MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMİNİN STOKASTİK FİNANS ARGÜMANLARINA UYGULANMASI: OPSİYON FİYATLAMA

Kenan AKARBULUT

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr.Öğr. Üyesi Eser YEŞİLDAĞ

Uşak

Ağustos, 2019

MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMİNİN STOKASTİK FİNANS ARGÜMANLARINA UYGULANMASI: OPSİYON FİYATLAMA

Kenan AKARBULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İşletme Anabilim Dalı İşletme Bölümü

Danışman: Dr.Öğr. Üyesi Eser YEŞİLDAĞ

Uşak

Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü

Ağustos, 2019

YÜKSEK LİSANS TEZ ÖZETİ

MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMİNİN STOKASTİK FİNANS ARGÜMANLARINA UYGULANMASI: OPSİYON FİYATLAMA

Kenan AKARBULUT
İşletme Anabilim Dalı
Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ağustos 2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Eser YEŞİLDAĞ

Doğa bilimlerinde ve ekonomide kullanılan matematiksel modellerin büyük çoğunluğu diferansiyel denklemler vasıtasıyla oluşturulurlar. Fakat yapılan kabuller çoğunlukla sistemin girdilerinin tam olarak bilindiği ve ölçümlerin kesin yapıldığı varsayımına dayalıdır. Bu tür modeller deterministik modeller olarak adlandırılır ve sistemin ancak kısıtlı bir betimlemesini yapabilirler. Olasılık teorisinin kullanılmasıyla bu modellerde ölçümlerden ve başlangıç koşullarından kaynaklanan belirsizlikler diferansiyel denklemlerde gürültü terimi ile ifade edilirler. Bu tür denklemlere stokastik diferansiyel denklemler denir.

Finansal piyasalarda yatırımcılar riskten kaçınmaktadır. Türev Piyasalarındaki finansal ürünler bu amaçla üretilmiştir. Bu ürünlerin fiyatlandırılması ise her iki tarafın haklarını korumak için önemli bir problem oluşturur. Dolayısıyla belirsizliklerin fiyatlamaya katıldığı Geometrik Brown sürecine sahip modellerin simülasyonu sorunu çözmek için önemli bir adımdır.

Bu çalışmanın temel amacı, finansal türev ürünlerden biri olan opsiyonların fiyatlandırmasında kullanılan, Black-Scholes metodu ile Monte Carlo metodu kullanarak oluşturulan opsiyon primleri arasındaki farklılıkları ortaya koymaktır.

Bu çalışmada yapılan hesaplamalar Monte Carlo ile Black-Scholes modelleri arasında opsiyon primleri açısından önemli bir farklılık olmadığını göstermiştir.

Anahtar Kelimeler : *Black-Scholes Metodu, Monte Carlo Metodu, Binom Metodu Opsiyon Fiyatlama, Stokastik Analiz, Geometrik Brown Süreci*

ABSTRACT

APPLICATION OF MONTE CARLO SIMULATION METHOD TO STOCHASTIC FINANCE ARGUMENTS: OPTION PRICING

Kenan AKARBULUT
Department of Business Administration
Uşak University Institute of Social Sciences, August 2019

Supervisor: Asst. Prof. Eser YEŞİLDAĞ

The majority of mathematical models used in natural sciences and economics are formed by differential equations. However, the assumptions are mostly based on the assumption that the inputs of the system are fully known and that the measurements are made precisely. Such models are called deterministic models and can only make a limited description of the system. By using probability theory, uncertainties arising from measurements and initial conditions are expressed in terms of noise in differential equations. Such equations are called stochastic differential equations.

In financial markets, investors avoid risk. Financial products in the Derivative Markets were produced for this purpose. Pricing of these products is an important problem to protect the rights of both parties. Therefore, simulation of models with Geometric Brown process, where uncertainties are involved in pricing, is an important step to solve the problem.

The main purpose of this study is to reveal the differences between the option premiums used in the pricing of options, which is one of the financial derivatives, by using Black-Scholes method and Monte Carlo method.

The calculations made in this study showed that there is no significant difference between Monte Carlo and Black-Scholes models in terms of option premiums.

Keywords : *Black-Scholes Method, Monte Carlo Method, Binomial Method Option Pricing, Stochastic Analysis, Geometric Brown Process*

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
Tezli Yüksek Lisans Jüri ve Enstitü Onayı

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

İşletme Ana Bilim / Ana Sanat Dalı Yüksek Lisans Programı 134005039 No'lu öğrencisi Kenan AKARBULUT'un " Monte Carlo Simülasyon Yönteminin Stokastik Finans Argümanlarına Uygulanması: Opsiyon Fiyatlama " adlı tezi 02/09/2019 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Uşak Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, Yüksek Lisans Tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Jüri		**Adı Soyadı**	**İmza**
Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Eser YEŞİLDAĞ	
Üye	:	Prof. Dr. Yusuf KADERLİ	
Üye	:	Dr. Öğr. Üyesi Mustafa SOYERTEM	

Prof. Dr. Mehmet KARAYAMAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Eser YEŞİLDAĞ ile destekleriyle her zaman yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

KENAN AKARBULUT

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Kenan AKARBULUT
Uyruğu	: TC.
Doğum Tarihi ve Yeri	:12/07/1977-Elazığ
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0542 201 74 64
Faks	:
e-mail	:akarbulut@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Marmara Üniversitesi /Matematik Bölümü	1998
Lise	Manisa Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1998-2011	Uşak	Özel Öğretim Kursu Matematik Öğr.
2011-2016	Uşak Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Bilgisayar, Film izleme, Kitap Okuma

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

KISALTMALAR

SDE : Stokastik diferansiyel denklemler
ODE : Adi diferansiyel denklemler
PDE : Kısmi türevli diferansiyel denklemler
h.h. : Hemen her yerde
h.h.k. : Hemen her yerde kesin
s.s. : Sonsuz sıklıkta
b.ö.d : Bağımsız Özdeş Dağılımlı
s.b.d : Sonlu Boyutlu Dağılım
d.d. : Diğer Durumlarda

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\emptyset$	Boş Küme
$\in$	Eleman
$\notin$	Eleman değil
$\mathscr{A}$	σ-Cebir
$:=$	Tanımlama
ω	Olay
Ω	Örneklem Uzayı
$(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$	Ölçü Uzayı
$(\Omega, \mathscr{A}$,P)	Olasılık Uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklit Uzayı
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
J	$a \in \mathbb{R}$ için $J = (-\infty, a]$
X	X rassal değişkeni
$\overrightarrow{X}$	X rassal vektörü
P	Olasılık Ölçüsü
A^c	A kümesinin Tümleyeni
$\mathscr{B}$	Borel σ-Cebri
$\mathscr{B}^n$	$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı Borel σ-Cebri
$exp(x)$	Exponansiyel Fonksiyon , e^x
$P(.\|.)$	Koşullu Olasılık
F_x	X rassal değişkeninin Dağılım Fonksiyonu
χ_A	A olayının Karakteristik Fonksiyonu
$\|\| \cdot \|\|$	Norm

GİRİŞ

1944 yılının Temmuz ayında ABD'nin New Hampshine eyaletinin Bretton Woods kasabasında 44 ülkenin katılımı ile gerçekleşen konferans sonucu finansal sistem üzerine önemli kararların alındığı bir antlaşma imzalanmıştır.

1971 yılında antlaşma bozulmuş, 1973 yılında sanayileşen ülkelerin para birimleri dalgalanmaya bırakılması ile yıkılmıştır. Bunun sonucunda finans dünyası özellikle döviz kuru ve faiz oranları gibi araçlar da finansal risklerle karşı karşıya kalmıştır. Böylece finansal risk yönetimi önem kazanmıştır.

Risk kelimesini Türk Dil Kurumu resmi sitesinde "zarara uğrama tehlikesi" olarak açıklamıştır. Finansal risk kavramı ise bir yatırım ya da teşebbüsün sonucunda meydana gelebilecek olan beklenmedik zarara uğrama tehlikesi olarak tanımlanmaktadır.

Finansal piyasalardaki dalgalanmalar sonucu ortaya çıkan riski azaltmak veya riskten kaçınmak için yeni finansal araçlar geliştirilmiştir. Türev ürünler bu önemli finansal araçlardandır.

Türev kelimesinin farklı kullanımlarından birisi "ürünün üzerinden dolaylı kullanım sonucu elde edilen fayda" olarak tanımlanır. Türev piyasalarında işlem gören türev ürünler de bu şekilde bir dayanak varlıktan elde edilen direk veya dolaylı kazanç ürünleridir. Yani türev piyasalarında gerçek alım-satımlarından üretici veya alıcılar dışındaki finansman sağlayıcıların kazanç elde etmesini sağlayan araçlardır.

Futures sözleşmeleri, Forward sözleşmeleri, Opsiyonlar ve Swaplar türev ürünler arasındadır. Dayanak varlık olarak temel alınan ana ürünler ise hisse senetleri, tahviller, döviz, faiz ve emtia ürünleri sayılabilir.

Riskten korunmak ve finansal yatırımların geleceği için türev ürünlerin fiyatlandırması önemlidir. Bu çalışmada da türev ürünlerden olan Opsiyonların fiyatlandırılmasını incelenmiştir.

Bu çalışmanın birinci bölümünde finansal türev piyasaları ve opsiyon sözleşmeleri ile ilgili temel bilgiler üzerinde durulurken ikinci bölümde simülasyon metotları ve Monte Carlo simülasyonu kavramları incelenmiştir. Üçüncü bölümde uygulama yapılarak sonuçlar ile ilgili değerlendirme yapılmıştır. Ayrıca Ekte verilen bölümle İleri Stokastik Analiz ve SDE konularında gerekli bilgiler verilmiştir.

Bu çalışmanın amacı da finansal türev ürünlerden biri olan opsiyonların fiyatlandırmasında kullanılan, Black-Scholes metodu ile Monte Carlo metodu kullanarak oluşturulan opsiyon primleri arasındaki farklılıkları ortaya koymak olmuştur.

1. BÖLÜM : FİNANSAL TÜREV ÜRÜNLER İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

1.1. FİNANSAL PİYASALAR

Mali değeri olan araçların, ürünlerin ve hizmetlerin alım-satımının yapıldığı gerçek ve sanal ortamlara piyasa denilir. Özellikle mali değeri olan araçların işlem gördüğü piyasalar ise finansal piyasalardır (VOB, 2012).

Finansal türev ürünler, mevcut sistemde geleceğe yönelik yapılacak olan yatırımlarda belirsizlikleri azaltmak ve yatırımcıyı da üreticiyi de koruma amacı ile yapılan sözleşmelerdir.

Finansal piyasalarda kullanılan türev kelimesinin anlamı, bu piyasalarda işlem gören ürünler başka dayanak varlık üzerinden yapılan yatırım ve temin amaçlı sözleşmelerdir (Yıldırak ve Çalışkan, 2008). Bu sözleşmeler arasında en önemli olanları Futures, Forward, Opsiyon ve Swap sözleşmeleridir. Bir yatırımcının dikkat ettiği en önemli noktalar arasında fiyat dalgalanmaları ve dalgalanmalardan kaynaklanacak olan riskleri iyi analiz etmektir.

Finansal türev ürünlerdeki amaç adil fiyat politikası gözeterek her iki tarafı da korumaktır. Bu noktada türev ürünlerin işlevi, dayanak varlıklarla birlikte doğru pozisyon alınarak yatırımcı için risksiz ortam oluşturmaktır (Yıldırak ve Çalışkan, 2008). Bu piyasalarda işlem yapan üç grup vardır. Birincisi piyasadaki riskten kaçınan yatırımcılar (hedger), ikincisi kâr ve yüksek getiri hedefleyen yatırımcı (spekülatör) ve son olarak bunlara aracılık yapan finansal kurumlardır.

Türev piyasaları, finansal araçların gelecekteki bir zaman diliminde alınmasına dair bugünden yapılan alım-satım sözleşmelerinin yapıldığı piyasalardır.

Finansta piyasaları işlem gördükleri yere göre ayrıştırabiliriz. Türev piyasaları iki ana grupta toplanabilir.

1.1.1. Organize(Düzenli) Türev Piyasalar

Teslimat ve nakit akışının belli kurumlar tarafından denetlendiği piyasalardır. Organize piyasalarda, piyasayı yöneten kurum vardır. Bu kurum piyasada işlem yapmanın koşullarını belirleyerek işlemlerde taraf olur. Organize piyasalarda hiyerarşik bir yapı vardır. Opsiyon piyasaları ve Futures (Vadeli İşlem) piyasaları, organize piyasalara örnek olarak verilebilir.

1.1.2. Organize Olmayan(Tezgahüstü) Türev Piyasaları

Düzenleyici ve denetleyici kurumların olmadığı tarafların karşılıklı alım-satım yaptığı piyasalardır. Taraflar arasındaki görüşmelere koşullar ve teslim şartları belirlenir. Forward (Alivre) ve Swap (Takas) piyasaları, organize olmayan piyasalara örnek olarak verilebilir.

Türev piyasalarında yatırım yapan yatırımcılar eğer alım yapıyorsa *uzun pozisyon almış*, eğer satım yapıyorsa *kısa pozisyon almış* denir (Sucu ve Kul, 2015).

1.2. TÜREV ARAÇLAR

Alivre (Forward), Vadeli işlem (Futures), Opsiyon ve Swap sözleşmeleri vadeli piyasalarda yaygın kullanılan araçlar olup bu araçlar aşağıdaki gibidir.

1.2.1. Forward (Alivre) Sözleşmeleri

Forward piyasaları, finansal piyasaların gelişmesinde çok önemli rol oynamaktadır. Bir çok piyasa forward piyasaları aracılığıyla gelişmiştir (Chambers, 2007).

Özellikle Ortaçağda tarımsal ürünlerin elde edilmesindeki belirsizliklerden dolayı gelişmeye başlamıştır. Üretici ve çiftçilerin fiyat değişikliklerinden kaçınma çabaları ve tüketicilerin ürün bulma sıkıntısını çözmeleri piyasayı hareketlendirmiştir. Bu piyasalara örnek olarak Liverpool Pamuk Borsası gösterilebilir (Chambers, 2007).

1.2.2. Futures (Vadeli İşlem) Sözleşmeleri

Futures sözleşmeleri organize edilmiş piyasalarda işlem gören standart bir süre içinde belirlenmiş fiyattan belli standartlara uyarak işlem gören günlük dengeleme prosedürüne sahip dayanak varlığını alma veya satma yükümlülüğü veren sözleşmelerdir (Chambers, 2007; Sucu ve Kul, 2015).

Futures sözleşmelerinin avantaj sağlayan önemli iki özelliği vardır. Bunlar işlem çabukluğu ve likitidir. Futures sözleşmeleri kolaylıkla el değiştirebilir. Aynı zamanda fiyattan etkilenmeksizin büyük miktardaki meblağlarla işlem görebilir (Chambers, 2007).

Tablo 1.1: Forward Sözleşmeleri ile Futures Sözleşmeleri arasındaki ilişkiler

Forward(Alivre) Sözleşmeleri	**Futures(Vadeli İşlem) Sözleşmeleri**
İki taraf arasında yapılır.	Borsada yapılır.
Sözleşme unsurları standart değildir.	Sözleşme unsurları standarttır.
Diğer piyasa katılımcıları yapılan alivre sözleşmelerden habersizdir.	Vadeli işlem sözleşmeleri borsalarda şeffaf bir şekilde işlem görür.
Vade sonunda teslimat ile sonuçlandırılır.	Vade sonuna kadar ters işlem ile pozisyon kapatılabilir. Teslimat zorunlu değildir.
Devredilemez.	Vade sonuna kadar tekrar alınıp satılabilir.
Kredi riski vardır.	İşlemler Borsa Takas Kurumu'nun garantisindedir.
Kâr veya zarar vade sonunda ortaya çıkar.	Kâr veya zarar günlük olarak hesaplanır ve ilgili hesaplara yansıtılır.
Başlangıçta bir teminat zorunluluğu yoktur.	İşlem yapmak için belirli bir teminat yatırılması zorunludur.

Kaynak:Türev Araçlar Lisanslama Rehberi, 2012 ; Yıldırak vd., 2008

Tablo 1.1'de Forward Sözleşmeleri ile Futures Sözleşmelerinin özellikleri ve arasındaki farklılıklar belirtilmiştir.

1.2.3. Swap (Takas) Sözleşmeleri

İki taraf arasında önceden belirlenen bir sistem içinde finansal varlıktan kaynaklanan gelecekteki nakit akışlarının değiştirilmesi için yapılan özel sözleşmelerdir (Chambers, 2007). Swap sözleşmelerinde başlangıç tarihi, bitiş tarihi ve ödemelerinin yapılması gereken tarihler belirlidir. Özellikle Döviz, Faiz ve Hisse Senedi swapları en yaygın kullanılan swap sözleşmeleridir. Swap sözleşmeleri, işlem yapan taraflar için maliyeti azaltırken farklı ülkelerden olma durumunda özellikle vergi yasalarından ve bazı ekonomik düzenlemelerden kaçınma olanağı sağlar (Chambers, 2007).

1.2.4. Opsiyon Sözleşmeleri

Opsiyon sözleşmesi, gelecekte belirlenmiş bir tarihi baz alarak bu tarihe kadar bir dayanak varlıkla ilgili kullanım fiyatı belirleyerek istenilen miktarda ve şartlarda alma veya satma hakkını tanıyan sözleşmelerdir.

Opsiyon sözleşmelerinde iki taraf vardır. Bunlar opsiyon alıcısı ve opsiyon satıcısıdır. Alıcı, prim ödeyerek almak istediği varlığı anlaştığı şartlarda belirlenen tarihe kadar alma hakkı elde ederken vazgeçmesi halinde ödediği primi kaybeder. Satıcı, prim ödeyen alıcıya karşı opsiyonu kullanması durumunda zorunlu olarak yükümlülüğünü yerine getirmelidir. Opsiyon satana *Yazıcı (Writer)*, opsiyon alana *Opsiyon Sahibi (Holder)* denir (Sucu ve Kul, 2015).

1.3. Opsiyonlar

Çalışmanın konusu opsiyon fiyatlandırma olduğundan opsiyon kavramını biraz daha ayrıntılı olarak aşağıda verilmiştir.

1.3.1. Opsiyon Tanımı

Bir veya daha fazla dayanak varlık üzerinden yapılan sözleşmede belirtilen bir tarihte, belirtilen bir miktarda ve belirtilen bir fiyat üzerinden alma veya satma hakkı veren sözleşmelerdir.

1.3.2. Opsiyonların Tarihsel Gelişimi

Dünya tarihi incelendiğinde çok eski zamanlarda opsiyon sözleşmesi sayılabilecek sözleşmeler vardır. Bunlardan kayıtlı olup ilk olarak bilinenlerden biri Yunan filozof ve matematikçi Thales'in hayatında yaşadığıdır. Astronomi bilgisi ve hesap yeteneğini kullanarak bir sonraki dönemde zeytin rekoltesinin yüksek olacağını tahmin eden Thales, bütün zeytin işleme merkezlerini önceden uygun fiyattan kiralar. Sezonu geldiğinde ise tek işletmeci konumundadır. Bu da ilk opsiyonlardan biridir (Karan, 2013). Fenikeliler ve Romalıları da benzer şekilde ticari sözleşmeler yapmışlardır. 17. yüzyılda Hollanda'da yaşanan lale çılgınlığı ve tüccarların lale soğanı temini için opsiyon sözleşmesi benzeri sözleşme yapmışlardır. Opsiyon sözleşmeleri 1973 yılına kadar tezgahüstü piyasalarda işlem görmüştür.

Opsiyon sözleşmelerinin sistematik gelişimi esas olarak 1973 yılında açılan Chicago Opsiyon Borsası ile olmuştur. Bunu dünyanın birçok yerinde açılan 50'ye yakın borsa takip etmiştir.(Chambers, 2007; Karan, 2013).

1.3.3. Opsiyon İle ilgili Kavramlar

Opsiyonlarla ilgili önemli bazı kavramları kısaca açıklayalım.

1.3.3.1. Kullanım (İşlem) Fiyatı

Opsiyona konu olan varlığın organize borsa tarafından belirlenen alım-satım fiyatıdır. Vade sonunda belirlenen bu fiyattan dayanak varlık satılarak opsiyon kapanır.

1.3.3.2. Opsiyon Primi

Opsiyona konu olan dayanak varlığın üzerindeki opsiyonla elde edilen hakkı korumak amacıyla sözleşme karşılığı ödenen teminat bedelidir. Alım opsiyon primi C ve satım opsiyon primi P ile gösterilir.

1.3.3.3. Opsiyonun Vadesi

Opsiyon sözleşmesinin bittiği tarihtir. Opsiyon primi vadeye göre değer kazanır. Prim fiyatını etkileyen faktörler arasındadır. Bazı opsiyonlarda sadece vade sonunda işlem yapılabilirken bazı tür opsiyonlarda vadesinden öncede işlem yapılabilir.

1.3.3.4. Uzun Pozisyon

Opsiyon sözleşmesi satın alan taraftır. Opsiyon sözleşmelerinde uzun pozisyon alan yatırımcı belirlenen opsiyon primini ödeyerek sözleşmede belirtilen miktar ve koşullarda sözleşme tarihinde dayanak varlığı almayı taahhüt eder.

1.3.3.5. Kısa Pozisyon

Opsiyon sözleşmesi satan taraftır. Opsiyon sözleşmelerinde kısa pozisyon alan yatırımcı belirlenen opsiyon primini alarak sözleşmede belirtilen miktar ve koşullarda sözleşme tarihinde dayanak varlığı temin etmeyi taahhüt eder.

1.3.3.6. Kâr Fonksiyonu

Opsiyonun T anındaki ödemeleri ile kullanım fiyatı arasındaki farktır. π ile gösterilir. Örneğin Avrupa tipi alım opsiyonu için kâr fonksiyonu,

$$\pi = [max(0, S_T - K) - C)] = \begin{cases} S_T - K - C & , S_T > K \\ -C & , S_T \leqslant K \end{cases} \tag{1.1}$$

ve Avrupa tipi satım opsiyonu için kâr fonksiyonu,

$$\pi = [max(0, K - S_T) - P)] = \begin{cases} K - S_T - P & , S_T < K \\ -P & , S_T \geqslant K \end{cases} \tag{1.2}$$

1.3.3.7. Karda, Zararda, Başabaş

Alım ve satım opsiyonu için farklı olarak karşımıza çıkan kavramda alım opsiyonu için eğer opsiyon kullanım fiyatı cari fiyattan küçükse *kârdadır*, eğer kullanım fiyatı cari fiyattan büyükse *zarardadır* denir. Eğer opsiyon kullanım fiyatı cari fiyata eşitse *başabaş durumdadır* denir. Benzer şekilde satım opsiyonunda, opsiyon kullanım fiyatı cari fiyattan büyükse *kârdadır*, eğer kullanım fiyatı cari fiyattan küçükse *zarardadır* ve yine opsiyon kullanım fiyatı cari fiyata eşitse *başabaş durumdadır* denir (Chambers, 2007).

1.3.4. Opsiyon Sözleşme Türleri

Opsiyon sözleşmeleri birçok esasa göre isimlendirilir. Bazı opsiyon sözleşmesi tanımları aşağıdaki gibidir.

- **Alım (Call) Opsiyonu:** Alım opsiyonu, opsiyonu alan kişiye opsiyon sözleşmesine konu edilen dayanak varlığın sözleşmede belirtilen fiyattan istemesi koşulunda alma hakkı verir.

- **Satım (Put) Opsiyonu:** Satım opsiyonu, opsiyonu alan kişiye opsiyon sözleşmesine konu edilen dayanak varlığın sözleşmede belirtilen fiyattan istemesi koşulunda satma hakkı verir.

Tablo 1.2: Alma-Satma Opsiyonlarının Yükümlülükleri

	Opsiyon Türleri	
	Alım Opsiyonu	**Satım Opsiyonu**
Alıcı	Alma Hakkı	Satma Hakkı
Satıcı	Satma zorunluluğu var	Alma zorunluluğu var.

Tablo 1.2'de alım-satım opsiyonlarının alan ve satan tarafa ne gibi yükümlülükler verdiği belirtilmiştir.

- **Avrupa (European) Tipi Opsiyon:** Vadesinden önce kullanılma hakkı olmayan opsiyondur. Sözleşmede belirtilen tarihte kullanılabilir. Öncesinden kullanılamaz.

- **Amerikan (American) Tipi Opsiyon:** Vadesinden önce istenilen bir zamanda da kullanılabilen opsiyondur.
- **Bermuda Tipi Opsiyon:** Vadesinden gelmeden önceden sözleşmede belirtilen tarihlerde alım-satımı yapılabilen opsiyondur. Kullanım serbestliği vardır.
- **Birleşik (Compound) Opsiyonları:** Opsiyonlar üzerine yazılan opsiyon sözleşmeleridir. Bir Avrupa tipi opsiyonu satın almak için başka bir Avrupa tipi opsiyonu kullanmak gibi...
- **Seçim (Chooser) Opsiyonları:** Opsiyona sahip olan kişi, T_1 anında kullanım fiyatı E_1 olan opsiyon ile T_2 anında kullanım fiyatı E_2 olan opsiyonu alım ya da satım opsiyonu olarak almasını sağlar.
- **Asya (Asian) Opsiyonları:** Bu opsiyon çeşitlerinde opsiyonun vade sonunda yapacağı ödeme, opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın geçmişteki değeri gözönüne alınarak yapılan opsiyon sözleşmesidir.
- **Geriye Dönük (Lookback) Opsiyonlar:** Bu tür opsiyonlarda ödeme opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın vadedeki değeri ile belli zaman aralıklarında dayanak varlığın maksimum ve minimum değerini gözönünde bulundurarak belirlendiği opsiyonlardır.
- **Standart (Vanilla) Opsiyonlar:** Çok karmaşık olmayan tek dayanak varlık üzerinden yapılan opsiyonlardır. En yaygın opsiyon tipidir.
- **Egzotik (Exotic) Opsiyonlar:** Vanilla opsiyonlarına göre daha karmaşık olan opsiyonlardır. Birçok türü vardır. En çok bilinen türleri Engelli (Barrier) opsiyonu, Asya opsiyonu ve Gökkuşağı (Rainbow) opsiyonudur.
- **Gökkuşağı (Rainbow) Opsiyonlar:** Birden fazla dayanak varlığın alım-satım işleminin konu edildiği opsiyon sözleşmeleridir.

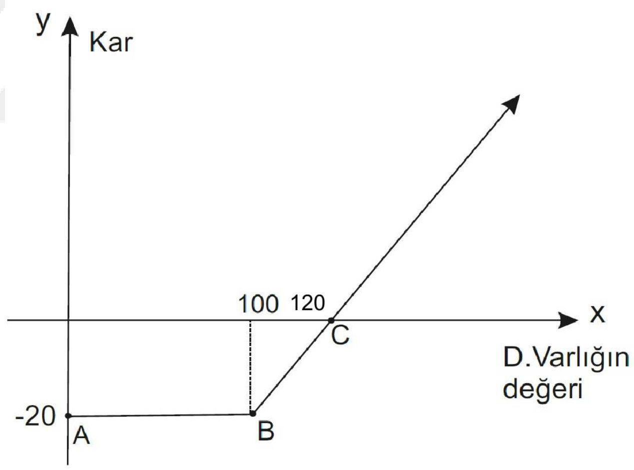
Bunların dışında da birçok opsiyon sözleşmesi türü vardır. Konu edilen dayanak varlığa göre isimlendirilen opsiyonları bunlara örnek verebiliriz. Endeks opsiyonları, Futures opsiyonları, Döviz opsiyonları ve Faiz opsiyonları örnek verilebilir (Chambers, 2007; Karan, 2013; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

1.3.5. Opsiyonların Kâr-Zarar Durumları

Temel olarak opsiyon stratejilerinin anlaşılabilmesi için alım-satım opsiyonlarının kâr-zarar durumunun incelenmesi faydalıdır.

1.3.5.1. Alım Opsiyonu Satın Alma

Bir alım opsiyon sözleşmesi alan kişi sözleşme kapsamında dayanak varlığı satın alma hakkını prim karşılığında almıştır. Eğer varlığın fiyatı beklenen düzeye çıkmazsa opsiyonu kullanmaktan vazgeçerek varlığın opsiyon primi kaybeder (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).



