T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

ÇİZGİSEL KAYNAKTAN IŞIYAN ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN MÜKEMMEL İLETKEN SİLİNDİR TAKKESİNDEN OPTİK GİBİ SAÇILMASI

* YÜKSEK LİSANS TEZİ *

ADNAN GÖRÜR

BURSA, ARALIK 1986

T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

ÇİZGİSEL KAYNAKTAN IŞIYAN ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN MÜKEMMEL İLETKEN SİLİNDİR TAKKESİNDEN OPTİK GİBİ SAÇILMASI

* YÜKSEK LİSANS TEZİ *

İMTİHAN TARİHİ : 15.1.1987

JÜRİ ÜYELERİ : Doç. Dr. H. Ergun BAYRAKÇI (DANIŞMAN)

Prof. Dr. Ergür TÜTÜNCÜOĞLU

Prof. Dr. Aytaç YALÇINER

ADNAN GÖRÜR

BURSA, ARALIK 1986

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimi yaptığım sürece ve bu tezin hazırlanması esnasında değerli bilgi ve yardımlarını esirgemeyerek, büyük fedakarlıklar gösteren saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. H. Ergun BAYRAKÇI' ya sonsuz şükranlarımı sunarım.

ÖNSÖZ

Son yıllarda, çok küçük dalgaboylarına sahip elektromagnetik dalgalarla haberleşme tekniğinin oldukça ilerlemiş olması, saçılma problemlerine büyük önem kazandırmıştır. Tabiatta mevcut büyük eğrilik yarıçapına sahip, pekçok sürekli ve süreksiz (köşeli) fiziksel engellerin, alçak frekanslı dalgalar üzerinde önemsiz etkiler oluşturmasına karşılık, yüksek frekanslı dalgalar üzerinde, frekansın yükselmesine paralel, küçümsenmeyecek derecede önemli değişiklikler meydana getirdiği bilinen bir gerçektir. Dalga boyunun çok küçülmesiyle birlikte, söz konusu elektromagnetik dalga propagasyonu ile ışık propagasyonunun da oldukça yakın benzerlikler göstereceği aşikardır. Bu benzerlikler, optik gibi saçılma problemlerinde, ışın yollarını veren çözümün elde edilmesine imkân verir.

Söz konusu saçılma problemlerinde; optik gibi yaklaşıklığın gerçekleştirilmesi esnasında, Poisson İntegral dönüşümü ve süreksizlik noktalarındaki olayları açıklığa kavuşturabilmek için Hilbert integral dönüşümünün uygulanmasıyla elektromagnetik alanlar, iki katli integrallerle ifade edilebilirler. Bu integraller; gölge bölgesinde integrallerin fazının semer noktası bulunmadığından komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, integrandın kutuplarında rezidülerle ve aydınlık bölgede de; semer noktasında çözülürler.

Bu çalışmada da; çizgisel elektrik akım kaynağından ışıyan elektromagnetik dalgaların mükemmel iletken silindir takkesinden optik gibi saçılması incelenerek, gelen, yansıyan, köşe kırınımı ve sürünüm dalgaları ile fısıldayan galeri modlarına ait alanların asimtotik ifadeleri bulunmuştur.

ABSTRAKT

Çizgisel kaynaktan ışıyan Elektromagnetik dalgaların mükemmel iletken silindir takkesinden Optik gibi saçılmasında, düzlemsel dalga yaklaşıklığı (optik gibi yaklaşıklık) ve köşe kırınımlarını veren Elektromagnetik alan ifadeleri Poisson ve Hilbert İntegral Dönüşümleri ile elde edilmiştir. Söz konusu bu dönüşümler neticesinde ortaya çıkan iki katlı integraller; komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metodu ile aydınlık bölgede semer noktası, gölge bölgesinde de integrandın kutuplarında rezidülerle değerlendirilerek; gelen dalga, yansıyan dalga, köşe kırınımı dalgaları, sürünüm dalgaları ve fısıldayan galeri modu dalgalarına ait asimtotik ifadeler bulunmuştur.

E_z^i	: Gelen dalga alanı
E_z^r	: Yansıyan dalga alanı
E_z^e	: Köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgaların alanı
E_z^{ec}	: Köşede uyarılan sürünüm dalgalarının alanı
E_z^c	: Kaynaktan uyarılan sürünüm dalgalarının alanı
E_z^w	: Fısıldayan galeri modlarının alanı
R	: Gelen dalga ışınının uzunluğu
R_1	: Yansıyan dalga ışınının uzunluğu
R_2	: Köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgaların uzunluğu
R_3	: Köşede uyarılan sürünüm dalgalarının yüzeyden fırladığı nokta ile gözlem noktası arasındakı uzaklık
R_4	: Kaynaktan uyarılan sürünüm dalgalarının yüzeyden fırladığı nokta ile gözlem noktası arasındakı uzaklık
d, d_1, d_2 d_3	: Gelen ve sürünen dalgaların yüzey üzerindeki sürünüm mesafeleri
α	: Zayıflama sabiti
α_n	: Bessel fonksiyonunun sıfırları
ν_n	: Hankel fonksiyonunun sıfırları

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO

GİRİŞ

KONUNUN TANITIMI

Uzayda mevcut birtakım tabii engebe ve cisimler, özellikle çok yüksek frekanslı Elektromagnetik dalga propagasyonunu etkileyerek, onların genlik ve fazlarında birtakım değişikliklere sebeb olurlar. Söz konusu tabii süreksizliklerin bulunmaması halinde, bir kaynaktan ışıyan ve gözlem noktasına direkt olarak ulaşan Elektromagnetik dalga alanı < gelen (direkt) dalga alanı > olarak adlandırılır. Elektromagnetik dalgaların herhangibir geometrik ve fiziksel süreksizlikle karsılaşması sonucunda, süreksizlik yüzeyi üzerinde birtakım değişiklikler gösteren alanlar ise; <Saçılan Alan> olarak adlandırılır. Süreksizliğin geometrik ve fiziksel yapısı, bu alanların hesaplanmasında birtakım karmaşıklıklara sebeb olur. Son yıllarda yüksek frekansli dalgalarla haberleşme tekniğinin oldukça ilerlemiş olması sebebiyle sözü edilen alanlar büyük önem kazanmıştır. Elektromagnetik dalga alanlarının belirlenebilmesi için, geliştirilmiş bulunan metodlardan biri, düzlemsel dalga yaklaşıklığı olarak da bilinen <Optik gibi yaklaşıklık> olup, gaye bu yaklaşıklığı gerçekleştirmektir. Bu ise; integral dönüşümleri neticesinde ortaya çıkan integrallerin asimtotik hesabı yapılarak elde edilir. Düzgün eğrisel saçılma yüzeylerinden Elektromagnetik dalgaların saçılmasında; dönüşümlerdeki integrallerin kompleх düzlemde asimtotik hesabı integrandın kutuplarında rezidü metodu ile yapılırsa, yüzey üzerinde ilerleyen ve yüzeyin her noktasında teğet olarak fırlayan sürünüm dalgaları (Creeping Waves)[3] elde edilir. Eğer integrallerin hesabı semer noktası metoduyla yapılacak olursa, yüzeyden saçılan geometrik optik terimler bulunur.

Optik gibi yaklaşıklığı gerçekleştirmek için uygulanan dönüşümler, Poisson ve Hilbert dönüşümleridir. Helmholtz denkleminin öz fonksiyon açınımlarını veren genel çözümde sınır şartları kullanılarak elde edilen çözüm (Bessel ve Hankel fonksiyonlarını ihtiva eden çözüm) toplam şeklinde bir seri olduğundan Poisson integral dönüşümü uygulanır.Ayrıca saçılma yüzeyinin, köşeleri de ihtiva etmesi halinde; köşe kırınımı dalgalarının asimtotik ifadelerini elde edebilmek için Hilbert integral dönüşümü kullanılır. Bu dönüşümler sonucunda ortaya çıkan integraller uygun şekilde değerlendirilerek saçılan alanların hesabı kolaylıkla yapılabilir.

[N]:N sayılı kaynağı belirtir.

TEZİN TANITIMI

Silindirik koordinatlar sistemindeki bir saçılma probleminde k; dalga sayısı, a; saçılma yüzeyinin yarıçapı olmak üzere, k veya a çok büyük olabilir. Dolayısıyla, ka>>1 olacağından optik gibi yaklaşıklığı gerçekleştirmek mümkündur. Helmholtz denkleminin sözkonusu koordinatlar sistemindeki, Bessel ve Hankel fonksiyonlarını ihtiva eden genel çözümünde ortaya çıkan seriler ka>>1 değerleri için yavaşça yakınsak serilerdir. Bu serilere Poisson integral dönüşümünün uygulanmasıyla, rezidülerin hızlı yakınsak serilerini elde etmek mümkündür. Böylece yavaşça yakınsak harmonik seriler, integrasyon çevrelerinin deformasyonu ile çevre integrallerine dönüştürülebilmiştir.

Poisson integral dönüşümünün uygulanmasından sonra n=0 alınmış ve çalışma boyunca bütün hesaplar sadece bu değer için yapılmıştır. Sürünüm dalgaları, mükemmel iletken yüzey üzerinde uyarılır ve silindir yayı boyunca hem saat ibreleri, hem de saat ibrelerinin tersi yönünde yayılırlar. n=0,1,2,3,... değer leri için yayılan dalgalar saat ibrelerinin tersi yönünde,n=-1,-2,-3,... değerleri için yayılan dalgalar da saat ibresi yönünde sürünen dalgalardır. Sürünüm dalgalarının ilk dönüşleri esnasında taşıdıkları enerji çok büyük olmasına rağmen sonraki dönüşlerde taşıdıkları enerji küçüktür. Bu yüzden ilk dönüşten sonraki dönüşler pek fazla dikkate alınmazlar. Çalışmanın konusunu oluşturan problemde tam silindir yerine, sadece belli bir ϕ_o açısına sahip silindir takkesi göz önüne alınmış olduğundan, ilk dönüşlerden sonraki sürünüm dalgaları zaten dikkate alınmayacaktır. Ayrıca silindir takkesinin x-eksenine göre simetrik olması sebebiyle de sadece n=0 değeri için sürünüm dalgasının hesaplanması yeterli görülmüş ve Poisson dönüşüm integralinin uygulanmasından hemen sonra n=0 alınması uygun bulunmuştur.

Köşe kırınımı dalgalarını ifade edebilmek için uygulanan Hilbert integral dönüşümü sonucunda ortaya çıkan integralin hesabının ise; en dik inişli integrasyon çevre metoduyla hem semer noktasında, hem de integrandın kutuplarındaki rezidülerle yapılması gereği görülmüştür.

LİTERATUR ÖZETİ

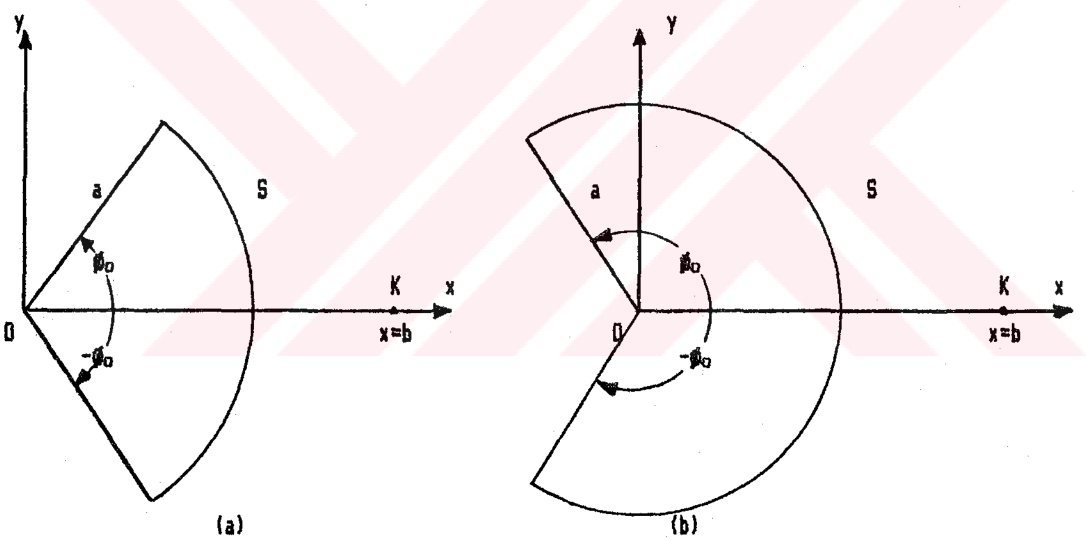
Erdoğan [5], <Bir halka kaynağın yarattığı sürünen dalgaların mükemmel iletken bir küresel reflektörden saçılması> nda optik gibi yaklaşıklığı (Düzlem dalga yaklaşıklığı) Watson integral dönüşümü ile, Çeki [3] ise; <Magnetik Hertz Dipolü alanında bulunan, mükemmel iletken küre takkesinden optik gibi saçılma>da aynı işlemi Poisson integral dönüşümünü kullanarak gerçekleştirmiştir.Erdoğan [5], Uzgören [4] ve Çeki [3]; köşe kırınımı olaylarını ifade edebilmek için de <Hilbert İntegral Dönüşümü> nü kullanmışlardır.

BİRİNCİ BÖLÜM

ÇİZGİSEL KAYNAKTAN IŞIYAN ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN MÜKEMMEL İLETKEN SİLİNDİR TAKKESİNDEN OPTİK GİBİ SAÇILMASINDA İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ

1.1.SINIR ŞARTLARI

Problemin temelini teşkil eden ve şekil.1.1'de geometrisi verilen mükemmel iletken yüzeyli, a yarıçaplı silindir takkesi basit ortam içinde bulunmaktadır. x=b, y=0 noktasında z-eksenine paralel olarak yerleştirilmiş bulunan çizgisel elektrik akım kaynağı w açısal frekanslı I akımı taşımaktadır. Pozitif z-yönünde akan akımın z ile herhangi bir değişimi sözkonusu olmadığından, kaynaktan ışıyan yüksek frekanslı elektromagnetik alanlar da z'den bağımsızdır. Bu sebeble, vektör potansiyel ve elektrik alan sadece z-bileşenine sahiptir.



Şekil.1.1 : Çizgisel Kaynağın Alanındaki Silindir Takkesi

Elektrik alan bileşeni < E_z> , $u(\rho,\phi)$ skaler fonksiyonu ile gösterilmek üzere, elektromagnetik alan bileşenlerinin;

$$E_\rho = 0 \tag{1.1.a}$$

$$E_\phi = 0 \tag{1.1.b}$$

$$E_z = u(\rho,\phi) \tag{1.1.c}$$

$$H_\rho = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u(\rho,\phi)}{\partial \phi} \qquad (1.1.d)$$

$$H_\phi = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial u(\rho,\phi)}{\partial \rho} \qquad (1.1.e)$$

$$H_z = 0 \qquad (1.1.f)$$

şeklinde olacağı aşikârdır. Çalışma süresince zaman faktörünün $e^{-i\omega t}$ ve b>a olduğu kabul edilecektir. $u(\rho,\phi)$ skaler fonksiyonu, silindir takkesinin (S) yüzeyi ile çizgisel akım kaynağı (K) nın haricindeki bütün bölgelerde;

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad (1.2.a)$$

şeklindeki homogen Helmholtz denkleminin çözümüdür. $u(\rho,\phi)$ fonksiyonunun belirlenebilmesi için (1.2.a) denkleminin, mükemmel iletken (S) yüzeyi üzerindeki ;

$$E_z(a,\phi) = 0 \qquad 0 < \phi < \phi_0 \qquad (1.2.b)$$

$$H_\phi(a+0,\phi) - H_\phi(a-0,\phi) = J_z(\phi) \qquad 0 < \phi < \phi_0 \qquad (1.2.c)$$

sınır şartlarını,

$$E_z(\rho,\phi) \sim C(\phi) e^{ik\rho} \qquad \rho \to \infty \qquad (1.2.d)$$

şeklindeki radyasyon şartını, köşe şartları olarak bilinen,

$$E_z(a,\phi) \sim O[1 \sqrt{a(\phi-\phi_0)}\,] \qquad \phi \to \phi_0 + 0 \qquad (1.2.e)$$

$$H_\phi(a,\phi) \sim O\,[1 / \sqrt{a(\phi-\phi_0)}\,] \qquad \phi \to \phi_0 + 0 \qquad (1.2.f)$$

mertebe bağıntılarını ve çizgisel akım kaynağını tanımlayan,

$$H_\phi(b+0,\phi) - H_\phi(b-0,\phi) = (I/b)\delta(\phi) \qquad (1.2.g)$$

şartını sağlaması gerekir.

Buradaki sözkonusu karışık sınır-değer probleminin Geometrik Kırınım Teorisi haricinde bir çözüm metodu henüz mevcut değildir. Bu teori gereğince, kırınım olayının yerel olduğunu kabul ederek genişletilmiş yarı-silindir problemini göz önüne almak uygun olur. Bu sebeble de, orijinal probleme eşdeğer bir Kanonik problem meydana getirmek gerekir.

1.2. EŞDEĞER KANONİK PROBLEM

(1.1) denklemleriyle verilmiş bulunan Elektromagnetik alan bileşenleri sadece $0< \phi <\pi$ aralığında tanımlıdır. $u(\rho,\phi)$ fonksiyonu,(1.2.a) ile verilen homojen Helmholtz denkleminin $0< \phi <\pi$ aralığının dışına, yani;$-\infty< \phi <\infty$ aralığına devamını, (1.2.b-g) bağıntılarının devamı olan birtakım ilave şartlar altında sağlar. Bu arada $u(\rho,\phi)$ fonksiyonunun devamı; (1.2.a) ve (1.2.g) bağıntılarını $-\infty< \phi <\infty$, (1.2.c) bağıntısını $-\infty< \phi <\phi_0$ aralıklarında ve diğer şartlarıda aynen sağlamalıdır. $0< \phi <\pi$ ve $-\infty< \phi <\infty$ aralıkları için oluşturulan her iki problem de, mükemmel iletken yüzeyli silindir takkesi üzerinde meydana gelen kırınım olayları bakımından aynı geometrik ve fiziksel özelliklere sahiptir.Buna göre; $-\infty< \phi <\infty$ aralığı için oluşturulan problemin kesin asimtotik çözümü bulunabilirse, bu problem orijinal probleme eşdeğer bir <Kanonik problem>dir. Bu Kanonik problem ise, $0< \rho <\infty$ ve $-\infty< \phi <\infty$ aralıkları ile tanımlı bölgede oluşturulmuş,genişletilmiş yarı-silindire ait bir kırınım problemidir. Orijinal probleme benzer şekilde, genişletilmiş yarı-silindire ait kırınım probleminin de;

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \qquad 0 < \rho < \infty, \quad \rho \neq a,b \quad , \quad -\infty < \phi < \infty \tag{1.3.a}$$

$$u(a,\phi) = 0 \qquad 0 < \phi < \infty \tag{1.3.b}$$

$$u(\rho,\phi) \sim C(\phi)e^{ik\rho} \qquad \rho \to \infty \, , \quad -\infty < \phi < \infty \tag{1.3.c}$$

$$u(a,\phi) \sim O[\sqrt{a(\phi-\phi_0)}] \qquad \phi \to \phi_0 + 0 \tag{1.3.d}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho} u(b+0,\phi) - \frac{\partial}{\partial\rho} u(b-0,\phi) = - i\omega\mu_0 \frac{I}{b} \delta(\phi) \qquad -\infty < \phi < \infty \tag{1.3.e}$$

bağıntılarını sağlaması gerekir.

