results for a dynmic equation on a time scale,* J. Differ. Equations Appl, To appear.

Agarwal R. and Bohner M., (1999), *Basic calculus on time scales and some of its applications,* Results Math, 35 (1-2) 3-22.

Agarwal R., Bohner M., O'Regan D. and Peterson A., (2001), *Dynamic equations on time scales: A survey*, J. Comput. Appl. Math.. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R.P Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

Agarwal R., Bohner M and Peterson A., (2001), *Inequalities on time scales: A survey,* Mathematical Inequalities and Application, 4 535-557.

Agarwal R.P. and O'Regan D., (2001), *Nonlinear boundary value problems on time scales,* Nonlinear Anal, 44 527-535.

Agarwal R.P, Bohner M. and O'Regan D., (2001), *Time scale systems on infinite intervals,* Nonlinear Anal,. To appear.

Anderson D., (2001), *Eingen value intervals for a two-point boundary value problem on a measure chain*, J. Comput. Appl. Math,. Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal, M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

Anderson D., (2000), *Positivity of Green's function for an n-point right focal boundary value problem on measure chains,* Math. Comput. Modelling, 31 (6-7):29-50,

Atıcı F. M. and Guesinov G. Sh., (2001), *On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales*, J. Comput. Appl. Math, 141 75-99.

Atıcı F.M. Biles D C., Lebedinsky A. (2006), *An application of time scales to economics*, Math. Cocnput. Modelling 43 718-726.

Atıcı F.M.,. Guseinov G. Sh, and Kaymakçalan B., (2000), *On Lyapunov inequality in stability theory for Hill's equation on time scales*, J. Inequal. Appl., 5 603-620.

Aulbach A. and Hilger S., (1990). Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, *In Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems Akademie Verlang, Berlin,*

Bartosiewicz Z, Pawhuszewica E., 2004, *Lineer control systems on time scales: unification of continious and discrete*, Proc. Of 10th IEEE Inst.Conference MMAR,

Beer G., Rodriguez-Lopez J., (2010), *Topologies sequentially equivalent to Kuratowski Painleve convergence*, in: Applied Topology: Recent pogress for Computer Science, Fuzzy Mathematics and Economics, , pp. 7-13.

Beer G., Rodriguez-Lopez J., (2010), *Topologies associated with Kuratowki-Painleve convergence of closed sets*, J. Couvex Anal 17 805-826.

Beer G., (1985), *On convergence of closed sets in a metric space and distance functions*, Bull. Austral. Math. Soc 31 421-432.

Beer G., (1993). *Topologies on Closed Conver Sets*, Mathematics and Its Applications Vol. 268, Springer,

Bohner, M. and Peterson, A. (2001), *Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications*, Birkauser,

Bohner M. and Peterson A., (2001), *Laplace transform and Z-transform: Unification and extension*,. Submitted.

Bohner M., Peterson A., (2001).*Dynamic Equations on Time Scales*, An Introduction With Applications, Birkausser, Boston,

Bohner, M. and Peterson, A. (2003), *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkauser, Boston,

Bohner M., (2004), *Calculus of variations on time scales*, Dynamic Systems and Applications 13 339-349.

Cichon M., (2010), *A note on Peano theorem on time scales*, Applied Matmematics Letters 23 1310-1313.

Cichon M., Yantir A., (2015) , *On continuous dependence of solutions of dynamic equations*, Applied Msthematics and Compitation , 2015,252,473-483

Dosly O. and Hilger S., (2001). *A necessary and sufficent condition for oscillation of the Sturm Liouville dynamic equation on time scales*, J. Comput. Appl. Math., Special Issue on “Dynamic Equations on Time Scales”, edited by R. P. Agarwal, M. Bohner, and D. O’Regan. To appear.

Duke E., Hall K. and Oberste-Vorth R., (2004). *Changing time scales I: The continuous case as a limit*, Proceedings of the Sixth WSEAS International Conferance on Applied Mathematics, WSEAS, Athens,

Elaydi S. (2003) *An intorıduction to difference equations*, Springer ,Newyork.

Eloe P., (2001), *The method of quasilinearization and dynamic equations on compact measure chains*, J. Comput. Appl. Math., Special Issue on “Dynamic Equations on Time Scales”, edited by R. P. Agarwal. M. Bohner, and D. O’Regan. To appear.

Erbe L, Mathsen R. and Peterson A., *Existence, multiplicity, and nonexistence of positive solutions to a differential equation on a measure chain*, J. Comput. Appl. Math., 113 (12):365,2000.

Esty N., Hilger S., (2009), *Convergence of time scales under the Fell topology*, Journal of Difference Equations and Applications 15 1011-1020

Fang Z.M., Li S.J, and Teo K.L., (2008), *Painleve-Kuratowski convergences for the solution sets of set-valuedd weak vector variational inequalities*, Journal of Inequalities and Applications 2008.1, Article ID 435719.

Garay B.M., Vardai J. (2007), *Interpolation in dynamic equations on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications 13 847-854.