Şekil 1.1: Alım Opsiyonu Satın Alma

Örneğin, bir opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın kullanım fiyatını 100 TL olsun. Bu opsiyon 20 TL'ye alınmış olsun. Dayanak varlığın fiyatı 100 TL olarak kalırsa işlemden doğacak zarar başlangıçta yatırılan 20 TL'lik opsiyon primidir. Şekil 1.1'de görüldüğü gibi bu zamana kadar opsiyonu kullanmak alıcı için dezavantajlıdır. Dayanak varlığın fiyatı 100 ile 120 arasında olursa opsiyonun kullanılması durumda zarar azalmaya başlar ancak toplamda opsiyon hala zararda olur. Fakat 120 TLyı aşması durumunda opsiyon kullanılırsa alan kişi kâra geçecektir. Örneğin 135

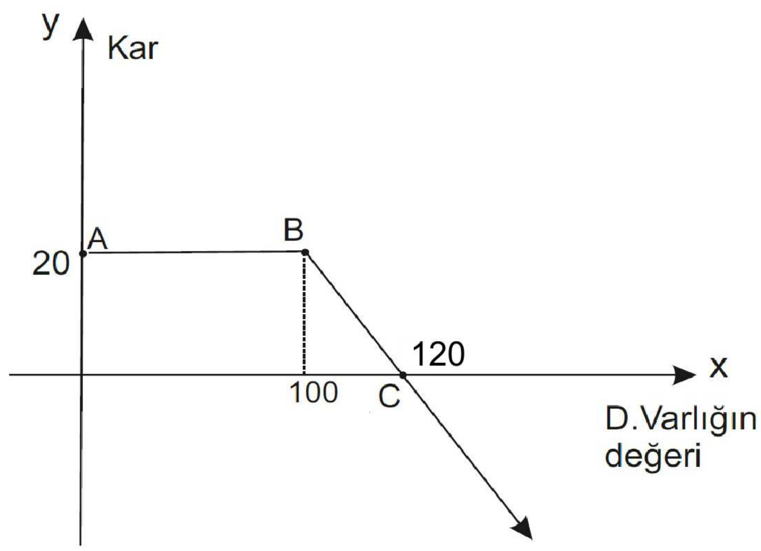
TL'ye çıkması durumunda ödenen opsiyon primi nedeniyle 100 TL'ye alınan dayanak varlık piyasada 135 TL'ye satılarak 15 TL kâr elde edilebilir. Bu örneğin analiz eden grafik Şekil 1.1'de verilmiştir.

Sonuç itibariyle alım opsiyonu alan yatırımcı sınırlı zarar (prim kadar) ederken, sınırsız kâr etmiş olur.

1.3.5.2. Alım Opsiyonu Satma

Bir alım opsiyon sözleşmesi satan kişi sözleşme kapsamında dayanak varlığı alıcının talebi doğrultusunda prim karşılığında belirlenen tarihte satma garantisi vermiştir (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

Örneğin, aynı opsiyon sözleşmesini satan taraf bakımından değerlendirirsek 100 TL olan dayanak varlık için alınan 20 TL'lik opsiyon primi opsiyon sözleşmesi kullanılmazsa kâr olarak kalır. Dayanak varlığın fiyatındaki artışa bağlı olarak fiyat 100 TL'yi geçmesi durumunda dayanak varlığı 100 TL'den teslim etme yükümlülüğü vardır. Bu da kârın dönem içindeki normal satıştan elde edilecek kâra göre düşmeye başlaması denemektir. Fiyat 120 TL'yi geçtiği zaman dayanak varlıktan o dönemde piyasada satması durumunda elde edeceği kâra göre daha az kâr elde etmiş olur. Yani bir nevi kârdan zarar etmiştir. Bu örneğin analiz eden grafik Şekil 1.2'de verilmiştir.



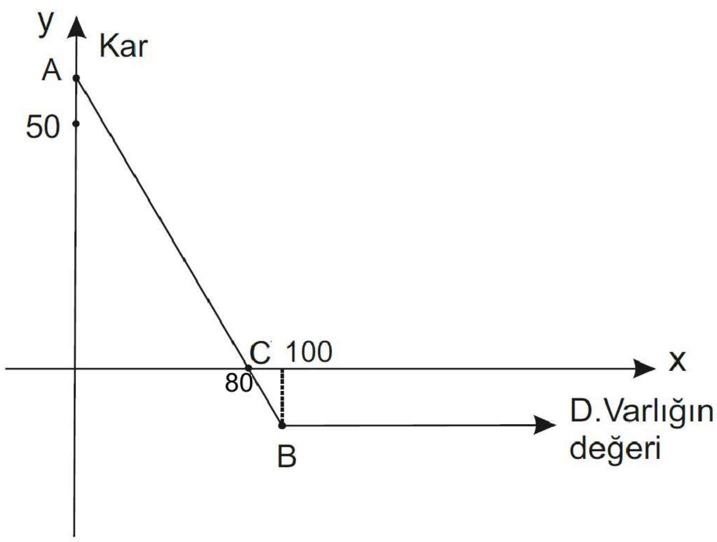
Şekil 1.2: Alım Opsiyonu Satma

Sonuç itibariyle, alım opsiyonu satan yatırımcı fiyatlar düştükçe sınırlı kâr (prim kadar), fiyatlar yükseldikçe sınırsız zarar elde edebilir.

1.3.5.3. Satım Opsiyonu Satın Alma

Bir satım opsiyon sözleşmesi alan kişi sözleşme kapsamında ödediği prim karşılığında bu hakkı kullanabilir. Dayanak varlığın fiyatı, sözleşmedeki fiyatının üstüne çıkarsa zarar edeceği için opsiyonu kullanmayacaktır. Satım opsiyonları, fiyatların düşmesi beklentisine sahip yatırımcılar için önemli opsiyon sözleşmeleridir (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

Örneğin 100 TL kullanım fiyatı ile satım opsiyonu hazırlanan dayanak varlığın primi 20 TL olsun. Dayanak varlığın fiyatı 100 TL'nin altında olduğu müddetçe opsiyonu alan kişi kârdadır. Fiyat 80 TL olduğunda başabaş durumda iken 100 TL'yi geçtiğinde zarar artacağından primden vazgeçilerek opsiyon kullanılmaz ve zararı prim kadar olur . Bu örneğin analiz eden grafik Şekil 1.3'de verilmiştir.



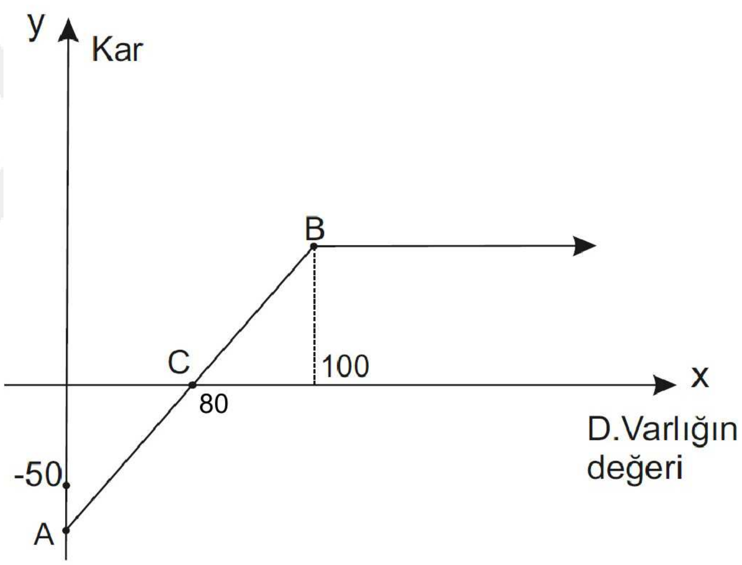
Şekil 1.3: Satım Opsiyonu Alma

Sonuç olarak satım opsiyonu alan kişi fiyatlar yükseldikçe sınırlı zarar (prim kadar), fiyatlar düştükçe sınırsız kâr elde edebilir.

1.3.5.4. Satım Opsiyonu Satma

Satım opsiyonu satan kişi aldığı prim karşılığında dayanak varlığı alma sözü verir. Dayanak varlığın fiyatı yükseldikçe alan taraf opsiyonu kullanmayabilir. Bu durumda satan kişiye sadece opsiyon primi kâr kalır (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

Örneğin 100 TL olan dayanak varlık için opsiyon primi 20 TL olsun. Dayanak varlık 80 TL olduğunda başabaş durumdadır. Bu zamana kadar satan taraf kârdan zarara geçer. 80 TL'yi geçtikten sonra fiyat yükseldikçe satan taraf kârdadır. Fiyat 100 TL olduğundan alan taraf vazgeçmek isteyeceğinden satanın kârı 20 TL olur . Bu örneğin analiz eden grafik Şekil 1.4'de verilmiştir.



Şekil 1.4: Satım Opsiyonu Satma

Sonuç olarak satım opsiyonu satan kişi fiyatlar yükseldikçe sınırlı kâr (prim kadar), fiyatlar düştükçe sınırsız zarar elde edebilir.

1.3.6. Opsiyon Stratejileri

Finansal piyasalarda yatırım yapan yatırımcılar risklerini azaltmak için farklı stratejiler uygulayarak avantajlı konuma geçmek ve kârlarını arttırmak isterler. Bu stratejilerden bazıları aşağıda verilmiştir.

1.3.6.1.Spread Stratejileri

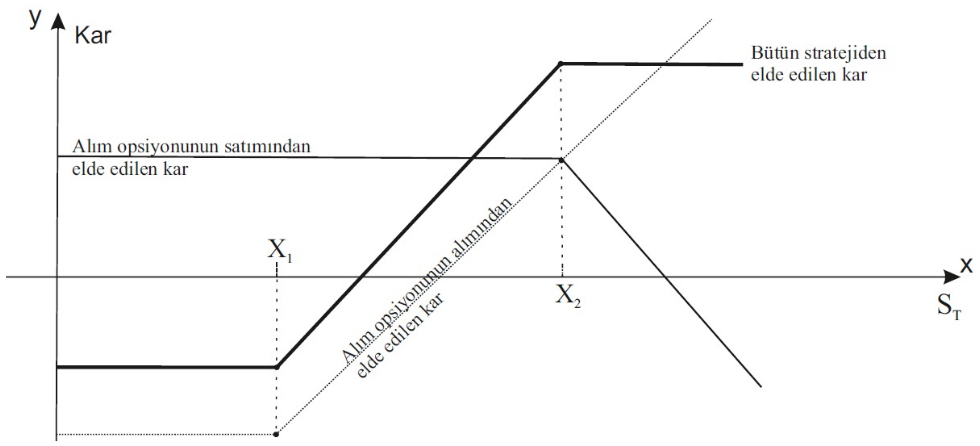
Spread stratejilerinde esas olarak bir opsiyon alırken başka bir opsiyon satılır. Böylece risk sınırlandırılırken, kâr piyasa koşullarına göre arttırılabilir.

i.Boğa (Bull) Stratejisi: Yatırımcı tarafından yaygın bir şekilde kullanılan bir stratejidir. Kullanım fiyatı bilenen bir dayanak varlığın alım opsiyonun satın alınıp aynı dayanak varlığın üzerine yazılmış daha yüksek kullanım fiyatı olan başka bir alım opsiyonunun satılması şeklinde yapılır. Bu stratejilerde her iki opsiyon sözleşmesinin kullanım tarihi aynıdır. Hisse senedinin fiyatının yükseleceğini düşünen yatırımcılar tercih eder (Chambers, 2007).

Tablo 1.3: Boğa Spreadı Kâr-Zarar Durumu

H.Senedi Fiyatı	Satın Alınan Alım Ops.	Satılan Alım Ops.	TOPLAM
$X_2 \leqslant S_T$	$S_T - X_1$	$X_2 - S_T$	$X_2 - X_1$
$X_1 < S_T < X_2$	$S_T - X_1$	0	$S_T - X_1$
$S_T \leqslant X_1$	0	0	0

Tablo 1.3'te yatırımcının kâr-zarar durumunu incelenmiştir. Aşağıda bu durumlar grafiklerle verilmiştir.

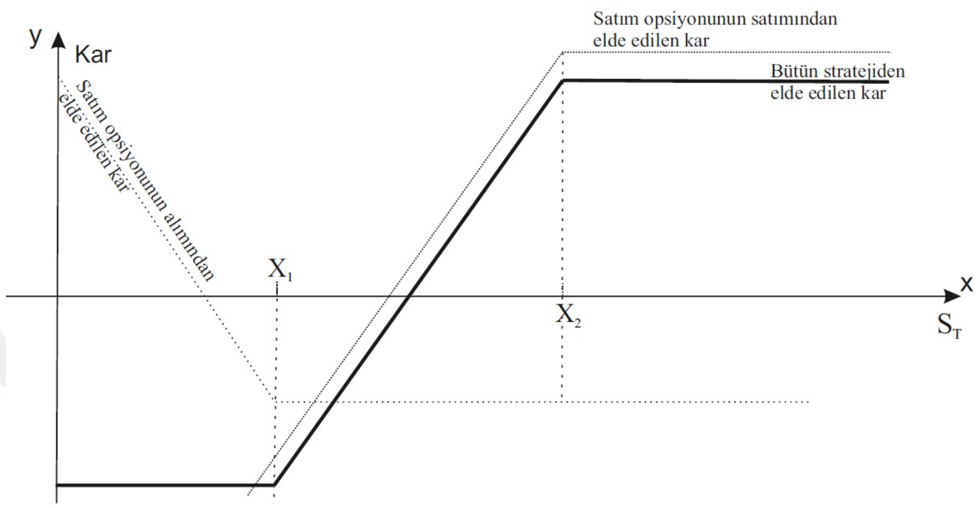


Şekil 1.5: Alım Opsiyonu İçin Boğa Spreadı

Satın alınan opsiyonun kullanım fiyatı X_1 ve satılan opsiyonun kullanım fiyatı X_2

olsun. Bu taktirde Şekil 1.5'de gösterildiği gibi yatırımcının kâr-zarar durumu gözlemlenebilir.

Benzer şekilde aynı durum satım opsiyonuna uygulanırsa grafik aşağıdaki verilen Şekil 1.6'daki gibi olur.



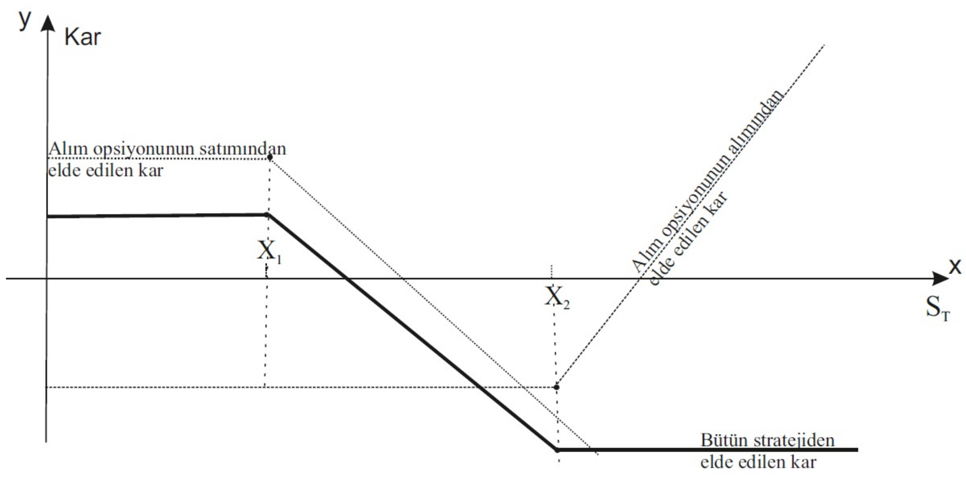
Şekil 1.6: Satım Opsiyonu İçin Boğa Spreadı

ii. Ayı (Bear) Stratejisi: Ayı spreadı stratejisini uygulamak isteyen yatırımcı dayanak varlığın fiyatlarında düşüş olacağını tahmin eder. Boğa spreadında olduğu gibi dayanak varlık için yazılmış belirli kullanım fiyatına sahip alım opsiyonu satın alıp, yine aynı hisse senedi üzerine yazılmış daha düşük belirli kullanım fiyatına sahip alım opsiyonu satılarak oluşturulur (Chambers, 2007).

Satın alınan opsiyonun kullanım fiyatı X_1 ve satılan opsiyonun kullanım fiyatı X_2 olsun. Bu taktirde yatırımcının kâr-zarar durumu Tablo 1.4 'te belirtildiği gibi olduğu gözlemlenirken, Şekil 1.7'de grafik şeklinde verilir.

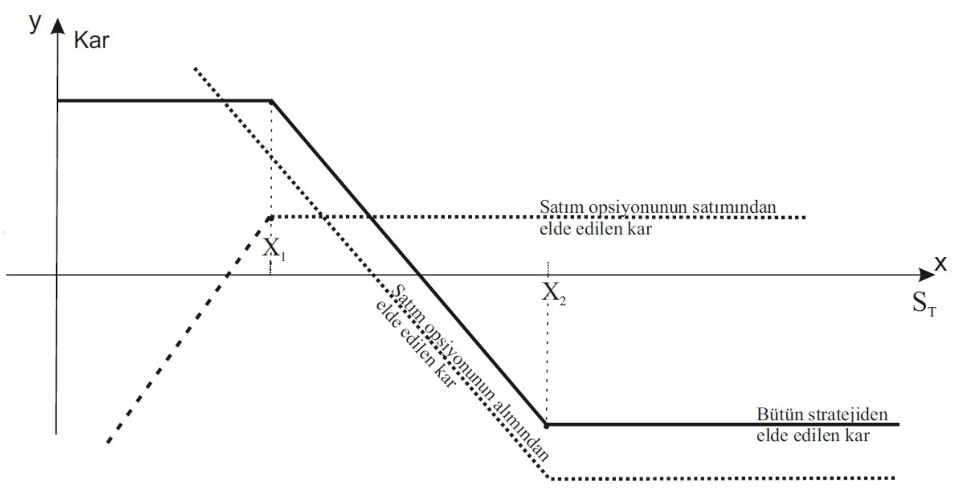
Tablo 1.4: Ayı Spreadı Kâr-Zarar Durumu

H.Senedi Fiyatı	**Satın Alınan Alım Ops.**	**Satılan Alım Ops.**	**TOPLAM**
$X_2 \leqslant S_T$	$S_T - X_2$	$X_1 - S_T$	$-(X_2 - X_1)$
$X_1 < S_T < X_2$	0	$X_1 - S_T$	$-(S_T - X_1)$
$S_T \leqslant X_1$	0	0	0



Şekil 1.7: Alım Opsiyonu İçin Ayı Spreadı

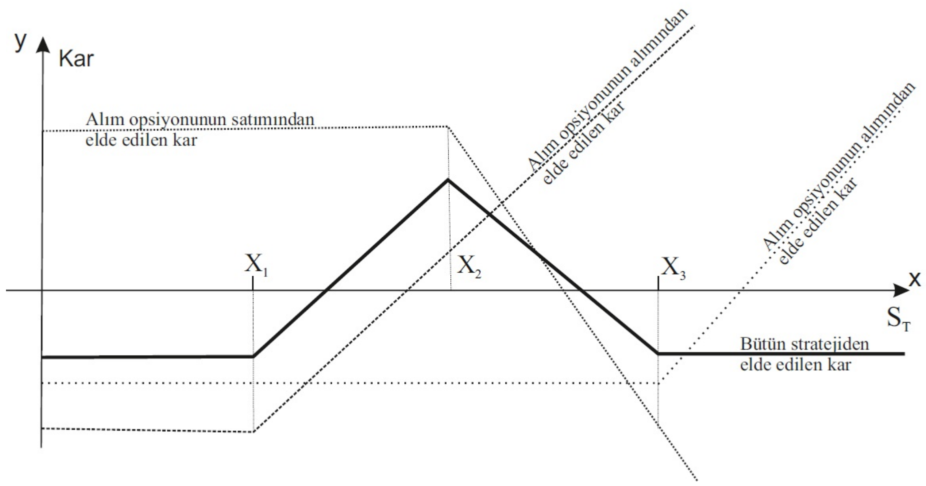
Benzer şekilde satım opsiyonuna uygulanırsa grafik aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 1.8: Satım Opsiyonu İçin Ayı Spreadı

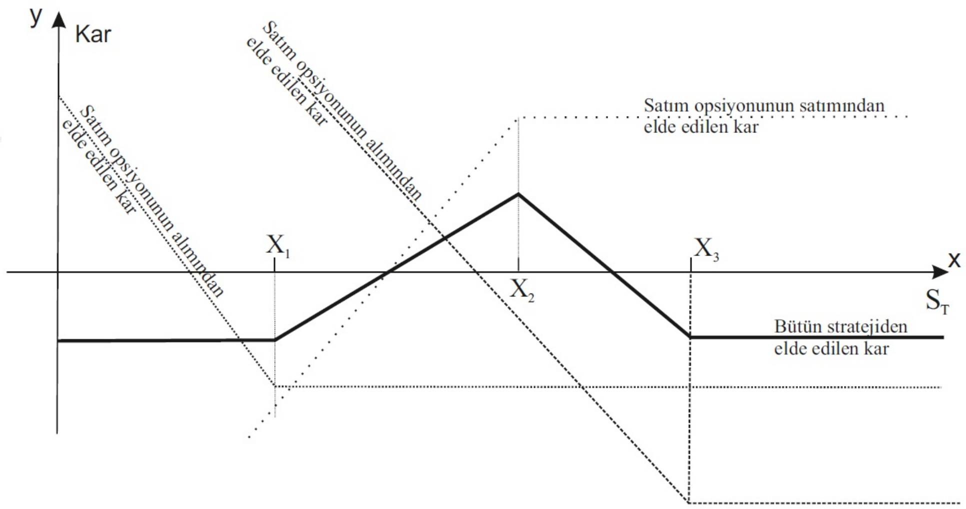
iii. Kelebek (Butterfly) Stratejisi: Bu stratejide üç farklı opsiyon üzerinden işlem yapılır. $X_1 < X_2 < X_3$ olmak üzere X_1 ve X_3 kullanım fiyatına sahip alım opsiyonu satın alınmasına karşılık X_2 kullanım fiyatına sahip alım opsiyonunun satılması üzerine kurulmuş bir stratejidir.

Kelebek stratejisi boğa ve ayı spreadı stratejilerinin birleşimi ile oluşmaktadır. Kelebek stratejisini kullanmak isteyen yatırımcılar genelde konu olan hisse senedinin fiyatlarının belli bir aralıkta olacağını tahmin eder (Chambers, 2007). Bu stratejinin alım opsiyonları için oluşan tahmini grafiği Şekil 1.9'daki gibidir.



Şekil 1.9: Alım Opsiyonu İçin Kelebek Spreadı

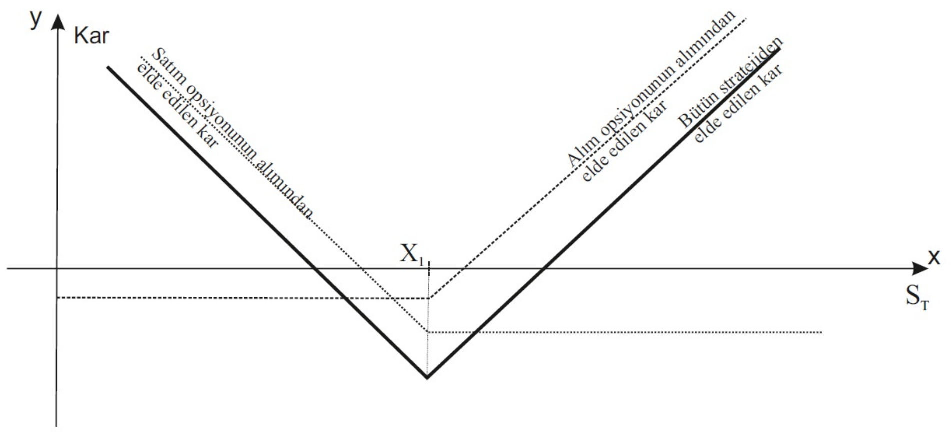
Benzer şekilde stratejinin satım opsiyonları için oluşan tahmini grafiği Şekil 1.10'daki gibidir.



Şekil 1.10: Satım Opsiyonu İçin Kelebek Spreadı

1.3.6.2. Straddle Stratejisi

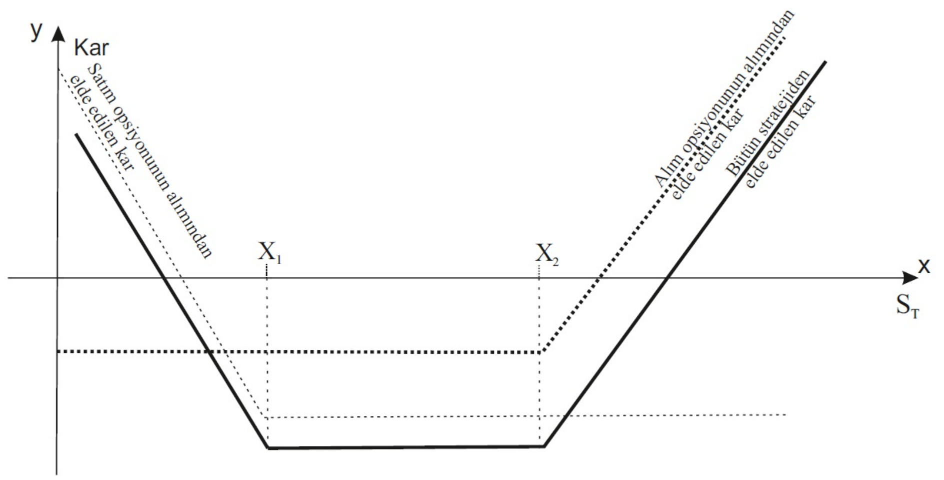
Straddle stratejilerinde esas olarak işlem tarihleri ve kullanım fiyatları aynı olan bir alım opsiyonu ve bir satım opsiyonunun satılmasıyla oluşturulmak istenen yöntemdir. Straddle stratejisini kullanmak isteyen yatırımcı hisse senedi fiyatlarında önemli hareketlilik olacağını tahmin eder. Fakat sadece hareketin yönü belli değildir. Straddle stratejisinin tahmini kâr grafiği Şekil 1.11'de verilmiştir (Chambers, 2007).



Şekil 1.11: Straddle Stratejisi

1.3.6.3. Strangles Stratejisi

Kullanım fiyatları farklı olan fakat vadeleri aynı olan bir alım opsiyonu ile bir satım opsiyonunun satın alınması ile oluşturulur. Bu strateji de kâr elde edilebilmesi için straddle stratejisine göre hızlı hareket edilmelidir. Bu stratejiyi düşünen yatırımcı hızlı değişikliklerin olacağı esasını tahmin eder. Strangles stratejisinin tahmini kâr grafiği Şekil 1.12'de verilmiştir (Chambers, 2007).



Şekil 1.12: Strangles Stratejisi

1.3.6.4. Strap ve Strip Stratejisi

Strap, iki adet alım opsiyonu ile bir adet satım opsiyonunun farklı birleşimlerinden oluşan stratejidir. Strip ise iki adet satım opsiyonu ile bir adet alım opsiyonunun farklı birleşimlerinden oluşur. Bu stratejilerde opsiyon sözleşmelerinin kullanım fiyatları ve vadeleri aynıdır (Chambers, 2007).

2. BÖLÜM : OPSİYONLARIN FİYATLAMASI

Daha önceden de ifade ettiğimiz gibi opsiyon sözleşmesinde belirlenecek olan opsiyon primi önem arz etmektedir. Bunun için adil bir opsiyon fiyatı iki tarafında haklarını koruyacaktır.

2.1. Opsiyon Fiyatını Etkileyen Faktörler

Bir opsiyon fiyatını etkileyen 6 önemli faktör vardır. Bunlar dayanak varlığın cari fiyatı, kullanım fiyatı, opsiyonun vadesi(geçerlilik süresi), dayanak varlığın fiyatındaki oynaklık (dalgalanma), risksiz faiz oranı ve vade içinde beklenen kâr payı dağıtımı şeklinde sıralanabilir. Şimdi bu faktörleri inceleyelim (Chambers, 2007).

2.1.1. Dayanak Varlığın Fiyatı

Dayanak varlığın fiyatı opsiyon primini belirlerken etki eden en önemli etkenlerdendir. Dayanak varlığın fiyatı arttıkça diğer faktörlerin sabit kaldığını düşünürsek alım opsiyonunda prim artar, satım opsiyonunda prim azalır (Chambers, 2007).

2.1.2. Opsiyon Kullanım Fiyatı

Dayanak varlığın opsiyon sözleşmesine göree belirtilen kullanım fiyatı dayanak varlığın fiyatına göre ters etki eder. Yani diğer faktörler sabitken kullanım fiyatı artıkça alım opsiyonunda prim azalır, satım opsiyonunda prim artar (Chambers, 2007).

2.1.3. Opsiyonun Vadesi

Opsiyonlarda süre uzadıkça opsiyon yapısından dolayı fiyatın yükselme ihtimali artacağından opsiyonun değeri artar (Chambers, 2007).

2.1.4. Dayanak Varlığın Oynaklığı

Opsiyon primini etkileyen en önemli faktörlerden biri fiyattaki dalgalanma diğer ifadeleri ile oynaklık, volalite, değişkenliktir. Diğer faktörler sabit kaldığında fiyat dalgalanması ciddi şekilde etkili sonuçlar doğurabilir. Bu nedenle dalgalanma arttıkça büyük ihtimalle opsiyon primi de artar (Chambers, 2007).

2.1.5. Risksiz Faiz Oranı

Risksiz faiz oranı opsiyon primini etkileyen faktörlerden biridir. Faiz oranları yükseldikçe dayanak varlığın fiyatında da yükselme eğilimi olacaktır. Faiz oranları yükseldikçe alım opsiyonunda prim artarken satım opsiyonunda primler düşer (Chambers, 2007).

2.1.6. Kâr Payı Dağıtımı

Kâr paylarının dağıtılması durumunda satın alınan hisse senedinin değeri düşeceğinden alım opsiyonlarında prim düşerken satım opsiyonlarında prim artar (Chambers, 2007).

Ayrıca opsiyon primi hesaplanırken iki değer önemlidir. Bunlar Gerçek Değer ve Zaman Değeridir.