1.3. POİSSON İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

Şimdi $u(\rho,\phi)$ fonksiyonunu, hem $k \to \infty$ için geçerli asimtotik ifadeler bulmaya, hem de karışık sınır-değer problemini çözmeye uygun olan bir integralle ifade etmeye çalışalım. (1.2.c) ve (1.2.g) bağıntılarından anlaşılacağı üzere; genişletilmiş $\rho=a$, $-\infty < \phi < \infty$ ve $\rho=b$, $-\infty < \phi < \infty$ ile tanımlı silindir yüzeyleri üzerinde $u(\rho,\phi)$ fonksiyonu veya türevleri süreksizlik gösterebilirler. Bu nedenle $u(\rho,\phi)$ fonksiyonunun $0 < \rho < a$, $a < \rho < b$ ve $b < \rho < \infty$ bölgelerindeki ifadelerini ayrı ayrı elde etmek uygun olacaktır. Bu bölgelerde $u(\rho,\phi)$ fonksiyonu (1.3.a) ile verilen Homogen Helmholtz denklemini sağlamakta olup;

$$u(\rho,\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{cases} A_n J_n(k\rho) e^{in\phi} & 0 < \rho < a \\ [B_n H_n^{(1)}(k\rho) + C_n H_n^{(2)}(k\rho)] e^{in\phi} & a < \rho < b \\ D_n H_n^{(1)}(k\rho) e^{in\phi} & b < \rho < \infty \end{cases} \qquad (1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. (1.4) ile verilen ifadelere,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)\, e^{i2\pi n\nu}\, d\nu \qquad (1.5)$$

eşitliği ile tanımlı Poisson toplama formülü uygulanacak olursa, n=0 için;

$$u(\rho,\phi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) J_{|\nu|}(k\rho) e^{i\nu\phi}\, d\nu & 0 < \rho < a \\ \int_{-\infty}^{\infty} [B(\nu) H_\nu^{(1)}(k\rho) + C(\nu) H_\nu^{(2)}(k\rho)] e^{i\nu\phi}\, d\nu & a < \rho < b \\ \int_{-\infty}^{\infty} D(\nu) H_\nu^{(1)}(k\rho) e^{i\nu\phi}\, d\nu & b < \rho < \infty \end{cases} \qquad (1.6)$$

elde edilir. Yukarıda da bahsi geçtiği gibi, bir takım fiziksel anlamı bulunmayan süreksizliklerin ortaya çıkmaması için (1.3.a-e) bağıntılarına ek olarak ;

$$u(a+0,\phi) = u(a-0,\phi) \qquad -\infty < \phi < 0 \tag{1.7.a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u(a+0,\phi) = \frac{\partial}{\partial \rho} u(a-0,\phi) \qquad -\infty < \phi < 0 \tag{1.7.b}$$

$$u(b+0,\phi) = u(b-0,\phi) \qquad -\infty < \phi < \infty \tag{1.7.c}$$

şeklindeki sınır şartlarının da gözönüne alınması gerekir.[1],[2]

1.4. HİLBERT İNTEGRAL DÖNÜŞÜMÜ

<S> yüzeyi üzerindeki (1.3.b) şartından dolayı (1.7.a) eşitliği, bütün $-\infty < \phi < \infty$ aralığı için sağlanacağından;

$$\int_{-\infty}^{\infty} [B(\nu)H_\nu^{(1)}(ka) + C(\nu)H_\nu^{(2)}(ka)]e^{i\nu\phi} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu)J_\nu(ka)e^{i\nu\phi} d\nu \tag{1.8.a}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, (1.3.b), (1.3.e), (1.7.b) ve (1.7.c) ifadelerinin (1.6) ifadeleri ile birlikte kullanılması neticesinde;

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\nu)J_\nu(ka)e^{i\nu\phi} d\nu = 0 \tag{1.8.b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{B(\nu)[H_\nu^{(1)}(kb)]' + C(\nu)[H_\nu^{(2)}(kb)]' - D(\nu)[H_\nu^{(1)}(kb)]'\}e^{i\nu\phi} d\nu = i w\mu_o \frac{I}{b}\delta(\phi) \tag{1.8.c}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{B(\nu)[H_\nu^{(1)}(ka)]' + C(\nu)[H_\nu^{(2)}(ka)]' - A(\nu)[J_\nu(ka)]'\}e^{i\nu\phi} d\nu = 0 \tag{1.8.d}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(\nu)H_\nu^{(1)}(ka)e^{i\nu\phi} d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} [B(\nu)H_\nu^{(1)}(kb) + C(\nu)H_\nu^{(2)}(kb)]e^{i\nu\phi} d\nu \tag{1.8.e}$$

eşitlikleri bulunur. Bu denklemlerden sırasıyla;

$$B(\nu)H_\nu^{(1)}(ka) + C(\nu)H_\nu^{(2)}(ka) = A(\nu)J_\nu(ka) \tag{1.9.a}$$

$$A(\nu)J_\nu(ka) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} E_z(a,\phi)e^{-i\nu\phi}\,d\phi \tag{1.9.b}$$

$$B(\nu)[H_\nu^{(1)}(kb)]' + C(\nu)[H_\nu^{(2)}(kb)]' - D(\nu)[H_\nu^{(1)}(kb)]' = \frac{i\omega\mu_0 I}{2\pi kb} \tag{1.9.c}$$

$$B(\nu)[H_\nu^{(1)}(ka)]' + C(\nu)[H_\nu^{(2)}(ka)]' - A(\nu)[J_\nu(ka)]' = -\frac{i\omega\mu_0}{2\pi k}\int_{0}^{\infty} J_z(a,\phi)e^{-i\nu\phi}\,d\phi \tag{1.9.d}$$

$$D(\nu)H_\nu^{(1)}(kb) = B(\nu)H_\nu^{(1)}(kb) + C(\nu)H_\nu^{(2)}(kb) \tag{1.9.e}$$

elde edilir. (1.9.d) denkleminde gözüken $J_z(a,\phi)$ terimi, genişletilmiş yarı-silindir takkesi üzerinde indüklenen yüzeysel akım yoğunluğunu belirtmektedir. (1.9.b) ve (1.9.d) denklemlerinin sağ tarafındaki integral içinde bulunan ve belli olmayan fonksiyonları belirleyebilmek için sırayla bu denklemlerin sağ taraflarını;

$$\varphi^-(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} E_z(a,\phi)e^{-i\nu\phi}\,d\phi \tag{1.10.a}$$

$$\varphi^+(\nu) = -\frac{i\omega\mu_0}{2\pi k}\int_{0}^{\infty} J_z(a,\phi)e^{-i\nu\phi}\,d\phi \tag{1.10.b}$$

şeklinde yazalım. $\varphi^+(\nu)$, $Im\nu > 0$ üst yarı ν-düzleminde, $\varphi^-(\nu)$ ise; $Im\nu < 0$ alt yarı ν-düzleminde ν'nün regüler fonksiyonlarıdır. Bu yarı düzlemlerde $\nu \to \infty$ için (1.2.c) ve (1.2.e-f) bağıntıları gereğince;

$$\varphi^+(\nu) \sim O(\nu^{-1/2}) \tag{1.11.a}$$

$$\varphi^-(\nu) \sim O(\nu^{-3/2}) \tag{1.11.b}$$

olduğu anlaşılır.

$u(\rho,\phi)$ fonksiyonunun kesin asimtotik çözümünün yapılabilmesi için öncelikle genlik katsayılarının bilinmesi gerekir. Bu nedenle (1.9) ve (1.10) ifadelerinden faydalanılarak, bu katsayılar $\varphi^-(\nu)$ cinsinden;

$$A(\nu) = \frac{\varphi^-(\nu)}{J_\nu(ka)} \tag{1.12.a}$$

$$B(\nu) = \frac{\varphi^-(\nu)}{H_\nu^{(1)}(ka)} - C(\nu)\,\frac{H_\nu^{(2)}(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka)} \tag{1.12.b}$$

$$C(\nu) = \frac{w\mu_o I}{8}\,H_\nu^{(1)}(kb) \tag{1.12.c}$$

$$D(\nu) = \frac{\varphi^-(\nu)}{H_\nu^{(1)}(ka)} + C(\nu)\left[\frac{H_\nu^{(1)}(ka)H_\nu^{(2)}(kb) - H_\nu^{(2)}(ka)H_\nu^{(1)}(kb)}{H_\nu^{(1)}(ka)H_\nu^{(1)}(kb)}\right] \tag{1.12.d}$$

şeklinde elde edilir. Bu katsayıların (1.9.d) ifadesinde kullanılması ile ;

$$\varphi^+(\nu) - \frac{[H_\nu^{(1)}(ka)]'J_\nu(ka) - [J_\nu(ka)]'H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka)J_\nu(ka)}\varphi^-(\nu) = i\,\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\,\frac{H_\nu^{(1)}(kb)}{H_\nu^{(1)}(ka)} \tag{1.13}$$

olduğu görülür. Bu denklem, (1.11) bağıntıları ile birlikte bir Hilbert problemi [7] oluşturur.

1.5. HİLBERT DÖNÜŞÜM İNTEGRALİNİN ÇÖZÜMÜ

(1.13) ile verilen denklemde;

$$\varphi^+(\nu) = \sqrt{\nu + ika}\;\Phi^+(\nu)e^{-i\nu\phi_o} \tag{1.14.a}$$

$$\varphi^-(\nu) = -\frac{ka}{2\sqrt{\nu - ika}}\;\Phi^-(\nu)e^{-i\nu\phi_o} \tag{1.14.b}$$

$$G(\nu) = \frac{1}{i\pi\sqrt{\nu^2 + (ka)^2}\,H_\nu^{(1)}(ka)J_\nu(ka)} \tag{1.14.c}$$

$$g(\nu) = i\,\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\,\frac{H_\nu^{(1)}(kb)}{H_\nu^{(1)}(ka)}\,\frac{e^{i\nu\phi_o}}{\sqrt{\nu + ika}} \qquad (1.14.d)$$

yazılmak suretiyle,

$$\Phi^+(\nu) - G(\nu)\Phi^-(\nu) = g(\nu) \qquad (1.15)$$

eşitliği elde edilir. Böylece Hilbert problemi standart forma sokulmuş olur. Reel eksen üzerinde $\nu \to \mp \infty$ yapılarak,

$$G(\nu) \to 1, \qquad g(\nu) \to 0 \qquad (1.16)$$

olduğu görülebilir. Bu özellikler (1.15) denkleminin standart Hilbert denklemi olduğunu ve klasik metodlarla çözülebileceğini gösterir.

(1.15) ile verilen standart Hilbert problemini çözebilmek için,

$$G(\nu) = \frac{X^+(\nu)}{X^-(\nu)} \qquad (1.17)$$

yazılırsa, (1.15) ifadesinden;

$$\frac{\Phi^+(\nu)}{X^+(\nu)} - \frac{\Phi^-(\nu)}{X^-(\nu)} = \frac{g(\nu)}{X^+(\nu)} \qquad (1.18)$$

elde edilir. Burada $X^+(\nu)$ ve $X^-(\nu)$ fonksiyonları $\mathrm{Im}\,\nu > 0$ ve $\mathrm{Im}\,\nu < 0$ yarı düzlemleri içinde regüler ve sıfırdan farklıdırlar. Bu fonksiyonlar heriki yarı düzlem içinde $\nu \to \infty$ için sabit bir limit değerine sahiptirler.

(1.18) ile verilen Hilbert denkleminin çözümü (1.11.a-b) ifadeleri sebebi ile;

$$\frac{\Phi^\pm(\nu)}{X^\pm(\nu)} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - \nu} \qquad \mathrm{Im}\,\nu \gtrless 0 \qquad (1.19)$$

şeklindedir. Buradaki $X^\pm(\nu)$ fonksiyonları da;

$$\log[X^{\pm}(\nu)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \log[G(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-\nu} \qquad Im_{\nu} \gtrless 0 \qquad (1.20)$$

denklemiyle hesaplanabilir.

$\Phi^{\pm}(\nu)$ fonsiyonunun belirlenmesi halinde, (1.6) ifadesinde gözüken bütün katsayıları elde etmek mümkün olacaktır. Fakat, çalışmanın muhtevasını teşkil eden olayların çok yüksek frekanslı olması sebebiyle, dominant olayları açıklayabilmek için, alan ifadelerinin $k \to \infty$ için geçerli olan asimtotik açınımlarındaki ilk terimi bulmak gerekir. Bu yüzden $X^{+}(\nu)$ ve $X^{-}(\nu)$ fonksiyonlarının asimtotik ifadelerindeki ilk terimler aşağıda (∞) indisi ile gösterilecektir. $X^{+}(\nu)$ ifadesindeki ilk terimlerin de bulunması gerektiğine göre (1.20) deklеminden;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log[G(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-\nu} = \int_{-\infty}^{-|ka|} \log[G(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-\nu} + \int_{-|ka|}^{|ka|} \log[G(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-\nu} + \int_{|ka|}^{\infty} \log[G(\tau)] \frac{d\tau}{\tau-\nu} \qquad (1.21)$$

yazmak mümkündür. Burada ortaya çıkacak Bessel fonksiyonları yerine bütün integrasyon aralığı için geçerli olan Hankel fonksiyonlarının asimtotik açınımlarını kullanmak uygun olur. Birinci ve ikinci nevi Hankel fonksiyonlarının asimtotik ifadeleri;

$$H_{\tau}^{(1)}(x) \sim \sqrt{(2/\pi)}\; e^{-i\pi/4} \frac{e^{i[\sqrt{x^2-\tau^2} - \tau \operatorname{Cos}^{-1}(\tau/x)]}}{[x^2-\tau^2]^{1/4}} \qquad (1.22.a)$$

$$H_{\tau}^{(2)}(x) \sim \sqrt{(2/\pi)}\; e^{i\pi/4} \frac{e^{-i[\sqrt{x^2-\tau^2} - \tau \operatorname{Cos}^{-1}(\tau/x)]}}{[x^2-\tau^2]^{1/4}} \qquad (1.22.b)$$

şeklindedir. $k \to \infty$ ve $0 < \tau < |x|$ için;

$$J_{\tau}(x) \sim \frac{1}{2} H_{\tau}^{(2)}(x) \sim \sqrt{(1/2\pi)}\; e^{i\pi/4} \frac{e^{-i[\sqrt{x^2-\tau^2} - \tau \operatorname{Cos}^{-1}(\tau/x)]}}{[x^2-\tau^2]^{1/4}} \qquad (1.22.c)$$

yazılabilir. (1.20) denkleminde gözüken $G(\tau)$ fonksiyonunun Re τ-ekseni üzerinde tekil noktası yoktur. Bu yüzden L integrasyon çizgisi yerine reel eksen konulabilir. $G(-\tau) = G(\tau)$ olduğu gözönüne alınarak (1.20) denkleminden,

$$\log[X^{\pm}(\nu)] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \log[G(\tau)][\frac{1}{\tau - \nu} + \frac{1}{\tau + \nu}]d\tau \tag{1.23.a}$$

yazılabilir. $k \to \infty$ için geçerli olan asimtotik ifadeyi bulabilmek için;

$$\log[X^{\pm}_{\infty}(\nu)] \sim \log[X^{\pm}(\nu)]_{ka \to \infty} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{ka \to \infty} \int_0^{|ka|} \log G(\tau)[\frac{1}{\tau - \nu} + \frac{1}{\tau + \nu}]d\tau \tag{1.23.b}$$

yazılır. (1.22) denklemleriyle verilen asimtotik açınımlar, (1.14.c) denklemiyle tanımlı $G(\tau)$ ifadesinde kullanıldığında;

$$G_{\infty}(\tau) = \sqrt{\frac{\tau^2 - (ka)^2}{\tau^2 + (ka)^2}} \tag{1.24.a}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece (1.23.b) eşitliğinden;

$$\log[X^{\pm}_{\infty}(\nu)] \sim \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \log[\sqrt{\frac{\tau^2 - (ka)^2}{\tau^2 + (ka)^2}}][\frac{1}{\tau - \nu} + \frac{1}{\tau + \nu}]d\tau$$

$$\sim \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \log[\sqrt{\frac{\tau^2 - (ka)^2}{\tau^2 + (ka)^2}}][\frac{1}{\tau - \nu}]d\tau \qquad \mathrm{Im}\nu \gtrless 0 \tag{1.24.b}$$

elde edilir. (1.24.b) eşitliği; $X^{+}_{\infty}(\nu)$ ve $X^{-}_{\infty}(\nu)$ fonksiyonlarının asimtotik ifadelerindeki ilk terimlerin, $G_{\infty}(\nu)$ fonksiyonunun çarpanları olduğunu göstermektedir. Buna göre (1.17) ile verilen eşitlik gereğince,

$$X^{+}(\nu) \sim X^{+}_{\infty}(\nu) = \sqrt{\frac{\nu + ka}{\nu + ika}} \tag{1.25.a}$$

$$\bar{X}(\nu) \sim \bar{X}_{\infty}(\nu) = \sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}} \tag{1.25.b}$$

olduğu anlaşılır. Elde edilen bu son eşitlikler (1.19) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim \frac{\bar{X}_{\infty}(\nu)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}_{\infty}(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - \nu} \qquad \mathrm{Im}\nu \gtrless 0 \tag{1.26}$$

bulunur. (1.14.d) eşitliğinden;

$$g(\tau) = i\frac{\pi\mu_0 I}{2\pi ka} \frac{H_{\tau}^{(1)}(kb)}{H_{\tau}^{(1)}(ka)} \frac{e^{i\tau\phi_0}}{\sqrt{\tau + ika}} \tag{1.27}$$

elde edilir. Böylece (1.26) bağıntısı, (1.25) ve (1.27) ifadeleri ile birlikte;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim \frac{\pi\mu_0 I}{2\pi ka} \sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\tau}^{(1)}(kb)}{H_{\tau}^{(1)}(ka)} \frac{e^{i\tau\phi_0}}{(\tau - \nu)\sqrt{\tau + ka}} \tag{1.28}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki integrali şekil.1.1'de verilen geometriler için ayrı ayrı değerlendirmek gerekir. Şekil.1.1.a'daki geometri için integralin ancak semer noktası metoduyla hesaplanabileceği rezidü katkılarının olmayacağı kolayca anlaşılabilir. Şekil.1.1b'deki silindir takkesi için ise; semer noktası katkısının sözkonusu olamayacağı ve integralin rezidü teoremine uygun şekilde değerlendirilmesi gerektiği aşikardır. (1.28) ile verilen ifade aşağıda sözkonusu her iki silindir takkesi için de ayrı ayrı incelenecektir.

1.5.1. DAR AÇILI SİLİNDİR TAKKESİ İÇİN $\Phi^{-}(\nu)$:

Kaynağın silindir takkesinin köşesini direkt görmesi, başka bir deyişle; köşenin aydınlık bölgede olması sebebiyle, (1.28) ile verilen ifadede yer alan integralin hesabı, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında yapılabilir. b>a olduğundan integrasyon çizgisinin tamamı üzerinde geçerli olan ve (1.22.a) ile verilmiş bulunan Hankel fonksiyonlarinin asimtotik açınımları (1.28) ifadesinde kullanılırsa;

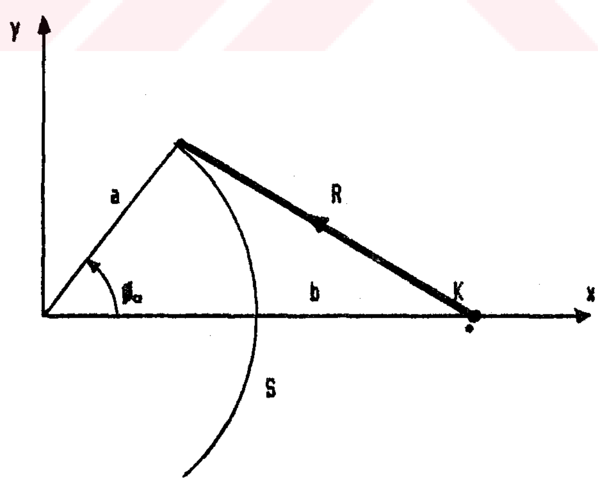
$$\Phi^{-}(\nu) \sim \frac{w\mu_o I}{2\pi ka} \sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}} \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(ka)^2 - \tau^2}{(kb)^2 - \tau^2}\right]^{1/4} .$$

$$\frac{e^{i[\sqrt{(kb)^2 - \tau^2} - \sqrt{(ka)^2 - \tau^2} - \tau \operatorname{Cos}^{-1}(\tau/kb) + \tau \operatorname{Cos}^{-1}(\tau/ka) + \tau \phi_o]}}{(\tau - \nu)\sqrt{\tau + ka}} d\tau \quad (1.29)$$

bulunur. Buradaki integral en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında hesaplanabilir durumda olup, semer noktası;

$$\operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{\tau}{ka}\right) - \operatorname{Cos}^{-1}\left(\frac{\tau}{kb}\right) + \phi_o = 0 \quad (1.30)$$

denkleminin çözümüyle bulunur.