Garay B.M.,Hilger S.,Kloeden P.E., (2003), *Continuous dependence in time scale dynamics*, in: B. Aulbach, S. Elaydi and G. Ladas (Eds.) *New Progress in Difference Equations*, London, Taylor and Francis, , pp. 279288.

Garay B.M.,Hilger S., (2001), *Embeddability of time scale Dynamics in odedynamics*, Nonlinear Analysis 47, 1357-1371

Guseinov G. Sh. and Kaymakçalan B., (2001), *On a disconjugacy criterion for second order dynamic equations on time scales*, J. Comput. Appl. Math.,. Special Issue on “Dynamic Equations on Time Scales”, edited by R. P. Agarwal, M. Bohner, and D. O’Regan. To appear.

Guseinov G. Sh., (2003), *İntegration on time saceles*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 107-127.

Guseinov G., Bohner M., (2004), *Multiple Intepration on tine scales*, Dynamic Systems and Applications, 13 351-379.

Hall K., Oberste-Vorth R., (2007), *Totally discrete and Eulerian time scales*, Difference Equations, Special Functions and Orthogounal Polynoımials 462-470.
K. Kuratowski, (1966). *Topology. Vol. I., Academic Prss,*

Hilger S., (1990), *Analysis on measure chains.-a unifed approach to continuous and discrete calculus*, Results Math., 18 18-56.

Hilger S., (1997), *Differential and difference calculus – unifed!*, Nonlinear Anal., 30 2683-2694.

Hilger S., (1988). *Ein Mabkettenkalkül mit Anvendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. PhD thesis*, Universitat Würzburg,

Hilger S., (1996), *Generalized theorem of Hartman-Grobman on measure chains*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 60 157-191.

Hilger S. , (1999), *Special functions, Laplace and Fourier transform on measure chains*, Dyam. Systems Appl., 8 471-488.

Hilscher R., (2001). *A time scales version of a Wirtinger type inequality and applications*, J. Comput. Appl. Math., Special Issue on "Dynamic Equations on Time Scales", edited by R. P. Agarwal. M. Bohner, and D. O'Regan. To appear.

Jankowski J., (2010), *The Existence and Uniqueness of Solutions of Differential Equations with Advanced Argument*, Ph.D. Thesis, Gdansk, , (in Polish).

Jackson B., (*2006)*, Partial dynamic equations on time scales, J. *Comput Appl. Math. 186* , 391-415.

Kaymakçalan B., (1993), Existence and comparison results for dynamic systems on a time scale, *Jour. Math. Anal. Appl*. 172 243-255.

Kaymakçalan B. ,Özgün S.A. and Zafer A., (Veszprem, 1995) Gronwall and Bihari type inequalities on time scales, *In Conference Proceeding of the Second International Conference on Difference Equations*, pp. 481-490, Amsterdam, 1997. Gordon and Breach.

Kaymakçalan B., Lakshmikantham V. and Sivasundaram S., *(*1996) .*Dynamical Systems on Measure Chains*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,

Kelly W.G., Peterson A.C. , (2001) *Difference Equations on şntroduction with Applications*, Academic Press.

Kloden P.E., (2004) ,*A Gronwall-like inequality and continuous dependence on time scales*,in:R.P. Agarwal and D. O'Regan (Eds.) Nonlinear Analysis and Applications: To V. Lakshmikantham on his 80th Birthday, Kluver, , pp. 645-660.

Kloeden P.E., (2006), *Upper semicontinuous dependence of pulback attractors on time scales*, Journal of Difference Equations and Applications 12 357-368.

Kulik T. ,Tisdell Ch.C, (2008), *Volterra integral equations on time scales: Basic qualitative and quandtitative results with applications to initial value problems on unbounded domains*, Int. Jour. Difference Equ. 3, 103-133.

Kuratowski K. (1966), *Topology*, Vol L. Academic Pres.

Lawrence N.,Oberste-Vorth R., (2007), *Sluotions of dynamic equations with varying time scales*, in: Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials 452-461.

Lucchetti R., Torre A., (1994), *Classical set convergences and topologies*, Set-Valued Analysis 2 219-240.

Mrowka, (1970), *Comments on the space of subsets*, Lecture notes in Mathematics, 171 59-63.

Morelli M. and Peterson A., (2000), *Third-order differential equation on a time scale*, Math. Comput. Modelling, 32 565-570.

Murray J.D. (2002)., *Mathematical Biology. Vol. 2,* Springer,

Nogura T. , Shakhmatov D., (1996), *When does the Fell topology on a hyperspace of closed sets coincide with the meet of the upper Kuratowski and the lower Vietoris topologies?,* Topology and its Applications 70 , 213-243.

Oberste-Vorth R., (2009)*, The Fell topology for dynamic equations on time scales,* Nonlinear Dynamics and Systems Theory 9 407-414.

Oberste-Vorth R., (2008), *The Fell topology on the space of time scales for dynamic equations*, Adv. Dyn. Syst. Appl 3 177-184.

Yantir, A. ,Soyoğlu D. , *Weak Solutions of on Hyperbolictype partial differential equations in Banach spaces,* Hacettepe J. Mathematics and Statistics, 44 (2015), 153-163.