Opsiyon Primi= Gerçek Değer + Zaman Değeri

ve

Gerçek Değer = Dayanak Varlığın Fiyatı - Kullanım Fiyatı

şeklinde hesaplanır. Ayrıca zaman değeri, opsiyonun süresi, fiyat dalgalanması, risksiz faiz oranına ve kâr payı dağıtımına göre değişeceğinden ileri matematiksel yöntemlerle hesaplanır (Chambers, 2007).

Fiyatlandırma konusunda kullanılacak kısaltmaları tekrar belirtmekte fayda vardır. Bu kısaltmalar aşağıda Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1: Opsiyon Fiyatlama ile İlgili Sembol ve Kısaltmalar

K veya X	Kullanım Fiyatı
S	Dayanak varlığın fiyatı
S_T	Dayanak varlığın T anında fiyatı
U_T	Dayanak varlığın T anında belirsizlik değeri
r	Risksiz faiz oranı
σ	Değişkenlik, dalgalanma, volatilite, difüzyon terimi, oynaklılığı, dağılma
T	Vade, opsiyon sözleşmesinin bittiği tarih
t	Şimdiki zaman
$\Delta t = T - t$	Vadenin bitmesine kalan süre
C	Amerikan tipi alım opsiyonunun satın alma değeri
P	Amerikan tipi alım opsiyonunun satma değeri
c	Avrupa tipi alım opsiyonunun satın alma değeri
p	Avrupa tipi alım opsiyonunun satma değeri
$\phi(d)$	$\phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-d^2}{2}}$
$N(d)$	Normal Dağılım Değeri, $N(d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$
V_t	t anında varlığın değeri (Servet birikimi) $V_t = u(t, X_t)$

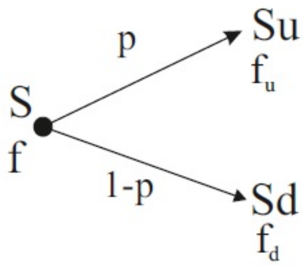
2.2. Binom Piyasa Modeli (Cox-Ross-Rubinstein Modeli)

Binom modeli 1979 yılında Cox-Ross ve Rubinstein tarafından sunulmuş basit opsiyon fiyatlama tekniklerinden biridir. Fakat modelde kullanılan kavramlar diğer ileri tekniklerde de temel yapıyı oluşturur (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008; Hull, 2018).

Standart opsiyonlarda hızlı ve pratik çözümler sunar. Model sırasında olasılık teorisinin temelinde kullanılan ağaç diyagramı tekniği ile modelin aşamaları şekillendirilir.

Diyagram artış olasılığı için ayrı, azalma olasılığı için ayrı köklendirilerek tüm durumlar tablolanır (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008; Hull, 2018).

Binom modeli, ayrık zamanlı bir model olduğundan zaman aralıkları periyodik olarak tanımlanır. t zaman indisi için S_t finansal dayanak varlığın değeri olmak üzere modelde iki değer vardır. Bunlar artma olasılığı p olan varlığın alacağı değer faktörü u ve azalma olasılığı 1-p olan varlığın alacağı değer faktörü d dir.($u > 1$ ve $d < 1$) Bunlara karşı elde edilen getiriler ise f_u ve f_d ile gösterilir. Tek adımlı binom modelinin ağaç diyagramı Şekil 2.1'deki gibidir.



Şekil 2.1: Tek Adımlı Binom Modeli

Binom modelindeki u ve d faktörleri, dayanak varlığın dalgalanma terimi ve vadesine bağlı olarak hesaplanır.

$$u = exp(\sigma\sqrt{\Delta t}) = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = exp(-\sigma\sqrt{\Delta t}) = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ve \quad ud = 1 \tag{2.1}$$

dir. Bu durum gözönünde tutulursa dayanak varlığın r risksiz faiz oranı altında beklenen değeri,

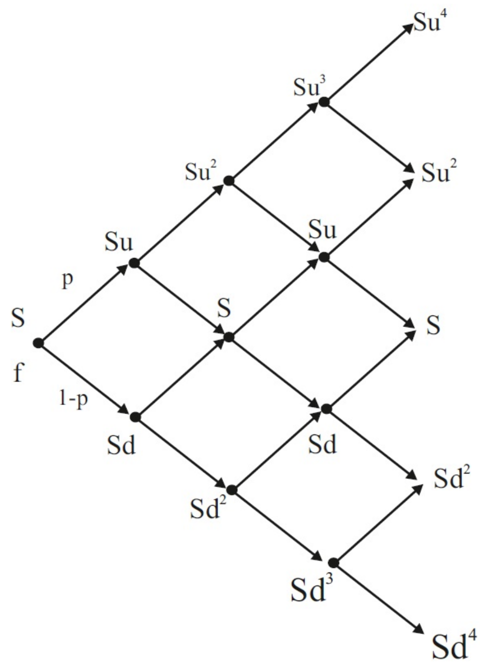
$$S_t e^{r\Delta t} = p(uS_t + (1-p)dS_t) \tag{2.2}$$

Eşitlikteki p olasılık değeri yalnız bırakılırsa modele göre,

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{2.3}$$

elde edilir (Sucu ve Kul 2015; Yıldırak ve Çalışkan, 2008; Hull, 2018).

Benzer şekilde 3 adımlı bir binom modelinin diyagramı Şekil 2.2'deki gibidir.



Şekil 2.2: Üç Adımlı Binom Modeli

Burada her $(i+1)$. düğümde $S_t u^j d^{i-j}$ için varlığın beklenen değerine kazanç etkisi,

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}(pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}) \tag{2.4}$$

Örneğin iki adımlı bir binom modelinde birikim miktarının katsayısı,

$$f = e^{-2r\Delta t}(p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd})$$

dir.

Aşağıda Avrupa tipi satım opsiyonu için Binom Metodunun Matlab kodlaması verilmiştir (Higham, 2004).

```
% Avrupa Tipi Satım Opsiyonu için Binom Metodu.
%%%%%%%%% Parametre ve Faktörler %%%%%%%%%%%
S = 3; E = 2 ; T = 1; r = 0.05 ; sigma = 0.3; M = 256;
dt = T/M; A = 0.5*(exp(-r*dt)+exp((r+sigma^2)*dt));
u = A + sqrt(A^2-1); d = 1/u;
p = (exp(r*dt)-d)/(u-d);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
W = zeros(M+1,1);
W(1) = S;
% T anında dayanak varlığın değeri
for i = 1:M
    for n = i:-1:1
        W(n+1) = u*W(n);
    end
    W(1) = d*W(1);
end
%Opsiyonun zaman değeri;
for n = 1:M+1
    W(n) = max(E-W(n),0);
end
% Opsiyon değerinin başlangıç anından itibaren
% hesaplama adımları
for i = M:-1:1
    for n = 1:i
        W(n) = exp(-r*dt)*(p*W(n+1) + (1-p)*W(n));
    end
end
disp('Opsiyonun değeri'), disp(W(1))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Örnek: 200 TL değerindeki Avrupa satım opsiyonunu 1 yıl vadeli 6 aylık periyotla risksiz faiz oranı %10 ve %30 fiyat dalgalanması değerleri altında hesaplayalım.

$\sigma = 0.30 \quad r = 0.10, \quad \Delta t = 0.5$ ve $S = 200$ dür.

$u = e^{0.3\sqrt{0.5}} = 1.2363 \quad d = e^{-0.3\sqrt{0.5}} = 0.8089$ olur.

Buradan $p = \frac{e^{0.05}-0.8089}{1.2363-0.8089} = \frac{1.0513-0.8089}{1.2363-0.8089} = 0.5672$ bulunur.

Beklenen değer$= 200\big((0.5672)^2(1.2363)^2 + 2(0.5672)(0.4328) + (0.4328)^2(0.8089)^2\big)$

$= 200(1.105255) = 221.051$ TL'dir.

2.3. Black-Scholes Modeli

1973 yılında Fischer Black ve Myron Scholes tarafından yayınlanan "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" isimli makale finans dünyası için özellikle opsiyon fiyatlama konusunda önemli bir dönüm noktası olmuştur. Opsiyon fiyatlama ile ilgilenen bilim insanları ileri matematik bilmeseler bile denklemin kullanımı sayesinde kolaylıkla fiyatlandırma yapmalarını sağlamıştır (Black ve Scholes, 1973; Merton, 1973).

Black-Scholes denkleminde temel dayanak noktası başlangıç olarak ele alınan hisse sentlerini ve benzeri argümanların fiyat hareketliliğini rassal yürüyüşe sahip olup dağılım olarak Lognormal dağılımına uymasıdır. Finansal araçların bir çoğu da bu nedenlerden dolayı Geometrik Brown Hareketine uymaktadır (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

Black-Scholes stokastik diferansiyel denklemlerin çözümlenmesi sonucu elde edilen ve uzmanların kullanması için sunulan eşitlikler;

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2.5}$$

$$d_2 = \frac{ln(\frac{S}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{2.6}$$

olmak üzere

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rt}N(d_2) \tag{2.7}$$

$$p = Xe^{-rt}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{2.8}$$

şeklindedir (Chambers, 2007).

Bu eşitliklerin elde edilmesi için,

$$V_t = a_tX_t + b_t\beta_t = u(t, X_t) \qquad t \in [0, T]$$

denkleminin X_t bir Ito süreci olarak değerlendirilip

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

stokastik diferansiyel denkleminde Ito lemmaları uygulanarak stokastik diferansiyel denklemde yerine yazılmıştır.

Buradan

$$V_t - V_0 = \int_0^t \left[(c-r)a_s X_s + rV_s\right] ds + \int_0^t (\sigma a_s X_s) dB_s$$

eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla ;

$$(c-r)a_t X_t + ru(t,X_t) = (c-r)u_2(t,X_t)X_t + ru(t,X_t)$$

$$(c-r)a_t X_t + ru(t,X_t) = u_1(t,X_t) + cX_t u_2(t,X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 {X_t}^2 u_{22}(t,X_t)$$

X_t geometrik Brown süreci olduğundan daima pozitiftir. $X_t = x$ yazarsak;

$$ru(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{22}(t,x) + u_1(t,x) + rxu_2(t,x) \qquad x > 0, \quad t \in [0,T] \tag{2.9}$$

kısmi diferansiyel denklemine ulaşılır. t anında satılan stokun sağlayacağı risksiz kâr ortalamadan düşülürse Black-Scholes diferansiyel denklemi,

$$ru(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{22}(t,x) + u_1(t,x) + (r-\rho)xu_2(t,x) \tag{2.10}$$

halini alır.

Örnek: Vadesinin dolmasına 1 yıl kalan bir Avrupa satım opsiyonunun şimdiki endeks değeri 120 TL olsun. Kullanım değeri 100 TL olan bu opsiyonu risksiz faiz haddi %1 ve endeks değişkenliği (dalgalanması) %30' olduğu kabul edilirse opsiyon primi kaç TL dir?

Çözüm: Verilen bilgileri yazarsak;

$$S_0 = 120 \quad K = 100 \quad r = \%1 \quad \sigma = \%30 \quad T = 1$$

dir. d_1 ve d_2 değerlerini hesaplarsak;

$$d_1 = \frac{ln(\frac{120}{100}) + (0.01 + (0.30)^2/2)(1)}{0.30\sqrt{1}} = 0.44727$$

$$d_2 = 0.44727 - 0.30\sqrt{1} = 0.14727$$

$$N(d_1) = 0.67266 \qquad N(d_2) = 0.55854$$

Opsiyon değeri;

$$C = 120(0.67266) - 100(0.55854)e^{(-0.01)(1)} = 25.4209$$

bulunur.

2.3.1. Opsiyonda Alt-Üst Sınır

Hiçbir zaman opsiyonun değeri, dayanak varlığın değerinden büyük olamaz. Bu nedenle üst sınır her zaman en fazla dayanak varlığın değerine eşittir.

Opsiyon değerinin alt sınırı ise

$$c \geqslant S - Xe^{-rT}$$

eşitsizliği ile belirlenir. Ayrıca alım-satım paritesi olarak bilinen denge eşitliği ise aşağıdaki gibidir (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

$$c + Xe^{-rT} = p + S \tag{2.11}$$

2.3.2. Değişkenliğin Ölçümü

Dayanak varlığın fşüiyatındaki değişkenliği ölçmek için iki farklı yöntem kullanılır.

i. Tarihsel Değişkenlik: Yatırımcıların değişkenliği hesaplamada kullandığı yöntemler arasındadır. Dayanak varlığın önceki zaman periyotlarındaki aldığı değerlerin gözlemlenmesiyle elde edilir. Bu veriler için,

$$x_i = ln\Big(\frac{S_i}{S_{i-1}}\Big) \quad i = 1,2,3,\cdots,n$$

değerleri hesaplanır. Elde edilen S_i ve x_i $(i = 1,2,3,\cdots,n)$ veri grubunun ortalaması, varyansı ve standart sapması hesaplanarak yorum yapılır (Chambers, 2007; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

ii. Öngörülen Değişkenlik: Opsiyon fiyatlaması için model oluşturmaya yardımcı olan önemli unsurlardan biridir. Öngörülen piyasa fiyatını gözönünde bulundurarak yatırımcının karar vermesine olanak sağlar. Öngörülen değişkenlik, gerçek piyasa değerine yakın bir bedeli tahmin ederek opsiyonun fiyatının değişip değişmemesine karar vermede kolaylık sağlar (Chambers, 2007; Karan, 2013; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

2.4. Opsiyon Duyarlılıkları

Opsiyon primine etki eden faktörlerin prim üzerindeki etkisinin hangi düzeyde olduğunu ölçmeye yarayan değişkenlere duyarlılık denilmektedir. Sembolize ederken Yunan alfabesindeki harfler kullanıldığından Grekler denilen bu duyarlılıkları inceleyelim.

2.4.1. Delta (Δ)

Opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın fiyatının 1 birimlik değişmesinin opsiyon fiyatında ne kadarlık bir değişmeye neden olduğunu inceler.

$$Delta = \Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \tag{2.12}$$

eşitliği ile gösterilir.

Alım opsiyonları için delta duyarlılığı 0 ie 1 arasındadır. Başabaş durumda iken delta değeri 0.5 tir. Opsiyon aşırı kârda ise delta değeri 1'e çok yakındır. Bu da opsiyon fiyatı ile dayanak varlığın fiyatı arasında çok bağlantı olduğunu gösterir. Tersine aşırı zarardadır ise de 0'a çok yakındır. Bu durumda da opsiyon fiyatı ile dayanak varlığın fiyatı arasında bağlantı zayıftır (Chambers, 2007; Karan, 2013, Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

2.4.2. Gamma (Γ)

Opsiyon fiyatının, opsiyon sözleşmesine konu olan dayanak varlığın fiyatına göre ikinci türevidir. Yani dayanak varlığın fiyatındaki küçük değişikliklerin opsiyon duyarlılıklarından olan deltadaki değişimi inceler. Matematiksel olarak opsiyon prim fiyatının grafiğinin değişim yönünü belirtir (Chambers, 2007; Karan, 2013; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

$$Gamma = \Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \tag{2.13}$$

2.4.3. Theta (Θ)

Opsiyon fiyatının opsiyon vadesine(T) göre duyarlılığını ölçer. Yani opsiyon fiyatı vadeye ne kadar bağlı olduğunu analiz eder. Vade yaklaştıkça Θ değer kazanır (Chambers, 2007; Karan,2013; Yıldırak ve Çalışkan, 2008) .

$$Theta = \Theta = \frac{\partial c}{\partial T} \tag{2.14}$$

2.4.4. Vega

Opsiyon fiyatının opsiyona konu olan dayanak varlığın fiyatındaki değişkenliğe göre duyarlılığı verir. Opsiyonun vadesi arttıkça değişkenlik artacağından vadesi uzun olan opsiyonlarda vega değeri yükselir (Chambers, 2007; Karan, 2013; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

$$Vega = \frac{\partial c}{\partial \sigma} \tag{2.15}$$

2.4.5. Rho (ρ)

Opsiyon fiyatının opsiyona konu olan dayanak varlığın fiyatına uygulanan risksiz faiz oranına karşı duyarlılığını ölçer (Chambers, 2007; Karan, 2013; Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

$$Rho = \rho = \frac{\partial c}{\partial r} \tag{2.16}$$

Black-Scholes Denklemi İçin Duyarlılıklar:

$$Delta = \Delta = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) \tag{2.17}$$

$$Gamma = \Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{\phi(d_1)}{S\sigma\sqrt{\Delta T}} \tag{2.18}$$

$$Rho = \rho = \frac{\partial c}{\partial r} = X\Delta T e^{-r\Delta T} N(d_2) \tag{2.19}$$

$$Theta = \Theta = \frac{\partial c}{\partial T} = \frac{S\phi(d_1)}{2\sqrt{\Delta T}} - rXe^{-r\Delta T} N(d_2) \tag{2.20}$$

$$Vega = S\phi(d_1)\sqrt{\Delta T} \tag{2.21}$$

formülleri ile hesaplanır (Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

2.5. Monte Carlo Modeli

Bir problemin çözümü aşamasında sonuçların tutarlı olup olmadığını test etmek için kullanılan metotlar arasından birisi Simülasyon(Benzetim)dir.

2.5.1. Simülasyon

Simülasyon diğer adıyla benzetim reel dünyadaki bir problemin modellenip denenmesi için yapılan uygulamalardır. Fiziksel olarak yapılan simülasyonlar çok maliyetli ve kaynak gerektirdiğinden gelişen teknoloji ile bilgisayar ortamına taşınmıştır.

Özellikle sonucu kestirilemeyen problemlerde simülasyon önemli bir çözüm sağlar.

Modelleme sırasında problemin değişkenleri tespit edilip bunlar modele dahil edilir. Fakat reel dünyada beklenmedik birçok etken modele dahil olabilir. Bu nedenle stokastik modellerdeki Ak Gürültü terimini içeren SDE'lerin bulunduğu modeller önemlidir. Bu aşama stokastik bir süreç gibi davranan Monte Carlo Simülasyonu, önceki verilere bağlı kalmadan araştırılan konunun verilerine uygun olasılık dağılımına ait defalarca rassal sayı üreterek oluşturulan rassal değişkenler üzerinden hareket eder.

Stokastik modelleme ve simülasyonun en önemli argümanlarından biri rassal sayı üretmedir. Kesikli ve sürekli modeller için birçok rassal sayı üretme yöntemi vardır. Modellerdeki veriler ve deneme sayısı arttıkça daha iyi sonuç vereceğinden gelişmiş yazılımlar kullanılarak rassal sayı üretilmektedir. Bu yazılımlardan biri de MATLAB programıdır.

Basit komutlar yardımıyla istenilen dağılıma sahip istenilen sayıda rassal sayı üretilmektedir. Örneklemin artması hem Merkezi Limit Teoremine göre gerçeğe yakın normal dağılıma sahip sonuç verirken aynı zamanda hata miktarını düşürecektir. Bu nedenle Matlab programında kullanılan bazı rassal sayı üretme komutları Tablo 2.2'de verilmiştir.

Tablo 2.2: Rassal Sayı Üretme için Bazı Matlab Komutları

Matlab Kodu	**Açıklama**
rand(m,n)	m satır n sütundan oluşan matrisin her elemanına [0,1] aralığında sayı atar.
rand(n)	rand(n,n) dir. Yani n boyutlu kare matris için rassal sayı atar.
rand	düzgün dağılıma sahip rassal sayı atar.
randn	Normal dağılıma sahip rassal sayı atar.
gamrnd	Gamma dağılıma sahip rassal sayı atar.Gamma sayısı
binornd	Binom dağılıma sahip rassal sayı atar. Binom sayısı
betarnd	Beta dağılıma sahip rassal sayı atar. Beta sayısı
cdf	Kümülatif Dağılım Fonksiyonu
pdf	Olasılık Dağılım Fonksiyonu
norminv	Normal dağılımı verilen değerin tersi tablo değerini verir.

Şimdi Monte Carlo metodunun çalışma şeklini inceleyelim.

2.5.2. Monte Carlo Simülasyonu

Öncelikli olarak problemin incelenip verilere uygun dağılım seçilir. Finansal dayanak varlıkların fiyatları Geometrik Brown Hareketine uygun olarak fiyat yörüngesi takip ettiğinden Normal dağılıma veya Log-Normal dağılıma uyar. Üretilecek rassal sayılarda bu dağılıma sahip olması simülasyon açısından önemlidir.

S_t dayanak varlığının değeri olmak üzere geometrik Brown hareketi ile fiyat yörüngesi hareket edeceğinden elde edilen SDE

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{2.22}$$

formatında olacaktır. Bu denklemde $\mu S_t dt$ terimi deterministik bilinen beklenen değeri verirken $\sigma S_t dW_t$ terimi stokastik analizin incelediği bilinmeyen faktörlerden gelecek belirsizlik terimidir. Buradan dayanak varlık için

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{2.23}$$

$\frac{dS_t}{S_t} = R_t$ değişim oranındaki getiri değerleri için Euler-Marumaya metodu uygulanırsa oluşturulacak iterasyon denklemi

$$R_t = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_t \tag{2.24}$$

elde edilir. Denklemdeki Z_t normal dağılıma sahip rassal üretilen sayılarla oluşturulur.

İterasyon sonucu oluşan SDE'nin çözüm denkleminde uygulanması ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$S_i(T) = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T} Z_i} \tag{2.25}$$

Bu denklemden elde edilen dayanak varlık fiyatı her rassal sayı için alım opsiyon fiyatına uygulanırsa

$$C_i = e^{-rT}(S_i(T) - K)^+ \tag{2.26}$$

veri seti elde edilmiş olur. Bu veri setindeki C_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ değerlerinin ortalaması

$$\overline{C_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i$$

ve örneklem standart sapması

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(C_i - \overline{C_n})^2}$$

dir. $1-\alpha$ güven aralığı için alım opsiyonun değerleri $\left[\overline{C_n} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \overline{C_n} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right]$ belirlenir.

N değeri büyüdükçe Monte Carlo metodunun hata payı artmaktadır. Bu hatanın küçültülmesi için düzgün dağılımı üreten seriler kullanılır. Ayrıca varyans küçültme teknikleri de kullanılabilir. Örneğin Antitetik Varyans Metodu bunlardan biridir.

Bu metotta üretilen her sayı normal dağılıma uygun üretilir. Bu nedenle rassal sayı ile negatif değerinin olasılıkları toplamı 1 olacaktır. Bu durumda Z_i sayısı için alım opsiyonu değerini ile $-Z_i$ sayısı için alım opsiyonu değerinin aritmetik ortalaması ile elde edilen serinin varyansı daha küçük olacaktır.

$$var(C(Z_i) + C(-Z_i)) < var(C(Z_i)) + var(C(-Z_i)) \tag{2.27}$$

Avrupa tipi alım ve satım opsiyonları için Monte Carlo metodunun Matlab kodları aşağıda verilmiştir (Higham, 2004).

```
% Avrupa Tipi Satım Opsiyonu için  Monte Carlo
randn('state',100)
%%%%%%%%%%%%%%%% Parametre ve Faktörler %%%%%%%%%%%%%%
S = 100; K = 100; sigma = 0.3; r = 0.1; T = 1 ;
Dt = 1e-3; N = T/Dt; M = 1e4;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A=zeros(10,4);
for j=1:10
    V = zeros(M,1);
```

```
    for i = 1:M
        Sfinal = S*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*randn);
        V(i) = exp(-r*T)*max(-K+Sfinal,0);
    end
    aM = mean(V); bM = std(V);
    conf = [aM - 1.96*bM/sqrt(M), aM + 1.96*bM/sqrt(M)];
A(j,1)=aM; A(j,3)=aM - 1.96*bM/sqrt(M);
A(j,4)=aM + 1.96*bM/sqrt(M); A(j,2)=bM; T=T+1/12;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Avrupa Tipi Satım Opsiyonu için  Monte Carlo
randn('state',100)
%%%%%%%%%%%%%%%%% Parametre ve Faktörler %%%%%%%%%%%%%%
S = 100; K = 100; sigma = 0.3; r = 0.1; T = 1 ;
Dt = 1e-3; N = T/Dt; M = 1e4;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A=zeros(10,4);
for j=1:10
    V = zeros(M,1);
    for i = 1:M
        Sfinal = S*exp((r-0.5*sigma^2)*T+sigma*sqrt(T)*randn);
        V(i) = exp(-r*T)*max(K-Sfinal,0);
    end
    aM = mean(V); bM = std(V);
    conf = [aM - 1.96*bM/sqrt(M), aM + 1.96*bM/sqrt(M)];
A(j,1)=aM; A(j,3)=aM - 1.96*bM/sqrt(M);
A(j,4)=aM + 1.96*bM/sqrt(M); A(j,2)=bM; T=T+1/12;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

2.6. Opsiyon Fiyatlama Üzerine Yapılan Çalışmalar

Finansal türev araçlarının dünya piyasalarındaki işlem hacminin artması yatırımcılar kadar akademik araştırma yapan çevrelerin de dikkatini çekmiştir. Bu nedenle uluslararası akademik yayınlar arasında yapılmış birçok çalışma vardır.

Risk ve belirsizlikler üzerine yapılan stokastik kalkülüs ve SDE çalışmalarının Fischer Black ve Myron Scholes'un 1973 yılında yayınladıkları makale olan "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" ile opsiyon fiyatlandırmasına uygulaması bir kilometre taşı olmuştur.

Semih Yön'ün 2015 yazdığı doktara tezinde yaptığı aşağıdaki Tablo 2.3'de yapılan bazı akademik çalışmaların katkılarını göstermektedir.

Tablo 2.3: Yayınlanan Makalelerin Yaptığı Katkılar

Yayınlanan Makale ve tarihi	**Getirilen yenilik konusu**
Black ve Scholes (1973)	Black-Scholes formülü
Merton (1973), (1976)	Ani fiyat hareketleri-Poisson süreci
Cox ve diğ. (1979)	Binom modeli ile opsiyon fiyatlaması
Boyle (1986)	Trinomial ağaçlar ile opsiyon fiyatlaması
Hull ve White (1987)	Stokastik volatilite modelleri (SV)
Heston (1993)	SV'ye genel çözüm
Longstaff (1995)	Hesaplanan (Implied) volatilite
Broadie ve Glasserman (1996)	Monte Carlo ve Önem Örneklemesi
Broadie ve Glasserman (1997)	Varyans düşürme teknikleri
Boyle ve diğ. (1997)	Monte Carlo ile varlık fiyatlaması
Ait-Sahalia ve Kimmel (2006)	SV kapsamlı çözüm
Boyle ve Draviam (2007)	Stokastik rejim değiştirme
Junichi, (2014)	Çok boyutlu Lévy süreçleri MC uygulanması
Xiaoyu ve Jian (2015)	Belirsiz fiyat modeli için opsiyon fiyatlaması

Kaynak: Yön S.(2015), Yayınlanmamış Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü

Ulusal Tez Merkezine kayıtlı Black-Scholes denklemi üzerine yapılan 14 tez varken Monte Carlo Simülasyon metodu ile ilgili 282 tez vardır. Monte Carlo metodu ile yapılan çalışmaların büyük kısmı Mühendislik ile ilgili çalışmalardır. Sadece 6 tanesi İşletme anabilim dalı ile ilgilidir.

1995 yılı ve sonrasında türev ürünler ile ilgili fiyatlama konusunda yapılan yayın sayısı hızla artmıştır. 1995 yılına kadar 16.000 civarında yayın varken 1995 sonrasında 200.000 civarındadır (Yön, 2015).

3. BÖLÜM : OPSİYON FİYATLAMA MODELLERİNE YÖNELİK BİR UYGULAMA

3.1. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, stokastik kalkülüs ve olasılık teorisini kullanarak opsiyon fiyatlama metotlarını inceleyip Monte Carlo metotu ve Black-Scholes fiyatlama modelini karşılaştırmak, algoritmalarını incelemek ve opsiyon primleri arasındaki farklılıkları ortaya koymaktır.

3.2. Çalışmanın Sınırları

Bu çalışmada Black-Scholes ve Monte Carlo metotları ele alınmıştır. Buna göre opsiyon fiyatlandırma modellerinden Binom modeli ele alınmamıştır.

Gerçek hayatta piyasada oluşmuş özellikle opsiyon duyarlılığını ölçen araçlar ve baz alınan oynaklık ve faiz gibi kavramlara ulaşmanın zor olması nedeniyle modelde kullanılan veriler rassal olarak belirlenmiştir.

3.3. Bulgular

Uygulama aşamasında hesaplamalar Matlab 2015a ve MS-Excel 2016 paket programları kullanılarak yapılmıştır.

Önceklikli olarak kullanım fiyatı, risksiz faiz oranı, vade ve dalgalanma (oynaklık) değerleri sabit tutularak dayanak varlığın artışına bağlı olarak Black-Scholes metodu ile alım-satım opsiyon primleri ile duyarlılıklar hesaplanmış ve Tablo 3.1'de bu değerler verilmiştir.