Şekil.1.2: Köşeye gelen dalga ışını

Daha sonra birtakım hesaplar (Bkz. Analitik Detay-1) sonucunda;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim -\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{a}{R}}\,e^{ikR}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}}{\nu - ka\mathrm{Sin}\delta} \tag{1.31}$$

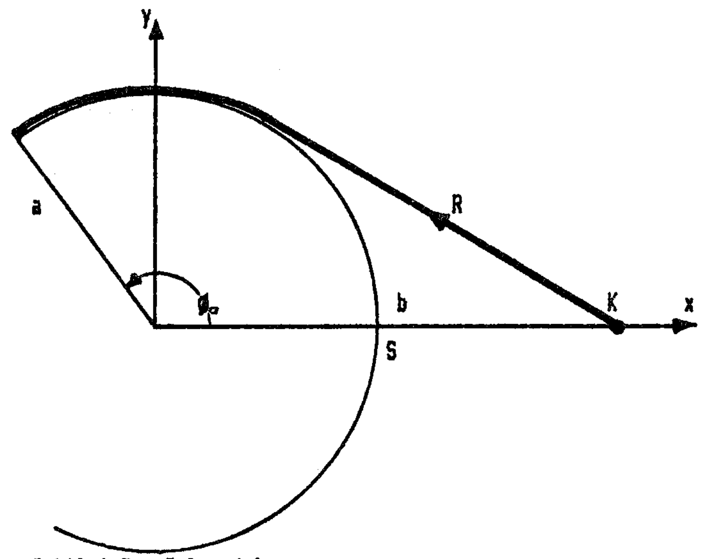
ve (1.14.b) bağıntısından;

$$\varphi^{-}(\nu) \sim \frac{w\mu_o I}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\,e^{ikR}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}}{(\nu - ka\mathrm{Sin}\delta)\sqrt{\nu - ka}}\,e^{-i\nu\phi_o} \tag{1.32}$$

elde edilir.

1.5.2. GENİŞ AÇILI SİLİNDİR TAKKESİ İÇİN $\varphi^{-}(\nu)$:

Silindir takkesinin köşe noktası kaynağı göremediğinden, başka bir deyişle; köşenin gölge bölgesinde kalmasından dolayı (1.28)'deki integralin hesabı en dik inişli integrasyon çevre metoduyla integrandın kutuplarında rezidü ile yapılmalıdır. (1.28)'deki integrale hiç bir semer noktası katkısı sözkonusu değildir. Buna göre integrandın kutuplarındaki rezidüler vasıtasıyla kolayca;



Şekil.1.3 : Gelen dalga ışını

$$\Phi^-(\nu) \sim i\,\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\;e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\;\frac{e^{i\nu_1[\phi_o - \mathrm{Cos}^{-1}(\tau/kb)]}}{(\nu_1 - \nu)\sqrt{\nu_1 + ka}\;\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)} \tag{1.33}$$

ve (1.14.b)'den;

$$\varphi^-(\nu) \sim -\frac{w\mu_o I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\;e^{-i3\pi/4}\;\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\;\frac{e^{ikd-\alpha d}}{(\nu - \nu_1)\sqrt{\nu_1 + ka}}\;\frac{e^{-i\nu\phi_o}}{\sqrt{\nu - ka}\;\dot{H}^{(2)}_{\nu_1}(ka)} \tag{1.34}$$

elde edilir (Bkz. Analitik Detay - 1). Buradaki Hankel fonksiyonunda gözüken (˙) işareti indise göre alınmış türevi göstermektedir.[4,5]

İKİNCİ BÖLÜM

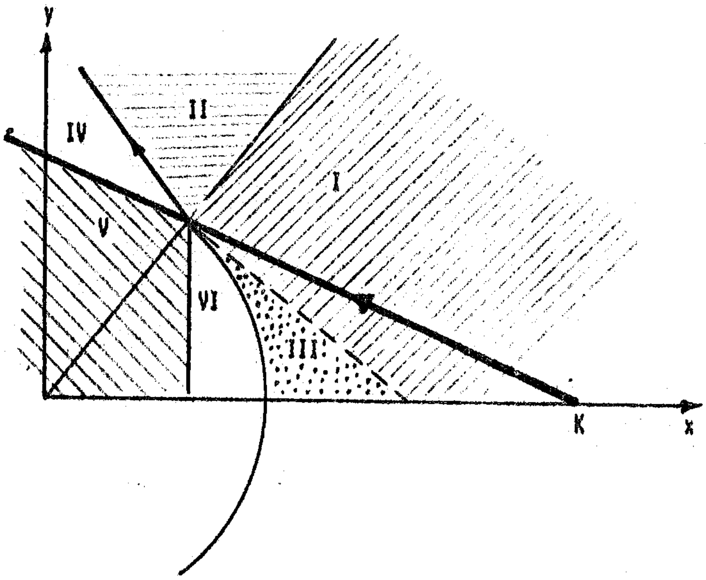
ÇİZGİSEL KAYNAKTAN IŞIYAN ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN ANALİZİ

2.1. ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN BÖLGELERE GÖRE DAĞILIMI

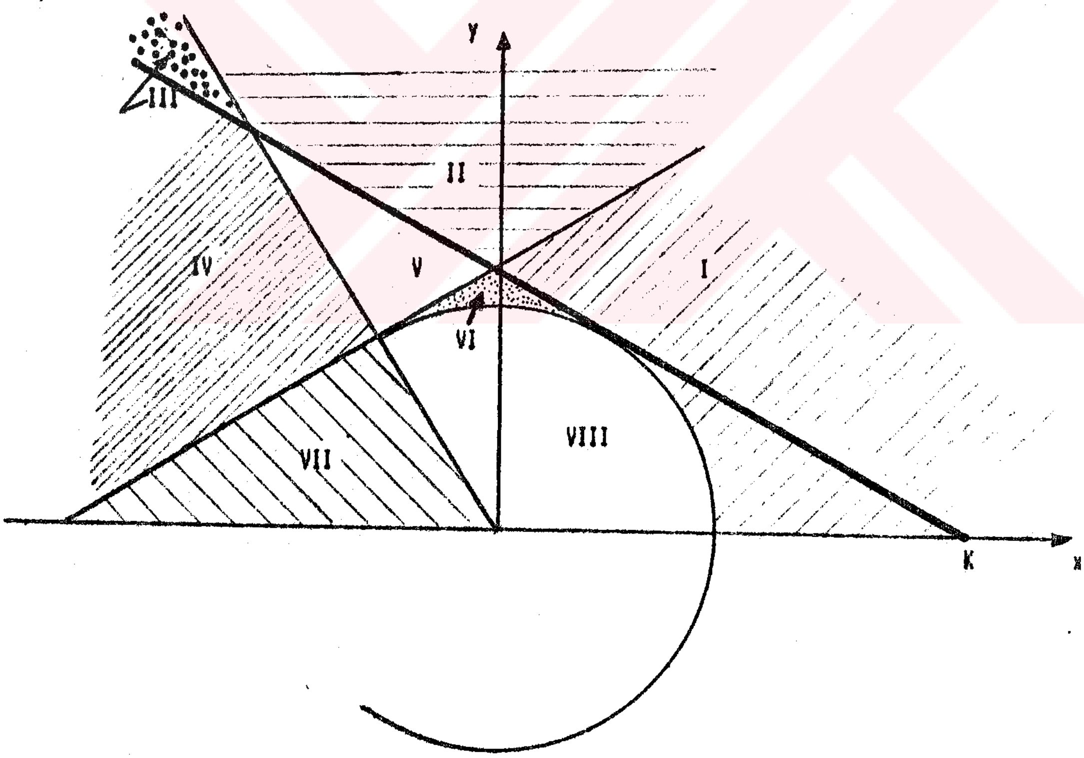
Birinci bölümde gerçekleştirilen integral dönüşümleri sonunda elektromagnetik alanların integral ifadeleri elde edilmiştir. Bu integral ifadeleri yine birinci bölümde elde edilen katsayılarla birlikte kaynak noktası ile silindir yüzeyi haricindeki heryerde elektromagnetik alanların hesaplanmasına imkan verirler. Elektromağnetik alanların dominant bileşenleri, sözkonusu alanlara ait integral ifadelerinin uygun şekilde değerlendirilmesiyle elde edilebilir. Bu bileşenler; gelen (direkt) dalga (I), yansıyan dalga (R), kaynaktan uyarılan sürünüm dalgaları (Creeping waves) (C), köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar (E), köşede uyarılan sürünüm dalgaları (EC) ve silindir yüzeyinin iç yüzeyindeki pek çok yansımadan dolayı oluşan Fısıldayan Galeri Modları (Whispering Gallery Modes) (W)'dır. Bunlardan başka; ϕ 'nin değişim aralığının $(-\infty, \infty)$ aralığına genişletilmiş olması sebebiyle, originin bir köşe gibi davranarak birtakım kırınmış ışınlar oluşturmasından dolayı ortaya çıkan origin dalgası (S) mevcuttur. Ancak bu dalgalar, bazı bölgeler için geçerli olup, orjinal problemde yer almayacaktır.

Şekil.2.1'de verilen geometrilerden yararlanarak, bölgelere göre elektromagnetik dalgaları aşağıdaki gibi analiz etmek mümkündür.

BÖLGE :	DAR AÇILI SİLİNDİR TAKKESİ İÇİN DOMİNANT DALGALAR :	GENİŞ AÇILI SİLİNDİR TAKKESİ İÇİN DOMİNANT DALGALAR :
I	I + R + E	I + R + EC
II	I + R + E + S	I + R + E
III	I + R + EC	I + R + E + S
IV	I + E + S	C + E + S
V	E + S	C + E
VI	W	C + EC
VII	-------	E + S
VIII	-------	W



(a)



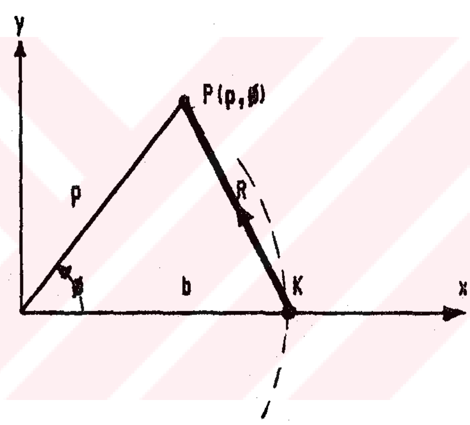
(b)

Şekil.2.1 : Elektromagnetik Dalgaların Bölgelere göre Dağılımı

Bu bölümde alanlar bölgelere göre ayrı ayrı incelenmeyecek, bunun yerine dalga çeşitleri tek tek ele alınacaktır.

2.2. GELEN DALGALAR

Silindir takkesinin bulunmaması halinde çizgisel elektrik akım kaynağından ışıyan ve gözlem noktasına direkt olarak ulaşan dalga, gelen (direkt) dalgadır. Gelen dalga, $\rho = b$ silindirinin iç ve dış bölgelerinde homogen Helmholtz denklemini sağlar. Başka bir deyişle; her iki bölgede de gelen dalga aynıdır ve bundan dolayı da, bu bölgelerden sadece birini, mesela $\rho > b$ bölgesini gözönüne alıp, gelen dalga alanını bu bölge içinde hesaplamak yeterli olacaktır. Buna göre, $\rho > b$ bölgesi için (1.6) denklemlerinden;



Şekil.2.2. Gelen dalga

$$E_z(\rho,\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} D(\nu) H_\nu^{(1)}(k\rho) e^{i\nu\phi}\, d\nu \tag{2.1}$$

yazılabilir. Buradaki $D(\nu)$ katsayısı yerine, (1.12.c-d) denklemleri yazılarak, $k \to \infty$ için;

$$[H_\nu^{(1)}(ka)H_\nu^{(2)}(kb) - H_\nu^{(2)}(ka)H_\nu^{(1)}(kb)] = 2[H_{|\nu|}^{(1)}(ka)J_{|\nu|}(kb) - H_{|\nu|}^{(1)}(kb)J_{|\nu|}(ka)] \tag{2.2}$$

eşitliği gözönüne alınacak olursa, $\rho > b$ bölgesi içindeki toplam alan ifadesi;

$$E_z \sim -\frac{w\mu_o I}{4}\int_{-\infty}^{\infty} J_{|\nu|}(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu$$

$$+\frac{w\mu_o I}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{|\nu|}(ka)H_{|\nu|}^{(1)}(kb)}{H_\nu^{(1)}(ka)}H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi^-(\nu)}{H_\nu^{(1)}(ka)}H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu \qquad (2.3)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu ifadenin ilk terimi gelen dalga alanını vereceğinden;

$$E_z^i \sim -\frac{w\mu_o I}{4}\int_{-\infty}^{\infty} J_{|\nu|}(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu \qquad (2.4)$$

yazılabilir. Burada E_z^i, gelen dalgayı belirtmektedir. (2.4) ifadesinde;

$$J_\nu(kb) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(kb) + H_\nu^{(2)}(kb)] \qquad (2.5)$$

eşitliği gözönünde tutularak, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında gelen dalganın dominant terimi;

$$E_z^i \sim -\frac{w\mu_o I}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}e^{-i\pi/4} \qquad (2.6)$$

şeklinde bulunur.(Bkz. Analitik Detay - 2)

2.3. YANSIYAN DALGALAR

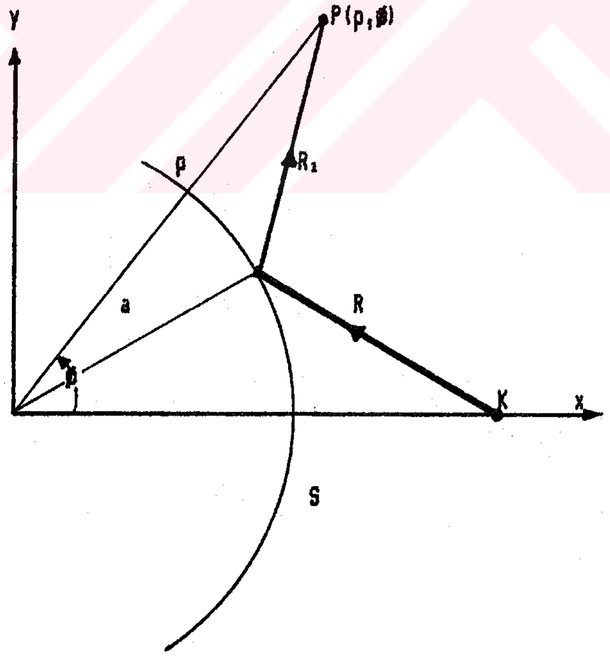
$\rho > b$ bölgesi için (2.3) denklemi ile verilen ifadenin ilk teriminin gelen dalgayı verdiğini gördük. Aynı şekilde, ikinci terimin de aşağıda yapılacak incelemeyle yansıyan dalgayı vereceği görülecektir. E_z^r, yansıyan dalgayı göstermek üzere, (2.3) denkleminden;

$$E_z^r = \frac{\omega\mu_0 I}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{|\nu|}(ka) H^{(1)}_{|\nu|}(kb)}{H^{(1)}_{\nu}(ka)} H^{(1)}_{\nu}(k\rho) e^{i\nu\phi} d\nu \qquad (2.7)$$

yazılabilir. Burada;

$$H^{(1)}_{-\nu}(x) = e^{i\nu\pi} H^{(1)}_{\nu}(x) \qquad (2.8)$$

özelliği gözönüne alınarak;

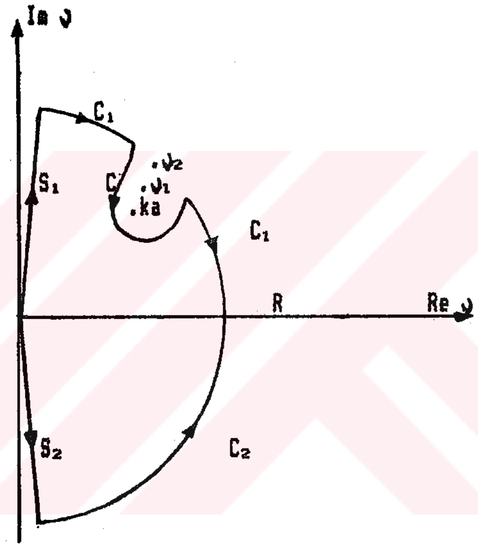


Şekil.2.3 : Yansıyan dalga

$$E_z^r \sim \frac{w\mu_o I}{4}\Big[\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(ka)H_\nu^{(1)}(kb)}{H_\nu^{(1)}(ka)}H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{-i\nu\phi}d\nu$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(ka)H_\nu^{(1)}(kb)}{H_\nu^{(1)}(ka)}H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu\Big] \qquad (2.9)$$

elde edilir.



Şekil.2.4 : (2.9) ifadesi için integrasyon çevresi.

(2.9) denkleamindeki birinci integrali; $(S_2 + C_2)$ çevresi üzerinde, ikinci integrali ise; $(S_1 + C_1 + C)$ çevresi üzerinde yazmak mümkündür. (C_1) ve (C_2) çevreleri üzerinde yazılmış integrallerin $(R \to \infty)$ için sıfıra gitmesi sebebiyle, birinci ve ikinci integral çevreleri sırasıyla; (S_2) ve $(S_1 + C)$ olacaktır. Aynı şekilde (S_1) ve (S_2) çevrelerinin de semer noktası katkıları olmadığından, (2.9) ile verilen ifadeyi sadece (C) çevresi üzerinde değerlendirmek mümkündür. (C) çevresi üzerinde yazılan integralin, $(k \to \infty)$ için geçerli asimtotik ifadesindeki dominant terim semer noktasından gelecek olan katkıdır. Sözkonusu semer noktası katkısını bulabilmek için (C) çevresi üzerinde yazılan integralde;

$$J_\nu(ka) = \frac{1}{2}\,[H_\nu^{(1)}(ka) + H_\nu^{(2)}(ka)] \tag{2.10}$$

bağıntısı gözönünde tutularak;

$$E_z^r \sim \frac{w\mu_o I}{8}\,\Big[\int_C \frac{H_\nu^{(1)}(kb)H_\nu^{(2)}(ka)}{H_\nu^{(1)}(ka)}\,H_\nu^{(1)}(k\rho)\,e^{i\nu\phi}\,d\nu$$

$$+ \int_C H_\nu^{(1)}(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)\,e^{i\nu\phi}\,d\nu\,\Big] \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu denklemdeki birinci terim $(E_z^r)_1$, ikinci terim $(E_z^r)_2$ ile gösterilmek üzere, her iki terimin de ayrı ayrı ele alınıp incelenmesi gerekir. Böylece gerekli hesaplar (Bkz. Analitik Detay -3) yapılarak yansıyan dalganın dominant terimi;

$$E_z^r \sim \frac{w\mu_o I}{4}\sqrt{\frac{2}{k\pi}}\;e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{1}{Rl + R_1 l + 2RR_1}}\;e^{ik(R + R_1)} \tag{2.12}$$

şeklinde bulunur.

2.4. KÖŞE KIRINIMI DALGALARI

Hilbert integral dönüşümünün uygulanmasındaki gaye; çizgisel kaynaktan ışıyan elektromağnetik dalgaların silindir takkesinin köşesinde kırınması sonucunda oluşan köşe kırınımı dalgalarını açıklayabilmektir. Dar ve geniş açılı silindir takkeleri için köşe kırınımı dalgalarını ayrı ayrı ele alıp, incelemek gerekir. Bu ise; birinci bölümde gerçekleştirilen Hilbert dönüşüm integralinin uygulanmasıyla elde edilen $\psi^-(\nu)$ fonksiyonunun her iki silindir takkesi için ayrı ayrı hesaplanmasındaki amacı ortaya koymaktadır. Kaynaktan ışıyan elektromağnetik dalganın köşede saçılması sonucunda iki tip dalga meydana gelir. Bu dalgalar; ‹köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar› ve ‹köşede uyarılan sürünüm dalgaları› olarak adlandırılacaktır.