Tablo 3.1: K=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında S Artarken Opsiyon Prim ve Duyarlılıklarının Black-Sholes Denklemi ile hesaplanan Değerleri

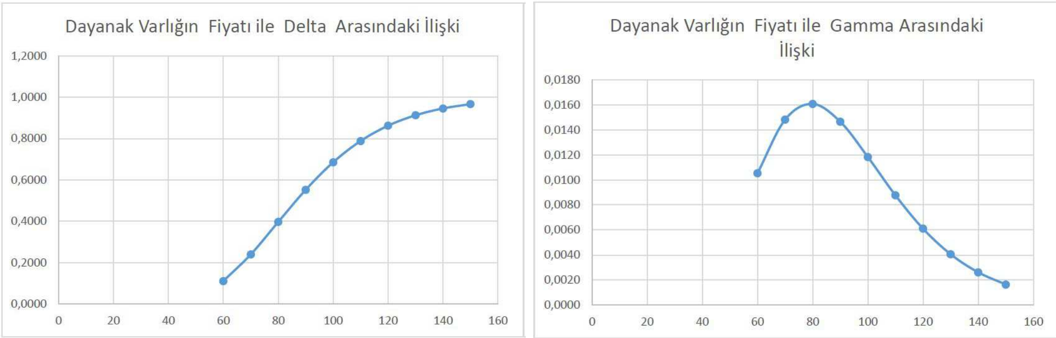
S	K	r	T	σ	C	P	DELTA	GAMMA	THETA	VEGA	RHO
60	100	0,10	1,00	0,30	0,8599	31,3436	0,1113	0,0105	-2,2892	11,3807	5,8207
70	100	0,10	1,00	0,30	2,5818	23,0656	0,2402	0,0148	-4,6892	21,7722	14,2338
80	100	0,10	1,00	0,30	5,7588	16,2425	0,3972	0,0161	-7,2297	30,8508	26,0210
90	100	0,10	1,00	0,30	10,5199	11,0036	0,5526	0,0146	-9,2600	35,5927	39,2105
100	100	0,10	1,00	0,30	16,7341	7,2179	0,6856	0,0118	-10,5067	35,4962	51,8229
110	100	0,10	1,00	0,30	24,1298	4,6135	0,7884	0,0088	-11,0359	31,8397	62,5990
120	100	0,10	1,00	0,30	32,4061	2,8899	0,8624	0,0061	-11,0678	26,3992	71,0794
130	100	0,10	1,00	0,30	41,2988	1,7825	0,9127	0,0041	-10,8301	20,6285	77,3586
140	100	0,10	1,00	0,30	50,6033	1,0870	0,9457	0,0026	-10,4912	15,4073	81,8007
150	100	0,10	1,00	0,30	60,1738	0,6575	0,9667	0,0016	-10,1510	11,1150	84,8370

Dayanak varlığın değeri arttıkça alım opsiyon primi, delta, rho artarken satım opsiyon primi ve theta değerleri azalır. Vega ve gamma değeri ise dayanak varlığın fiyatı ve kullanım fiyatının eşit olma durumundaki maksimum değere ulaşmıştır.

Şekil 3.1: K=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında S Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

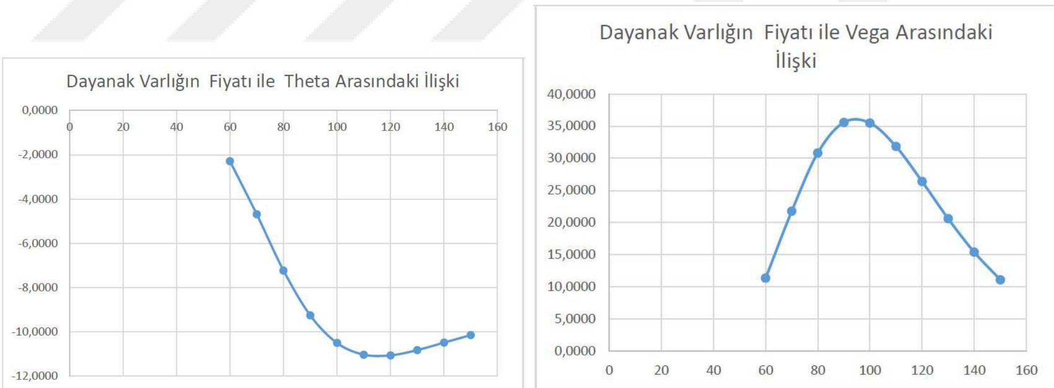
Şekil 3.1 olarak verilen grafiklerde dayanak varlığın fiyatındaki değişimin alım ve satım opsiyonunun primi üzerindeki değişimi gösterilmektedir. Dayanak varlığın fiyatı arttıkça alım opsiyon primim artarken satım opsiyon primi azalır.

Şekil 3.2 olarak verilen aşağıdaki grafikte iki önemli duyarlılık olan Delta(Δ) ile Gamma (Γ)'nın dayanak varlığın fiyatındaki artışa göre değişimleri gözlenmiştir. Dayanak varlığın fiyatı arttıkça Delta(Δ) değeri artar. Dayanak varlığın fiyatı, kullanım fiyatına eşit olduğu zaman Gamma (Γ) maksimum değere ulaşır.



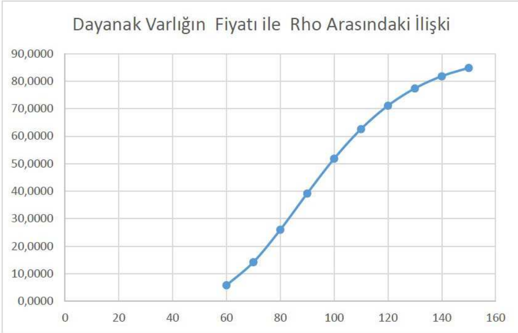
Şekil 3.2: K=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında S Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.3 olarak verilen aşağıdaki grafikte iki önemli duyarlılık olan Theta(Θ) ile Vega'nın dayanak varlığın fiyatındaki artışa göre değişimleri gözlenmiştir. Dayanak varlığın fiyatı arttıkça Theta(Θ) değeri azalırken dayanak varlığın fiyatının kullanım fiyatına göre farklı şekilde büyük olması durumunda değer Theta(Θ) tekrar artmaya başlamıştır. Dayanak varlığın fiyatı, kullanım fiyatına eşit olduğu zaman Vega maksimum değere ulaşır.



Şekil 3.3: K=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında S Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.4 olarak verilen aşağıdaki grafikte önemli duyarlılıklardan biri olan Rho(ρ)'nun dayanak varlığın fiyatındaki artışa göre değişimleri gözlenmiştir. Dayanak varlığın fiyatı arttıkça Rho(ρ) değeri arttığı görülmüştür.



Şekil 3.4: K=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında S Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Yine aynı değerler için Monte Carlo metodu ile alım-satım opsiyon primleri için %95 güven aralığında alt ve üst sınır değerleri veri grubunun ortalaması ve varyansı hesaplanmıştır. Rassal sayı değerlerini baz alarak bulunan bu değerler Tablo 3.2'deki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.2: K=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında S Artarken Opsiyon Primlerinin %95 Güven Aralığında Monte Carlo Metodu ile Hesaplanan Değerleri

Opsiyona Etki Eden Faktör Değerleri					ALIM OPSİYONU İÇİN				SATIM OPSİYONU İÇİN			
S	K	r	T	σ	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR
60	100	0,10	1,00	0,30	0,8100	4,4366	0,7231	0,8970	31,4385	16,1935	31,1211	31,7559
70	100	0,10	1,00	0,30	2,5982	8,5995	2,4296	2,7667	23,0847	16,2787	22,7656	23,4037
80	100	0,10	1,00	0,30	5,9338	13,6818	5,6656	6,2020	16,1178	15,3081	15,8178	16,4179
90	100	0,10	1,00	0,30	10,8123	19,1396	10,4371	11,1874	10,9063	13,3621	10,6444	11,1682
100	100	0,10	1,00	0,30	16,7049	24,1002	16,2325	17,1772	7,1772	11,1984	6,9577	7,3967
110	100	0,10	1,00	0,30	23,8009	28,4479	23,2433	24,3584	4,6995	9,1785	4,5196	4,8794
120	100	0,10	1,00	0,30	32,5482	33,4623	31,8923	33,2040	2,9454	7,3993	2,8003	3,0904
130	100	0,10	1,00	0,30	40,7137	36,9770	39,9889	41,4384	1,7514	5,6216	1,6413	1,8616
140	100	0,10	1,00	0,30	49,8772	41,2553	49,0686	50,6858	1,1195	4,4468	1,0324	1,2067
150	100	0,10	1,00	0,30	60,7579	45,5526	59,8651	61,6507	0,7160	3,4955	0,6475	0,7845

Monte Carlo metodu ile hesaplanan değerlerin ortalaması her iki opsiyon içinde Black-Scholes denklemleri ile hesaplanan değere çok yakındır. Rassal sayı değerleri arttıkça bu değerlerin daha yakın sonuç verdiği gözlemlenir.

Tablo 3.3: S=100; r=%10; T= 1 yıl; σ = %30 Alındığında K Artarken Opsiyon Prim ve Duyarlılıklarının Black-Sholes Denklemi ile hesaplanan Değerleri

S	K	r	T	σ	C	P	DELTA	GAMMA	THETA	VEGA	RHO
100	60	0,10	1,00	0,30	45,8785	0,1688	0,9856	0,0012	-5,8167	3,6574	52,6810
100	70	0,10	1,00	0,30	37,3210	0,6596	0,9528	0,0033	-7,2738	9,8554	57,9553
100	80	0,10	1,00	0,30	29,4317	1,8187	0,8901	0,0063	-8,7764	18,7893	59,5799
100	90	0,10	1,00	0,30	22,5101	3,9454	0,7980	0,0094	-9,9535	28,1629	57,2909
100	100	0,10	1,00	0,30	16,7341	7,2179	0,6856	0,0118	-10,5067	35,4962	51,8229
100	110	0,10	1,00	0,30	12,1310	11,6631	0,5658	0,0131	-10,3473	39,3507	44,4467
100	120	0,10	1,00	0,30	8,6063	17,1868	0,4505	0,0132	-9,5823	39,5867	36,4434
100	130	0,10	1,00	0,30	5,9963	23,6252	0,3478	0,0123	-8,4218	36,9552	28,7856
100	140	0,10	1,00	0,30	4,1164	30,7936	0,2617	0,0108	-7,0864	32,5428	22,0495
100	150	0,10	1.00	0,30	2,7922	38,5178	0,1926	0,0091	-5,7522	27,3668	16,4716

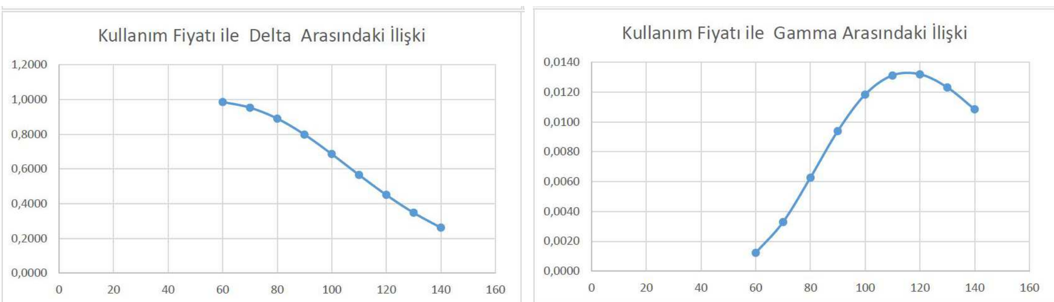
Dayanak varlığın fiyatı, risksiz faiz oranı, vade ve dalgalanma(oynaklık) değerleri sabit tutularak kullanım fiyatındaki artışına bağlı olarak Black-Scholes metodu ile alım-satım opsiyon primleri ile duyarlılıklar hesaplanmış ve Tablo 3.3'de bu değerler verilmiştir.

Kullanım fiyatının değeri arttıkça alım opsiyon primi, delta, rho azalırken satım opsiyon prim değeri artar. Ayrıca Theta (Θ) ve Vega değerleri dayanak varlık fiyatı ile kullanım fiyatı eşit olduğu zaman maksimum değere ulaşırken ,Gamma (Γ) ağırlıklı olarak artışta olduğu belirlenmiştir.

Şekil 3.5: S=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında K Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

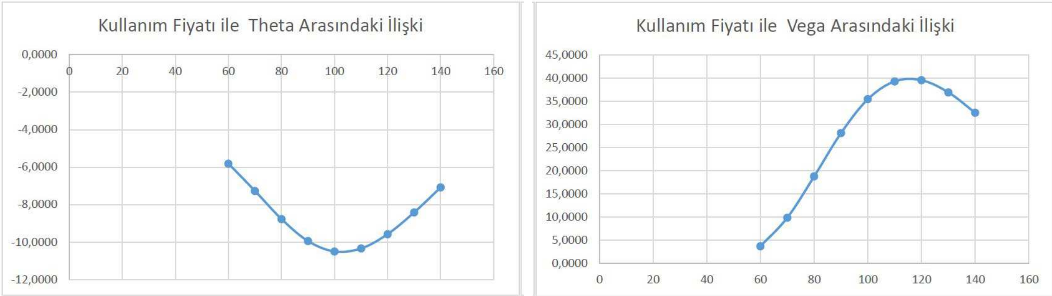
Şekil 3.5'de görüldüğü gibi kullanım fiyatı arttıkça alım opsiyon primi azalırken, satım opsiyon primi artar.

Opsiyon duyarlılıkları incelendiğinde Şekil 3.6'da Delta(Δ)'nın azaldığını Gamma(Γ) 'nın belli bir değerden sonra düşmeye başladığı gözlenmiştir.



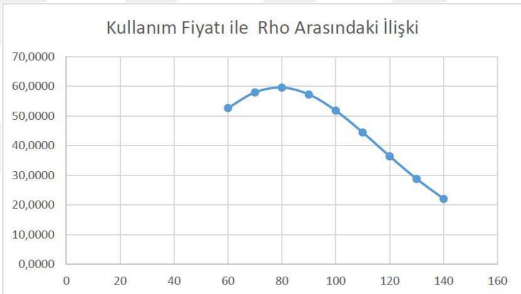
Şekil 3.6: S=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında K Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.7'de Theta (Θ)'nın dayanak varlığın kullanım fiyatına eşit olduğu noktada minimum değerine ulaştığı gözlemlenmiştir. Ayrıca Vega'da tersine bu aralığa yakın değerlerde maksimum değere ulaşmıştır.



Şekil 3.7: S=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında K Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.8'de ise Rho(ρ)'nun dayanak varlığın kullanım fiyatına yakın olduğu değerlede maksimum değer aldığı gözlemlenmiştir.



Şekil 3.8: S=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında K Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Yine aynı değerler için Monte Carlo metodu ile alım-satım opsiyon primleri için %95 güven aralığında alt ve üst sınır değerleri veri grubunun ortalaması ve varyansı hesaplanmıştır. Rassal sayı değerlerini baz alarak bulunan bu değerler Tablo 3.4'deki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.4: S=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında K Artarken Opsiyon Primlerinin %95 Güven Aralığında Monte Carlo Metodu ile Hesaplanan Değerleri

Opsiyona Etki Eden Faktör Değerleri					ALIM OPSİYONU İÇİN				SATIM OPSİYONU İÇİN			
S	K	r	T	σ	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR
100	60	0,10	1,00	0,30	45,6279	30,1423	45,0371	46,2187	0,1594	1,2143	0,1356	0,1832
100	70	0,10	1,00	0,30	37,3076	29,6606	36,7262	37,8889	0,6501	2,8807	0,5937	0,7066
100	80	0,10	1,00	0,30	29,8163	28,6616	29,2545	30,3781	1,8287	5,1959	1,7268	1,9305
100	90	0,10	1,00	0,30	22,8715	26,8983	22,3443	23,3987	3,8738	7,9459	3,7181	4,0295
100	100	0,10	1,00	0,30	16,7049	24,1002	16,2325	17,1772	7,1772	11,1984	6,9577	7,3967
100	110	0,10	1,00	0,30	11,9235	20,6663	11,5184	12,3285	11,8328	14,6305	11,5460	12,1195
100	120	0,10	1,00	0,30	8,7052	18,2805	8,3469	9,0635	17,2136	17,7444	16,8658	17,5614
100	130	0,10	1,00	0,30	5,7047	15,2363	5,4060	6,0033	23,7597	20,2212	23,3633	24,1560
100	140	0,10	1,00	0,30	3,9801	13,0066	3,7252	4,2351	31,1992	22,7571	30,7532	31,6453
100	150	0,10	1,00	0,30	2,8982	11,2205	2,6783	3,1181	38,2734	24,8712	37,7859	38,7609

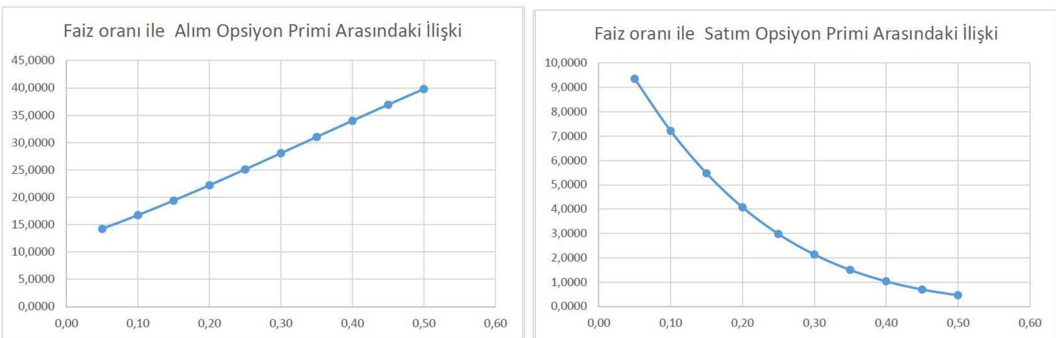
Alım opsiyon prim değerleri ile satım opsiyon prim değerlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo metodu ile yapılan hesaplamaları sonucunda önemli farklılık olmadığı gözlemlenmiştir.

Dayanak varlığın fiyatı, kullanım fiyatı, vade ve dalgalanma(oynaklık) değerleri sabit tutularak risksiz faiz oranındaki artışına bağlı olarak Black-Scholes metodu ile alım-satım opsiyon primleri ile duyarlılıklar hesaplanmış ve Tablo 3.5'de bu değerler verilmiştir.

Tablo 3.5: S=100;K=100; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Opsiyon Prim ve Duyarlılıklarının Black-Sholes Denklemi ile hesaplanan Değerleri

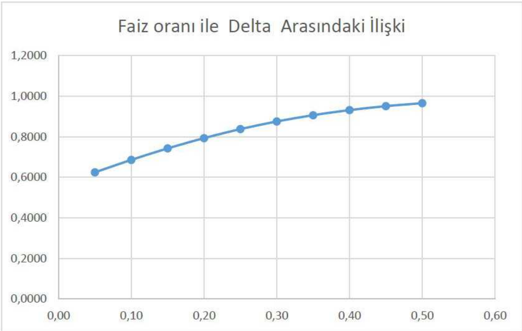
S	K	r	T	σ	C	P	DELTA	GAMMA	THETA	VEGA	RHO
100	100	0,05	1,00	0,30	14,2313	9,3542	0,6243	0,0126	-8,1012	37,9433	48,1939
100	100	0,10	1,00	0,30	16,7341	7,2179	0,6856	0,0118	-10,5067	35,4962	51,8229
100	100	0,15	1,00	0,30	19,4029	5,4737	0,7422	0,0108	-13,0665	32,2972	54,8125
100	100	0,20	1,00	0,30	22,2035	4,0766	0,7929	0,0095	-15,7053	28,5815	57,0906
100	100	0,25	1,00	0,30	25,0996	2,9796	0,8373	0,0082	-18,3471	24,6003	58,6283
100	100	0,30	1,00	0,30	28,0542	2,1360	0,8749	0,0069	-20,9206	20,5936	59,4386
100	100	0,35	1,00	0,30	31,0321	1,5009	0,9060	0,0056	-23,3647	16,7672	59,5704
100	100	0,40	1,00	0,30	34,0012	1,0332	0,9310	0,0044	-25,6315	13,2778	59,0995
100	100	0,45	1,00	0,30	36,9336	0,6964	0,9505	0,0034	-27,6877	10,2265	58,1193
100	100	0,50	1,00	0,30	39,8063	0,4594	0,9654	0,0026	-29,5142	7,6606	56,7303

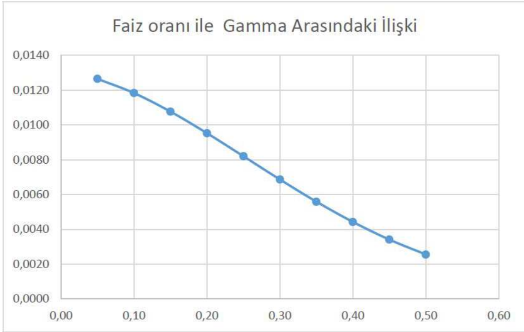
Risksiz faiz oranı arttıkça alım opsiyon primi, delta, rho artarken satım opsiyon primi, theta, gamma ve vega değerleri azalmıştır.



Şekil 3.9: S=100;K=100; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

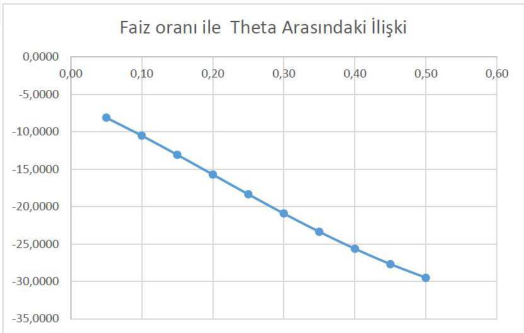
Şekil 3.9'da risksiz faiz oranı artarken alım opsiyon priminin arttığı ve satım opsiyon priminin azaldığı gözlemlenmiştir.

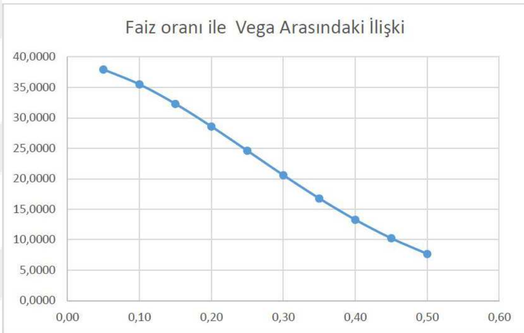




Şekil 3.10: S=100;K=100; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

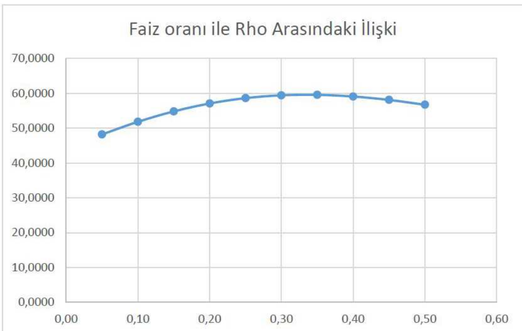
Şekil 3.10'da risksiz faiz oranı artarken Delta(Δ)'nın arttığı ve Gamma(Γ)'nın azaldığı gözlemlenmiştir.





Şekil 3.11: S=100;K=100; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.11'de risksiz faiz oranı artarken Theta(Θ)'nın ve Vega'nın azaldığı gözlemlenmiştir.



Şekil 3.12: S=100;K=100; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.12'de risksiz faiz oranı artarken Rho(ρ)'nın oynaklık değerine yakın değerlerde maksimum değere ulaştığı gözlemlenmiştir.

Yine aynı değerler için Monte Carlo metodu ile alım-satım opsiyon primleri için %95 güven aralığında alt ve üst sınır değerleri veri grubunun ortalaması ve varyansı hesaplanmıştır. Rassal sayı değerlerini baz alarak bulunan bu değerler Tablo 3.6'daki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.6: S=100; K=100;T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Opsiyon Primlerinin %95 Güven Aralığında Monte Carlo Metodu ile Hesaplanan Değerleri

Opsiyona Etki Eden Faktör Değerleri					ALIM OPSİYONU İÇİN				SATIM OPSİYONU İÇİN			
S	K	r	T	sigma	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR
100	100	0,05	1,00	0,30	14,0904	22,1309	13,6567	14,5242	9,4547	12,9744	9,2004	9,7090
100	100	0,10	1,00	0,30	16,6731	23,9142	16,2043	17,1418	7,1607	11,2191	6,9408	7,3806
100	100	0,15	1,00	0,30	19,7475	25,4553	19,2486	20,2464	5,4437	9,7239	5,2531	5,6343
100	100	0,20	1,00	0,30	22,5633	26,7887	22,0383	23,0884	4,0033	8,0972	3,8446	4,1620
100	100	0,25	1,00	0,30	25,0881	27,4314	24,5505	25,6258	2,9568	6,7211	2,8251	3,0885
100	100	0,30	1,00	0,30	27,6983	27,7838	27,1537	28,2429	2,1573	5,6474	2,0466	2,2680
100	100	0,35	1,00	0,30	31,1519	28,8124	30,5872	31,7166	1,5486	4,7034	1,4564	1,6408
100	100	0,40	1,00	0,30	33,5649	28,8108	33,0002	34,1296	1,0231	3,6607	0,9513	1,0948
100	100	0,45	1,00	0,30	36,4150	29,5656	35,8356	36,9945	0,7197	2,9819	0,6613	0,7782
100	100	0,50	1,00	0,30	40,1966	30,3392	39,6020	40,7913	0,4993	2,3942	0,4524	0,5462

Alım opsiyon prim değerleri ile satım opsiyon prim değerlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo metodu ile yapılan hesaplamaları sonucunda önemli farklılık olmadığı gözlemlenmiştir.

Dayanak varlığın fiyatı, kullanım fiyatı, risksiz faiz oranı ve dalgalanma(oynaklık) değerleri sabit tutularak vadedeki artışına bağlı olarak Black-Scholes metodu ile alım-satım opsiyon primleri ile duyarlılıklar hesaplanmış ve Tablo 3.7'de bu değerler verilmiştir. Vade değeri hesaplanırken özel durumların görülmesi için sistematik yapıdan ziyade özel belirlenmiş vadeler seçilmiştir.

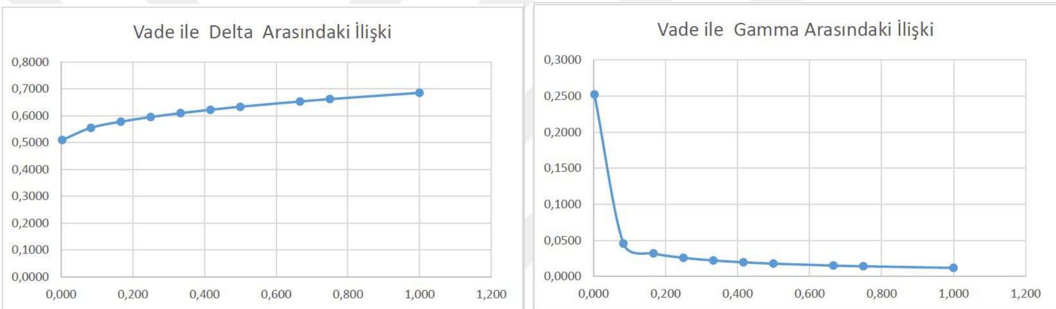
Tablo 3.7: S=100; K=100; r=%10; $\sigma = \%30$ Alındığında T Artarken Opsiyon Prim ve Duyarlılıklarının Black-Sholes Denklemi ile hesaplanan Değerleri

S	K	r	T	σ	C	P	DELTA	GAMMA	THETA	VEGA	RHO
100	100	0,10	1 gün	0,30	0,6447	0,6169	0,5102	0,2522	-118,5413	2,1019	0,1399
100	100	0,10	1 ay	0,30	3,8704	3,0405	0,5555	0,0456	-25,6966	11,4049	4,3065
100	100	0,10	2 ay	0,30	5,7138	4,0609	0,5782	0,0319	-19,5862	15,9728	8,6846
100	100	0,10	3 ay	0,30	7,2209	4,7519	0,5955	0,0258	-16,8566	19,3731	13,0818
100	100	0,10	4 ay	0,30	8,5523	5,2739	0,6099	0,0222	-15,2128	22,1534	17,4792
100	100	0,10	5 ay	0,30	9,7702	5,6892	0,6225	0,0196	-14,0779	24,5283	21,8656
100	100	0,10	6 ay	0,30	10,9065	6,0294	0,6337	0,0177	-13,2295	26,6092	26,2336
100	100	0,10	8 ay	0,30	13,0033	6,5540	0,6534	0,0151	-12,0141	30,1332	34,8941
100	100	0,10	9 ay	0,30	13,9848	6,7592	0,6622	0,0141	-11,5542	31,6515	39,1792
100	100	0,10	1 yıl	0,30	16,7341	7,2179	0,6856	0,0118	-10,5067	35,4962	51,8229

Vade arttıkça alım opsiyon primi,satım opsiyon primi, delta, rho , theta, vega değerleri artarken , gamma değeri belli bir değerden sonra azalmaya başladığı gözlemlenmiştir.

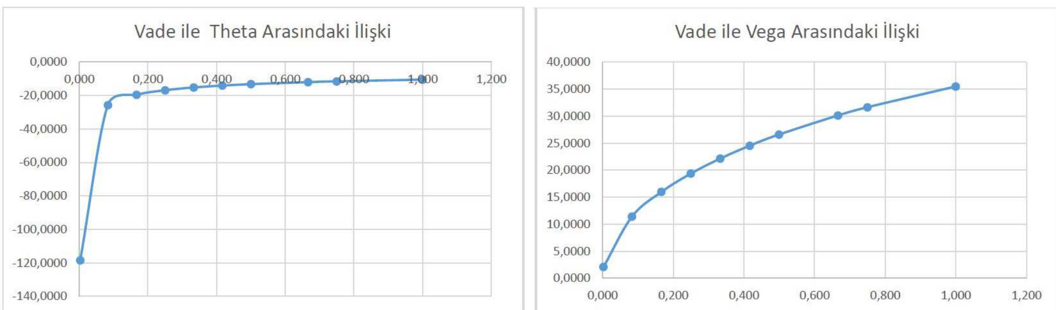
Şekil 3.13: S=100; K=100; r=%10; σ = %30 Alındığında T Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.13'de opsiyonun vadesi arttıkça alım opsiyon primi ile satım opsiyon primi arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca vadenin dolduğu gün opsiyon primi sıfırlanır.