2.4.1. KÖŞE KIRINIMINDAN MEYDANA GELEN DOĞRUSAL DALGALAR

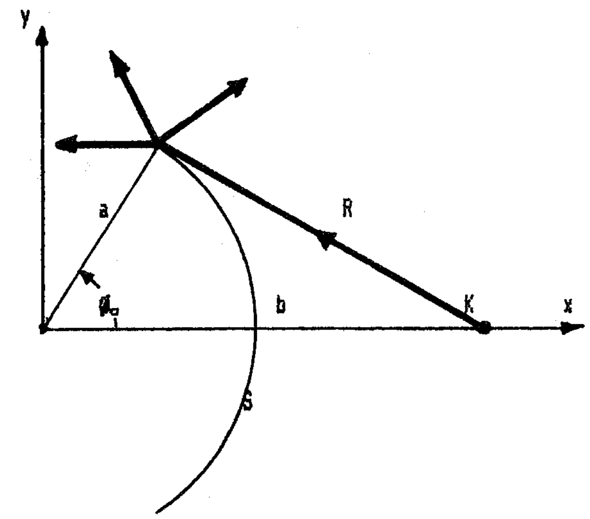
(2.3) ile verilen toplam alan ifadesindeki ilk iki terim gelen ve yansıyan dalgaları verdiğine göre, üçüncü terimin asimtotik hesabındaki dominant terim, köşe kırınımı sonucunda meydana gelen kırınan dalgaları verecektir. Sözkonusu terimin asimtotik hesabı en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında yapılacak olursa, köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar elde edilir. Bu dalgalar, $\langle E_z^* \rangle$ ile gösterilecektir.

2.4.1.1. Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Köşe Kırınımından Meydana Gelen Doğrusal Dalgalar

(1.32) ile verilen $\psi^-(\nu)$ ifadesi, (2.3) denklemindeki toplam alanın üçüncü teriminde yerine yazılacak olursa;

$$E_z^* \sim \frac{w\mu_o I}{4\pi} \sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1 - \mathrm{Sin}\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)} \frac{e^{i\nu(\phi - \phi_o)}}{\sqrt{\nu - ka}\,(\nu - ka\mathrm{Sin}\delta)}\, d\nu \qquad (2.13)$$

elde edilir. Buradaki integralin asimtotik ifadesini elde edebilmek için Hankel fonksiyonlarının üniform asimtotik açınımları kullanılırsa;



Şekil.2.5 : Köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar.

$$E_z^e \sim \frac{w\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{1-\sin\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{(ka)^2-\nu^2}{(k\rho)^2-\nu^2}\right]^{1/4}\cdot$$

$$\frac{e^{i[\sqrt{(k\rho)^2-\nu^2}-\sqrt{(ka)^2-\nu^2}-\nu\cos^{-1}(\nu/k\rho)+\nu\cos^{-1}(\nu/ka)+\nu(\phi-\phi_0)]}}{\sqrt{\nu-ka}\,(\nu-ka\sin\delta)}\,d\nu \tag{2.14}$$

bulunur. (2.14) ifadesindeki integral, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında hesaplanacak olursa, köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar asimtotik olarak;

$$E_z^e \sim -\frac{w\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,\frac{\sqrt{1-\sin\delta}\,\sqrt{1+\sin\theta}}{(\sin\theta-\sin\delta)}\,\frac{e^{ikR_2}}{\sqrt{kR_2}} \tag{2.15}$$

şeklinde bulunur.

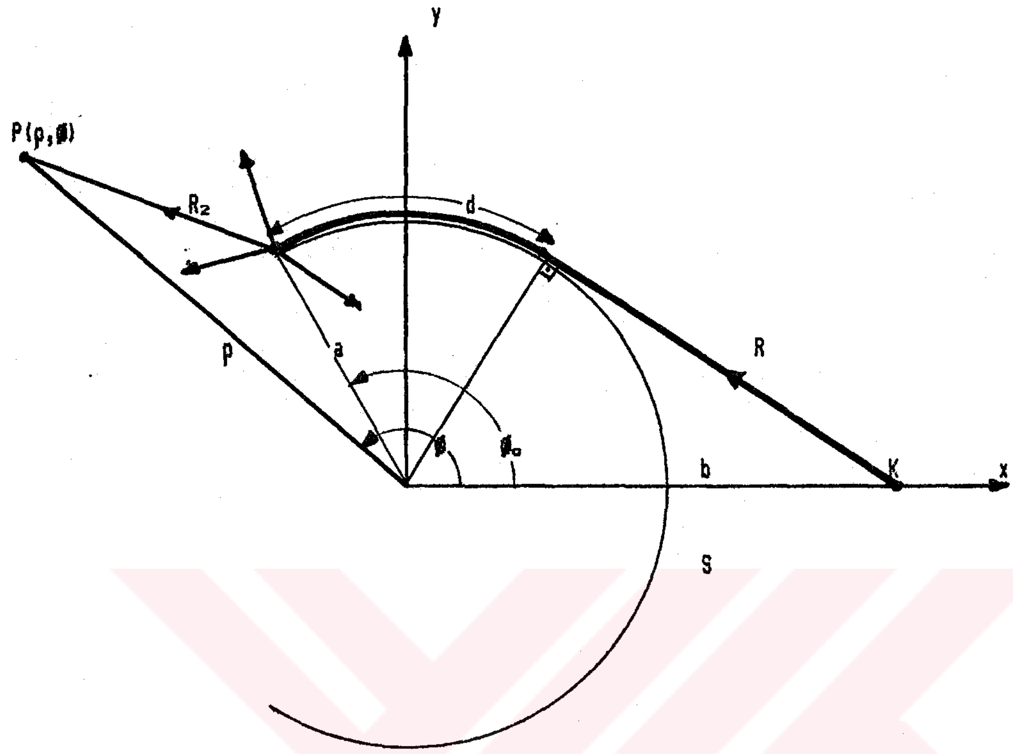
2.4.1.2. <u>Geniş Açılı Silindir Takkesi İçin Köşe Kırınımından Meydana Gelen Doğrusal Dalgalar</u>

Şimdi de, toplam alanın üçüncü terimindeki $\psi^-(\nu)$ yerine, (1.34) ile verilen ifadeyi kullanacak olursak;

$$E_z^e \sim -\frac{w\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-i3\pi/4}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,\frac{e^{ikd-\alpha d}}{\sqrt{\nu_1+ka}\;\dot H^{(1)}_{\nu_1}(ka)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)}\,\frac{e^{i\nu(\phi-\phi_0)}}{(\nu-\nu_1)\sqrt{\nu-ka}}\,d\nu \tag{2.16}$$

elde edilir. Burada, integral içindeki Hankel fonksiyonları yerine asimtotik açınımları yazılarak;



Şekil.2.6 : Geniş açılı silindir takkesi için doğrusal dalgalar

$$E_z^* \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{e^{ikd-\alpha d}}{\sqrt{\nu_1 + ka}\;\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(ka)^2-\nu^2}{(k\rho)^2-\nu^2}\right]^{1/4} .$$

$$\frac{e^{i[\sqrt{(k\rho)^2-\nu^2} - \sqrt{(ka)^2-\nu^2} - \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) + \nu(\phi - \phi_0)]}}{(\nu_1 - \nu)\sqrt{\nu - ka}} \, d\nu \qquad (2.17)$$

bulunur. Buradaki integralin asimtotik çözümü, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında yapılarak geniş açılı silindir takkesinin köşesinde meydana gelen kırınım olayı sonucunda ortaya çıkan doğrusal dalgalara ait dominant terim;

$$E_z^{s} \sim i\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{ka}\;\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\;\frac{e^{ikd-\alpha d}}{\sqrt{\nu_1+ka}\;\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)}\;\frac{\sqrt{1+\mathrm{Sin}\theta}}{(\nu_1-ka\,\mathrm{Sin}\theta)}\;\frac{e^{ikR_2}}{\sqrt{kR_2}} \tag{2.18}$$

şeklinde bulunur. (Bkz. Analitik Detay - 4)

2.4.2. KÖŞEDE UYARILAN SÜRÜNÜM DALGALARI

Köşede meydana gelen kırınım olayı neticesinde uyarılan ve silindir yüzeyi üzerinde geriye doğru giden dalgalar, köşede uyarılan sürünüm dalgalarıdır. Bu dalgalar; şekil.2.1a'daki geometri için, III bölgesinde ve şekil.2.1b'deki geometri için ise, I ve VI bölgelerinde sözkonusudur. Köşede uyarılan sürünüm dalgalarının asimtotik açınımındaki dominant terim, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, semer noktasında hesaplanamayacağından integrandın kutuplarındaki rezidüleri kullanmak gerekir.

2.4.2.1. Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Köşede Uyarılan Sürünüm Dalgaları

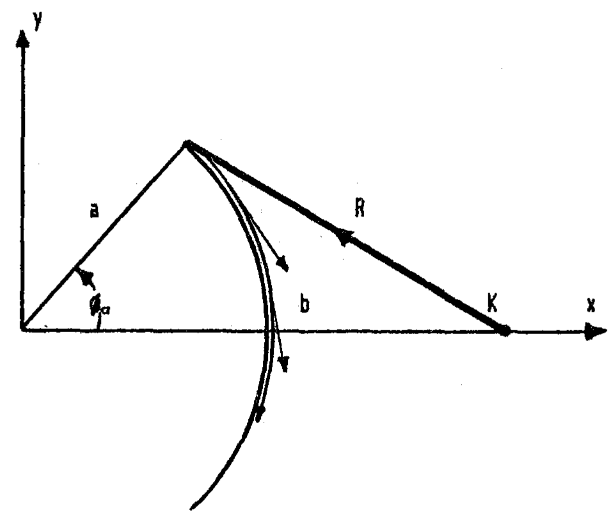
Köşede uyarılan sürünüm dalgaları (E_z^{sc}) ile gösterilmek üzere, (2.13)'de verilen ifadeyi;

$$E_z^{sc} \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4\pi}\;\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\;\sqrt{\frac{a}{R}}\;e^{ikR}\;\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H^{(1)}_{\nu}(k\rho)}{H^{(1)}_{\nu}(ka)}\;\frac{e^{i\nu(\phi-\phi_0)}}{\sqrt{\nu-ka}\;(\nu-ka\,\mathrm{Sin}\delta)}\,d\nu \tag{2.19.a}$$

şeklinde tekrar yazalım. Bu ifadedeki integralin değeri, $H^{(1)}_{\nu}(ka) = 0$ denkleminin köklerini oluşturan basit kutuplara ait alt yarı ν - düzlemindeki, toplam rezidünün $(-2\pi i)$ ile çarpımına eşittir. Sözü edilen basit kutuplar, $H^{(1)}_{\nu}(ka)$'nin kökleri olan $\nu_1, \nu_2, \ldots\ldots \nu_n$ noktalarında meydana gelmekte olup, dominant terim ν_1'den gelen katkıdır. Böylece $H^{(1)}_{\nu}(k\rho)$ fonksiyonunun asimtotik ifadesi ve Hankel fonksiyonlarına ait,

$$H^{(1)}_{-\nu_1}(ka) = e^{i\nu_1\pi}\,H^{(1)}_{\nu_1}(ka) \tag{2.19.b}$$

$$\dot{H}^{(1)}_{-\nu_1}(ka) = -e^{i\nu_1\pi}\,\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka) \tag{2.19.c}$$



Şekil.2.7 : Köşede uyarılan sürünüm dalgası

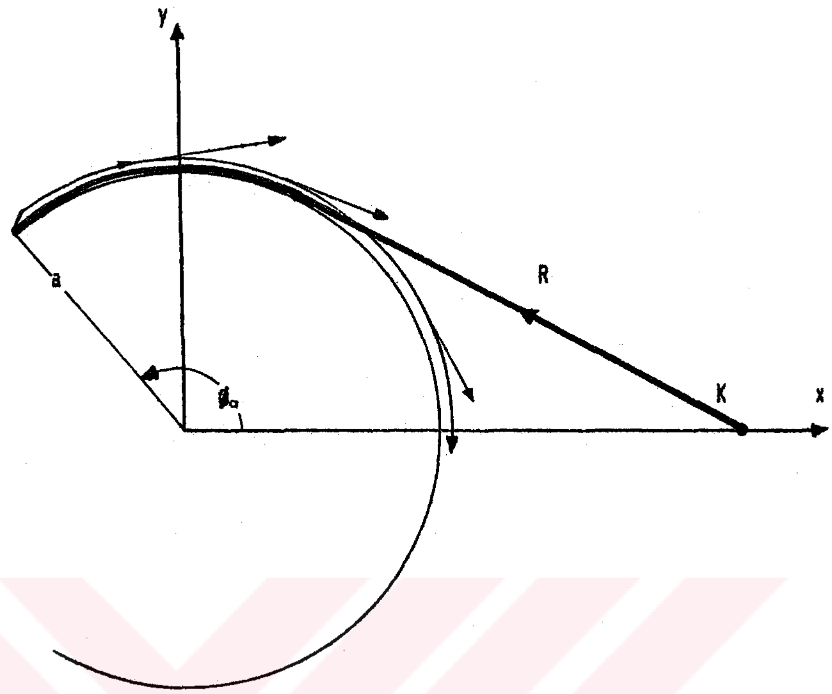
özellikleri kullanılarak;

$$E_z^{ec} \sim i\frac{w\mu_o I}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR}\, \frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}}{\sqrt{\nu_1+ka}\,(\nu_1+ka\mathrm{Sin}\delta)}\, \frac{e^{ikR_3}}{\sqrt{kR_3}}\, \frac{e^{ikd_1-\alpha d_1}}{\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \qquad (2.20)$$

elde edilir. (Bkz. Analitik Detay - 5)[4,5].

2.4.2.2. Geniş Açılı Silindir Takkesi İçin Köşede Uyarılan Sürünüm Dalgaları

Şimdi de, köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalara ait çözümün elde edilebilmesi için en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında değerlendirilmiş bulunan (2.16) ile verilen ifadeyi, integrandın kutuplarındaki rezidülerle tekrar değerlendirerek geniş açılı silindir takkesine ait sürünüm dalgalarını elde edelim. (2.16) ifadesindeki integralin değeri; $H_\nu^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun sıfırları olan $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ noktalarında oluşan basit kutuplara ait, alt yarı ν - düzlemindeki toplam rezidünün $(-2\pi i)$ ile çarpımına eşittir ve dominant terim ν_1 'den gelen katkıdır. Buna göre (2.16) ifadesinden;



Şekil.2.8 : Geniş açılı silindir takkesinde, köşede uyarılan sürünüm dalgası.

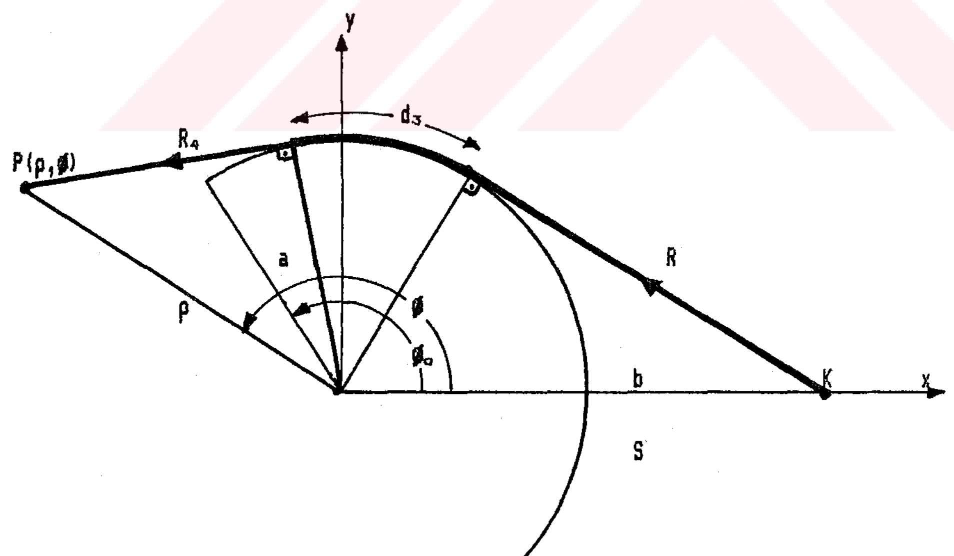
$$E_z^{ec} \sim -\frac{w\mu_o I}{2\pi}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,\frac{e^{ikd-\alpha d}}{\nu_1(\nu_1+ka)}\,\frac{e^{ikR_3}}{\sqrt{kR_3}}\,\frac{e^{ikd_2-\alpha d_2}}{[\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)]^2} \tag{2.21}$$

bulunur. (Bkz. Analitik Detay - 5)

2.5. KAYNAKTAN UYARILAN SÜRÜNÜM DALGALARI

Yüzeyde uyarılan sürünüm dalgaları, dar açılı silindir takkesi için sözkonusu olmayıp, sadece geniş açılı silindir takkesinde mevcuttur. Bunu şekil.2.1'deki geometrilerden kolayca görmek mümkündür. $\rho > b$ bölgesi için (2.3) ile verilen toplam alan ifadesinin, birinci teriminin gelen dalgayı, ikinci teriminin yansıyan dalgayı ve üçüncü teriminin de, köşe kırınımı dalgalarını verdiğini bundan önceki bölümlerde görmüş bulunmaktayız. Sözkonusu ikinci terim; gözlem noktası (P)'nin I ve II bölgeleri içinde bulunması halinde yansıyan dalga olarak bir anlam kazanır. Aksi taktirde ikinci terimden yansıyan dalgayı elde etmek imkansızdır. Bu sebeble, toplam dalganın ilk iki terimini birlikte incelemek uygun olacaktır. Mesela, gözlem noktası IV bölgesi içinde ise; bu bölgede yansıyan dalgaların gözlenemeyeceği aşikârdır. Ayrıca bu bölgede gelen dalgalar da mevcut değildir. Kısaca söylemek gerekirse; IV bölgesi, kaynağın görülemediği gölge bölgesinde kalmaktadır. Şimdi bu bölgedeki dominant dalga bileşenlerini ortaya çıkarmaya çalışacağız. (2.3) ile verilen toplam dalga ifadesinin ilk iki terimi (E_z^c) ile gösterilmek üzere;

$$E_z^c \sim -\frac{w\mu_0 I}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)}\left[H_{|\nu|}^{(1)}(ka)H_{|\nu|}^{(2)}(kb)-H_{|\nu|}^{(2)}(ka)H_{|\nu|}^{(1)}(kb)\right]e^{i\nu\phi}\,d\nu \qquad (2.22)$$



Şekil.2.9 : Kaynaktan uyarılan sürünüm dalgaları.

yazılır. Burada;

$$J_{|\nu_l|}(x) \sim \frac{1}{2} H^{(2)}_{|\nu_l|}(x)$$

bağıntısı kullanılmıştır. (2.22) ifadesindeki integral, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla integrandın kutuplarındaki rezidülerle değerlendirilebilir. Birinci terimin kutbunun olmadığı gözönünde bulundurularak, sürünüm dalgalarını veren asimtotik çözüm;

$$E_z^c \sim \frac{w\mu_0 I}{2} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{H^{(2)}_{\nu_1}(ka)}{\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)} \frac{e^{ikR_4}}{\sqrt{kR_4}} e^{ikd_3 - \alpha d_3} \tag{2.23}$$

şeklinde elde edilir. (Bkz. Analitik Detay - 6)[4,5]

2.6. FISILDAYAN GALERİ MODU DALGALARI

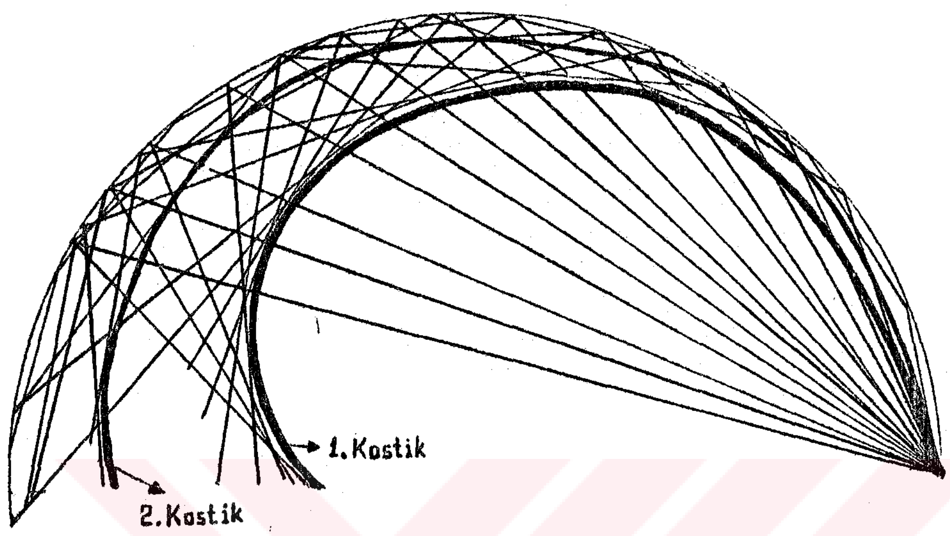
Buraya kadar, (2.3) ile verilmiş bulunan $\rho > b$ bölgesindeki toplam alan ifadesi gözönüne alınarak silindir takkesinin dış bölgelerinde ortaya çıkan çeşitli dalgalar incelenmiştir. Bu bölümde ele alınacak olan dalgalar ise; köşe kırınımı sonucunda, silindir takkesinin iç kısımlarındaki pek çok yansımadan dolayı oluşan (Fısıldayan Galeri Modları) (Whispering Gallery Modes)'dır. İç yüzeye yakın noktalarda oldukça fazla miktarda yansıyan dalga olması sebebiyle, gözlem noktası (S) yüzeyinin iç kısımlarına yaklaştıkça elektromağnetik dalgalar oldukça karmaşık bir hal alırlar. Bu karmaşık olayı aydınlatabilmek için dar ve geniş açılı silindir takkelerini ayrı ayrı ele alacağız.

2.6.1. Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Fısıldayan Galeri Modu Dalgaları

Şekil.2.1a'da verilen geometrinin V bölgesi içinde $\rho < a$ olduğundan, (1.6) denklemlerinden toplam dalga ifadesi;

$$E_z = \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) J_{|\nu|}(k\rho) e^{-i\nu\phi} d\nu \tag{2.24}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $A(\nu)$ katsayısı yerine, (1.12.a) ve (1.32) ifadeleri kullanılmak üzere;



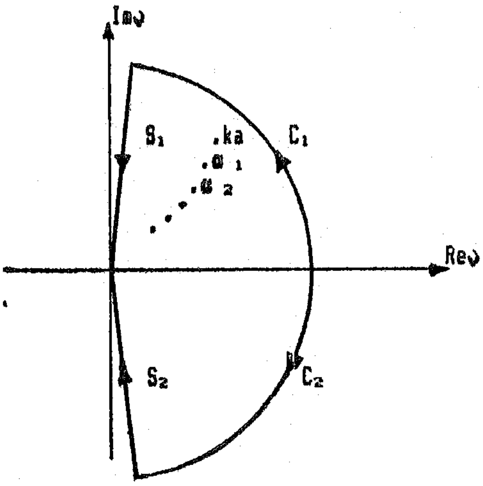
Şekil.2.10 : Fısıldayan Galeri Modu Dalgaları

$$E_z^w \sim \frac{w\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR}\, \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{|\nu|}(k\rho)}{J_{|\nu|}(ka)}\,\frac{e^{i\nu(\phi-\phi_0)}}{(\nu-ka\mathrm{Sin}\theta)\sqrt{\nu-ka}}\,d\nu \tag{2.25}$$

yazılabilir. Bu ifade, asimtotik olarak toplam rezidünün $(2\pi i)$ ile çarpımına eşittir. Buna göre fısıldayan galeri modlarına ait ifade;

$$E_z^w \sim -\frac{w\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\theta}\,\cdot$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\alpha_n}(k\rho)}{\dot{J}_{\alpha_n}(ka)}\,\frac{e^{-i\alpha_n(\phi-\phi_0)}}{(\alpha_n+ka\mathrm{Sin}\theta)\sqrt{\alpha_n+ka}} \tag{2.26}$$



Şekil.2.11 : Bessel fonksiyonunun sıfırları

şeklinde elde edilir (Bkz. Analitik Detay - 7). Burada $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$; $J_\nu(ka) = 0$ denkleminin $Re\nu > 0$ düzlemindeki kökleridir.

2.6.2. Geniş Açılı Silindir Takkesi İçin Fısıldayan Galeri Modu Dalgaları

Şekil.2.1b'deki geometrinin VIII bölgesinde geçerli olan toplam alan ifadesi de (2.24) denkleminde verildiği gibidir. Ancak burada (1.32) ile verilen $\psi^-(\nu)$ yerine, (1.34)'deki $\psi^-(\nu)$ ifadesini kullanmak gerekir. Böylece VIII bölgesindeki toplam dalga ifadesi;

$$E_z^w \sim -\frac{\omega\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,\frac{e^{ikd-\alpha d}}{\sqrt{\nu_1+ka}\;\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{|\nu_1|}(k\rho)}{J_{|\nu_1|}(ka)}\,\frac{e^{i\nu(\phi-\phi_0)}}{(\nu-\nu_1)\sqrt{\nu-ka}}\,d\nu \qquad (2.27)$$

olur. Buradaki integral, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla integrandın kutuplarında rezidüler-le hesaplanacak olursa, fısıldayan galeri modu dalgalarına ait ifade;

$$E_z^{*} \sim \frac{w\mu_o I}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-i3\pi/4}\, \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\, \frac{e^{ikd - \alpha d}}{\sqrt{\nu_1 + ka}\;\; \dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J\alpha_n(ko)}{J\alpha_n(ka)}\, \frac{e^{-i\alpha_n(\phi - \phi_o)}}{(\alpha_n + \nu_1)\sqrt{\alpha_n + ka}} \qquad (2.28)$$

şeklinde elde edilir. (Bkz. Analitik Detay - 7) [4,5]

SONUÇLAR

Bu tezde; çizgisel elektrik akım kaynağından ışıyan yüksek frekanslı elektromağnetik dalgaların mükemmel iletken yüzeyli silindir takkesinden saçılmasında optik gibi yaklaşıklık gerçekleştirilerek elektromağnetik dalgaların asimtotik analizi yapılmıştır. Bir seri toplamı şeklinde elde edilen dalga ifadelerine Poisson dönüşüm integrali uygulanarak elektromağnetik dalgaların kolayca hesaplanmasına imkân sağlanmıştır. Çizgisel kaynaktan ışıyan elektromağnetik dalgaların mükemmel iletken silindir takkesinden saçılmasında; gölge bölgesinde Poisson integral dönüşümü ile elde edilen integralin fazının semer noktası olmadığından, alan ifadesi en dik inişli integrasyon çevre metoduyla integrandın kutuplarındaki rezidülerle bulunmuş ve rezidü dalgalarının (Sürünüm dalgalarını) temsil ettiği gösterilmiştir. Aydınlık bölgede ise; integralin hesabı aynı metodla semer noktasında yapılmıştır. Ayrıca köşe kırınımı olaylarının açıklanmasını mümkün kılan Hilbert integral dönüşümünün de uygulanması neticesinde alan ifadeleri, iki katlı integrallere dönüştürülmüştür. Bu integral dönüşümleri sayesinde, optik gibi yaklaşıklığın gerçekleştirilmesi sağlanmıştır.

Çalışmada hesaplanmış bulunan elektromağnetik dalga ifadelerinin bazılarında ortaya çıkan (ν_1); sadece ilgili dalganın dominant terimini göstermektedir. Diğer terimler de gözönüne alınacak olursa, (ν_1)'lerin yerine (ν_n) değerlerini koymak yeterlidir. (ν_n) değerleri; ilgili dalga ifadelerindeki Hankel fonksiyonlarının sıfırlarını belirtir. Aynı şekilde, fısıldayan galeri modu dalgalarında gözüken (α_n) de Bessel fonksiyonunun sıfırlarını ifade etmektedir. önemle belirtmek gerekir ki; (α) ile (α_n) birbirinden tamamen farklı terimler olup, (α) ; reeldir ve zayıflama sabitini göstermektedir.

Yüksek frekanslı elektromağnetik enerjinin, gölge bölgesine sürünüm dalgaları tarafından taşındığı, ikinci bölümde açık bir şekilde gösterilmiştir. Buna karşılık; sürünüm dalgaları ifadelerinde gözüken $\exp(-\alpha d)$, $\exp(-\alpha d_1)$, $\exp(-\alpha d_2)$ ve $\exp(-\alpha d_3)$ exponansiyel terimleri saçılma yüzeyi üzerinde belirli bir zayıflamaya sebeb olurlar. Bu yüzden; nümerik sonuçlar açısından oldukça önemli olan (α) zayıflama sabitinin tam olarak belirlenmesi gerekir.

ÖZET

Mükemmel iletken yüzeyli silindir takkesi ile (ω) açısal frekanslı,(I) akımı taşıyan çizgisel elektrik akım kaynağı, bu çalışmadaki saçılma probleminin temelini teşkil etmektedir. Çalışma boyunca; dar ve geniş açılı olmak üzere iki tip silindir takkesi gözönüne alınmış olup, her iki problemin çözümü birlikte yürütülmüştür. Mükemmel iletken yüzeyli, (a) yarıçaplı silindir takkeleri; x - eksenine göre simetriktir. Aynı şekilde; çizgisel elektrik akım kaynağı, $x=b$, $y=0$ noktasında z - eksenine paralel olacak şekilde yerleştirilmiştir. Gözönüne alınan silindir takkelerinin ve çizgisel kaynağın özel konumu sebebiyle, elektrik alan sadece ($E_z(\rho,\phi)$) bileşenine sahiptir. Bu yüzden; çizgisel kaynaktan ışıyan yüksek frekanslı elektromağnetik dalgalar ve mükemmel iletken yüzeyli silindir takkesinden saçılan dalgalar TM modundadır.

Birinci bölümde ilk olarak; problemin çözümü için gerekli olan birtakım şartlar belirlenmiş ve bu şartları sağlayan elektromağnetik dalgalar $0 < \phi < \pi$ aralığında tanımlı olduklarından, karışık sınır değer problemi $-\infty < \phi < \infty$ aralığına genişletilerek orjinal probleme eşdeğer bir (Kanonik Problem) oluşturulmuştur. Daha sonra, seri toplamı şeklinde elde edilen alan ifadelerine Poisson dönüşüm integrali uygulanarak tek katlı integral ifadesi ortaya çıkarılmıştır. Aynı şekilde; köşe kırınımı olaylarını açıklığa kavuşturabilmek gayesiyle Hilbert dönüşüm integrali uygulanarak, iki katlı integral ifadeleri elde edilmiştir. Poisson dönüşüm integrali, ikinci bölümde her bir dalga ifadesi için ayrı ayrı çözülürken; Hilbert dönüşüm integralinin çözümü, bu bölümde yapılmıştır. Hilbert integralinin çözümü; gözlem noktası, dar açılı silindir takkesinde aydınlık bölgede, geniş açılı silindir takkesinde gölge bölgesinde olduğundan her ikisi için de ayrı ayrı yapılarak ilerideki hesaplar için matematiksel kolaylık sağlanmıştır. Çözüm; aydınlık bölgede, en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında, gölge bölgesinde ise; integrandın kutuplarındaki rezidülerle yapılmış olup, analitik detaylar Ekler bölümünde verilmiştir.

İkinci bölümde; gelen (direkt) dalga (I), yansıyan dalga (R), kaynaktan uyarılan sürünüm dalgaları (C) köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar (E), köşede uyarılan sürünüm dalgaları (EC) ve fısıldayan galeri modu dalgaları (W)'dan müteşekkil dominant elektromağnetik dalga bileşenlerinin bölgelere göre dağılımı gösterilmiştir. Ancak bu bölümde; kolaylık bakımından, dalgaların bölgelere göre ayrı ayrı incelenmesi yerine, dalga tipleri tek tek ele alınmıştır. Gelen, yansıyan ve köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgaların asimtotik ifadeleri; Poisson dönüşüm integralinin komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında, sürünüm dalgaları ve fısıldayan galeri modu dalgalarının asimtotik ifadeleri de; integralin basit kutupları ile değerlendirilmesi sonucunda elde edilmiştir. Bütün hesapların analitik detayı ekler bölümünde verilmiştir.

SUMMARY

In this study, the optical scattering of the electromagnetic waves, which are excited by an electrical line source, from a perfectly conducting cylinder cap has been considered. The perfectly conducting surface cylinder cap and the electrical line source, which is carring a constant current (I), constitute the basis of the problem in this study. During this study, two types of cylinder caps, which are narrow and wide angle, are considered and two problems are solved simultaneously. The cylinder cap has symmetry according to x- axis. The electrical line source is located at the points of x=b, y=0 and parallel to z- axis. Due to the special position of the geometry, the unique nonzero component of the total electric field is $E_z(\rho,\phi)$ which has been denoted by $u(\rho,\phi)$. So, high frequency electromagnetic fields which are excited by electrical line source and the fields which are scattered from the cylinder caps are on the TM mode.

At the beginning of the first chapter, the boundary conditions have been defined to solve the problem. The mixed boundary-value problem can be expanded to the interval $(-\infty < \phi < \infty)$, since the electromagnetic fields described within the interval $(0 < \phi < \pi)$. So, a canonical problem has been produced which is equal to the original problem. Using Poisson Sum Formula, the single integral expression has been obtained. In order to explain the edge - diffraction phenomenon, using Hilbert transformation integral in terms of the double integrals, the field expressions have been obtained. Hilbert transformation integral has been solved in this chapter while Poisson transformation integral solved for every field expression in the second chapter. When the observation point lies in the shadow region, Hilbert transformation integral is solved in the complex planes by the method of the steepest-descent path at the saddle-points. If it is in illuminated region, it is solved by the residue theorem.

In the second chapter, the dominant components of electromagnetic waves in the regions as shown in Figure.2.1 namely; the incident wave (I), the reflected wave (R), the creeping waves excited by the source (C), the linear waves, which are occured from the edge-diffraction, (E), the creeping waves, which are excited at the edge (EC) and the whispering gallery modes (W) have been considered. For convenience, instead of examining the electromagnetic fields for each region separately, various types of waves, which are defined above, have been considered. In order to obtain the asymptotic field expressions of the incident, the reflected and the linear waves, Poisson transformation integral has been solved in the complex planes by the method of steepest -descent path at the saddle-points. At the same time, the field expressions of the creeping waves and the whispering gallery modes have been obtained in the complex planes by the method of the steepest-descent path at the simple poles.The analitical details of all calculations have been given in the appendix.

FAYDALANILAN KAYNAKLAR

[1] Bayrakçı, H.E.,''Elektromagnetik Yayılma ve Saçılma'', Yüksek Lisans Ders Notları, Uludağ Üniv., Müh. Fak., 1985

[2] Bayrakçı, H.E.,''Asimtotik Açınım teorisi'', Yüksek Lisans Ders Notları, Uludağ Üniv., Müh. Fak., 1986

[3] Çeki, G., ''Magnetik Hertz Dipolü Alanında Bulunan, Mükemmel İletken Küre Takkesinden Optik Gibi Saçılma'', Yüksek Lisans Tezi., Uludağ Üniv., Müh. Fak., 1986

[4] Uzgören, G.,''Bir Çizgisel Kaynağın Yarattığı Dalgaların Bir Silindirik Reflektörden Saçılması'', Doktora Tezi, İTÜ, Elektrik Fak., 1982

[5] Erdoğan, E.,''Bir Halka Kaynağının Yarattığı Sürünen Dalgaların Mükemmel İletken Bir Küresel Reflektörden Saçılması'', Doktora Tezi, İTÜ, Elektrik Fak., 1982

[6] Idemen, M., Felsen, L.B., ''Diffraction of a Whispering Gallery Mode by the Edge of a Thin Concave Cylindrically Curved Surface'', IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. Ap-26, No.6, pp.571-579, 1978

[7] Idemen, M., Büyükaksoy, A., ''High-Frequency Surface Currents Induced on a Perfectly Conducting Cylindrical Reflector'', IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.Ap-32, No.5, pp.501-507, 1984

[8] Büyükaksoy, A., ''Diffraction Coefficients Related to Cylindrically Curved Soft-Hard Surfaces'', ANN. Télécommun., 40, No.7-8, pp.402-410, 1985

[9] Ishirara, T., Felsen, L.B., Green, A., ''High-Frequency Fields Excited by a Line Source Located on a Perfectly Conducting Concave Cylindrical Surface'', IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.Ap-26, No.6, pp.757-767, 1978

[10] Mathews, J.H., ''Basic Complex Variables For Mathematics and Engineering'', Allyn and Bacon Inc., Boston, 1982

[11] Noble, B., ''Methods Based of the Wiener-Hopf Technique'', Pergamon Press, New York, 1958

EKLER

ANALİTİK DETAY - 1

HİLBERT DÖNÜŞÜM İNTEGRALİNİN ÇÖZÜMÜ

Burada Hilbert dönüşüm integrali; dar ve geniş açılı silindir takkeleri için ayrı ayrı çözülecektir.

a)- Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Hilbert Dönüşüm İntegralinin Çözümü

(1.29) ile verilmiş bulunan ifadedeki integral; kompleks düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla çözülmeye elverişli biçimde olup, sözkonusu integralin faz fonksiyonu;

$$\varphi(\tau) = \sqrt{(kb)^2 - \tau^2} - \sqrt{(ka)^2 - \tau^2} - \tau\,\mathrm{Cos}^{-1}(\tau/kb) + \tau\,\mathrm{Cos}^{-1}(\tau/ka) + \tau\,\phi_o \qquad \text{(E-1.1)}$$

şeklindedir. Bu ifadenin birinci ve ikinci türevleri ise, sırasıyla;

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = \mathrm{Cos}^{-1}(\tau/ka) - \mathrm{Cos}^{-1}(\tau/kb) + \phi_o \qquad \text{(E-1.2)}$$

$$\frac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{(kb)^2 - \tau^2}} - \frac{1}{\sqrt{(ka)^2 - \tau^2}} \qquad \text{(E-1.3)}$$

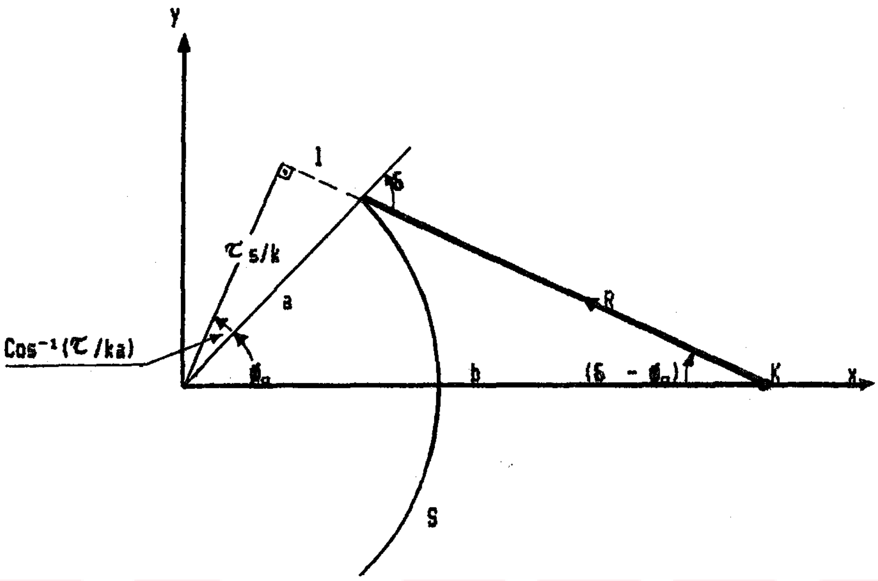
dir. Semer noktası;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\tau/ka) - \mathrm{Cos}^{-1}(\tau/kb) + \phi_o = 0 \qquad \text{(E-1.4)}$$

denkleminin çözümünden bulunacaktır. Şekil.E.1' de verilen geometriden yararlanılarak;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\tau/ka) = \frac{\pi}{2} - \delta \qquad \text{(E-1.5)}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\tau/kb) = \frac{\pi}{2} - \delta + \phi_o \qquad \text{(E-1.6)}$$