Şekil 3.14: S=100; K=100; r=%10; σ = %30 Alındığında T Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.14'de görüldüğü gibi opsiyonun vadesi arttıkça Delta(Δ)'nın değeri artarken Gamma(Γ)'nın değerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Gamma(Γ)'daki ani düşüş vadenin günlükten bir anda aylığa geçmesinden kaynaklanmıştır.



Şekil 3.15: S=100; K=100; r=%10; σ = %30 Alındığında T Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.15'de görüldüğü gibi opsiyonun vadesi arttıkça Theta(Θ)'nın ve Vega'nın değerinin arttığı gözlemlenmiştir.

Şekil 3.16: S=100; K=100; r=%10; $\sigma = \%30$ Alındığında T Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.16'da görüldüğü gibi opsiyonun vadesi arttıkça Rho(ρ)'nın değerinin arttığı gözlemlenmiştir.

Yine aynı değerler için Monte Carlo metodu ile alım-satım opsiyon primleri için %95 güven aralığında alt ve üst sınır değerleri veri grubunun ortalaması ve varyansı hesaplanmıştır. Rassal sayı değerlerini baz alarak bulunan bu değerler Tablo 3.8'daki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.8: S=100; K=100; r=%10; $\sigma = \%30$ Alındığında T Artarken Opsiyon Primlerinin %95 Güven Aralığında Monte Carlo Metodu ile Hesaplanan Değerleri

Opsiyona Etki Eden Faktör Değerleri					ALIM OPSİYONU İÇİN				SATIM OPSİYONU İÇİN			
S	K	r	T	σ	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR
100	100	0,10	1 gün	0,30	0,6401	0,9301	0,6219	0,6583	0,6229	0,9032	0,6052	0,6406
100	100	0,10	1 ay	0,30	3,8409	5,5285	3,7325	3,9492	3,0717	4,5101	2,9833	3,1601
100	100	0,10	2 ay	0,30	5,6899	8,2265	5,5286	5,8511	4,0321	6,0571	3,9134	4,1508
100	100	0,10	3 ay	0,30	7,3558	10,5033	7,1499	7,5616	4,7148	7,1963	4,5738	4,8559
100	100	0,10	4 ay	0,30	8,7343	12,4984	8,4893	8,9792	5,2198	7,9101	5,0648	5,3749
100	100	0,10	5 ay	0,30	9,7475	14,0747	9,4716	10,0233	5,6576	8,5847	5,4893	5,8258
100	100	0,10	6 ay	0,30	10,7544	15,3712	10,4531	11,0557	6,1371	9,2475	5,9558	6,3183
100	100	0,10	8 ay	0,30	12,6049	18,3094	12,2461	12,9638	6,4863	10,0167	6,2899	6,6826
100	100	0,10	9 ay	0,30	13,6383	19,8804	13,2486	14,0279	6,8822	10,5206	6,6760	7,0884
100	100	0,10	1 yıl	0,30	16,5754	23,5716	16,1134	17,0374	7,3004	11,2659	7,0796	7,5212

Alım opsiyon prim değerleri ile satım opsiyon prim değerlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo metodu ile yapılan hesaplamaları sonucunda önemli farklılık olmadığı gözlemlenmiştir.

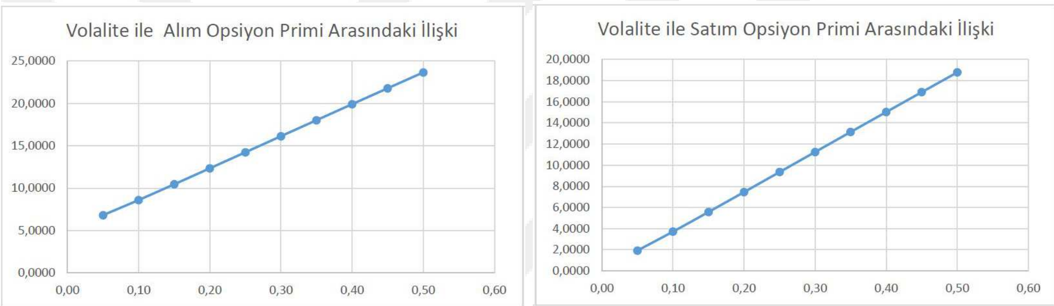
Dayanak varlığın fiyatı, kullanım fiyatı,risksiz faiz oranı ve vade değerleri sabit tutularak dalgalanmadaki (oynaklık) artışına bağlı olarak Black-Scholes metodu ile alım-satım opsiyon primleri ile duyarlılıklar hesaplanmış ve Tablo 3.9'da bu değerler verilmiştir.

Dalgalanma arttıkça alım opsiyon primi,satım opsiyon primi, vega değerleri artarken , rho , theta ve gamma değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir.

Tablo 3.9: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Opsiyon Prim ve Duyarlılıklarının Black-Sholes Denklemi ile hesaplanan Değerleri

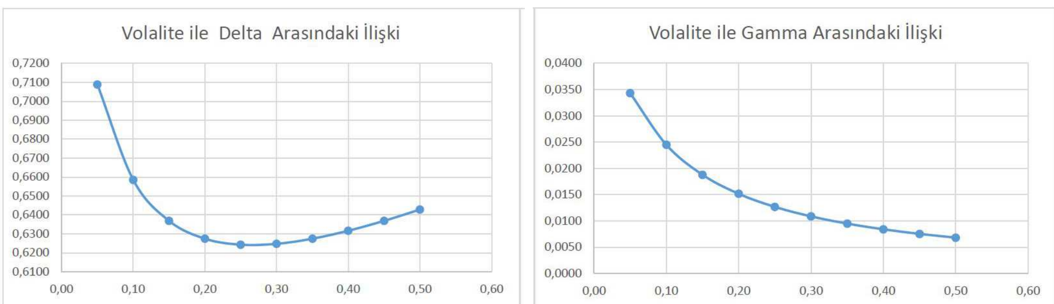
S	K	r	T	σ	C	P	DELTA	GAMMA	THETA	VEGA	RHO
100	100	0,10	1,00	0,05	6,8050	1,9279	0,7088	0,0343	-4,9187	34,2944	64,0791
100	100	0,10	1,00	0,10	8,5917	3,7146	0,6585	0,0245	-5,6156	36,7032	57,2569
100	100	0,10	1,00	0,15	10,4506	5,5735	0,6368	0,0188	-6,4140	37,5240	53,2325
100	100	0,10	1,00	0,20	12,3360	7,4589	0,6274	0,0151	-7,2505	37,8420	50,4049
100	100	0,10	1,00	0,25	14,2313	9,3542	0,6243	0,0126	-8,1012	37,9433	48,1939
100	100	0,10	1,00	0,30	16,1284	11,2514	0,6247	0,0108	-8,9547	37,9290	46,3419
100	100	0,10	1,00	0,35	18,0230	13,1459	0,6274	0,0095	-9,8043	37,8420	44,7180
100	100	0,10	1,00	0,40	19,9118	15,0347	0,6316	0,0084	-10,6457	37,7033	43,2489
100	100	0,10	1,00	0,45	21,7926	16,9155	0,6368	0,0075	-11,4755	37,5240	41,8905
100	100	0,10	1,00	0,50	23,6636	18,7866	0,6428	0,0068	-12,2912	37,3110	40,6147

Şekil 3.17'de oynaklık arttığında alım opsiyon primi ve satım opsiyon primini değerlerinin arttığı gözlenmiştir.



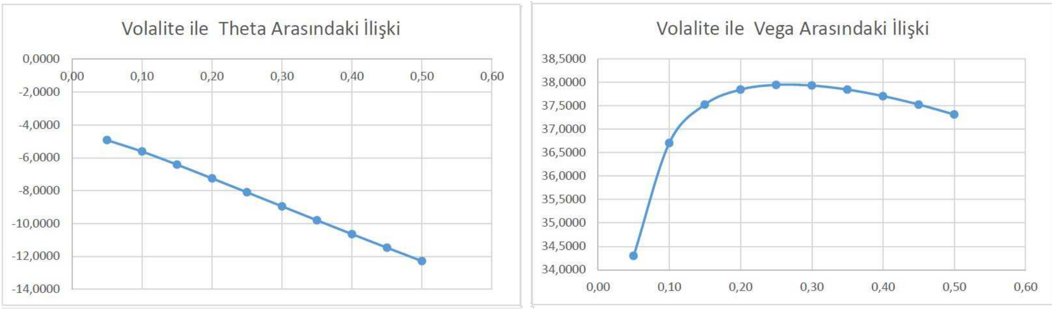
Şekil 3.17: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.18'de oynaklık arttığında Delta(Δ)'nın bir noktadaki değere kadar azıldıktan sonra artmaya başladığı gözlemlenirken, Gamma(Γ)'nın azaldığı belirlenmiştir.



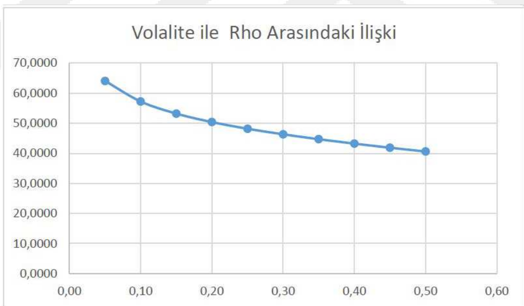
Şekil 3.18: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.19'da oynaklık arttığında Theta(Θ)'nın değeri azalırken, Vega'nın değeri önce artıp sonra azalmaya başladığı gözlenlenmiştir.



Şekil 3.19: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Şekil 3.20'de oynaklık arttığında Rho(ρ)'nın değerinin azalıdığı gözlenlenmiştir.



Şekil 3.20: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Black-Sholes Denklemi ile Hesaplanan Duyarlılıkların İlişkileri

Yine aynı değerler için Monte Carlo metodu ile alım-satım opsiyon primleri için %95 güven aralığında alt ve üst sınır değerleri veri grubunun ortalaması ve varyansı hesaplanmıştır. Rassal sayı değerlerini baz alarak bulunan bu değerler Tablo 3.10'daki tabloda verilmiştir.

Alım opsiyon prim değerleri ile satım opsiyon prim değerlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo metodu ile yapılan hesaplamaları sonucunda diğer faktörlere göre daha fazla farklılık gösterdiği ve prim değerleri arasında dikkate alınması gereken fark olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 3.10: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Opsiyon Primlerinin %95 Güven Aralığında Monte Carlo Metodu ile Hesaplanan Değerleri

Opsiyona Etki Eden Faktör Değerleri					ALIM OPSİYONU İÇİN				SATIM OPSİYONU İÇİN			
S	K	r	T	σ	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR	MC ORT.	MC STAN.SAP	MC ALT SINIR	MC ÜST SINIR
100	100	0,10	1,00	0,05	9,5199	4,8952	9,4240	9,6159	0,0379	0,3311	0,0314	0,0444
100	100	0,10	1,00	0,10	10,2954	8,8556	10,1218	10,4690	0,7745	2,3567	0,7283	0,8207
100	100	0,10	1,00	0,15	11,8425	12,5681	11,5962	12,0888	2,1543	4,7423	2,0614	2,2473
100	100	0,10	1,00	0,20	13,4837	16,3803	13,1626	13,8047	3,6916	6,9294	3,5558	3,8274
100	100	0,10	1,00	0,25	14,9529	20,0240	14,5605	15,3454	5,4267	9,1192	5,2480	5,6054
100	100	0,10	1,00	0,30	16,4924	23,5086	16,0316	16,9531	7,3533	11,3193	7,1314	7,5751
100	100	0,10	1,00	0,35	18,6133	28,2436	18,0597	19,1669	9,0056	13,3476	8,7440	9,2672
100	100	0,10	1,00	0,40	19,6325	32,1760	19,0018	20,2631	10,7328	14,9560	10,4396	11,0259
100	100	0,10	1,00	0,45	21,5380	37,3438	20,8061	22,2700	12,8261	16,8901	12,4950	13,1571
100	100	0,10	1,00	0,50	24,4978	43,8224	23,6388	25,3567	14,3079	18,5153	13,9450	14,6708

Black-Scholes denklemleri belirli koşul ve kabul altında gerçekleşirken aynı değerler altında rassal sayı aracılığıyla oluşturulan Monte Carlo metodu egzotik opsiyonlarda etkili sonuçlar vermektedir. Black-Scholes metodu Avrupa ve Amerikan tipi opsiyonlar dışında yakın sonuçlar elde edemeyebilir. Bunun ana sebebi belirsizlik terimleridir. Fakat Monte Carlo metodu bir çok rassal sayı grubunun dağılıma uygun ortalamalarından elde edildiğinden Merkezi Limit Teoremine göre gerçek değere yakın sonucu birçok koşul altında verir. Yukarıda elde edilen değerler iki metodun genellikle uyum içinde olduğunu göstermektedir.

Bu uyumu gözlemlemek için hesaplamalar sonucu elde edilen Tablo 3.1, Tablo 3.2, Tablo 3.3, Tablo 3.4, Tablo 3.5, Tablo 3.6, Tablo 3.7, Tablo 3.8, Tablo 3.9 ve Tablo 3.10'daki değerlerdeki alım ve satım opsiyon primlerinin farklarının yüzdelik değişimlerini incelersek aşağıdaki tablo ve grafikler elde edilir.

Tablo 3.11'de dayanak varlığın fiyatındaki artışa bağlı olarak Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu ile hesaplanan opsiyon prim değerleri arasındaki farkın Black-Scholes Metodundaki opsiyon primine bağlı %'lik değişim değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3.11'de gözlemlendiği gibi önemli bir farklılık yoktur. İki metotta uyumlu değerler vermektedir.

Tablo 3.11: K=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında S Artarken Opsiyon Primlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu Farklarının İncelenmesi

BS-ALIM	MC-ALIM	Fark	$\%'lik$	BS-SATIM	MC-SATIM	Fark	$\%'lik$
0,8599	0,8100	0,0498	5,80%	31,3436	31,4385	-0,0949	-0,30%
2,5818	2,5982	-0,0163	-0,63%	23,0656	23,0847	-0,0191	-0,08%
5,7588	5,9338	-0,1750	-3,04%	16,2425	16,1178	0,1247	0,77%
10,5199	10,8123	-0,2924	-2,78%	11,0036	10,9063	0,0973	0,88%
16,7341	16,7049	0,0293	0,17%	7,2179	7,1772	0,0407	0,56%
24,1298	23,8009	0,3289	1,36%	4,6135	4,6995	-0,0860	-1,86%
32,4061	32,5482	-0,1420	-0,44%	2,8899	2,9454	-0,0555	-1,92%
41,2988	40,7137	0,5851	1,42%	1,7825	1,7514	0,0311	1,74%
50,6033	49,8772	0,7261	1,43%	1,0870	1,1195	-0,0325	-2,99%
60,1738	60,7579	-0,5841	-0,97%	0,6575	0,7160	-0,0585	-8,90%

Tablo 3.12'de kullanım fiyatındaki artışa bağlı olarak Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu ile hesaplanan opsiyon prim değerleri arasındaki farkın Black-Scholes Metodundaki opsiyon primine bağlı %'lik değişim değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3.12 de gözlemlendiği gibi önemli bir farklılık yoktur. İki metotta uyumlu değerler vermektedir.

Tablo 3.12: S=100; r=%10; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında K Artarken Opsiyon Primlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu Farklarının İncelenmesi

BS-ALIM	MC-ALIM	Fark	$\%'lik$	BS-SATIM	MC-SATIM	Fark	$\%'lik$
45,8785	45,6279	0,2506	0,55%	0,1688	0,1594	0,0094	5,55%
37,3210	37,3076	0,0134	0,04%	0,6596	0,6501	0,0095	1,43%
29,4317	29,8163	-0,3846	-1,31%	1,8187	1,8287	-0,0100	-0,55%
22,5101	22,8715	-0,3614	-1,61%	3,9454	3,8738	0,0716	1,82%
16,7341	16,7049	0,0293	0,17%	7,2179	7,1772	0,0407	0,56%
12,1310	11,9235	0,2076	1,71%	11,6631	11,8328	-0,1696	-1,45%
8,6063	8,7052	-0,0989	-1,15%	17,1868	17,2136	-0,0268	-0,16%
5,9963	5,7047	0,2917	4,86%	23,6252	23,7597	-0,1345	-0,57%
4,1164	3,9801	0,1362	3,31%	30,7936	31,1992	-0,4056	-1,32%
2,7922	2,8982	-0,1060	-3,80%	38,5178	38,2734	0,2444	0,63%

Tablo 3.13'de risksiz faiz oranındaki artışa bağlı olarak Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu ile hesaplanan opsiyon prim değerleri arasındaki farkın Black-Scholes Metodundaki opsiyon primine bağlı %'lik değişim değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3.13 de gözlemlendiği gibi önemli bir farklılık yoktur. İki metotta uyumlu değerler vermektedir.

Tablo 3.13: S=100;K=100; T= 1 yıl; $\sigma = \%30$ Alındığında r Artarken Opsiyon Primlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu Farklarının İncelenmesi

BS-ALIM	MC-ALIM	Fark	$\%'lik$	BS-SATIM	MC-SATIM	Fark	$\%'lik$
14,2313	14,0904	0,1408	0,99%	9,3542	9,4547	-0,1005	-1,07%
16,7341	16,6731	0,0611	0,36%	7,2179	7,1607	0,0572	0,79%
19,4029	19,7475	-0,3447	-1,78%	5,4737	5,4437	0,0300	0,55%
22,2035	22,5633	-0,3598	-1,62%	4,0766	4,0033	0,0732	1,80%
25,0996	25,0881	0,0114	0,05%	2,9796	2,9568	0,0228	0,77%
28,0542	27,6983	0,3559	1,27%	2,1360	2,1573	-0,0213	-1,00%
31,0321	31,1519	-0,1198	-0,39%	1,5009	1,5486	-0,0477	-3,18%
34,0012	33,5649	0,4363	1,28%	1,0332	1,0231	0,0101	0,98%
36,9336	36,4150	0,5185	1,40%	0,6964	0,7197	-0,0233	-3,35%
39,8063	40,1966	-0,3903	-0,98%	0,4594	0,4993	-0,0399	-8,69%

Tablo 3.14'de opsiyon sözleşmesinin vadesindeki artışa bağlı olarak Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu ile hesaplanan opsiyon prim değerleri arasındaki farkın Black-Scholes Metodundaki opsiyon primine bağlı %'lik değişim değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3.14'de gözlemlendiği gibi önemli bir farklılık yoktur. İki metotta uyumlu değerler vermektedir.

Tablo 3.14: S=100; K=100; r=%10; $\sigma = \%30$ Alındığında T Artarken Opsiyon Primlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu Farklarının İncelenmesi

BS-ALIM	MC-ALIM	Fark	$\%'lik$	BS-SATIM	MC-SATIM	Fark	$\%'lik$
0,6447	0,6401	0,0046	0,71%	0,6169	0,6229	-0,0060	-0,98%
3,8704	3,8409	0,0295	0,76%	3,0405	3,0717	-0,0312	-1,03%
5,7138	5,6899	0,0239	0,42%	4,0609	4,0321	0,0288	0,71%
7,2209	7,3558	-0,1349	-1,87%	4,7519	4,7148	0,0370	0,78%
8,5523	8,7343	-0,1819	-2,13%	5,2739	5,2198	0,0541	1,03%
9,7702	9,7475	0,0227	0,23%	5,6892	5,6576	0,0316	0,56%
10,9065	10,7544	0,1521	1,39%	6,0294	6,1371	-0,1076	-1,78%
13,0033	12,6049	0,3984	3,06%	6,5540	6,4863	0,0678	1,03%
13,9848	13,6383	0,3466	2,48%	6,7592	6,8822	-0,1230	-1,82%
16,7341	16,5754	0,1587	0,95%	7,2179	7,3004	-0,0826	-1,14%

Tablo 3.15'de opsiyon sözleşmesinin oynaklığın(σ) artışa bağlı olarak Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu ile hesaplanan opsiyon prim değerleri arasındaki farkın Black-Scholes Metodundaki opsiyon primine bağlı %'lik değişim değerleri hesaplanmıştır. Tablo 3.15'de gözlemlendiği gibi dikkate alınması gereken önemli farklılıklar oluşmaktadır. Bu nedenle iki metottan hangisinin uygulanmasının adil fiyat politikasına uyacağına opsiyon sözleşmesinin şartlarına göre karar verilmelidir.

Tablo 3.15: S=100;K=100 ;r=%10; T= 1 yıl Alındığında σ Artarken Opsiyon Primlerinin Black-Scholes ve Monte Carlo Metodu Farklarının İncelenmesi

BS-ALIM	MC-ALIM	Fark	$\%'lik$	BS-SATIM	MC-SATIM	Fark	$\%'lik$
6,8050	9,5199	-2,7149	-39,90%	1,9279	0,0379	1,8900	98,03%
8,5917	10,2954	-1,7037	-19,83%	3,7146	0,7745	2,9401	79,15%
10,4506	11,8425	-1,3919	-13,32%	5,5735	2,1543	3,4192	61,35%
12,3360	13,4837	-1,1477	-9,30%	7,4589	3,6916	3,7673	50,51%
14,2313	14,9529	-0,7217	-5,07%	9,3542	5,4267	3,9275	41,99%
16,1284	16,4924	-0,3639	-2,26%	11,2514	7,3533	3,8981	34,65%
18,0230	18,6133	-0,5903	-3,28%	13,1459	9,0056	4,1403	31,49%
19,9118	19,6325	0,2793	1,40%	15,0347	10,7328	4,3019	28,61%
21,7926	21,5380	0,2546	1,17%	16,9155	12,8261	4,0895	24,18%
23,6636	24,4978	-0,8342	-3,53%	18,7866	14,3079	4,4787	23,84%

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Finans dünyası için önemli yatırım araçları olan türev ürünler hızlı büyüyen işlem hacmi ile yatırımcıların vazgeçilmezleri arasına girmiştir.

Bu türev ürünler içinde olan genellikle organize piyasalarda işlem gören opsiyonlar ise yatırımcı için her türlü koşul altında risklerden kaçarak korumasını sağlamaktadır. Bu korunmanın opsiyon sözleşmesinin taraflarının haklarını adil şekilde yapabilmesi için doğru fiyatlandırma önemlidir. Opsiyon fiyatlandırması hem alıcı hem de satıcı açısından objektif rakamlara ulaşılması açısından çok değerli bir konudur.

Finansal türev ürünlerin fiyatlanmasında kullanılan metotlardan olan Monte Carlo ve Black-Scholes metotları finans piyasaları için bu nedenle önemli araçlardır. Belirsizliklere karşı önlem alarak karar vermede kolaylık sağlamaktadır.

Ülkemizde özellikle bu konularda yapılan çalışmaların yeterli olmadığı literatür çalışmasında da görüldüğü gibi 6 tane tez çalışması vardır. İleri matematik ve istatistik bilgisi ile finans bilgisi ihtiyaç duyulduğundan çalışması zor bir alan olması akademik çalışmaları etkilemiştir. Disiplinler arası çalışmaya ihtiyaç duyulmasına neden olmuştur.

Bu çalışmanın amacı da finansal türev ürünlerden biri olan opsiyonların fiyatlandırmasında kullanılan, Black-Scholes metodu ile Monte Carlo metodu kullanarak oluşturulan opsiyon primleri arasındaki farklılıkları ortaya koymak olmuştur.

Tez çalışması için yapılan hesaplamalar sonucu Monte Carlo metodu ve Black-Scholes metodundan elde edilen değerlerin opsiyon prim değerine etki eden faktörlerden olan "Dayanak Varlığın Fiyatı" ,"Kullanım Fiyatı", "Vade" ve "Risksiz Fazi Oranı" değerinin artması durumunda birbirine yakın opsiyon prim değerleri verdiği görülmüştür. Metotların tutarlı olduğu gözlemlenmiştir.

Fakat "Oynaklık" faktörü arttıkça opsiyon prim değerleri arasında dikkate alınması gereken farklılık gözlemlenmiştir.

Yatırımcıların bu metotların altyapısı ve algoritmalarını kullanarak yapılan yazılımları kullanarak gerçek dünyadaki etkenleri de baz alıp karar vermesi risklere karşı korunması açısından doğru olacağı düşünülmektedir.

Fakat gerçek dayanak varlık fiyatlarından oluşan veri setleri kullanılarak fiyatlama yapılması imkanı oluşmamıştır. Gerçek veriler kulanılarak fiyatlama yapılabilir.

Ayrıca daha hızlı ve doğru sonuçlara ulaşabilmek için kullanılacak yazılımlar ve programlanmaları üzerine çalışma yapılıp gerçek dünyanın daha iyi yansıtıldığı simülasyonlarla doğru fiyatlama yapılabilir.

KAYNAKÇA

Akarbulut K.(2019). Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, *Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Uşak.

Akdi Y. (2005). *Matematiksel İstatistiğe Giriş*, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Applebaum D. (2007), *Stochastic Processes,University of Sheffield Lec.Notes*, Sheffield.

Bhat B.R.(1981), *Modern Probability Theory*, John Wiley Sons, Tunbridge Wells(UK).

Black F., Scholes M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81,pp.637–59;

Chambers N.(2007),*Türev Piyasalar*, Beta Yayınları, İstanbul.

Chung K,.L.(1974), *A Course in Probability Theory 2nd ed.*,Academic Press, Stanford.

Chung K.L.(1975), *Elementary Probability Theory with Stochastic Processes*, Springer, New York.

Chung K,.L., Willams R.J.(1983), *Introduction to Stochastic Integration*,Birkhauser, New York.

Cohn, D.L.(2013), *Measure Theory*, Birkhäuser,Boston.

Çapar U.(2013), *Ölçü Kuramsallı Olasılık ve Stokastik Kalkülüse Giriş:Finans Uygulamaları ile* , ODTÜ Yayıncılık, Ankara.

Evans, L.C.(2012), *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, American Mathematical Society, Berkeley.

Halmos P.R. (1974), *Measure Theory* ,Graduate Texts in Mathematics Springer, New York.

Higham D.J.(2001), An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations, *SIAM Review* Vol. 43,No.3,pp.525–546.

Higham D.J.(2004),An Introduction to Financial Option Valution, Cambridge *Press*, Cambridge.

Hull J.(2018), Options, Futures, and Other Derivatives 9th, Global ed., *Pearson Education*, Toronto.

Ito K.,Stochastic Integral(1944), *Proceeding of The Japan Academy*,Vol.20 Number 8,pp.519,524.

Ito K. (1946),On a Stochastic Integral Equation, *Proceeding of The Japan Academy*, Vol.22 Number 2,pp.32-35.

Karatzas l.,Shreve S.(1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York.

Karan M.B.(2013), *Yatırım Analizi ve Portföy Yönetimi*, Gazi Kitabevi, Ankara.

Kingman J.F.C.,Taylor S.J.(1966),*Introduction to Measure and Probability*, Cambridge Press, Cambridge .

Kloeden, P.E. and Platen, E.(2013), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer Berlin Heidelberg, New York.

Lord, G.J. and Powell, C.E. and Shardlow, T.(2014,), *An Introduction to Computational Stochastic PDEs*, Cambridge University Press, London.

Malliavin P. (1995), *Integration and Probability*, Graduate Texts in Mathematics Springer-Verlag, New York.

Mao, X.(2008), *Stochastic Differential Equations and Applications*, ,Elsevier Science, Glasgow.

Merton R.C.(1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4,pp.141–83

Mikosch T.(2006), *Elementary Stochastic Calculus,* World Scientific, London.

Milstein G.N.(1974), Approximate integration of stochastic differential equations, *Theor.Prob.Appl.*,19,pp.557-562.

Neveu J.(1965) *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*, Holden-Day.

Protter P.(1990), *Stochastic Integration and Differential Equations (a new approach),* Springer,New York.

Oksendal B.(2013), *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications 6th ed.*, Springer, Oslo.

Ornstein L. ve Uhlenbeck G.E. (1930), On the Theory of Brownian Motion, Phys. *Rev.* 36,pp.823-841.

Sucu M. ve Kul F.(2015), *Finans Matematiği*, Nobel Yayıncılık, Ankara.

Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası A.Ş(VOB).,*Türev Araçlar Lisanslama Rehberi*,İzmir:2012.

Yıldırak K. ve Çalışkan N.(2008), *Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri*, Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Yön S.(2015). Sınırlı ve Sınırsız Fiyat Stokastik Süreçleri İçin Varyansın Düşürülmesiyle Dinamik Opsiyon Fiyatlaması, Yayınlanmamış Doktora Tezi, *İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.

EK

EK : Matematikle İlgili Önemli Bilgiler

EK: Matematikle İlgili Önemli Bilgiler

AÇIKLAMA: EK olarak yazılan bu bölüm Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Haziran 2019'da teslim edilen "Stokastik Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri" isimli tezimden özetlenerek alınmıştır.