Şekil.E-1 : Köşeye gelen dalga

$$\tau_s = ka\mathrm{Sin}\delta \qquad \text{(E-1.7)}$$

elde edilir. Ayni geometri kullanılarak, sinüs teoremine göre;

$$\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2} - \delta + \phi_o)}{\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{2} - \delta)} \qquad \text{(E-1.8)}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadenin de yardımıyla faz fonksiyonu ve ikinci türevinin semer noktasındaki değeri;

$$\varphi(\tau_s) = kb\mathrm{Cos}(\delta - \phi_o) - ka\mathrm{Cos}\delta \qquad \text{(E-1.9)}$$

$$\frac{d^2\varphi(\tau_s)}{d\tau^2} = \frac{a\mathrm{Cos}\delta - b\mathrm{Cos}(\delta - \phi_o)}{kab\mathrm{Cos}\delta\,.\mathrm{Cos}(\delta - \phi_o)} \qquad \text{(E-1.10)}$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$R = b\mathrm{Cos}(\sigma - \phi_o) - a\mathrm{Cos}\sigma \qquad \text{(E-1.11)}$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$\Phi^{-}(\nu) \sim \frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{(ka)^2 - (ka\mathrm{Sin}\sigma)^2}{(kb)^2 - (ka\mathrm{Sin}\sigma)^2}\right]^{1/4}.$$

$$\frac{e^{ikR}}{(ka\mathrm{Sin}\sigma - \nu)\sqrt{ka\mathrm{Sin}\sigma + ka}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\frac{i}{2}\varphi''(\tau_s)(\tau - \tau_s)\right]^2} d\tau \qquad \text{(E-1.12)}$$

yazılabilir. Buradaki integralin çözülmesi sonucunda da;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim -\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\ \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{a}{R}}\ e^{ikR}\ \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\sigma}}{(\nu - ka\mathrm{Sin}\sigma)} \qquad \text{(E-1.13)}$$

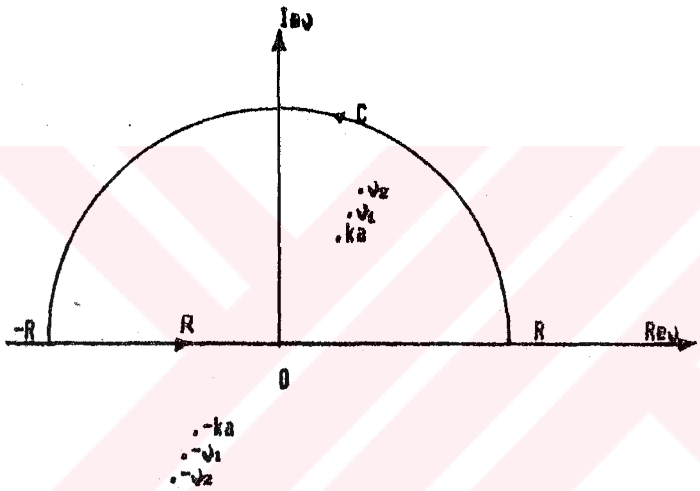
ve (1.14.b) bağıntısından,

$$\psi^{-}(\nu) \sim \frac{w\mu_o I}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\ e^{ikR}\ \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\ \frac{\sqrt{1 - \mathrm{Sin}\sigma}}{(\nu - ka\mathrm{Sin}\sigma)\sqrt{\nu - ka}}\ e^{-i\nu\phi_o} \qquad \text{(E-1.14)}$$

elde edilir.

b)- Geniş Açılı Silindir Takkesi İçin Hilbert Dönüşüm İntegralinin Çözümü

Daha önce belirtildiği gibi, (1.28)'deki integralin hesabı ancak, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, integrandın kutuplarındaki rezidülerle yapılabilir. (1.28) ifadesindeki integrandın $Im\,\tau > 0$ üst yarı düzlemindeki tekil noktalarını $H^{(1)}_{\tau}(ka) = 0$ denkleminin köklerinde meydana gelen basit kutuplar oluşturur. Sözkonusu integralin değeri, bu kutuplardaki toplam rezidünün $(2\pi i)$ ile çarpımına eşittir.



Şekil.E.2 : $H^{(1)}_{\tau}(ka) = 0$ denkleminin basit kutupları

Şimdi, (1.28)'deki integrali şekil.E.2'de verilen çevre üzerinde yazacak olursak;

$$B^{-}(\nu) \approx \frac{\omega\mu_0 I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\;\frac{1}{2\pi}\int_{R+C}\frac{H^{(1)}_{\tau}(kb)}{H^{(1)}_{\tau}(ka)}\;\frac{e^{i\tau\beta_0}}{(\tau-\nu)\sqrt{\tau+ka}}\;d\tau \qquad \text{(E-1.15)}$$

elde edilir. Jordan Lemma'sı [10] uyarınca $R \to \infty$ için C yarı dairesi üzerinde yazılan integral sıfıra gider. R yolu üzerinde yazılan integral, (1.28)'deki ifadeye eşittir. (1.28)'deki integrandın şekil.E.2'deki çevre içindeki tekil noktaları, sadece $H_{\tau}^{(1)}(ka)$'nın sıfırlarında oluştuğundan, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla integrandın kutuplarındaki rezidüler kullanılarak;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim i\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\nu_n}^{(1)}(kb)}{\dot{H}_{\nu_n}^{(1)}(ka)}\frac{e^{i\nu_n\phi_o}}{(\nu_n - \nu)\sqrt{\nu_n + ka}} \qquad \text{(E-1.16)}$$

bulunur. Burada ($\dot{}$) işareti, indis (ν)'e göre alınmış türevi, ν_n ise; $H_{\tau}^{(1)}(ka) = 0$ denkleminin köklerini belirtir. (E-1.16) ifadesindeki ilk terim, $\Phi^{-}(\nu)$ fonksiyonunun dominant kısmını oluşturduğundan ilk yaklaşımda;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim i\frac{w\mu_o I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-i\pi/4}\,\frac{e^{i[\sqrt{(kb)^2 - \nu_1^2} - \nu_1 \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/kb) + \nu_1\phi_o]}}{[(kb)^2 - \nu_1^2]^{1/4}(\nu_1 - \nu)\sqrt{\nu_1 + ka}\;\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \qquad \text{(E-1.17)}$$

yazılabilir. Burada, $H_{\nu_1}^{(1)}(kb)$ fonksiyonu yerine asimtotik açınımı kullanılmıştır.

Şimdi; $\langle(-\sigma_n)\rangle$, Airy fonksiyonu $\langle Ai(-\sigma_n)\rangle$' nin kökleri olmak üzere Hankel fonksiyonunun sıfırlarının,

$$\nu_n = ka + \sigma_n(ka/2)^{1/3}.e^{-i\pi/3} \qquad \text{(E-1.18)}$$

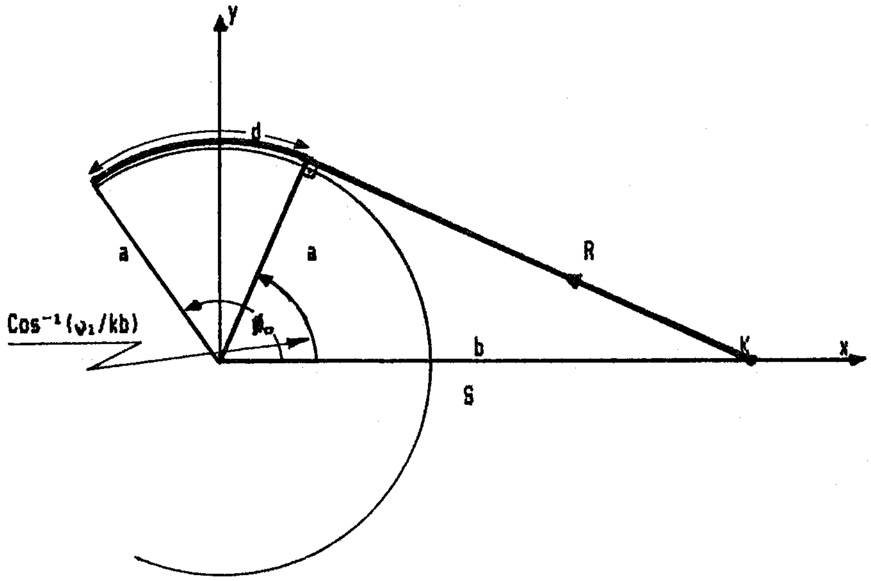
şeklinde olduğunu [5] bildiğimize göre, zayıflama faktörü;

$$\alpha = \frac{\sigma_n}{a}(ka/2)^{1/3}.e^{-i\pi/6} \qquad \text{(E-1.19)}$$

olmak kaydıyla,

$$\nu_n \sim ka + i\alpha\, a \qquad \text{(E-1.20)}$$

yazılabilir. $k \to \infty$ için ilk yaklaşımda;



Şekil.E.3 : Geniş açılı silindir takkesinde gelen dalga

$$\nu_1 \sim ka \tag{E-1.21}$$

alınabileceğinden,

$$Cos^{-1}(\nu_1/kb) \sim (a/b) \tag{E-1.22}$$

yazmak mümkündür. Şekil.E.3 ile verilen geometri yardımıyla;

$$\sqrt{(kb)^2 - \nu_1^2} = k\sqrt{b^2 - a^2} = kR \tag{E-1.23}$$

$$d = a[(\phi_0 - Cos^{-1}(\nu_1/kb)] \tag{E-1.24}$$

yazılabilir. Ayrıca;

$$\nu_1 \sim ka + i\alpha a$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$i\nu_1[\phi_0 - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/kb)] = i(ka + i\alpha\, a)[\phi_0 - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/kb)] = ikd - \alpha\, d \qquad \text{(E-1.25)}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntılardan yararlanılarak;

$$\Phi^{-}(\nu) \sim i\frac{w\mu_0 I}{2\pi ka}\sqrt{\frac{\nu - ika}{\nu - ka}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\pi/4}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,\frac{e^{i\nu_1[(\phi_0 - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/kb)]}}{(\nu_1 - \nu)\sqrt{\nu_1 + ka}\;\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)} \qquad \text{(E-1.26)}$$

ve (1.14.b) eşitliğinden de;

$$\psi^{-}(\nu) \sim -\frac{w\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,\frac{e^{ikd - \alpha d}}{(\nu - \nu_1)\sqrt{\nu_1 + ka}}\,\frac{e^{-i\nu\phi_0}}{\sqrt{\nu - ka}\;\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)}$$

(E-1.27)

elde edilir.

ANALİTİK DETAY - 2

GELEN DALGANIN ASİMTOTİK HESABI

$\rho > b$ bölgesindeki gelen dalgaların asimtotik çözümünü bulabilmek için (2.4) ile verilen;

$$E_z^i \sim -\frac{\omega\mu_o I}{4}\int_{-\infty}^{\infty} J_{|\nu|}(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu \qquad \text{(E-2.1)}$$

ifadesi;

$$E_z^i \sim -\frac{\omega\mu_o I}{4}\left[\int_{-\infty}^{0} J_{-\nu}(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho) + \int_{0}^{\infty} J_\nu(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)\right]e^{i\nu\phi}d\nu \qquad \text{(E-2.2)}$$

şeklinde yazılabilir. Hankel fonksiyonlarına ait;

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(x) \qquad \text{(E-2.3)}$$

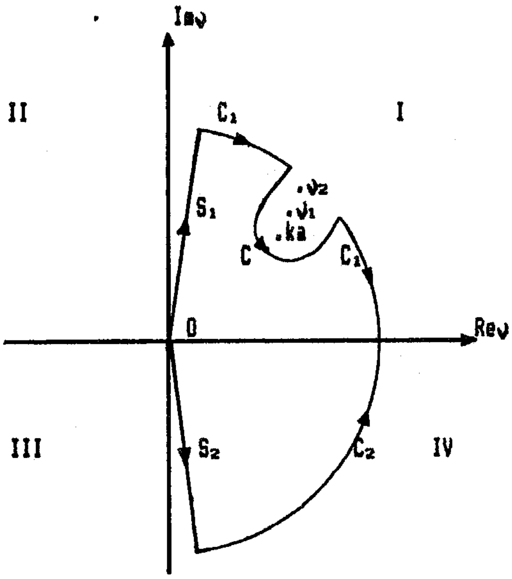
bağıntısı kullanılarak, (E-2.2) ifadesindeki birinci integralde $\nu \to -\nu$ dönüşümünün yapılması halinde;

$$E_z^i \sim -\frac{\omega\mu_o I}{4}\left[\int_{0}^{\infty} J_\nu(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\pi}e^{-i\nu\phi} + \int_{0}^{\infty} J_\nu(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}\right]d\nu$$

(E-2.4)

elde edilir.

Gerçekte, (E-2.4) ifadesindeki birinci integral, şekil.E.4'de gösterilen II bölgesinde yazılmıştır. Ancak $\nu \to -\nu$ dönüşümü yapılarak II bölgesindeki çevre, IV bölgesindeki $(S_2 + C_2)$ çevresine dönüştürülmüştür. İkinci integral ise; I bölgesindeki $(S_1 + C_1 + C)$ çevresi üzerinde yazılabilir. Jordan Lemma'sı uyarınca, $R \to \infty$ için (C_1) ve (C_2) çevreleri üzerindeki integraller sıfıra gideceğinden;



Şekil.E.4 : (E-2.1) ifadesi için integrasyon çevresi

$$E_z^I \sim -\frac{\omega\mu_0 I}{4}\Big[\int_{S_2} J_\nu(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\pi}e^{-i\nu\phi}d\nu + \int_{S_1} J_\nu(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu$$

$$+\int_C J_\nu(kb)H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu\Big] \qquad \text{(E-2.5)}$$

yazılabilir. (S_1) ve (S_2) çevreleri üzerinde yazılan integralleri semer noktası katkısı bulunmadığı gözönüne alınarak;

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right] \qquad \text{(E-2.6)}$$

bağıntısından dolayı;

$$E_z^I \sim -\frac{\omega\mu_0 I}{8}\int_C \left[H_\nu^{(1)}(kb) + H_\nu^{(2)}(kb)\right]H_\nu^{(1)}(k\rho)e^{i\nu\phi}d\nu \qquad \text{(E-2.7)}$$

elde edilir. Buradaki Hankel fonksiyonları yerine, (1.22.a-b) ile verilen asimtotik açınımları kullanılarak;

$$E_z^I \sim -\frac{w\mu_o I}{4\pi} e^{-i\pi/2} \int_C \frac{e^{i[\sqrt{(kb)^2 - \nu^2} + \sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb) - \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \phi]}}{[(kb)^2 - \nu^2]^{1/4} \; [(k\rho)^2 - \nu^2]^{1/4}} d\nu$$

$$-\frac{w\mu_o I}{4} \int_C \frac{e^{i[\sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \sqrt{(kb)^2 - \nu^2} - \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb) + \nu \phi]}}{[(kb)^2 - \nu^2]^{1/4} \; [(k\rho)^2 - \nu^2]^{1/4}} d\nu \qquad \text{(E-2.8)}$$

yazılır. Şimdi buradaki integraller, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında çözülebilir durumda olup, faz fonksiyonları sırasıyla;

$$\psi_1(\nu) = \sqrt{(kb)^2 - \nu^2} + \sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb) - \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \phi \qquad \text{(E-2.9)}$$

$$\psi_2(\nu) = \sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \sqrt{(kb)^2 - \nu^2} - \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb) + \nu \phi \qquad \text{(E-2.10)}$$

şeklindedir. Burada,

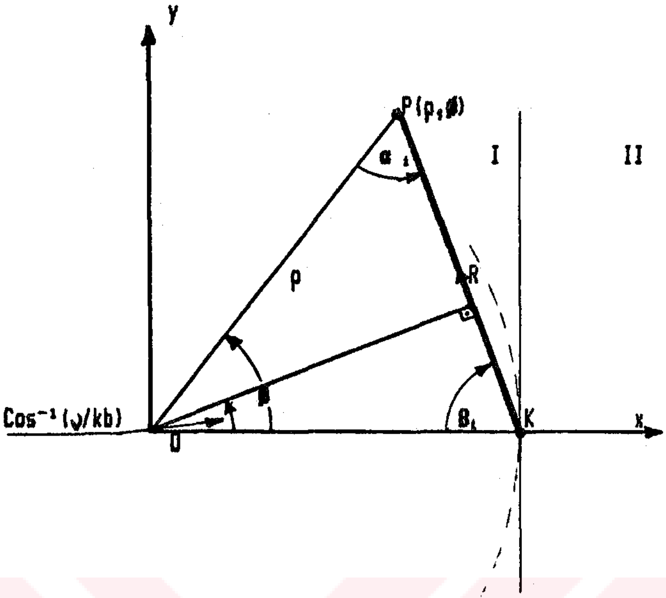
$$\operatorname{Re}[\operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb)] \in (0,\pi) \qquad \text{(E-2.11)}$$

$$\operatorname{Re}[\operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho)] \in (0,\pi) \qquad \text{(E-2.12)}$$

olmak üzere semer noktaları; faz fonksiyonlarının birinci türevlerinin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen;

$$\operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb) + \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) - \phi = 0 \qquad \text{(E-2.13)}$$

$$\operatorname{Cos}^{-1}(\nu/kb) - \operatorname{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \phi = 0 \qquad \text{(E-2.14)}$$



Şekil.E.5 : Gelen dalga

denklemlerinin sağlandığı noktalardır. Buradaki birinci denklem, (E-2.9) ile verilen faz fonksiyonunun, ikinci denklem de; (E-2.10) ile verilen faz fonksiyonunun birinci türevinden yazılmıştır. (E-2.13) denkleminin, (E-2.11-12) şartlarına uygun çözümü sadece, şekil.E.5'de gösterilen (I) bölgesinde mevcuttur. Bu sebeble, (E-2.13) denkleminin şekil.E.5 ile verilen geometri ile birlikte çözümünden;

$$Cos^{-1}(\nu/kb) = \frac{\pi}{2} - \beta_i \qquad \text{(E-2.15)}$$

$$Cos^{-1}(\nu/k\rho) = \frac{\pi}{2} - \alpha_i \qquad \text{(E-2.16)}$$

$$\nu_s = kbSin\beta_i \qquad \text{(E-2.17)}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (E-2.14) denkleminin aynı şartlara uygun çözümü sadece (II) bölgesi için sözkonusudur. Her iki bölgede de gelen dalga aynı olacağından, biz burada birinci integralin çözümünü yapmakla yetineceğiz. Buna göre; (E-2.9) ile verilen faz fonksiyonu ve ikinci türevinin semer noktasındaki değeri;

$$\varphi(\upsilon_s) = kbCos\,\beta_i + k\rho Cos\,\alpha_i = kR \tag{E-2.18}$$

$$\varphi''(\upsilon_s) = \frac{\rho Cos\,\alpha_i + bCos\,\beta_i}{kb\rho Cos\,\alpha_i . Cos\,\beta_i} \tag{E-2.19}$$

dir. Burada, şekil.E.5'den;

$$R = bCos\,\beta_i + \rho Cos\,\alpha_i \tag{E-2.20}$$

yazılmıştır. Böylece, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında asimtotik olarak hesaplanan gelen dalga

$$E_z^i \sim -\frac{w\mu_o I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\,e^{-i\pi/4} \tag{E-2.21}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade, şekil.E.5'de gösterilen (I) veya (II) bölgesindeki gelen dalganın dominant kısmını oluşturur. Yani; hem (I), hem de (II) bölgesi içindeki (P(ρ,ϕ)) için geçerlidir.

ANALİTİK DETAY - 3

YANSIYAN DALGANIN ASİMTOTİK HESABI

Daha önce belirtildiği gibi; (2.11) ifadesindeki birinci terim $\langle (E_z^r)_1 \rangle$, ikinci terim $\langle (E_z^r)_2 \rangle$ ile gösterilmek üzere, her iki terimi de ayrı ayrı değerlendirmek gerekir. Birinci terimdeki Hankel fonksiyonları yerine, asimtotik açınımları kullanılarak;

$$(E_z^r)_1 \sim \frac{w\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{e^{i\varphi(\nu)}}{[(kb)^2 - \nu^2]^{1/4} \, [(k\rho)^2 - \nu^2]^{1/4}} \, d\nu \tag{E-3.1}$$

elde edilir. Burada;

$$\varphi(\nu) = \sqrt{(kb)^2 - \nu^2} - 2\sqrt{(ka)^2 - \nu^2} + \sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/kb)$$

$$+ 2\nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) - \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \, \phi \tag{E-3.2}$$

dir. Burada;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) \in (0,\pi) \tag{E-3.3.a}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/kb) \in (0,\pi) \tag{E-3.3.b}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) \in (0,\pi) \tag{E-3.3.c}$$

olmak üzere, (E-3.2) ile verilen faz fonksiyonunun birinci türevinden elde edilen;

$$2\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/kb) - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \phi = 0 \tag{E-3.3.d}$$

denkleminin çözümü semer noktasını verir. Bu denklemin şekil.E.6'daki geometri ile birlikte çözümünden;

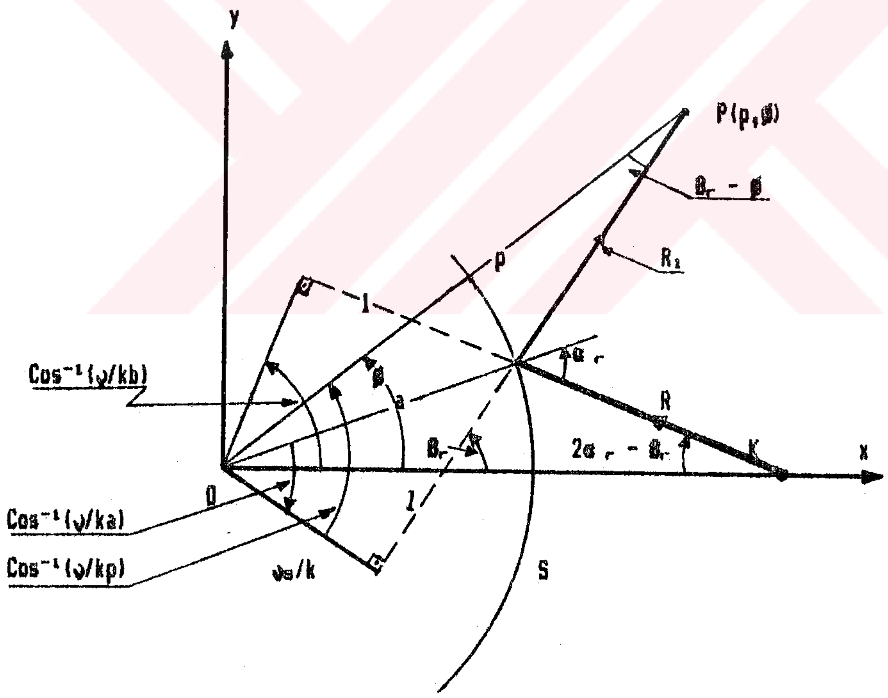
$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) = \frac{\pi}{2} - \alpha_r \qquad \text{(E-3.4)}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/kb) = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_r + \beta_r \qquad \text{(E-3.5)}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) = \frac{\pi}{2} + \phi - \beta_r \qquad \text{(E-3.6)}$$

$$\nu_s = ka\,\mathrm{Sin}\,\alpha_r \qquad \text{(E-3.7)}$$

elde edilir.



Şekil.E.6 : Yansıyan dalga

Yine şekil.E.6'da verilen geometriden;

$$R = b\mathrm{Cos}(2\alpha_r - \beta_r) - a\mathrm{Cos}\alpha_r \tag{E-3.8}$$

$$R_1 = \rho\mathrm{Cos}(\beta_r - \phi) - a\mathrm{Cos}\alpha_r \tag{E-3.9}$$

$$a = b\frac{\mathrm{Sin}(2\alpha_r - \beta_r)}{\mathrm{Sin}\alpha_r} = \rho\,\frac{\mathrm{Sin}(\beta_r - \phi)}{\mathrm{Sin}\alpha_r} \tag{E-3.10}$$

$$l = a\mathrm{Cos}\alpha_r \tag{E-3.11}$$

yazılabilir. Faz fonksiyonu ve ikinci türevinin semer noktasındaki ifadesi;

$$\varphi(\vartheta_s) = k(R + R_1) \tag{E-3.12}$$

$$\varphi''(\vartheta_s) = -\frac{Rl + R_1 l + 2RR_1}{kab\rho.\mathrm{Cos}\alpha_r.\mathrm{Cos}(\beta_r - \phi)\mathrm{Cos}(2\alpha_r - \beta_r)} \tag{E-3.13}$$

şeklinde yazıldıktan sonra, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında yansıyan dalganın asimtotik çözümündeki dominant terim;

$$(E_z^r)_1 \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{1}{k(Rl + R_1 l + 2RR_1)}}\,e^{ik(R + R_1)} \tag{E-3.14}$$

şeklinde bulunur. Yapılan bu işlemler, (2.11) ifadesindeki ikinci terim yani, $\langle(E_z^r)_2\rangle$ için de tekrarlanacak olursa; sözkonusu ikinci terimin hiçbir semer noktası katkısının olmadığı görülür. Bu sebeble yansıyan dalga, (E-3.14) ile verilen asimtotik ifadeden başka birşey değildir.

ANALİTİK DETAY - 4

KÖŞE KIRINIMINDAN MEYDANA GELEN DOĞRUSAL DALGALARIN ASİMTOTİK HESABI

A)- Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Köşe Kırınımından Meydana Gelen Doğrusal Dalgaların Hesabı

(2.14) ile verilen ifadedeki integral komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla semer noktasında çözülebilir durumda olup, faz fonksiyonu;

$$\psi(\nu) = \sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \sqrt{(ka)^2 - \nu^2} - \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) + \nu \, \phi_1 \tag{E-4.1}$$

şeklindedir. Burada ve bundan sonra,

$$\phi_1 = \phi - \phi_0 \tag{E-4.2}$$

yazılmıştır. Daha önce olduğu gibi (E-4.1) ile verilen faz fonksiyonunda;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) \in (0,\pi) \tag{E-4.3}$$

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) \in (0,\pi) \tag{E-4.4}$$

yazılarak, faz fonksiyonunun birinci türevinin sıfıra eşitlenmesiyle;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \phi_1 = 0 \tag{E-4.5}$$

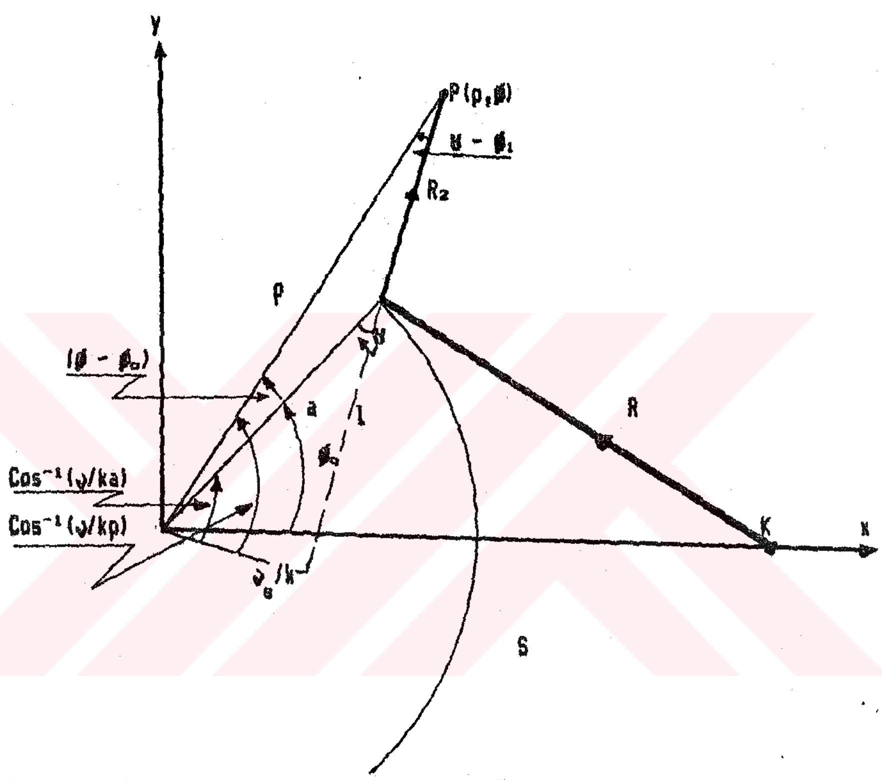
denklemi elde edilir. Semer noktası, bu denklemi sağlayan noktadır. (E-4.5) denkleminin şekil.E.7 ile birlikte çözümünden;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) = \frac{\pi}{2} - \delta \tag{E-4.6}$$

$$Cos^{-1}(\nu/k\rho) = \frac{\pi}{2} + \phi_1 - \psi \qquad \text{(E-4.7)}$$

$$\nu_a = kaSin\psi \qquad \text{(E-4.8)}$$

elde edilir.



Şekil.4.7 : Köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar

Ayrıca şekil.E.7'den;

$$a = \rho\frac{Sin(\psi - \phi_1)}{Sin\psi} \qquad \text{(E-4.9)}$$

$$R_2 = \rho Cos(\psi - \phi_1) - l \qquad \text{(E-4.10)}$$

$$l = a\ Cos\psi \qquad \text{(E-4.11)}$$

bağıntılarını yazmak mümkündür. Böylece faz fonksiyonu ve ikinci türevi, semer noktasında;

$$\psi(\nu_s) = k\rho \, \mathrm{Cos}(\theta - \phi_1) - ka \, \mathrm{Cos}\theta = kR_2 \tag{E-4.12}$$

$$\psi''(\nu_s) = - \frac{R_2}{ka\rho \, \mathrm{Cos}\theta \, \mathrm{Cos}(\theta - \phi_1)} \tag{E-4.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre, (2.14) ifadesinde yer alan integralin komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, semer noktasındaki asimtotik çözümünden;

$$E_z^* \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}\delta)(1 + \mathrm{Sin}\theta)}}{(\mathrm{Sin}\delta - \mathrm{Sin}\theta)} \frac{e^{ikR_2}}{\sqrt{kR_2}} \tag{E-4.14}$$

elde edilir.

B)- <u>Genis Açılı Silindir Takkesi İçin Köşe Kırınımından Meydana Gelen Doğrusal Dalgaların Hesabı</u>

(2.17) ile verilen ifadeyi;

$$E_z^* \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i3\pi/4} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{e^{ikd - \alpha d}}{\sqrt{\nu_1 + ka} \; \dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{(ka)^2 - \nu^2}{(k\rho)^2 - \nu^2}\right]^{1/4} \frac{e^{i\psi(\nu)}}{(\nu_1 - \nu)\sqrt{\nu - ka}} \, d\nu \tag{E-4.15}$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada faz fonksiyonu;

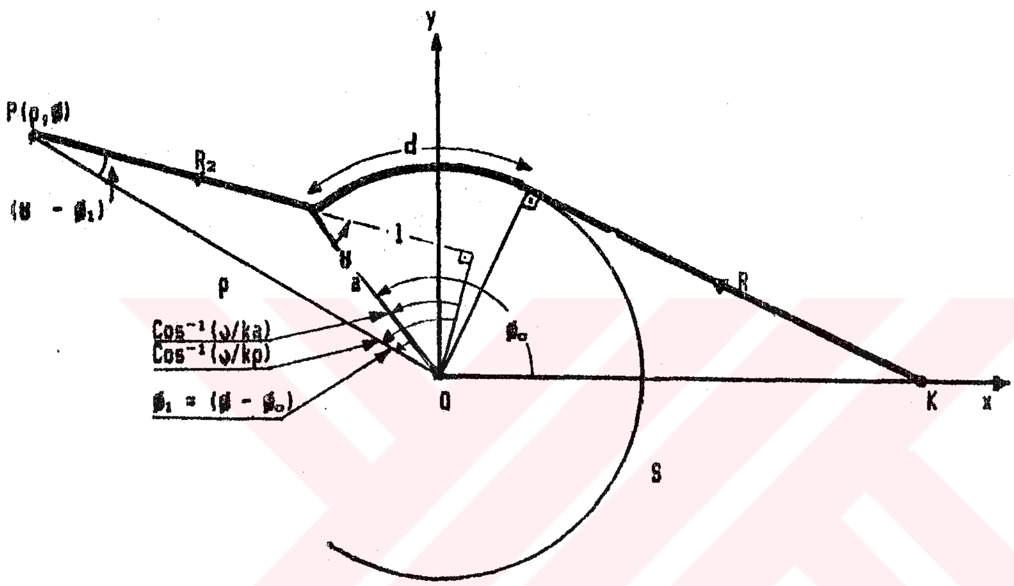
$$\psi(\nu) = \sqrt{(k\rho)^2 - \nu^2} - \sqrt{(ka)^2 - \nu^2} - \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \nu \, \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/ka) + \nu \, \phi_1 \tag{E-4.16}$$

şeklindedir. (E-4.3-4) ifadeleri burada da geçerli olup, faz fonksiyonunun birinci türevi;

$$\phi'(\nu) = Cos^{-1}(\nu/ka) - Cos^{-1}(\nu/k\rho) + \phi_1 \qquad (E-4.17)$$

dir. Semer noktası, bu ifadenin sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen;

$$Cos^{-1}(\nu/ka) - Cos^{-1}(\nu/k\rho) + \phi_1 = 0 \qquad (E-4.18)$$



Şekil.E.8 : Köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar

denkleminin çözümüdür. Böylece bu denklemin çözümünden;

$$Cos^{-1}(\nu/ka) = \frac{\pi}{2} - \theta \qquad (E-4.19)$$

$$Cos^{-1}(\nu/k\rho) = \frac{\pi}{2} + \phi_1 - \theta \qquad (E-4.20)$$

$$\nu_s = ka\, Sin\theta \qquad (E-4.21)$$

bulunur. Ayrıca şekil.E.8'de verilen geometriden;

$$a = \rho \frac{\mathrm{Sin}(\vartheta - \phi_1)}{\mathrm{Sin}\vartheta} \tag{E-4.22}$$

$$R_2 = \rho\, \mathrm{Cos}(\vartheta - \phi_1) - l \tag{E-4.23}$$

$$l = a\, \mathrm{Cos}\vartheta \tag{E-4.24}$$

yazılabilir. Bu durumda faz fonksiyonu ve ikinci türevinin semer noktasındaki ifadeleri;

$$\psi(\nu_s) = kR_2 \tag{E-4.25}$$

$$\psi''(\nu_s) = -\frac{R_2}{ka\rho\, \mathrm{Cos}\vartheta\, \mathrm{Cos}(\vartheta - \phi_1)} \tag{E-4.26}$$

olur. Böylece (E-4.15) ile verilen ifade;

$$E_z^e \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{e^{ikd - \alpha d}}{\sqrt{\nu_1 + ka}\; \dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \sqrt{\frac{\mathrm{Cos}\vartheta}{k\rho\, \mathrm{Cos}(\vartheta - \phi_1)}}$$

$$\frac{e^{i\psi(\nu_s)}}{(\nu - ka\mathrm{Sin}\vartheta)\sqrt{\mathrm{Sin}\vartheta - 1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{2}\psi''(\nu_s)(\nu - \nu_s)^2}\, d\nu \tag{E-4.27}$$

şeklinde olur. Buradaki integralin çözülmesiyle, geniş açılı silindir takkesine ait, köşe kırınımından meydana gelen doğrusal dalgalar;

$$E_z^e \sim i\frac{\omega\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{ka}\, \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{e^{ikd - \alpha d}}{\sqrt{\nu_1 + ka}\; \dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \frac{\sqrt{1 + \mathrm{Sin}\vartheta}}{(\nu_1 - ka\mathrm{Sin}\vartheta)} \frac{e^{ikR_2}}{\sqrt{kR_2}} \tag{E-4.28}$$

şeklinde ifade edilir.

ANALİTİK DETAY - 5

KÖŞEDE UYARILAN SÜRÜNÜM DALGALARININ ASİMTOTİK HESABI

A)- Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Köşede Uyarılan Sürünüm Dalgalarının Hesabı

(2.19.a) ile verilen ifadede yer alan integralin değeri; $H_\nu^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun sıfırlarını oluşturan basit kutuplara ait, $\mathrm{Im}\nu < 0$ düzlemindeki toplam rezidünün $(-2\pi i)$ ile çarpımına eşittir. Buna göre, (2.19.a)'dan;

$$E_z^{oc} \sim \frac{w\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{a}{R}}\,e^{ikR}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}\,(-2\pi i)\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\nu\to-\nu_n}(\nu+\nu_n)\,\frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)}\,\frac{e^{i\nu\phi_1}}{\sqrt{\nu-ka}\,(\nu-ka\mathrm{Sin}\delta)} \qquad \text{(E-5.1)}$$

elde edilir. Dominant katkı, $H_\nu^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun birinci kökü olan $\langle\nu_1\rangle$'den gelmekte olup, limit işleminden sonra (2.19.b-c) bağıntıları kullanılarak;

$$E_z^{oc} \sim -\frac{w\mu_0 I}{2}\sqrt{\frac{a}{R}}\,e^{ikR}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}\,\frac{H_{\nu_1}^{(1)}(k\rho)}{\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)}\,\frac{e^{-i\nu_1\phi_1}}{\sqrt{\nu_1+ka}\,(\nu_1+ka\mathrm{Sin}\delta)}$$

(E-5.2)

yazılabilir. Bu ifadede, $H_{\nu_1}^{(1)}(k\rho)$ fonksiyonunun yerine asimtotik açınımı kullanılırsa;

$$E_z^{oc} \sim i\,\frac{w\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\,e^{ikR}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}}{\sqrt{\nu_1+ka}\,(\nu_1+ka\mathrm{Sin}\delta)}\,\frac{e^{i[\sqrt{(k\rho)^2-\nu_1^2}\,-\,\nu_1\mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/k\rho)\,-\,\nu_1\phi_1]}}{\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)[(k\rho)^2-\nu_1^2]^{1/4}}$$

(E-5.3)

bulunur. Bu son ifadenin tam olarak açıklanabilmesi için, $H_\nu^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun köklerinin incelenmesi gerekir. $(-\alpha_n)$; Airy fonksiyonu $(Ai(-\alpha_n))$'nin kökleri olmak kaydıyla Hankel fonksiyonunun sıfırları, daha önceden de olduğu gibi;

$$\nu_n \sim ka + \alpha_n (ka/2)^{1/3} e^{i\pi/3} \tag{E-5.4}$$

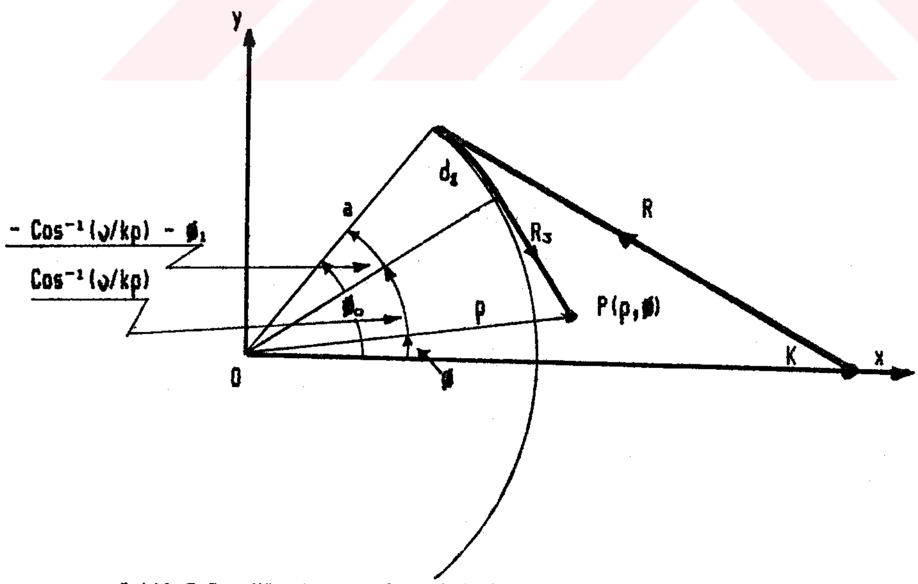
şeklinde verilmektedir. Zayıflama sabiti (α);

$$\alpha = \frac{\alpha_n}{a} (ka/2)^{1/3} e^{-i\pi/6} \tag{E-5.5}$$

olmak üzere (E-5.4) ifadesi;

$$\nu_n \sim ka + i\alpha a \tag{E-5.6}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil.E.9 : Köşede uyarılan sürünüm dalgaları

Şekil.E.9 ile verilen geometriden;

$$R_3 = \sqrt{\rho^2 - a^2} = \rho\,\mathrm{Sin}[\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho)] \tag{E-5.7}$$

$$d_1 = a[(\phi_o - \phi - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho)] \tag{E-5.8}$$

bağıntılarını yazmak mümkündür. (E-5.6) ifadesinin ilk yaklaşımı için;

$$\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) \sim \mathrm{Cos}^{-1}(a/\rho) \tag{E-5.9}$$

dir. Aynı şekilde,

$$\nu_1 \sim ka$$

yaklaşımı için;

$$\sqrt{(k\rho)^2 - \nu_1^2} = \sqrt{kR_3} \tag{E-5.10}$$

$$[(k\rho)^2 - \nu_1^2]^{1/4} = \sqrt{kR_3} \tag{E-5.11}$$

ve (E-5.6) ifadesine göre;

$$-\nu_1[\mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho) + \phi - \phi_o] = (ka + i\alpha\, a)[\phi_o - \phi - \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho)] = kd_1 + i\alpha\, d_1 \tag{E-5.12}$$

bağıntıları yazılabilir. Bütün bu eşitlikler (E-5.3) ifadesinde kullanılarak;

$$E_z^{sc} \sim i\,\frac{w\mu_o I}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\,e^{ikR}\,\frac{\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}}{\sqrt{\nu_1 + ka}\,(\nu_1 + ka\mathrm{Sin}\delta)}\,\frac{e^{ikd_1 - \alpha d_1}}{\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)}\,\frac{e^{ikR_3}}{\sqrt{kR_3}} \tag{E-5.13}$$

elde edilir.