MATEMATİK İLE İLGİLİ ÖNEMLİ BİLGİLER

Ölçü Kuramsallı Olasılık

Bu bölümde, olasılık uzayı ve olasılık ölçüsünü tanımlayabilmek ve daha iyi kullanabilmek için öncelikle σ-cebir kavramını tanımlayacağız. Ondan sonra ölçülebilirlik ve rassal değişkenler cebrini inceleyeceğiz. Ayrıca matematiksel beklenti,momentler ve yakınsama teoremlerinden bahsedeceğiz.

Olasılık, bir olayın bütün alternatif sonuçları içinde istenen sonuçların analizi yapmak amacıyla ortaya çıkmıştır. 1933 yılında A.N.Kolmogorov tarafından aksiyomatik olarak yapılandırılmasıyla çalışmalar hız kazanmıştır (Çapar, 2013).

Aksiyomatik yapıyla birlikte küme kuramı önem kazanmıştır. Bu nedenle küme kuramının özelliklerini inceleyelim.

Tanım 1 (Örnekleme Uzayı)**.** *Uygun şartlar altında yapılan iyi tanımlanmış bir rassal deneyin bütün sonuçlarını içeren kümeye "Örnekleme Uzayı" denir.* Ω *ile gösterilir.*

Deneyin istenen sonuçları olaylar kümesi şeklinde ise büyük harflerle ifade edilir. A,B,C.. gibi

Olay kümelerini eleman olarak kabul eden kümeye "Olaylar Topluluğu" denir. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ gibi majiskül harflerle gösterilir. ω bir olay , A olaylar kümesi ve $\mathscr{A}$ olaylar topluluğu ise aralarındaki ilişki

$$\omega \in A \in \mathscr{A}$$

şeklindedir. Örnekleme Uzayının elemanları olan olay veya olaylar kümelerinin birbirinden farklı durumlarına dikkat edilmelidir. Kümeler; sonlu elemanlı , sayılabilir sonsuz elemanlı ve sayılamaz sonsuz elemanlı olabilir (Çapar, 2013).

Şimdi σ-cebir kavramını izah edelim.

Tanım 2. $\mathscr{A}$ *,* Ω *ile gösterilen örnekleme uzayının herhangi bir alt kümelerinin topluluğu olsun.* $\mathscr{A}$ *topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa* $\mathscr{A}$ kümesine Ω üzerinde σ-cebir *denir* (Cohn, 2013; Çapar, 2013).

i. $\Omega \in \mathscr{A}$

ii. $\forall A \in \mathscr{A}$ *ise* $A^c \in \mathscr{A}$ *dir.*

iii. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathscr{A}$ *ise* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$ *dir.*

($\Omega, \mathscr{A}$) ikilisine ise "Ölçülebilir Uzay" *denir.*

Teorem 1. *$\mathscr{A}$, Ω içinde bir σ-cebir olsun. Buna göre ,*

i. $\emptyset \in \mathscr{A}$

ii. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k, \cdots \in \mathscr{A}$ *ise* $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$ *dir.*

iii. $A, B \in \mathscr{A}$ *ise* $A \setminus B \in \mathscr{A}$ *ve* $A \triangle B \in \mathscr{A}$ *dir.*

Tanım 3. *Bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathscr{C}$ kümeler topluluğu aşağıda verilen koşulları sağlarsa $\mathscr{C}$ ye Ω üzerinde* yarı cebir *denir.*

i) $\Omega \in \mathscr{C}$

ii) $A \in \mathscr{C}$ *ise* A^c *, $\mathscr{C}$ nin elemanlarından oluşan sonlu sayıda ikişerli ayrık kümelerinin birleşimi olarak ifade edilir.*

iii) $A, B \in \mathscr{C}$ *ise* $A \cap B \in \mathscr{C}$ *dir.*

Tanım 4. *Bir Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathscr{C}$ kümeler topluluğu olsun. $\mathscr{C}$ kümeler topluluğunu kapsayan en küçük bir σ-cebir vardır. Bu σ-cebire $\mathscr{C}$'*nin doğurduğu σ-cebir *denir. $\sigma(\mathscr{C})$ ile gösterilir.*

Tanım 5. $\mathbb{R}$*'de tanımlı bütün açık aralıkların oluşturduğu kümeler topluluğunu $\mathscr{O}$ ile gösterelim. $\mathscr{O}$ doğurduğu en küçük σ-cebire* Borel σ-cebir *denir. $\sigma(\mathscr{O}) = \mathscr{B}$ ile gösterilir.*

Borel σ-cebrinin elemanlarına ise Borel Kümeleri *denir.*

Olasılık Uzayı ve Olasılık Aksiyomları

Tanım 6. ***[Olasılık Uzayı]*** *Bir* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *sıralı üçlüsü aşağıda verilen şartları sağlarsa bu üçlüye "* σ-toplamsal olasılık uzayı" *ya da kısaca* "olasılık uzayı" *denir* (Çapar, 2013).

i) Ω *bir deneyin örneklem uzayı.*

ii) $\mathscr{A}, \Omega$ *üzerinde* σ*-cebir*

iii) *P:* $\mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *küme fonksiyonu aşağıda verilen koşulları sağlar.*

1) $\forall A \in \mathscr{A}$ *ise* $P(A) \geqslant 0$

2) $P(\Omega) = 1;$

3) $A_i \in \mathscr{A}, (i = 1, 2, 3, \cdots)$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j$ *ve* $i, j = 1, 2, 3, \cdots)$ *olmak üzere* $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \Sigma_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *dir.*

Yukarıda verilen P fonksiyonuna "Olasılık Fonksiyonu" *denir. Kısaca* "Olasılık Ölçüsü" *veya* "Olasılık" *olarak ifade edilir.*

Teorem 2. ***[Olasılık Fonksiyonunun Özellikleri]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. Bu taktirde;*

i) $P(\emptyset) = 0$

ii) $\forall A \in \mathscr{A}$ *için* $P(A) + P(A^c) = 1$

iii) $\forall A, B \in \mathscr{A}, A \subset B$ *ise* $P(A) \leq P(B)$

iv) $\forall A \in \mathscr{A}$ *için* $0 \leq P(A) \leq 1$

v) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ *için* $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

vi) $\forall A, B \in \mathscr{A}$ *için* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

dir (Çapar, 2013).

Teorem 3. ***[Boole Eşitsizliği]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_i \in \mathscr{A}(i = 1,2,\cdots,n)$ *olmak üzere*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{4.1}$$

dir.

Teorem 4. ***[Dizisel Süreklilik]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.*

i) $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *genişleyen olaylar dizisi olsun.*$(A_n \subset A_{n+1}, n = 1,2,3,\cdots)$ *Genişleyen olaylar dizisinin limitini* $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ *tanmlarsak;*

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{4.2}$$

dir.

ii) $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *daralan(büzüşen) olaylar dizisi olsun.*$(A_{n+1} \subset A_n, n = 1,2,3,\cdots)$ *Daralan olaylar dizisinin limitini* $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ *tanmlarsak;*

$$P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \tag{4.3}$$

dir (Çapar, 2013).

Tanım 7. ***[Sonsuz Sıklıkta]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{A}$ *olaylar dizisi için* $B := \{\omega |$*sonsuz sayıda n değeri için* $\omega \in A_n\}$ *tanımlan B olaylar kümesine* "sonsuz sıklıkta" A_n olayı *denir. Kısaca* s.s *ile gösterilir.*

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \tag{4.4}$$

şeklinde de ifade edebiliriz(Çapar, 2013).

Teorem 5. ***[Borel-Cantelli Lemması]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{A}$ *olaylar dizisi için* $B := \{\omega |$*sonsuz sayıda n değeri için* $\omega \in A_n\}$ *olmak üzere* $p_n := P(A_n)$ *şeklinde tanımlanırsa;*

a) Eğer $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ *ise* $P(B) = 0$ *dır.*

b) Eğer $\Sigma_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$ *ve* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *olayları bağımsız ise* $P(B) = 1$ *dir(Çapar, 2013).*

Tanım 8. ***[Bağımsızlık]*** *Bir olasılık uzayında olayların bağımsızlığını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz;*

i. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ *olmak üzere* A_1 *ve* A_2 *nin bağımsız olması için gerek şart* $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$ *dir.*

ii. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ *olaylarının bağımsız olması için gerek şart ve yeter şart ikişerli olarak bağımsız ve ayrıca;*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

olmasıdır.

iii. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. T herhangi bir indis kümesi olmak üzere* $\{A_t, t \in T\}$ *olaylar ailesinin bağımsız olması için gerek ve yeter şart aileden alınacak herhangi bir olaylar ailesinin bağımsız olmasıdır. Yani ;* $\forall n \geqslant 2$ *ve T indis kümesinden alınan* $\forall n$ *indeksleri* $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *için*

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_{t_i}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(A_{t_i}) \tag{4.5}$$

olmasıdır.(Çapar, 2013)

Tanım 9. ***[Koşullu Olasılık]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A, B \in \mathscr{A}$ *ve* $P(A) > 0$ *olmak üzere B olayının A olayı koşulu altında olma olasılığının değeri* $P(B|A)$ *veya* $P_A(B)$ *şeklinde ifade edilir.*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4.6}$$

olarak tanımlanır ve hesaplanır.(Çapar, 2013)

Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu : Örnekleme uzayının yapısına göre olasılık ölçüsü kurulurken farklı durumlara dikkat edilerek olasılık küme fonksiyonları tanımlanması gerekir. Bu durumların bazıları şu şekilde ifade edilebilir(Çapar, 2013).

I.) Örnekleme uzayı sonlu veya sayılabilir sonsuz elemandan oluşuyorsa ;
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ ve $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$

a) $p_i \geqslant 0$

b) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ şartlarını sağlayan $p_i\,(i = 1,2,\ldots,n)$ sayı kümesi olmak üzere $P : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ küme fonksiyonu $A \in \mathscr{A}$ için $P(A) = \sum_{i,(\omega_i \in A)} p_i$ şeklinde tanımlanır. Bu küme fonksiyonunun olasılık aksiyomlarını sağladığı açıktır.

II.) Örneklem uzayı Borel kümelerinden oluşuyorsa, yani $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ veya $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ üzerinde tanımlı ise o zaman "olasılık yoğunluk fonksiyonu" veya "olasılık dağılım fonksiyonu" kullanılarak olasılık ölçüsü hesaplanır.

Tanım 10. ***[Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu]*** *$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, f fonksiyonuna "Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu" denir. (Çapar, 2013)*

i) $\forall x$ *için* $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ *dir.*

$B \in \mathscr{B}$ olmak üzere her B Borel kümesi için $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu üzerinden $P(B) = \int_B f(x)dx$ olarak tanımlanan ölçü olasılık aksiyomlarını sağlar. Yani $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ ölçülebilir uzayı üzerinde olasılık ölçüsüdür.

Tanım 11. ***[Olasılık Dağılım Fonksiyonu]*** *($\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir $F(x)$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $F(x)$ fonksiyonuna "Olasılık Dağılım Fonksiyonu" ,"Kümülatif Dağılım Fonksiyonu" veya "Dağılım Fonksiyonu" denir.*

i) $\forall x$ *için* $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

ii) $F(x)$ *, azalmayan bir fonksiyon*

iii) $F(x)$ *, her noktada sağdan sürekli*

iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *ve* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ *dir.*

Dağılım Fonksiyonunu başka bir tanımla şu şekilde tanımlayabiliriz;
$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. P olasılık ölçüsünü kullanarak*

$$F : \mathbb{R} \to [0,1]$$

$\forall x$ için $F(x) = P(\{\omega : X(\omega) \leqslant x\})$ tanımlanan fonksiyona "Dağılım Fonksiyonu" *denir.*

Teorem 6. ***[Genişletim Teoremi]*** *$\mathscr{C}$,Ω üzerinde tanımlı bir yarı cebir olsun. $\mathscr{C}$ üzerinde tanımlı bir küme fonksiyonu $\mu : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ nin aşağıdaki koşulları sağladığını farzedelim.*

i) $\mu(A) \geqslant 0$

ii) $\mu(\Omega) = 1$

iii) $A_1, A_2, \ldots$ *olaylar kümesi $\mathscr{C}$ nin ayrık kümeleri olmak üzere* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{C}$ *ve* $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Bu taktirde $\mathscr{C}$ doğurduğu minimal σ-cebir $\sigma(\mathscr{C})$ üzerinde tanımlanan μ ölçüsünü genişleten olasılık ölçüsü tektir.Bu ölçüyü P ile gösterelim. $P(A) = \mu(A)$ dir. (Halmos, 1974; Kingman ve Taylor, 1966)

Tanım 12. ***[Hemen Heryerde (h.h.)]*** $\mathbb{R}$ *üzerinde verilen bir özellik için oluşturulan sonlu elemanlı veya sayılabilir sonsuz elemanlı bir alt küme, diğer bir ifade Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir küme dışında özellik doğru oluyorsa bu özelliğe* hemen heryerde (h.h.) *tanımlı özellik denir.*

Tanım 13. ***[Hemen Hemen Kesin (h.h.k.)]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.Bu uzayın tanımlandığı Ω üzerinde verilen bir özellik olasılık ölçüsü sıfır olan bir $N \in \mathscr{A}$ kümesi dışında doğru oluyorsa bu özelliğe* hemen hemen kesin (h.h.k.) *özellik denir.* P-h.h. *ile gösterilir.*

Tanım 14. ***[$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ Tanımlı Olasılık Yoğunluk ve Olasılık Dağılım Fonksiyonları]***

$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ *ölçü uzayında olasılık yoğunluk fonksiyonu ve olasılık dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır(Çapar, 2013).*

* *n tane değişkene sahip reel değerli integrallenebilir bir f fonksiyonu için*

i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$ *veya* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant_{(h.h.)} 0$

ii) $\int\int \ldots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu *denir.*

* *n tane değişkene sahip reel değerli bir F fonksiyonu için*

i) $0 \leqslant F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant 1$

ii) $i = 1, 2, \ldots, n$ *olmak üzere bütün* x_i *değişkenleri için F fonksiyonu azalmayan fonksiyon*

iii) Herhangi bir $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *noktasında bütün* x_i *değişkenleri için F fonksiyonu sağdan sürekli*

iv) $\lim_{min\, x_i \to -\infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *ve* $\lim_{min\, x_i \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ *koşullarını sağlayan F fonksiyonuna* Kümülatif Dağılım Fonksiyonu *ya da kısaca* Dağılım Fonksiyonu *denir.*

Rassal Değişkenler

Tanım 15. ***[Rassal Değişken]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. Bu olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *reel değerli fonksiyon*

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ için } \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leqslant k\} \in \mathscr{A}$$

olan ölçülebilirlik şartını sağlıyorsa X fonksiyonuna rassal değişken *denir. Rassal değişkenler ölçülebilir küme fonksiyonlarıdır.*

Tanım 16. ***[Genel Ölçülebilirlik Kavramı]*** $(\Omega, \mathscr{A})$ *ve* $(\Omega^*, \mathscr{A}^*)$ *iki ölçülebilir uzay ve* $f : \Omega \to \Omega^*$ *bu iki uzay arasında tanımlı bir dönüşüm fonksiyonu olsun.* $\forall A^* \in \mathscr{A}^*$ *için* $f^{-1}(A^*) \in \mathscr{A}$ *sağlanıyorsa f fonksiyonunu* $\mathscr{A} \to \mathscr{A}^*$ *ölçülebilir bir dönüşüm fonksiyonu olarak ifade edilir.*

Teorem 7. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *reel değerli fonksiyonu* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında rassal bir değişken olması için gerek ve yeter şart* $\mathscr{A} \longleftrightarrow \mathscr{B}$ *ölçülebilir olmasıdır.*

Tanım 17. ***[Rassal Vektör]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun. Bu olasılık uzayında* $\mathscr{A} \longleftrightarrow \mathscr{B}_n$ *ölçülebilir bir* $\overrightarrow{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *vektör fonksiyonuna* n-boyutlu rassal vektör *denir.*

Teorem 8. $\overrightarrow{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *vektör fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart* $\overrightarrow{X}$*'in her bileşeni olan* $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ *değişkenlerinin rassal değişken yani ölçülebilir fonksiyon olmasıdır.*

Teorem 9. *$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayı olsun. Bu olasılık uzayında;*

i.) *X olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir rassal değişken olsun. Buna göre*

$$P_X(B) := P(X^{-1}(\mathscr{B}), B \in \mathscr{B})$$

ile belirlenen küme fonksiyonu bir olasılık ölçüsüdür.

ii.) *$\overrightarrow{X}$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı bir rassal vektör olmak üzere; $\mathscr{B}_n$ üzerinde*

$$P_{\overrightarrow{X}} := P(\overrightarrow{X}^{-1}(\mathscr{B}), B \in \mathscr{B}_n)$$

ile belirlenen küme fonksiyonu $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_n)$ üzerinde tanımlı bir olasılık ölçüsüdür(Çapar, 2013).

Teorem 10. ***[Lusin Teoremi]*** *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\delta > 0$ için $[a,b]$ üzerinde tanımlı sürekli öyle bir $\phi(x)$ fonksiyonu bulunabilir ki $\phi(x)$ Lebesgue ölçüsü δ'dan küçük bir küme dışında f fonksiyonuna eşittir.*

Tanım 18. ***[Rassal Değişkenlerin Pozitif ve Negatif Kısmı]*** *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ bir rassal değişken olmak üzere X rassal değişkeninin 0 dan büyük olan kısmı yani pozitif kısmı X^+ , 0 dan küçük olan kısmı yani negatif kısmı X^- ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.*

$$X^+ = max(X,0) = \frac{1}{2}(|X| + X) = \begin{cases} X & X \geqslant 0 \\ 0 & X \leqslant 0 \end{cases}$$

$$X^- = min(X,0) = \frac{1}{2}(|X| - X) = \begin{cases} 0 & X \geqslant 0 \\ -X & X \leqslant 0 \end{cases}$$

Tanımdan dolayı $X^+, X^- \geqslant 0$ ve $X = X^+ - X^-$ eşitliği sağlanır(Çapar,2013).

Teorem 11. ***[Rassal Değişkenlerle İşlemler]*** *$X : \Omega \to \mathbb{R}$ ve $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ iki rassal değişken ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;*

i.) *$c, X + c, c.X$ rassal değişkendir,*

ii.) *$X^2, |X|, X^+, X^-$ rassal değişkendir,*

iii.) *Ω üzerinde $X \neq 0$ olmak üzere $1/X$ rassal değişkendir,* *iv.)* Ω *üzerinde* $X \geqslant 0$ *olmak üzere* $\sqrt{X}$ *rassal değişkendir,*

v.) $(X+Y), \quad X.Y, \quad X/Y\,(Y \neq 0)$ *rassal değişkendir,*

vi.) $max(X,Y)$ *ve* $min(X,Y)$ *rassal değişkendir*

Teorem 12. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ve* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bir Borel fonksiyonu olsun. Buna göre ,*

$$f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$$

bir rassal değişkendir.

Teorem 13. ***[Rassal Değişken Dizisinde Supremum-İnfimum]*** *Bir rassal değişken dizisi* $X_n(n = 1,2,\ldots)$ *ve* $\forall\omega \in \Omega$ *için* $X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$ *rassal değişkenleri sınırlı bir sayı dizisi oluştursun. Buna göre,*

i.) $sup_n\{X_n(\omega)\}$ *ve* $inf_n\{X_n(\omega)\}$ *rassal değişkendir,*

ii.) $limsup_n\{X_n(\omega)\}$ *ve* $liminf_n\{X_n(\omega)\}$ *rassal değişkendir,*

iii.) $\forall\omega$ *için* $lim_{n\to\infty}\{X_n(\omega)\}$ *limiti varsa* $X(\omega)$ *da bir rassal değişkendir.*

Tanım 19. ***[Basit Fonksiyon]*** $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tanımlanan rassal değişken (küme fonksiyonu) sonlu sayıda değer alıyorsa bu fonksiyona* "Basit Fonksiyon" *denir.*

Tanım 20. ***[Karakteristik Fonksiyon]*** $A \subset \Omega$ *olmak üzere;*

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona "Karakteristik Fonksiyon" *denir.*

Sonuç 1. $A, B \subset \Omega$ *olmak üzere;*

i.) $\chi_{A\cap B}(\omega) = \chi_A(\omega).\chi_B(\omega) = min(\chi_A(\omega), \chi_B(\omega))$

ii.) $\chi_{A\cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - \chi_{A\cap B}(\omega) = max(\chi_A(\omega), \chi_B(\omega))$

Sonuç 2. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *basit fonksiyon olsun.* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$*'nın bölünümü vardır ve* $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *olmak üzere;*

$$X = c_1.\chi_{A_1} + c_2.\chi_{A_2} + \ldots + c_n.\chi_{A_n}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 3. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayı olsun.* $A \in \mathscr{A}$ *ise* χ_A *ölçülebilir fonksiyondur. Buna göre,* $\forall A_i \in \mathscr{A}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ *için tanımlanan* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *bölünümüne* $\mathscr{A}$*-bölünümü denir.*

Tanım 21. ***[Basit Rassal Değişken]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında* $\mathscr{A}$*-bölünümü verilmiş olsun.* X *ölçülebilir fonksiyonuna* "Basit Rassal Değişken" *denir.*

Teorem 14. $X, (\Omega, \mathscr{A})$ *üzerinde tanımlanan negatif değer almayan bir rassal değişken olsun.Buna göre oluşturulacak öyle bir* $X_1, X_2, \ldots$ *basit rassal değişkenler dizisi vardır ki* $\forall \omega \in \Omega$ *için* $0 \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots$ *ve* $n \longrightarrow \infty$ *iken* $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$ *dir.*

Matematiksel Beklenti (Beklenen Değer)

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayı olmak üzere bir X rassal değişkenin beklenen değeri Ω örneklem uzayı üzerinde

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP \tag{4.7}$$

şeklinde tanımlanır. Bu integral değerinin bulunabilmesi için bazı temel integral tanımları aşağıda verilmiştir(Çapar, 2013).

Beklenen Değer ve Özellikleri : $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında bir X rassal değişkenin beklenen değeri Ω örneklem uzayı üzerinde

$$E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanmıştı.Lebesque integralinde olduğu gibi X rassal değişkenin yapısına göre $E(X)$'i üç farklı şekilde hesaplanır.

i. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında X rassal değişkeni basit ve negatif değer almayan fonksiyon olsun. X rassal değişkenini $\mathscr{A}$ ölçülebilir ikişerli ayrık kümeler olan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ve $c_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ için $X = c_1\chi_{A_1} + c_2\chi_{A_2} + \ldots + c_n\chi_{A_n}$ şeklinde yazarsak;

$$E(X) = c_1 P(A_1) + c_2 P(A_2) + \ldots + c_n P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(A_i) \geqslant 0 \tag{4.9}$$

dir.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında $X, Y \geqslant 0$ basit rassal değişkenler $c \geqslant 0, (c \in \mathbb{R})$ olmak üzere ;

1. $E(cX) = cE(X)$,
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
3. $X \geqslant Y$ ise $E(X) \geqslant E(Y)$,
4. $X_1, X_2, \ldots$ ve Y basit rassal değişkenler için $X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots$ olmak üzere $0 \leqslant Y \leqslant \lim_{n\to\infty} X_n$ eşitsizliği için

$$0 \leqslant E(Y) \leqslant \lim_{n\to\infty} E(X_n)$$

dir (Neveu,1965).

ii. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında X rassal değişkeni negatif olmayan $\mathscr{A}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu uzayda tanımlanan basit fonksiyonlardan oluşan $\{X_n\}$ dizisi azalmayan ve negatif olmayan bir rassal değişken dizisi olsun. Bu dizi için $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ eşitliği sağlansın. Bu taktirde;

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X_n) \tag{4.10}$$

dir.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında X, Y negatif olmayan rassal değişkenler ve $c \geqslant 0, (c \in \mathbb{R})$ olmak üzere ;

1. $E(cX) = cE(X)$,
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
3. $X \geqslant Y$ ise $E(X) \geqslant E(Y)$ dir (Neveu,1965).

iii. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında X bir rassal değişken olmak üzere $X = X^+ - X^-$ (Tanım 18) şeklinde verilsin. Burada X^+, X^- negatif olmayan rasssal değişkenlerdir. Bu takdirde $E(X^+)$ ve $E(X^-)$ her ikisi de aynı anda $+\infty$ olmadığı sürece;

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $E(X)$'in alabileceği değerler ile ilgili aşağıdaki durumlar gözönünde bulundurulmalıdır.

1. $E(X^+) < \infty$ ve $E(X^-) < \infty$ ise $E(X) < \infty$
2. $E(X^+) = \infty$ ve $E(X^-) < \infty$ ise $E(X) = \infty$
3. $E(X^-) = \infty$ ve $E(X^+) < \infty$ ise $E(X) = -\infty$
4. $E(X^+) = E(X^-) = \infty$ ise $E(X)$ tanımsızdır(Neveu,1965).

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında* X, Y *rassal değişkenler ve* $c \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $E(X) < \infty$ *ise;*

1. $E(cX) = cE(X)$,
2. $E(X), E(Y) < \infty$ ise $E(X+Y) < \infty$ ve $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$,
3. $E(X), E(Y)$ mevcut olmak şartıyla $X \geqslant Y$ ise $E(X) \geqslant E(Y)$,
4. $E(X) < \infty$ ise $E(|X|) < \infty$,
5. $E(X) < \infty$ ise $|E(X)| \leqslant E(|X|)$,
6. $E(Y) < \infty$ ve $|X| \leqslant Y$ ise $E(X) < \infty$,
7. X rassal değişkeni sınırlı ise $E(X) < \infty$ dir (Neveu,1965).

Yakınsama Teoremleri : Beklenen değerin hesaplanması sırasında karşılaşılacak ana sorunlardan biri limitin hangi koşullar altında integralle yer değiştirebildiğinin tespit edilmesidir. Bu nedenle aşağıdaki (4.12) eşitliğinin sağlandığı durumların belirlenmesi için yakınsaklık teoremlerini inceleyeceğiz.

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) \tag{4.12}$$

Teorem 15. ***[Monoton Yakınsaklık Teoremi]*** Ω *üzerinde tanımlanan rassal değişkenler* $X_1, X_2, \ldots$ *için* $0 \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant \ldots$ *eşitsizliği mevcut ve* $\forall \omega \in \Omega$ *için* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *olsun. Bu taktirde*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(\lim_{n\to\infty} X_n) = E(X) \tag{4.13}$$

dir (Cohn, 2013; Çapar, 2013).

Teorem 16. ***[Beppo-Levi Teoremi]*** $(\Omega,\mathscr{A},P)$ *olasılık uzayında* $\{X_k\}:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ *rassal değişkenler olmak üzere;*

$$\int\sum_{k=1}^{\infty}\{X_k\}dP=\sum_{k=1}^{\infty}\int\{X_k\}dP \tag{4.14}$$

dir (Cohn, 2013; Çapar, 2013).

Sonuç 4. $(\Omega,\mathscr{A},P)$ *olasılık uzayında* $\{X_k\}:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ *rassal değişkenler olmak üzere* $\sum_{n=1}^{\infty}X_n,\Omega$ *üzerinde yakınsak ise;*

$$E(\sum_{n=1}^{\infty}X_n)=\sum_{n=1}^{\infty}E(X_n) \tag{4.15}$$

dir.(Cohn, 2013; Çapar, 2013)

Teorem 17. ***[Fatou Lemması]*** $(\Omega,\mathscr{A},P)$ *olasılık uzayında* $\{X_k\}:\Omega\rightarrow[0,\infty]$ *rassal değişkenler olmak üzere;*

$$\int\liminf_{n\rightarrow\infty}\{X_k\}dP\leqslant\liminf_{n\rightarrow\infty}\int\{X_k\}dP \tag{4.16}$$

dir (Cohn, 2013; Çapar, 2013).

Teorem 18. ***[Baskın Yakınsaklık Teoremi]*** Ω *üzerinde tanımlanan rassal değişkenler* $X_1,X_2,\ldots,X,Y$ *verilmiş olsun.* $E(Y)<\infty$ *için* $|X_n|\leqslant Y,(n=1,2,\ldots)$ *ve* $\forall\omega\in\Omega$ *için* $\lim_{n\rightarrow\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$ *koşulları sağlanırsa ;*

$$\lim_{n\rightarrow\infty}E(X_n)=E(\lim_{n\rightarrow\infty}X_n)=E(X) \tag{4.17}$$

dir (Cohn, 2013; Çapar, 2013).

Teorem 19. ***[Sınırlı Yakınsaklık Teoremi]*** Ω *üzerinde tanımlanan rassal değişkenler* $X_1,X_2,\ldots,X$ *ve* $c\in\mathbb{R}$ *verilmiş olsun.* $|X_n|\leqslant c,(n=1,2,\ldots)$ *ve* $\forall\omega\in\Omega$ *için* $\lim_{n\rightarrow\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$ *koşulları sağlanırsa ;*

$$\lim_{n\rightarrow\infty}E(X_n)=E(\lim_{n\rightarrow\infty}X_n)=E(X) \tag{4.18}$$

dir (Cohn, 2013; Çapar, 2013).

Reel Sayılar Üzerinde Beklenen Değer : Bir olasılık uzayında tanımlanan beklenen değerin $\mathbb{R}$ üzerinde hesaplanması aşağıdaki teoremler aracılığıyla kurulur (Çapar, 2013).

Teorem 20. $\mathbb{R}$ *üzerinde verilen J kümeleri için;$E(J) = \int_{\mathbb{R}} J(x)dP_x = \int_{\mathbb{R}} xdP_x$ iken*

a. $E(X)$'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul $E(J)$'nin varolmasıdır.

$$E(X) = \int_{\Omega} XdP = \int_{\mathbb{R}} xdP_x \tag{4.19}$$

dir (Çapar, 2013).

b. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $E(g(X))$'in mevcut olması için gerek ve yeter koşul $E(g(J))$'nin varolmasıdır.

$$E(g(X)) = \int_{\Omega} g(X)dP = \int_{\mathbb{R}} g(x)dP_x \tag{4.20}$$

dir.

Sonuç 5. *X rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonunun uyardığı olasılık ölçüsünün J kümeleri altındaki kısıtlaması,yani $F_X = P_{X|J}$ ile hesaplanır.*

Teorem 21. *Ω üzerinde $a < X \leqslant b$ olmak üzere;*

$$E(X) = \int_a^b xdF_X \tag{4.21}$$

dir.

Teorem 22. *X rassal değişkeninin olasılık dağılım fonksiyonu F ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Buna göre;*

$$E(g(X)) < \infty \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} gdF \tag{4.22}$$

genelleştirilmiş Riemann-Stieltjes integrali mutlak olarak yakınsaktır ve

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} gdF \tag{4.23}$$

dir.

Momentler : Teorem 22'ye göre bir $g(x)$ fonksiyonunun beklenen değerinin hesaplanmasının yöntemi verilmişti. Burada $g(x)$ fonksiyonunu özel olarak $g(x) = x^r$ ve X rassal değişkeninin beklenen değerine $E(X) = \mu$ dersek, $\mu_r^{'} := E(X^r)$ ile tanımlanan beklenen değere *r. moment* denir. Ayrıca $\mu_r := E\big((X-E(X))^r\big) = E\big((X-\mu)^r\big)$ ile verilen beklenen değere ise *r. merkezileştirilmiş moment* denir (Çapar, 2013).

$r = 1$ için $\mu_1^{'} = E(X)$ ve $\mu_1 = 0$ dır.$r = 2$ için $\mu_2^{'} = E(X^2)$ ve $\mu_2 = E\big((X-\mu)^2\big) = \sigma_X^2 = V(X) \geqslant 0$ dır. $\mu_2 = \sigma_X^2$*'ye varyans* denir.

Sonuç 6. *i)* $a, b \in \mathbb{R}$ *için* $V(aX+b) = a^2V(X)$

ii) $V(X) = E\big((X-\mu)^2\big) = E(X^2) - \mu^2$ *dir.*

Ayrıca X, Y rassal değişkenleri için *kovaryans fonksiyonu*

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} := E\big((X-\mu_x)(Y-\mu_Y)\big) \tag{4.24}$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 7. *X_i, Y_j rassal değişkenler olmak üzere $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n)$ için*

$$Cov\big(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j\big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, Y_j) \tag{4.25}$$

$$V(\sum_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i^2 V(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} a_i b_j Cov(X_i, X_j) \tag{4.26}$$

dir.

Olasılık Uzayında Eşitsizlikler

1. **Chebyshev Eşitsizliği:** f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde azalmayan bir fonksiyon ve X rassal bir değişken olsun. $(f(0) \geqslant 0)$ Bu taktirde;

$$E\big(f(|X|)\big) \geqslant f(t)P\big(|X| \geqslant t\big) \tag{4.27}$$

dir.Ayrıca X rassal değişkeninin ikinci momenti sonlu ve $t > 0$ ise,

$$P\big(|X-E(X)| \geqslant t\big) \leqslant \frac{V(X)}{t^2} \tag{4.28}$$

dir. $t = k\sqrt{V(X)} = k\sigma_X$ seçilirse

$$P\big(|X - E(X)| \geqslant k\sigma_X\big) \leqslant \frac{1}{k^2} \tag{4.29}$$

elde edilir.

2. $[1,\infty]$ aralığından seçilen p,q,r sayıları için $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ sağlanırsa

$$\| XY \|_r \leqslant \| X \|_p \| Y \|_q \tag{4.30}$$

dir.

3. **Hölder Eşitsizliği:** $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $X \in L^p, Y \in L^q$ ise $XY \in L^1$ ve

$$\int_\Omega |XY| dP = \| XY \|_1 \leqslant \| X \|_p \| Y \|_q \tag{4.31}$$

dir.

4. **Schwarz Eşitsizliği:**Hölder Eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınırsa;

$$E(|XY|) = \| XY \|_1 \leqslant \| X \|_2 \| Y \|_2 \tag{4.32}$$

olur.

5. **Minkowski Eşitsizliği:**

$$\| X+Y \|_p \leqslant \| X \|_p + \| Y \|_p \tag{4.33}$$

dir.

6. **Jensen Eşitsizliği:** $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks bir fonksiyon olmak üzere $X \in L^1$ için

$$\phi(\| X \|_1) = \phi(E(|X|)) \leqslant E(\phi(X)) \tag{4.34}$$

dir.

7. X bir rassal değişken olmak üzere $1 < p < q$ için

$$\| X \|_1 \leqslant \| X \|_p \leqslant \| X \|_q \leqslant \| X \|_\infty \tag{4.35}$$

ve

$$L_\infty \subset L_q \subset L_p \subset L_1 \tag{4.36}$$

dir.

Rassal Değişken Dizilerinde Yakınsama

Tanım 22. ***[Noktasal Yakınsaklık]*** *Sabitlenmiş bir $\omega \in \Omega$ değeri için oluşturulan $\{X_n\}\,(n = 1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin rassal bir değişken olan X'e yakınsaması ile ilgili olarak; $(X_n(\omega) \to X(\omega))$*

i. $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *limit değeri $\omega \in \Omega$ 'ya göre düzgün yakınsar denir.*

ii. $\forall\omega \in \Omega$ *için* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *limitine Ω üzerinde yakınsar denir.*

iii. $\exists N \in (A), P(N) = 0$ *olmak üzere* $\forall\omega \in N^c$ *için* $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ *ise hemem hemen kesin (h.h.k.) yakınsar denir.*

Tanım 23. ***[Olasılıkta Yakınsaklık]*** *$\{X_n\}\,(n = 1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin rassal bir değişken olan X'e yakınsaması ile ilgili olarak; $\forall\varepsilon > 0$ için, $\lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega | X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon)\}) = 1$ ise $\{X_n\}$ rassal değişken dizisi X'e olasılıkta yakınsar denir ve $\{X_n\} \xrightarrow{P} X$ sembolü ile gösterilir.*

$$\{X_n\} \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \{X_n\} - X \xrightarrow{P} 0 \tag{4.37}$$

dir.

Teorem 23. *Bir $\{X_n\}\,(n = 1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin X rassal bir değişkenine (h.h.k.) olarak yakınsıyorsa olasılıkta da yakınsar.*

$$\{X_n\} \to X(h.h.k.) \Rightarrow \{X_n\} \xrightarrow{P} X(n \to \infty) \tag{4.38}$$

Teorem 24. *Bir $\{X_n\}\,(n = 1,2,\ldots)$ rassal değişkenler dizisinin (h.h.k.) yakınsaklığı için yeter şart:*

$$\exists\varepsilon_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < \infty \tag{4.39}$$

dir.

Teorem 25. ***[Cauchy Kriterleri]***

i. *Bir* $\{X_n\}\,(n = 1, 2, \ldots)$ *rassal değişkenler dizisinin (h.h.k.) olarak bir rassal değişkene yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin Cauchy dizisi olmasıdır. Yani* $m, n \to \infty$ *için* $X_m - X_n \to 0(h.h.k.)$ *sağlanmasıdır.*

ii. *Bir* $\{X_n\}\,(n = 1, 2, \ldots)$ *rassal değişkenler dizisinin bir rassal değişkene olasılıkta yakınsaması için gerek ve yeter şart dizinin Cauchy dizisi olmasıdır. Yani* $m, n \to \infty$ *için* $X_m - X_n \xrightarrow{P} 0$ *sağlanmasıdır.*

Teorem 26. ***[Zayıf Büyük Sayılar Kanunu]*** $X_1, X_2, \ldots$ *bağımsız özdeş dağılımlı ve sonlu ikinci mertebeden momentleri olan bir rassal değişkenler dizisi olsun.Bu dizinin elemanlarının beklenen değeri* $E(X_n) = \mu$ *ile gösterilsin. Buna göre,*

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \tag{4.40}$$

dir (Bhat, 1981; Chung, 1974 ve 1975).

Teorem 27. ***[Markov Şartı]*** $X_1, X_2, \ldots$ *bağımsız rassal değişkenler* $E(X_k) = \mu_k$ *ve* $V(X_k) = \sigma_k^2\,(k = 1, 2, \ldots)$ *olmak üzere*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 = 0 \tag{4.41}$$

eşitliğine Markov Şartı *denir.Bu şartı sağlayan* $\{X_n\}$ *dizisde zayıf büyük sayılar kanununu sağlar.*

Teorem 28. ***[Kuvvetli Büyük Sayılar Kanunu]*** $X_1, X_2, \ldots$ *bağımsız özdeş dağılımlı bir rassal değişkenler dizisi ve ortalaması* μ *olsun. Eğer* $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ *ortalaması* μ *ye yakınsıyorsa ;*

$$P(lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \mu) = 1 \tag{4.42}$$

dir (Bhat, 1981; Chung, 1974 ve 1975).

Tanım 24. ***[Olasılıkta Sınır]*** $\varepsilon > 0$ *verildiği zaman öyle bir* $a > 0$ *değeri bulunabilir ki*

$$P(|X| > a) < \varepsilon \tag{4.43}$$

dur. Yani reel değerli her X rassal değişkeni Olasılıkta sınırlı*dır.*

Teorem 29. $\{X_n\}$ *ve* $\{Y_n\}$ *iki rassal değişken dizisi ve* $n \to \infty$ *için* $X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y$ *sağlasın. Buna göre;*

1. $c \in \mathbb{R}$ *için* $cX_n \xrightarrow{P} cX$
2. $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$
3. $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$
4. $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$ *ve* $Y_n \neq 0(h.h.k.), Y \neq 0(h.h.k.)$ *dir.*(Çapar, 2013)

Teorem 30. ***[Slutsky Teoremi]*** $n \to \infty$ *için* $X_n \xrightarrow{P} X$ *ve* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyon olmak üzere* $f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ *dir.*

Tanım 25. ***[L^p'de Yakınsama]*** $\{X_n\}, (n = 1, 2, \ldots)$ *rassal değişken dizisi* L^p *içinde bir dizi olsun.* $n \to \infty$ *için* $\| X_n - X \|_p \to 0$ *sağlanırsa* $(p \geqslant 1)$ $\{X_n\}$ *dizisi* L^p*'de (p.ortalamada) X'e yakınsar denir ve* $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *ile gösterilir. Ayrıca*

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow E(|X_n - X|^p) \to 0 \tag{4.44}$$

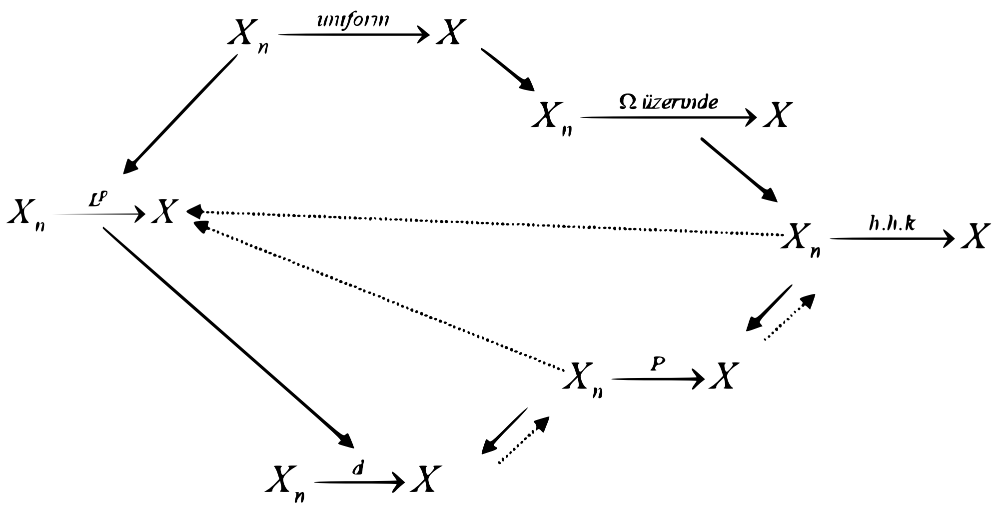
dir (Bhat, 1981; Chung, 1974 ve 1975;Çapar,2013).

Teorem 31. *X sonlu bir beklenen değere sahip rassal değişken olmak üzere;* $(E(|X| < \infty)$

i. $A \in \mathscr{A}, P(A) = 0$ *ise* $\int_A X dP = 0$,
ii. $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|X|>n\}} X dP = 0$,
iii. $A_n \in \mathscr{A}, (n = 1, 2, \ldots), \lim_{n\to\infty} P(A) = 0$ *ise* $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} X dP = 0$ *dir.*

Tanım 26. ***[Dağılımda Yakınsama]*** $X_1, X_2, \ldots$ *ve X rassal değişkenler ve bu rassal değişkenlerin kümülatif dağılım fonksiyonları*$F_1, F_2, \ldots$ *ve F olsun. Eğer* $F(X)$*'in her süreklilik noktasında* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *ise* X_n *dizisi X'e* Dağılımda yakınsar *denir ve* $X_n \xrightarrow{d} X$ *şeklinde gösterilir.*

Yakınsama tipleri arasındaki ilişkiyi veren Tablo aşağıda verilmiştir (Çapar, 2013).



Şekil 4.1: Yakınsama Tipleri Arasındaki ilişkiler

Teorem 32. *$\{X_n\}$ ve $\{Y_n\},(c \in \mathbb{R})$ iki rassal değişken dizisi ve $n \to \infty$ için $X_n \overset{d}{\to} X, Y_n \overset{d}{\to} c$ sağlasın. Buna göre;*

1. $X_n + Y_n \overset{d}{\to} X + c$
2. $X_n Y_n \overset{d}{\to} cX$
3. $\frac{X_n}{Y_n} \overset{d}{\to} \frac{X}{c}$ *ve* $c \neq 0$ *dir.*

Koşullu Beklenen Değer

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ olasılık uzayında $A \in \mathscr{A}$ olayı koşulu altında başka bir $B \in \mathscr{A}$ olayının gerçekleşme olasılığı $P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$ idi. Benzer şekilde bir $A \in \mathscr{A}$ olayı koşulu altında bir X rassal değişkeninin beklenen değeri

$$E(X|A) := \int_\Omega X dP_A = \frac{1}{P(A)} \int_A X dP \tag{4.45}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathscr{A}$'nın bir parçalanışı (bölünümü) $\mathscr{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ olsun. $\mathscr{C}$ bölünümü ile koşullu beklenen değeri olan

$$E(X|\mathscr{C})(\omega) := \sum_{n=1} \infty \frac{1}{P(A_n)} \Big(\int_{A_n} X dP \Big) \chi_{A_n}(\omega) \tag{4.46}$$

şeklinde tanımlanır.

Bazı Önemli Dağılımlar

Olasılık ve İstatistikte kullanılan bazı dağılımlar aşağıda verilmiştir (Akdi, 2005; Bhat,1981; Çapar,2013; Neveu, 1965).

1. **Bernouilli Dağılımı:** Bir deneyin sadece iki farklı sonucu varsa bu deneye Bernouilli deneyi denir.Genel olarak "başarılı" veya "başarısız" diye tanımlanabilir. Örnekleme uzayı $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ şeklindedir. Deneyin başarılı olma sayısı X ise;

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}, (x = 0, 1)$$

$$E(X) = p, \qquad V(X) = pq \tag{4.47}$$

dir.

2. **Binom Dağılımı:**Bir Bernouilli deneyinin n defa tekrar edilmesi sonucu oluşan örnekleme uzayıdır. Tekrarlanan olayda x defa başarı için ;

$$P(X = x) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^x q^{n-x}, (x = 0, 1, \ldots, n)$$

$$E(X) = np, \qquad V(X) = npq \tag{4.48}$$

dir.

3. **Çok Terimli Dağılım:**$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ bir deneyin ayrık olayları $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ bağımsız rassal değişkenleri olayların gözlem sayıları olsun. $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ ve $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ olmak üzere ;

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} \tag{4.49}$$

4. **Geometrik Dağılım:**Bir Bernouilli deneyinin n defa denenmesi sonucu istenilen

durumun ilk defa n.denemede ortaya çıkma durumudur.Dolayısıyla;

$$P(X=x) = pq^{x-1}, (x=0,1,\ldots)$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad V(X) = \frac{q}{p^2} \tag{4.50}$$

dir.

5. **Poisson Dağılımı:** Sürekli bir zaman aralığı içinde bir olayın kesikli gözlem sayısına sahip gerçekleşen olayları inceleyen dağılımdır.$\lambda > 0$ belirlenen bir zaman aralığında ortalama gözlem sayısı olsun. X sürekli bir zaman aralığında gözlem sayısını veren rassal değişken ise;

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x=0,1,2,\ldots$$

$$E(X) = \lambda, \qquad V(X) = \lambda \tag{4.51}$$

dir.

6. **Düzgün Dağılım:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.52}$$

ise X rassal değişkenine (a,b) aralığında düzgün dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

dir.

7. **Gamma Dağılımı:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.53}$$

ise X rassal değişkenine Gamma dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \alpha\beta, \qquad V(X) = \alpha\beta^2$$

dir.

Hatırlatma: Gamma Fonksiyonu;

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds, x > 0$$

ve

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(x+1) \approx (\frac{x}{e})^x\sqrt{2\pi x}$$

dir.

8. **Üstel Dağılım:**X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Gamma dağılımında $\alpha = 1$ alınırsa;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}e^{\frac{-x}{\beta}} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.54}$$

ise X rassal değişkenine Üstel dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \beta, \qquad V(X) = \beta^2$$

dir.

9. **Ki-Kare Dağılımı:**X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Gamma dağılımında $\alpha = \frac{p}{2}, \beta = 2$ alınırsa;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{p}{2}-1}e^{\frac{-x}{2}}}{2^{\frac{p}{2}}\Gamma(\frac{p}{2})} & x > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.55}$$

ise X rassal değişkenine Ki-Kare dağılımına sahip denir.Dağılımın serbestlik derecesi p ve dağılımın gösterimi $X \backsim \chi_p^2$ şeklindedir.

$$E(X) = p, \qquad V(X) = 2p$$

dir.

10. **Weibull Dağılımı:**Xrassal değişkeni Üstel dağılıma sahip olsun.$\gamma > 0$ ve $Y = X^{\gamma}$ olmak üzere Y'nin olasılık dağılım fonksiyonu;

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\beta} y^{\gamma-1} e^{\frac{-y^{\gamma}}{\beta}} & y > 0, \beta > 0, \gamma > 0 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.56}$$

ise Y rassal değişkenine Weibull Dağılımına sahip denir.

$$E(Y) = \beta^{\frac{1}{\gamma}} \Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1), \qquad V(Y) = \beta^{\frac{2}{\gamma}} [\Gamma(\frac{2}{\gamma} + 1) - \Gamma(\frac{1}{\gamma} + 1)^2]$$

dir.

11. **Beta Dağılımı:**Beta fonksiyonu Analiz derslerinde

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

şeklinde verilmiştir.Beta fonksiyonunun Gamma fonksiyonu cinsinden ifadesi ise

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

dır.

X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.57}$$

ise X rassal değişkenine Beta dağılımına sahip denir.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

dir.

12. **Cauchy Dağılımı:**X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\theta)^2} \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4.58}$$

ise X rassal değişkenine Cauchy dağılımına sahip denir. Cauchy dağılımında moment yoktur.

13. **Normal Dağılım:** $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4.59}$$

ise X rassal değişkeni Normal dağılıma sahip denir. $X \backsim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir. Ayrıca $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ için normal dağılıma özel olarak Standart Normal Dağılım denir. $N(0,1)$ şeklinde ifade edilir. Standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu ise;

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad z \in \mathbb{R} \tag{4.60}$$

dir.Merkezi Limit Teoremine göre ortalamada birçok dağılım normal dağılıma yakınsar.

14. **Log-Normal Dağılım:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{4.61}$$

verilmişse Log-normal dağılımına sahiptir denir.

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \qquad V(X) = e^{\mu + \sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

dir.

15. **Laplace Dağılımı:** X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} & \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}^+ \\ 0 & d.d. \end{cases} \tag{4.62}$$

ise X rassal değişkenine Beta dağılımına sahiptir denir.

$$E(X) = \alpha, \qquad V(X) = 2\beta^2$$

Stokastik Süreçler

Günlük yaşamımız bir zaman akışı içinde olan olaylar zinciridir. Bu zincirde alınacak kararlarda süreçleri iyi incelenmesi gerekir. Bu ihtimal içeren süreçleri stokastik süreçler olarak ifade ederiz (Chung ve Willams, 1983; Karatzas ve Shreve, 1988; Kloeden ve Platen, 2013; Lord vd.,2014; Mao, 2008; Mikosch, 2006; Oksendal, 2013).

Tanım 27. ***[Stokastik Süreçler]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *olasılık uzayında tanımlanacak olan*

$$X : \Omega \times T \to \mathbb{R} \tag{4.63}$$

dönüşümüne stokastik süreç *denir. Bu dönüşümde* Ω *örneklem uzayı iken* T *olayın gerçekleştiği zamanı ifade eden indis kümesidir.X iki değişkenli bir rassal değişken olup ilk bileşeni örneklem uzayından alınırken ikinci bileşen zaman indisinden alınan gerçel değerli fonksiyondur.Yani,* $X(\omega,t),(\omega \in \Omega, t \in T)$ *dir.*

Stokastik (Rassal) süreçlerin iki değişkeni açısından incelenirken eğer zaman değişkeni sabitlenirse aynı anda örneklem uzayda olan olaylar incelenir bu da $X_t(\omega)$ şeklinde rassal değişkendir. Eğer ω değişkeni sabitlenirse o zamanda bir olayın zamana bağlı değişimini inceleyen $X_\omega(t)$ şeklinde rassal fonksiyondur (Chung ve Willams, 1983).

Tanım 28. ***[Sonlu Boyutlu Dağılımlar]*** T zaman indis kümesi $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n$ sıralı değerleri için $I = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \subset T$ olan bir indis kümesi olmak üzere $\forall t_i \in I$ *karşılık gelen* X_{t_i} *rassal değişkenlerinin oluşturduğu rassal vektör* $\overrightarrow{X_I} := (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ *olsun. Ayrıca* $\overrightarrow{X_I}$ *vektörüne karşılık gelen* $P_I := P_{\overrightarrow{X_I}}$ *ile gösterilen olasılık dağılımı stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımıdır.* $\{P_I\}_{I \in \mathscr{I}}$ *sonlu boyutlu dağılımların ailesini ifade eder.*

I ve J sonlu ve sıralı iki indis kümesi $I \subset J$ olmak üzere $P_I = P_{J|I}$ dir. Yani P_I, P_J dağılımın I indis kümesine göre kısıtlanması denir.
Sonlu boyutlu dağılımlara bir örnek Gauss Sürecidir (Çapar,2013).

Kovaryans Fonksiyonu : Sonlu boyutlu bir X süreci için $I = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \in$

$\mathscr{T}$ ve $\overrightarrow{X_I} := (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ olmak üzere;

$$\mu_I = \mu_{\overrightarrow{X_I}} := \big(E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)\big) \qquad \sum_I = \sum_{\overrightarrow{X_I}} := \big[Cov(X_{t_i}, X_{t_j})\big], (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

Süreçteki her rassal değişken için beklenen değer fonksiyonu

$$\mu_X := \mu_{X_t} = E(X_t), t \in T$$

ve kovaryans fonksiyonu

$$c_X(t,s) := Cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))] \tag{4.64}$$

eğer X_t ve X_s bağımsız rassal değişkenler ise

$$c_X(t,s) := Cov(X_t, X_s) = E(X_t X_s) - \mu_{X_t}\mu_{X_s}, (t, s \in T) \tag{4.65}$$

varyans fonksiyonu ise;

$$\sigma_X^2 := c_X(t,t) = V(X_t), t \in T \tag{4.66}$$

dir (Çapar,2013).

Tanım 29. ***[Gauss Süreci]*** *Sonlu boyutlu dağılımların hepsi eğer çok değişkenli normal dağılım ise bu sonlu bayutlu dağılıma* ***Gauss Süreci*** *denir.*

$I = \{t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n\} \in \mathscr{T}$ için f_I olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f_I(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Det \sum_I}} exp\Big(-\frac{1}{2}(\overline{x} - \overline{\mu})(\sum_I)^{-1}(\overline{x} - \overline{\mu})^t\Big) \tag{4.67}$$

Burada $(\overline{x} - \overline{\mu}) = (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2, \ldots, x_n - \mu_n)$ şeklinde satır vektörü iken $\sum_I$: kovaryans matrisi ve $Det \sum_I$ kovaryans matrisin determinantıdır.
Eğer $T = [0,1], t \in T$ için X_t'ler b.ö.d ve $Z = N(0,1)$ rassal değişkenler ise Gauss sürecine *Normalleştirilmiş Gauss Süreci* denir (Çapar, 2013).

Tanım 30. ***[Eş Dağımlılık]*** *A ve B rassal değişkenler veya rassal vektörler ya da rassal* *süreçler olmak üzere eğer aynı olasılık dağılımına sahiplerse eş dağılımlıdırlar denir ve* $A \stackrel{d}{=} B$ *şeklinde gösterilir.*

Tanım 31. $X = \{X_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$ *ile tanımlanan süreç s.b.d. olsun.* $t \in T$ *indisi* h *zaman ötelemesi altında değişmiyorsa bu sürece* Mutlak Durağan Süreç *denir.*

$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n \in T, n \geqslant 1$ indisler $t_1 + h, t_2 + h, t_3 + h, \ldots, t_n + h \in T$ değerleri için eğer

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \ldots, X_{t_n}\right) \stackrel{d}{=} \left(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, X_{t_3+h}, \ldots, X_{t_n+h}\right) \tag{4.68}$$

dır (Çapar, 2013).

Tanım 32. *t indisi altında ötelenen bir X rassal sürecinin beklenen değer ve kovaryans fonksiyonları değişmiyorsa sürece* Geniş Anlamda Durağan Süreç *denir.*

$$\mu_X(t+h) = \mu_X(t), c_X(t+h, s+h) = c_X(t, s), \forall h \in \mathbb{R} \tag{4.69}$$

dir. Bir Gauss Süreci mutlak durağan ise geniş anlamda durağandır,terside doğrudur. Ayrıca Gauss sürecinde $E(X^2) < \infty$ olduğu zaman geniş anlamda durağanlığına *ikinci dereceden durağanlık* denir.

Tanım 33. *X rassal süreci $n \geqslant 2$ pozitif tamsayıları için $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n \in T$ indislerine karşılık*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{m-1}} \tag{4.70}$$

artışlarının oluşturduğu rassal değişkenler bağımsız rassal değişken ise X sürecine Bağımsız Artışlı Süreç *denir.*

Eğer X süreci $X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}, (t, s, t+h, s+h \in T)$ eşitliği sağlanıyorsa sürece *Durağan Artışlı Süreç* olarak adlandırılır (Çapar, 2013).

Stokastik Sürecin Olasılık Dağılımı

Teorem 9'da bir rassal değişkenin veya rassal vektörün $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^n$ üzerindeki olasılık ölçüsü tanımlanmıştı. Stokastik sürecin olasılık ölçüsü sonsuz boyutlu bir fonksiyon uzayı üzerinde tanımlanması gerekir.

Bu nedenle $\forall t$ anında oluşan $(\Omega_t, \mathscr{A}_t, P_{\{t\}})$ olasılık uzayları için iki olasılık uzayının tansör çarpımı n adet olasılık uzayına da genelleştirilebilir;

$$(\Omega_I, \mathscr{A}_I, P_I) = \big(\prod_{t\in I} \Omega_t, \otimes \mathscr{A}_t, P_I\big) \tag{4.71}$$

sonlu çarpım uzayları oluşturulur.($\{P_I\}_{I\in\mathscr{T}}$ olasılık ailesi)

Ayrıca $\Omega_T = \prod_{t\in T} \Omega_t$ ise $\forall t \in T$ için ω_t, Ω_t üzerinde;

$$\omega = \{\omega_t, t \in T\}$$

dersek ω'lar yörünge ailelerinden oluşur. ω_t ,t anında yörünge şeklinde ifade edilir. ω üzerinde s'nin koordinatı ise $X_s(\omega)$ olarak yazılır.

Tanım 34. ***[Silindirik Kümeler]***

$$R_I(A_{t_1}, A_{t_2}, \ldots, A_{t_n}) := \big(\prod_{t\in I} A_t\big) \times \big(\prod_{t\in I^c} \Omega_t\big), (A_t \in \mathscr{A}_t) \tag{4.72}$$

formulasyonu ile yazılan kümelere $A_{t_1} \times A_{t_2} \times \ldots \times A_{t_n}$ *tabanlı* Silindirik Küme *denir. Yani* $R := \{\mathscr{A}_I \times \prod_{t\in I^c} \Omega_t | I \in \mathbb{T}\}$ *topluluğudur.*

Ayrıca $(\Omega_T, \mathscr{A}_T, P)$ uzayına ise *Kanonik Olasılık Uzayı* denir (Çapar, 2013).