B)- Geniş Açılı Silindir Takkesi İçin Köşede Uyarılan Sürünüm Dalgalarının Hesabı

(2.16) ifadesindeki integralin semer noktası katkısı bulunmadığı gözönüne alınarak, sözkonusu integralin hesabı, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, integrandın kutuplarındaki rezidülerle yapılmalıdır. Bu integralin değerinin, $I_m \nu < 0$ düzlemindeki toplam rezidünün $(-2\pi i)$ ile çarpımına eşit olduğu dikkate alınarak;

$$E_z^{ec} \sim -\frac{w\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4}\, \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\, \frac{e^{ikd-\alpha d}}{\sqrt{\nu_1+ka}\;\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)}\,(-2\pi i)\sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$\cdot \lim_{\nu\to-\nu_n}(\nu+\nu_n)\,\frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)}\,\frac{e^{i\nu_1\phi_1}}{(\nu-\nu_1)\sqrt{\nu-ka}} \tag{E-5.14}$$

yazılabilir. Burada (2.19.b-c) bağıntıları kullanılarak, limit işleminden sonra;

$$E_z^{ec} \sim \frac{w\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4}\, \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\, \frac{e^{ikd-\alpha d}}{\nu_1(\nu_1+ka)}\, \frac{H_{\nu_1}^{(1)}(k\rho)}{[\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)]^2}\, e^{-i\nu_1\phi_1} \tag{E-5.15}$$

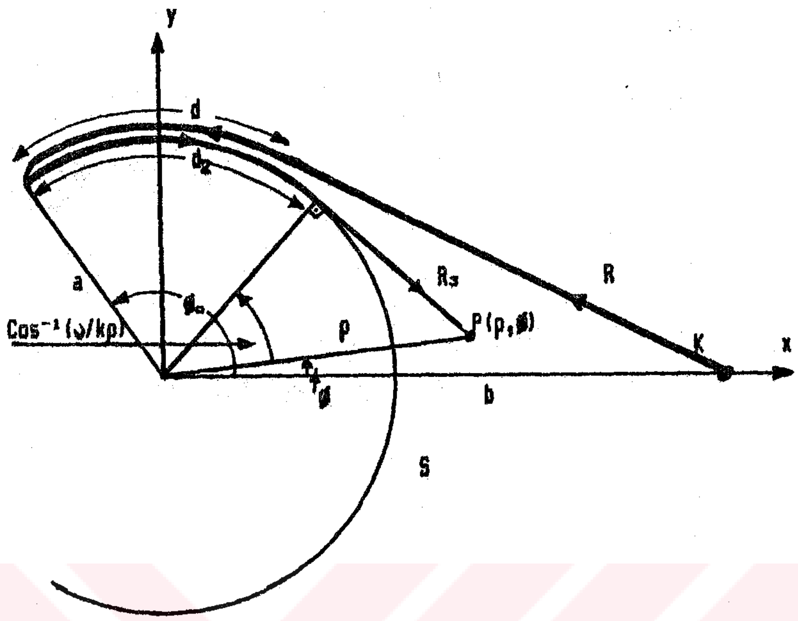
elde edilir. Burada $\langle\nu_1\rangle$; $H_{\nu_1}^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun ilk kökü olup, $ka \gg 1$ için dominant katkıyı oluşturmaktadır. (E-5.15) ifadesinde yer alan, $H_{\nu_1}^{(1)}(k\rho)$ fonksiyonu yerine asimtotik açınımı kullanılırsa;

$$E_z^{ec} \sim -\frac{w\mu_0 I}{2\pi}\, \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\, \frac{e^{ikd-\alpha d}}{\nu_1(\nu_1+ka)}\, \frac{e^{i[\sqrt{(k\rho)^2-\nu_1^2}-\nu_1 \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/k\rho)-\nu_1\phi_1}}{[(k\rho)^2-\nu_1^2]^{1/4}\,[\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)]^2} \tag{E-5.16}$$

yazılabilir. $ka \gg 1$ için;

$$\nu_1 \sim ka \tag{E-5.17}$$

yaklaşımı gözönüne alınarak, şekil.E.10'dan;



Şekil.E.10 : Köşede uyarılan sürünüm dalgası

$$d_2 = -a\,[\phi_1 + \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho)] \qquad \text{(E-5.18)}$$

$$\sqrt{(k\rho)^2 - \nu_1^2} = k\sqrt{\rho^2 - a^2} = kR_3 \qquad \text{(E-5.19)}$$

$$[(k\rho)^2 - \nu_1^2]^{1/4} = \sqrt{kR_3} \qquad \text{(E-5.20)}$$

ve

$$\nu_1 \approx ka + i\alpha\, a \qquad \text{(E-5.21)}$$

yardımıyla;

$$-i\nu\,[\phi_1 + \mathrm{Cos}^{-1}(\nu/k\rho)] = ikd_2 - \alpha\, d_2 \qquad \text{(E-5.22)}$$

bağıntılarını yazmak mümkündür. Böylece (E-5.16) ifadesinden;

$$E_z^{ec} \sim - \frac{\omega\mu_0 I}{2\pi} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{e^{ikd - \alpha d}}{\nu_1(\nu_1 + ka)} \frac{e^{ikR_3}}{\sqrt{kR_3}} \frac{e^{ikd_2 - \alpha d_2}}{[\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)]^2} \qquad \text{(E-5.23)}$$

elde edilir. Bu ifade, köşe kırınımından dolayı meydana gelen sürünüm dalgalarını verir.

ANALİTİK DETAY - 6

KAYNAKTAN UYARILAN SÜRÜNÜM DALGALARININ ASİMTOTİK HESABI

(2.3) ifadesi ile verilen toplam dalga ifadesinin, birinci ve ikinci terimlerinin gelen ve yansıyan dalga olarak yorumlanabilmesi için; gölge bölgesi (mesela, IV bölgesi) içinde bulunan gözlem noktasındaki dalganın da değerlendirilmesi gerekir. Toplam dalganın ilk iki teriminin birlikte gözönüne alınmasıyla hesaplanacak olan bu dalga, kaynak tarafından yüzeyde uyarılan sürünüm dalgalarıdır. Sözkonusu dalga, (2.22)'deki integralin, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, integrandın kutuplarındaki rezidülerle hesaplanması sonucunda asimtotik olarak ifade edilebilir. (2.22) ifadesindeki birinci integrandın kutbu bulunmadığından;

$$E_z^c \sim \frac{w\mu_0 I}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)} H_{|\nu|}^{(1)}(kb) H_{|\nu|}^{(2)}(ka) e^{i\nu\phi} \, d\nu \qquad \text{(E-6.1)}$$

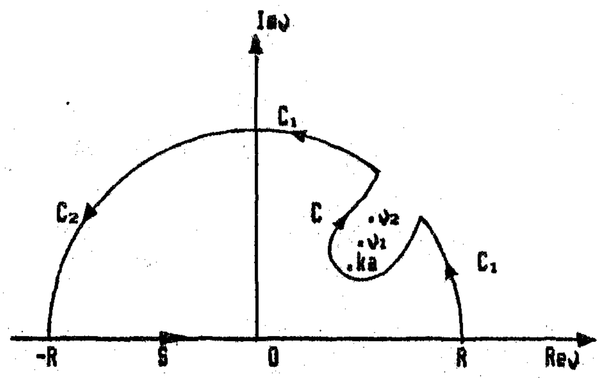
yazılabilir. Burada;

$$H_{-\nu}^{(1)}(x) = e^{i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x) \quad , \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x) \qquad \text{(E-6.2)}$$

bağıntıları kullanılarak;

$$E_z^c \sim \frac{w\mu_0 I}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_\nu^{(1)}(k\rho)}{H_\nu^{(1)}(ka)} H_\nu^{(1)}(kb) H_\nu^{(2)}(ka) e^{i\nu\phi} \, d\nu \qquad \text{(E-6.3)}$$

elde edilir. Buradaki integral yerine, şekil.E.11'deki kapalı çevre gözönüne alınacak olursa; bu çevrenin sınırladığı bölgede integrandın tekil noktalarının; ν_1, ν_2, ... ν_n şeklinde sıralanan basit kutuplardan oluştuğu anlaşılır. Bu kutuplar, (E-6.3) ifadesindeki $H_\nu^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır. Söz konusu integralin değeri ise, kapalı çevre içinde kalan kutuplardaki toplam rezidünün $(2\pi i)$ ile çarpımına eşittir.



Şekil.E.11 : $H_\nu^{(1)}(ka)$ fonksiyonunun sıfırları ve integrasyon çevresi

$R \to \infty$ için, (C_1) ve (C_2) çevreleri üzerinde yazılmış integrallerin sıfıra gideceği bilindiğine göre komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, kutuplarındaki rezidülerle;

$$E_z^c \sim i\pi \frac{w\mu_0 I}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{H_{\nu_n}^{(1)}(k\rho)}{\dot{H}_{\nu_n}^{(1)}(ka)} H_{\nu_n}^{(1)}(kb) H_{\nu_n}^{(2)}(ka) e^{i\nu_n \phi} \qquad \text{(E-6.4)}$$

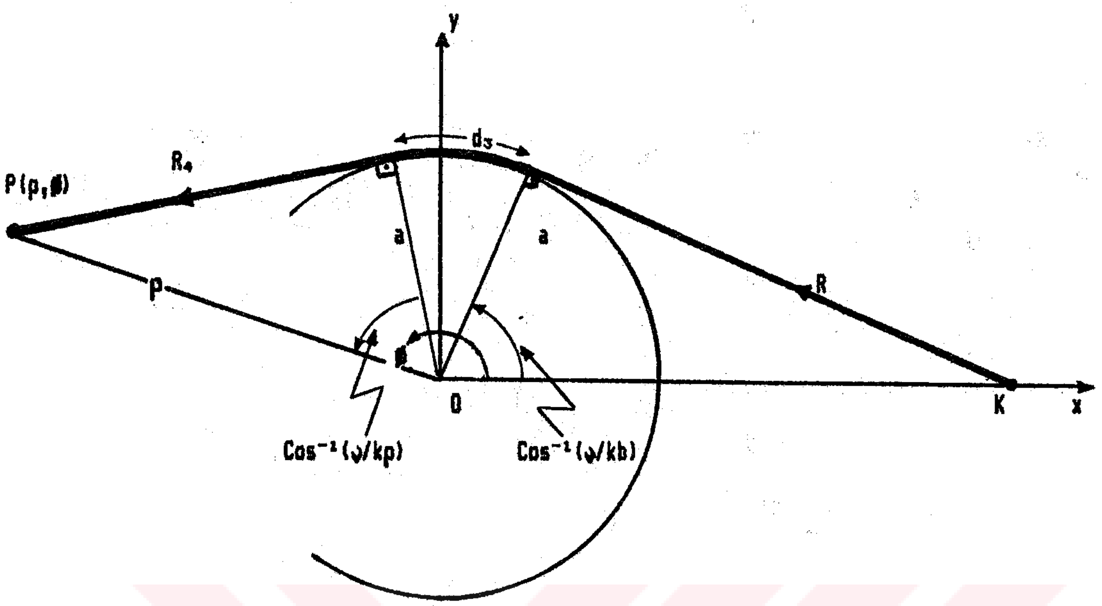
bulunur. (ν_n)'ler reel kısımları büyüyecek şekilde sıralanmış olduklarından dominant terim, $(n=1)$'den dolayı gelen terimdir. (E-6.4) ifadesindeki $H_\nu^{(1)}(kb)$ ve $H_\nu^{(2)}(k\rho)$ fonksiyonları yerine, asimtotik açınımları yazılarak;

$$E_z^c \sim \frac{w\mu_0 I}{2} \frac{H_{\nu_1}^{(2)}(ka)}{\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \frac{e^{i[\sqrt{(kb)^2 - \nu_1^2} + \sqrt{(k\rho)^2 - \nu_1^2} - \nu_1 \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/kb) - \nu_1 \mathrm{Cos}^{-1}(\nu_1/k\rho) + \nu_1 \phi]}}{[(kb)^2 - \nu_1^2]^{1/4} \, [(k\rho)^2 - \nu_1^2]^{1/4}}$$

(E-6.5)

elde edilir. (E-5.17) ile verilen yaklaşımdan dolayı şekil.E.12'den;

$$\sqrt{(kb)^2 - \nu_1^2} \sim k\sqrt{b^2 - a^2} = kR \qquad \text{(E-6.6)}$$



Şekil.E.12 : Kaynaktan uyarılan sürünüm dalgası

$$\sqrt{(k\rho)^2 - \nu_1^2} \sim k\sqrt{\rho^2 - a^2} = kR_4 \tag{E-6.7}$$

$$Cos^{-1}(\nu_1/kb) \sim Cos^{-1}(a/b) \tag{E-6.8}$$

$$Cos^{-1}(\nu_1/k\rho) \sim Cos^{-1}(a/\rho) \tag{E-6.9}$$

olmak üzere;

$$d_3 = a[\phi - Cos^{-1}(\nu_1/kb) - Cos^{-1}(\nu_1/k\rho)] \tag{E-6.10}$$

bağıntılarını yazmak mümkündür. Ayrıca (E-5.21)'den dolayı;

$$i\nu_1[\phi - Cos^{-1}(\nu_1/kb) - Cos^{-1}(\nu_1/k\rho)] \sim i(ka + i\alpha a)[\phi - Cos^{-1}(\nu_1/kb) - Cos^{-1}(\nu_1/k\rho)] = ikd_3 - \alpha d_3$$

(E-6.11)

dir.

Böylece yukarıda yazılan denklemler, (E-6.5) ifadesinde kullanılırsa;

$$E_z^c \sim \frac{w\mu_0 I}{2} \frac{H_{\nu_1}^{(2)}(ka)}{\dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} e^{ikd_3 - \alpha d_3} \frac{e^{ikR_4}}{\sqrt{kR_4}} \qquad \text{(E-6.12)}$$

elde edilir.

ANALİTİK DETAY - 7

FISILDAYAN GALERİ MODU DALGALARININ ASİMTOTİK HESABI

Birinci bölümde, Hilbert dönüşüm integralinin her iki silindir takkesi için de ayrı ayrı çözülmesiyle alan ifadesindeki çift katlı integral, tek katlı integrale indirgenmiş bulunmaktadır. Geriye kalan bu tek katlı integral, Poisson dönüşüm integrali olup, bunun da çözümü her iki silindir takkesi için ayrı ayrı yapılmalıdır.

A)- Dar Açılı Silindir Takkesi İçin Fısıldayan Galeri Modu Dalgalarının Hesabı

(2.25) ifadesinde yer alan Bessel fonksiyonlarını mutlak değerden kurtarabilmek için, integral ikiye bölünüp, birinci parçasında $\nu \to -\nu$ yazılarak;

$$E_z^{\omega} \sim \frac{\omega\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}\,\Big[i\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(k\rho)}{J_\nu(ka)}\,\frac{e^{-i\nu\phi_1}}{(\nu+ka\mathrm{Sin}\delta)\sqrt{\nu+ka}}\,d\nu$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(k\rho)}{J_\nu(ka)}\,\frac{e^{i\nu\phi_1}}{(\nu-ka\mathrm{Sin}\delta)\sqrt{\nu-ka}}\,d\nu\Big] \qquad \text{(E-7.1)}$$

elde edilir. Burada, daha önce olduğu gibi;

$$\phi_1 = \phi - \phi_0$$

yazılmıştır. Şekil.2.11 göz önüne alınarak, (E-7.1) ifadesindeki birinci integral yerine, $\langle C_1 + S_1\rangle$, ikinci integral yerine de; $\langle C_2 + S_2\rangle$ çevreleri üzerinde yazılmış integraller konulabilir . $R \to \infty$ için, $\langle C_1\rangle$ ve $\langle C_2\rangle$ çevreleri üzerindeki integrallerin herhangi bir katkısı olmayacaktır. Ancak birinci integral, $\langle C_1 + S_1\rangle$ çevresi üzerindeki integrale dönüştürülürken sonlu sayıda kutup üzerinden aşıldığından, bu kutupların rezidü katkıları gelecektir. $\langle S_1\rangle$ ve $\langle S_2\rangle$ yollarından gelecek olan katkılar da, mertebe olarak rezidü katkısından küçüktür. Böylece (E-7.1) ifadesindeki birinci integralin rezidü katkısı geleceğinden;

$$E_z^M \sim -\frac{w\mu_0 I}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\pi/4}\sqrt{\frac{a}{R}}\, e^{ikR}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\delta}\;\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{\alpha_n}(k\rho)}{\dot{J}_{\alpha_n}(ka)}\;\frac{e^{-i\alpha_n\phi_1}}{(\alpha_n+ka\,\mathrm{Sin}\delta)\sqrt{\alpha_n+ka}}$$

(E-7.2)

bulunur. Burada,

$$\dot{J}_{\alpha}(ka)=\frac{dJ_{\alpha}(ka)}{d\alpha}$$

olup, α_n ; $J_\nu(ka)=0$ denkleminin $\mathrm{Re}\,\nu>0$ düzlemindeki kökleridir.

B)- Geniş Açılı Silindir Takkesi İçin Fısıldayan Galeri Modu Dalgalarının Hesabı

Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde (2.27) ifadesinden;

$$E_z^M \sim -\frac{w\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i3\pi/4}\,\frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}}\;\frac{e^{ikd-\alpha d}}{\sqrt{\nu_1+ka}\;\dot{H}^{(1)}_{\nu_1}(ka)}$$

$$\left[\, i\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(k\rho)}{J_\nu(ka)}\;\frac{e^{-i\nu\phi_1}}{(\nu+\nu_1)\sqrt{\nu+ka}}\,d\nu+\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(k\rho)}{J_\nu(ka)}\;\frac{e^{i\nu\phi_1}}{(\nu-\nu_1)\sqrt{\nu-ka}}\,d\nu\,\right]$$

(E-7.3)

yazılabilir. Dar açılı silindir takkesi için yapılan bütün işlemler, buradaki integraller için de geçerli olduğundan, komplex düzlemde en dik inişli integrasyon çevre metoduyla, integrandın kutuplarındaki rezidülerden yararlanılarak;

$$E_z^{\omega} \sim \frac{w\mu_o I}{\sqrt{2\pi}} e^{-i3\pi/4} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{kR}} \frac{e^{ikd - \alpha d}}{\sqrt{\nu_1 + ka}\; \dot{H}_{\nu_1}^{(1)}(ka)} \sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\frac{J_{\alpha_n}(k\rho)}{J_{\alpha_n}(ka)} \frac{e^{-i\alpha_n(\phi - \phi_o)}}{(\alpha_n + \nu_1)\sqrt{\alpha_n + ka}} \qquad \text{(E-7.4)}$$

elde edilir.