Sayma Süreçleri $\{N_t; t \geqslant 0\}$ stokastik süreci belirli rassal değişkenler için t anında bir olayın tekrar sayısını belirtiyorsa bu sürece *Sayma Süreci* denir.Sayma sürecinin özellikleri ile ilgili olarak ;

i. $N_t \geqslant 0$

ii. $N_t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

iii. $s < t$ için $N_s \leqslant N_t$

iv. $s < t$ için $N_s - N_t$ ifadesi $(s,t]$ aralığında gözlemlenen olay sayısıdır *(Çapar, 2013).*

Filtrasyonlar

Tanım 35. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *bir olasılık uzayı olsun. Bu uzayda* $\{\mathscr{F}_t\}, (t \leqslant 0)$ *şeklinde verilen* σ*-cebirler topluluğu aşağıdaki şarrtları sağlıyorsa bu* σ*-cebir topluluğuna* Filtrasyon *denir.*

i. $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$

ii. $s < t$ *için* $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$

Sonuç olarak filtrasyonlar genişleyen bilgi kümeleridir.

Tanım 36. ***[Adapted Filtrasyon]*** $\{X_t, t \geqslant 0\}$ *şeklinde verilen bir rassal sürecin her rassal değişkeni* X_t*,*$\mathscr{F}$*'ye göre ölçülebilir ise* $\{\mathscr{F}, t \leqslant 0\}$ *filtrasyonuna adaptedir yani* Adapted Filtrasyon *denir.*

Tanım 37. ***[Doğal Filtrasyon]*** $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s; s \leqslant t\} := \sigma\left(\bigcup_{s \leqslant t} \sigma(X_s)\right)$ *olarak verilen genişleyen filtrasyona* Doğal Filtrasyon *denir.*

Doğal filtrasyon bir sürecin adapte olabileceği en küçük filtrasyondur.

Tanım 38. ***[Sağdan Sürekli Filtrasyon]*** $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *şeklinde verilen bir filtrasyonda* $\mathscr{F}_t^+ := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ *bu durumda* $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t^+$ *eşitliği sağlanıyorsa* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *filtrasyonuna* sağdan sürekli filtrasyon *denir.*

Tanım 39. ***[Durma Zamanı]*** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *bir olasılık uzayı ve* $\{\mathscr{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ *bu uzayda tanımlı bir filtrasyon olsun.*$T : \Omega \to [0, \infty]$ *tanımlanan rassal değişken*

$$\{T(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \qquad \forall t \in [0, \infty)$$

şartını sağlıyorsa T'ye Durma Zamanı *denir.*

Durma zamanı bir sürecin zaman bırakılmasının daha iyi olduğuna karar verme anı olarak kabul edilir.
T durma zamanı verildiğinde $\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} | A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \geqslant 0\}$ olaylar topluluğu durma zamanına kadar geçen olayların kümesidir.

T bir durma zamanı olsun. Eğer T aşağıdaki koşulları sağlayan durma zamanlarının oluşturduğu dizi $\{T_n\}(n > 1)$ varsa T'ye *önceden kestirilebilir bir durma zamanı* denir(Çapar, 2013).

i. $\{T > 0\}$ kümesi üzerinde $T_n < T, \forall n$

ii. T_n genişleyen bir dizi

iii. $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ (h.h.k.)

Stokastik süreçlerde önemli bir adım olan Kanonik iki süreci inceleyelim.

Poisson Süreci

Tanım 40. ***[Poisson Süreci]*** $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ *durağan ve bağımsız artışlı bir sayma süreci ve* $\lambda > 0$ *için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu sürece* λ *hızında* Poisson Süreci *denir(Chung ve Willams, 1983).*

i. $X_0 = 0$

ii. $P(X_h = 1) = \lambda h + o(h), \qquad (lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0)$

iii. $P(X_h \geqslant 2) = o(h)$

Poisson süreci sürekli zamanlı bir stokastik süreç olmasına rağmen sürecin rassal değişkenleri ayrık rassal değişkenlerdir.

Teorem 33. *Bir Poisson sürecindeki* $X_t, (t \geqslant 0)$ *rassal değişkenleri* λh *parametreli* Poisson Dağılımına *sahiptir.*

Bir Poisson sürecinde T_n *"n. olayı gözlemlendiği zamanı"* göstermek üzere Y_n ise *"*$n-1$*. ve n. olayların gözlemlenmesi süresi arasında geçen zamanı"* temsil etsin.Bu taktirde ;

* T_n, λ ve n parametreli Gamma dağılımına sahiptir.

* Y_n, λ parametreli Üstel dağılıma sahiptir.

Tanım 41. ***[Poisson Geçiş Olasılıkları]*** *Bir Poisson sürecindeki* $X_t, (t \geqslant 0)$ *rassal değişkenleri için durağan artışlı olduklarından* $X_{t-s} \stackrel{d}{=} X_t - X_s, (s < t)$ *dir. Yani s anından* *t anına kadar olan artışı ifade eden $X_t - X_s$ rassal değişkeni $\lambda(t-s)$ parametreli Poisson dağılımına sahiptir.*

$$p(s,t;m,n) = \frac{[\lambda(t-s)]^{n-m} e^{-\lambda(t-s)}}{(n-m)!}$$

dir (Chung ve Willams, 1983) .

Tanım 42. ***[Poisson Sonlu Boyutlu Dağılımları]*** *$I = \{t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m\}$ olmak üzere $n_k; t_{k-1}$ ile t_k arasındaki gözlem sayısı olsun.n_k'ların bağımsız artışlı olma özelliği gözönüne alınırsa;*

$$P_{\overrightarrow{X}_I}(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{[\lambda(t_j - t_{j-1})]^{n_j - n_{j-1}} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}}{(t_j - t_{j-1})!}$$

dir (Çapar, 2013).

Brown Süreci

1827 yılında Botanik bilimci Robert Brown'ın mikroskop altında polen solüsyonunu incelemesi sırasında polen taneciklerinin hareketlerini aşırı hızlı ve sürekli yön değişmesine anlam verememiş fakat bu rastgele hareketlere *Brown Haereketi(Brownian Hareketi)* veya *Brown Devinimi (Brown Motion)* ismini verdi. Sonraki yıllarda bir çok fizikçi ve matematikçi bu hareketi anlamaya ve modellemeye çalışmıştır. Bu çalışmalar sırasında Wiener,Brown Hareketindeki taneciklerin yörüngelerinin sürekli fonksiyonlardan oluşan kümeler olduğunu tespit etti.Wiener bu sürekli fonksiyonlar kümesi için Wiener ölçüsünü geliştirdi. Bu nedenle Brown Hareketi Sürecine *Wiener Süreci* de denir (Karatzas ve Shreve, 1988).

Tanım 43. ***[Brown Hareket Süreci]*** *Sürekli bir stokastik süreç olan $B = \{B_t, t \in [0,\infty)\}$ durağan ve bağımsız artışlı süreç aşağıdaki verilen koşulları sağlıyorsa B_t sürecine* Brown veya Wiener Hareket Süreci *denir* (Chung,1975; Chung ve Willams, 1983; Çapar, 2013; Karatzas ve Shreve,1988; Mao, 2008; Mikosch, 2006).

i. $B_0 = 0$

ii. $\forall t > 0$ *için süreç $N(0,t)$ normal dağılımına sahiptir.*

iii. Sürecin yörüngeleri sürekli fonksiyonlardır.

Sonuç 8. *i.* $E(B_t) = 0$

ii. Sürecin yörüngeleri sürekli fonksiyonlardır.Fakat hiçbir noktasında türevlenemez.

$s < t$ için $B_{t-s} - B_0 = B_{t-s} \stackrel{d}{=} B_t - B_s$ durağan artışlı olma özelliğinin sonucu olarak elde edilebilir. Bunun sonucu olarakta $B_t - B_s$ değeri $N(0, t-s)$ Normal dağılımına sahiptir.

Tanım 44. ***[Brown Hareket Sürecinin Sonlu Boyutlu Dağılımları]*** *Önceki paragrafta açıklanan sonlu boyutlu dağılımlara* Brown hareket sürecinin sonlu boyutlu dağılımları *denir.*

Sonuç 9. *Brown hareket sürecine kısaca* Brown Süreci *diyeceğiz.*

$I = \{t_1 < t_2 < \ldots < t_m\}$ *sıralı zaman indis kümesi için* $B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \stackrel{d}{=} N(0, t_j - t_{j-1}), \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$ *dir.Bu taktirde*

$$\overrightarrow{B}_I = \{B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_m}\} \qquad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

olmak üzere;

$$\{B_{t_0} = x_0, B_{t_1} = x_1, \ldots, B_{t_m} = x_m\}$$

olayını incelersek;

$$\{B_{t_0} = x_0, B_{t_1} - B_{t_0} = x_1 - x_0, \ldots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}} = x_m - x_{m-1}\}$$

olayına denktir. Dolayısıyla Brown süreci özel bir Gauss sürecidir (Çapar,2013).

Tanım 45. ***[Brown Hareket Sürecinin Beklenen Değeri ve Kovaryans Fonksiyonları]***

i. $\mu_B(t) = E(B_t) = 0, (t \geqslant 0)$

ii. $0 \leqslant s \leqslant t$ *için süreç bağımsız artışlı olduğundan;*

$$c_B(t, s) = E(B_t B_s) = min\{t, s\} = s \tag{4.73}$$

dir (Lord,Powell ve Shardlow, 2014).

Yörüngelerin Salınımı

Tanım 46. ***[Salınım]*** *$h(t),[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir bölünüm için*

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1} \qquad \Delta_i h = h(t_i) - h(t_{i-1})$$

olmak üzere;

i. *h'ın $\tau : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ bölünümüne göre salınımı:*$v_n([a,b],\tau) := \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i h|$

ii. *h'ın toplam salınımı :*$v_n([a,b]) := \sup_\tau v_h([a,b],\tau)$

iii. *Eğer $v_n([a,b]) < \infty$ ise h'a* sınırlı salınımlı,$v_n = \infty$ *ise* sınırsız salınımlı

iv. $Q_h([a,b],\tau) := \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i h|^2$ *değerine ise* ikinci dereceden salınım *denir (Çapar, 2013).*

$[0,t]$ aralığının bir $\tau = \{t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ bölünümü ve $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ verilmiş olsun. Buna göre sürecin [a,b] aralığındaki salınımı;

$$v_B(\omega)([0,t],\tau) := \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i B(\omega)| \tag{4.74}$$

ve toplam salınımı;

$$v_B(\omega)([0,t]) := \sup_\tau v_B(\omega)([0,t],\tau) \tag{4.75}$$

olarak hesaplanır. Kısaca $v_B(\omega)([0,t],\tau_n) = v_{n,t}(\omega)$ ile gösterilir (Çapar, 2013).

Tanım 47. ***[Yörüngenin 2. Dereceden Salınımı]*** *Yörüngenin için [0,t] aralığında*

$$Q_B(\omega)([0,t],\tau) = \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i B(\omega)|^2 \tag{4.76}$$

şeklinde hesaplanan değerine yörüngenin ikinci derece salınımı *denir* (Çapar, 2013).

Kısaca $Q_B(\omega)([0,t],\tau_n) = Q_{n,t}(\omega)$ ile gösterilir.

Tanım 48. ***[2. Derece Salınım Süreci]*** *$Q_{n,t}(\omega)$'nın olasılıktaki limit değerine* ikinci derece salınım süreci *denir.*

X stokastik sürecinin ikinci derce salınım süreci genel olarak $[X]_t$ ile gösterilir. Brown süreci için $[X]_t = t$ dir.

Özbenzeşim Matematiksel olarak kendi kısımlarına veya bir parçasına benzeyen objelere özbenzeşimli denilmektedir. Özbenzeşimin önemli örneklerinden biri fraktallardır.

Stokastik bir süreç $\{X_t; t \in [0,\infty)\}$ olmak üzere; $\forall T > 0$ ve her rassal vektör $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$, $(n = 1, 2, \ldots)$ için

$$(T^{\alpha}X_{t_1}, T^{\alpha}X_{t_2}, \ldots, T^{\alpha}X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{Tt_1}, X_{Tt_2}, \ldots, X_{Tt_n}) \tag{4.77}$$

eşitliğini sağlayan $\alpha > 0$ değerine karşılık α *özbenzeşimli süreç* denir(Çapar, 2013).

Brown süreci $\alpha = \frac{1}{2}$ olan özbenzeşimli süreçtir.

Brown Köprüsü

Tanım 49. $\{X_t = B_t - tB_1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *ile tanımlanan sürece* Brown(Brownian) Köprüsü *denir.*

$t = 0$ ve $t = 1$ için $X_0 = X_1 = 0$ olduğundan sürecin yörüngesi her iki uçtan sıfır bağlıdır. Bu nedenle sürece *Bağlı Brown Süreci* de denir(Çapar, 2013).

Sürecin sonlu boyutlu vektörleri Gauss dağılımlı olduğundan bu süreçte Gauss sürecidir. Sürecin beklenen değeri $\mu_X(t) = 0$, kovaryans fonksiyonu ise $c_X(t,s) = Cov(B_t - tB_1, B_s - sB_1) = min\{t,s\} - st$ dir.

Sürüklenmeli Brown Süreci

Tanım 50. $\{X_t = \mu t + \sigma B_t, t \geqslant 0, \sigma > 0\}$ *ile tanımlanan sürece* Sürüklenmeli Brown Süreci *denir.*

Sürecin yine sonlu boyutlu vektörleri Gauss dağılımlı olduğundan bu süreçte Gauss sürecidir. Sürecin beklenen değeri $\mu_X(t) = \mu t$, kovaryans fonksiyonu ise $c_X(t,s) = \sigma^2 min\{t,s\}$ dir(Çapar, 2013).

Geometrik Brown Süreci

Tanım 51. $\{X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}, t \geqslant 0\}$ *ile tanımlanan sürece* Geometrik Brown Süreci *denir.*

Bu sürece Üssel Sürüklemeli Brown süreci de denir(Çapar, 2013). Üssel dönüşümler Gauss dağılımlı olmadığından bu süreçte Gauss dağılımlı değildir.Gauss süreci değildir.

Sürecin beklenen değeri

$$\mu_X(t) = E(e^{\mu t + \sigma B_t}) = e^{\mu t} e^{\frac{\sigma^2 t}{2}} = e^{(\mu + \frac{\sigma^2}{2})t}$$

ve kovaryans fonksiyonu ise

$$s \leqslant t \qquad c_X(t,s) = \widetilde{c}_X\,(t-s) = e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)}(e^{\sigma^2 s} - 1)$$

ayrıca $s = t$ için

$$\sigma_X(t) = e^{(2\mu+\sigma^2)t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

dir.

Ak ve Renkli Gürültü : Brown sürecinin yörüngelerinin hiçbir noktada türevi olmadığını ifade etmiştik. Brown sürecinin türevlenebilme sorununu aşmak için Gelfand sürecin rassal fonksiyonları yerine rassal genelleştirilmiş fonksiyonlar tanımlamıştır. Laurent Schwartz tarafından kuramı oluşturulan genelleştirilmiş fonksiyonların belli bir topolojik vektör uzayının dualinin elemanları olarak verir. Özel türev tanımı ile her mertebeden türevleri vardır.

Ak gürültü (White Noise), Brown sürecinin türevi olarak tanımlandığından sürecinin yörüngelerinin genelleştirilmiş türevi Ak gürültüyü verecektir. Şimdi Ak gürültünün farklı bir yaklaşımı olan Renkli gürültü sürecini inceleyelim.

Bu süreçte;

$$X_t^h := \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \qquad , t \geqslant 0, h > 0$$

(h sabit sayı) olarak tanımlanır. Brown sürecinin doğrusal bir bileşimi olduğunda bu süreçte bir Gauss sürecidir.

Sürecin beklenen değeri

$$\mu_X(t) = 0$$

ve kovaryans fonksiyonu ise

$$s \leqslant t \qquad c_X(t,s) = \frac{1}{h^2} Cov(B_{t+h} - B_t, B_{s+h} - B_s)$$

$$= \frac{1}{h^2}[s + h - s - min\{t, s+h\} + s]$$

$$= \frac{1}{h^2}(s + h - min\{t, s+h\})$$

elde edilir.

Eğer $s+h \leqslant t$ ise $min\{t, s+h\} = s+h$ ve $c_X(t,s) = 0$ olur. X_t ve X_s ilintisizdir. Gauss süreci bağımsızdır. Fakat $s+h > t$ ise $min\{t, s+h\} = t$ ve $c_X(t,s) = \frac{h-(t-s)}{h^2}$ olur. $\delta = t - s$ dersek $c_X(t,s) = \frac{h-\delta}{h^2}$ ve süreç geniş anlamda durağan süreçtir. Gauss süreci olarak da mutlak durağandır.

Varyans fonksiyonu ise $t - s = \delta = 0$ ise $\sigma^2 = \frac{1}{h}$ olur. Burada $h \downarrow 0$ olduğunda renkli gürültünün salınımları sınırsız artacağından süreç gerçek anlamda stokastik bir süreç olmayacaktır. Yeterince küçük seçilen h'lar için X_t'ler bağımsız olmaya başlarlar. Yani b.ö.d. olur ve N(0,1) dağılımlı Gauss süreci yörüngelerine benzerler.

Brown süreci $\{B_t\}$ ve doğal filtrasyon olan $\{F_t, t \geqslant 0\}$ olsun. İki değişkenli sürekli ve ölçülebilir bir fonksiyon olan f için $X_t = f(t, B_t)$ şeklinde yazılan doğal filtrasyonlar da adapted filtrasyondur.

Sürecin doğal filtrasyonlarını genişletebiliriz. Sürecin yeni filtrasyonlarına göre adaptedtır.

$\{B_t, t \geqslant 0\}$ bir Brown süreci ve $F_t = \sigma(B_s, s \leqslant t), (t \geqslant 0)$ doğal filtrasyon olsun. Süreç s anında iken bir t zamanında $(t > s)$ bir olayın olasılığı sadece s anındaki duruma bağlıdır. Buna *"Belleksizlik"* özelliği denir. Yani

$$P(X_t \in B|F_s) = P(X_t \in B|X_s) = P(X_t \in B|\sigma(X_s)), (s > t, B \in \mathscr{B}) \tag{4.78}$$

olur. Bu özelliğe *Markov özelliği* denir.

Markov özelliğini taşıyan süreçlere *Markov Süreci* denir.

Olasılıkta Zayıf Yakınsama

Tanım 52. ***[Ölçü Ailesinin Sıkılığı:]*** *$\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir tıkız K kümesi vardır ki $\{\mu_n\}$ ölçü ailesinin her üyesi için $\mu(K) > 1-\varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa $\{\mu_n\}$ ölçü ailesine* sıkı(bağıl tıkız) *denir.*

$I = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\} \subset [0,T]$ sıralı ve sonlu zaman indisleri ve P_I sürecin s.b.d.'larını göstersin.

Teorem 34. ***[Olasılıkta Zayıf Yakınsama:]*** *$\{X_{t,n}, t \geqslant 0\}$ şeklinde verilen dağılımları μ_n olan stokastik süreç dizisi ve sürecin s.b.d.'ları $P_{I,n}$ olsun. Bu sürecin s.b.d.'ları P_I, olasılık dağılımı μ olan sürece zayıf yakınsaması için aşağıdaki koşulları sağlanması gerekir.*

i. $n \to \infty$ olmak üzere $P_{I,n} \Longrightarrow P_I$

ii. $\{\mu_n\}, (n = 1,2,\ldots)$ olasılık ölçüsü ailesi sıkıdır.

Rassal Yürüyüş(Random Walking) Brown süreci kullanarak rassal yürüyüşün simülasyon kurulumu için aşağıdaki aşamalara göre hareket edilir.

Eksen üzerinde rastgele hareket eden polen taneciklerinin var olduğu kabul edilerek her Δt zaman birimine karşılık gelen sürede $\frac{1}{2}$ olasılıkla sağa veya sola doğru Δx kadar hareket etsin.

$Y_1, Y_2, \ldots$ bağımsız ve $\frac{1}{2}$ olasılıkla $\pm\Delta x$ değeri alan rassal değişkenler olsun.

$$X_{n,t} := Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{[\frac{T}{\Delta t}]} \qquad , n = [\frac{T}{\Delta t}]$$

süreci tanımlanır. Bu süreçte; $n \to \infty, \Delta t \to 0$ ve $\Delta x \approx \sqrt{\Delta t}$ mertebesinde 0'a giderken Wiener ölçüsü μ'ye zayıf olasılıkla yakınsar. Y_i'ler b.ö.d. ve $N(0,1)$ dağılımlı rassal değişkenler olmak üzere;

$$X_{n,t}(\omega) = \begin{cases} \frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\ldots+Y_i(\omega)}{\sqrt{n}} & t = \frac{i}{n}, i = 0,1,2,\ldots \\ lineer\, interpolasyon & d.d.t'ler \end{cases}$$

için

1. $X_{0,t} = 0$

2. $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tamsayılarının $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_m \leqslant n$ olmak üzere

$$X_{\frac{i_2}{n},n} - X_{\frac{i_1}{n},n}, X_{\frac{i_3}{n},n} - X_{\frac{i_2}{n},n}, \ldots, X_{\frac{i_m}{n},n} - X_{\frac{i_{m-1}}{n},n}$$

   bağımsız rassal değişkenlerdir. Çünkü bu artışlar dizisinin her biri sonlu sayıda bağımsız $\frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ değişkeninin toplamıdır.

3. Artışlar aynı sayıda $\frac{Y_i}{\sqrt{n}}$ toplamından oluşuyorsa iki dağılım aynıdır.

4. $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$ için $X_{\frac{i}{n},n}$'nin dağılımı $N(0, \frac{i}{n})$ ve $V[\frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\ldots+Y_i(\omega)}{\sqrt{n}}] = \frac{i}{n}$ dir.

Verilen süreç bağımsız artışlı ve durağan artışlı olduğundan Brown sürecidir.

Donsker Değişmezlik Prensibi

$$X_{n,t}(\omega) = \begin{cases} \frac{Y_1(\omega)+Y_2(\omega)+\ldots+Y_i(\omega)}{\sqrt{n}} & t = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \ldots \\ lineer\,interpolasyon & d.d.t'ler \end{cases}$$

ifadesi ile verilen süreç dağılımda Brown sürecine yakınsar. Sürecin olasılık dağılımı μ_n ise Wiener ölçüsüne μ'ye yakınsamaktadır(Karatzas ve Shreve, 1988).

Martengaller

Tanım 53. ***[Martengaller:]*** *$X = \{X_t; t \geqslant 0\}$ stokastik süreci ve $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ filtrasyonu verilmiş olsun. Bu süreç aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ filtrasyonuna $\{\mathscr{F}_t\}$-* Martengali *denir.*

i. *$\forall t$ için $E(|X_t|) < \infty$*

ii. *$X_t, \{\mathscr{F}_t\}$ filtrasyonuna adaptedir.*

iii. *Her $0 \leqslant s \leqslant t$ için $E(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s$(h.h.k.) dir.*

Eğer (iii.) koşulunda verilen eşitlik yerine $E(X_t|\mathscr{F}_s) \geqslant X_s$(h.h.k.) ise Martengale *Alt-Martengal*, $E(X_t|\mathscr{F}_s) \leqslant X_s$(h.h.k.) ise Martengale *Üst-Martengal* denir. Ayrıca (i.) yerine $X_t \in L^p, p \in [1,\infty)$ gelirse L^p*-Martengal* denir. Bir L^P-Martengel için $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} E(|X_t|^p) < \infty$ ise $X'e, L^p-$*sınırlı Martengal* denir.

Bir Martengalin beklenen değer fonksiyonu;

$$\mu_X(t) = E(X_t) = c, (c : sabit)$$

dir.

Tanım 54. ***[Ayrık Zamanlı Martengal:]*** *Ayrık zamanlı bir süreç olan* $X = \{X_n; n = 0,1,2,\ldots\}$ *ve* $\{\mathscr{F}_t, n = 0,1,2,\ldots\}$ *filtrasyonu verilmiş olsun.*

i. $E(|X_n|) < \infty, \quad n = 0,1,2,\ldots$

ii. $X_n, \{\mathscr{F}_n\}$ *filtrasyonuna adaptedir.*

iii. Her $m \geqslant 1$ *için* $E(X_n + m|\mathscr{F}_n) = X_n$*(h.h.k.) dir.*

koşulları sağlanıyorsa X sürecine $\{\mathscr{F}_n\}$ *filtrasyonuna adapte bir* ayrık zamanlı martengal *denir.*

Bağımsız rassal değişkenlerin kısmi toplamlarından oluşan süreç ayrık zamanlı martengaldir(Protter,1990).

Tanım 55. *Poisson Martengali* $N = N\{N_t : t \geqslant 0\}$ *bir Poisson süreci ve* $\mathscr{F}_t$ *doğal filtrasyon olsun. Bu taktirde* $\{N_t - \lambda t\}_{t\geqslant 0}$ *süreci* $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ *filtrasyonuna adapte sağdan sürekli bir* L^p*-Martengalidir.*

Tanım 56. *Brown Martengali Poisson martengali gibi Brown süreci doğal filtrasyonuna göre* L^p-*Martengalidir.*

$E(X_n + 1|\mathscr{F}_n) = X_n \Leftrightarrow E(X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n) = 0$ olmak üzere tanımlanacak ayrık zamanlı $\{Y_n; n = 0,1,2,\ldots\}$ sürecine *Martengal Fark Dizisi* denir.

i. $Y_n = X_n - X_{n-1} n \geqslant 0$

ii. $E(Y_n|\mathscr{F}_{n-1}) = 0$ dır.

Önceden Kestirilebilir Süreç $W = \{W_n; n = 1,2,\ldots\}$ ayrık zamanlı martengal olsun. $\forall n$ için $W_n, \mathscr{F}_{n-1}$ ölçülebilir ise $W, \mathscr{F}_n$'e göre *önceden kestirilebilir süreç* denir.

Martengal Dönüşümü $Y_n = \{Y_n; n = 0,1,2,\ldots\}$ süreci $\{\mathscr{F}_n\}$ filtrasyonuna göre bir martengal fark dizisi ve $W = \{W_n; n = 1,2,\ldots\}$ de bu filtrasyona göre önceden kestirilebilir süreç olsun.

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n} W_i Y_i, \quad n \geqslant 1$$

şeklinde tanımlanan Z sürecine *Y'nin W dönüşümü* denir. Kısaca $Z = W \bullet Y$ ile gösterilir(Protter, 1990).

Brown Martengal Dönüşümü $B = \{B_s; 0 \leqslant s \leqslant t\}; [0,t]$ aralığında tanımlı bir Brown süreci ve $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ tanım aralığının bir bölünümü $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathscr{F}_i = \sigma(B_{t_j}; 1 \leqslant j \leqslant i); (i = 1,2,\ldots,n)$ de bir filtrasyon olsun.

$$\Delta B = \{\Delta_0 B = 0, \Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

rassal değişken dizisini tanımlayalım. Buna göre verilen filtrasyona adapte martengal fark dizisidir. Ayrıca

$$\widetilde{B} = \{\widetilde{B}_{t_i} = B_{t_i-1}, (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

sürecini tanımlayalım.

Bu süreç $\widetilde{B}_{t_i} = B_{t_i-1}$ olarak tanımlandığından önceden kestirilebilir süreçtir. $\widetilde{B} \bullet \Delta B$ bir martengaldir.

$$\{\widetilde{B} \bullet \Delta B\}_k = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{B}_i \bullet \Delta_i B = \sum_{i=1}^{k} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

dir(Çapar, 2013).

Martengal Yakınsaklık Teoremi

Teorem 35. $\{X_t\}_{t \geqslant 0}; p > 1$ *için* L^p*-sınırlı ve sürekli zamanlı martingale olsun. Bu taktirde öyle bir* $X_\infty \in L^p(\Omega, \mathscr{A}_\infty, P)$ *rassal değişkeni bulunabilir ki* $t \to \infty$ *hem* L^p *hem* *de h.h.k. olarak* X_t, X_∞*'ye yakınsar.* $(X_t \to X_\infty)$

Ayrıca $\{X_t\}$ *Martengali kapatır* denir(Chung ve Willams,1983).

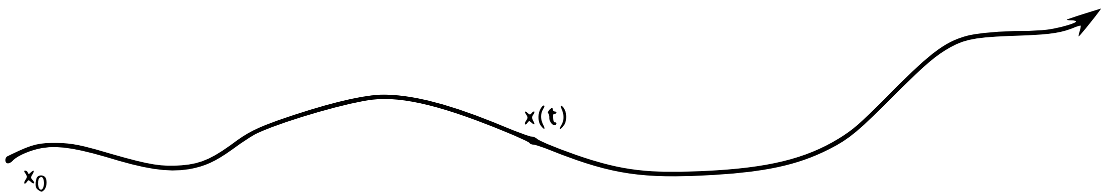
Stokastik Diferansiyel Denklemler

Doğa Bilimleri, Sosyal Bilimler, Ekonomi, Finans ve diğer bilimlerle ilgilenen araştırmacıların zamana bağlı değişimi incelemek amacıyla kurdukları modellerde diferansiyel denklemler(ODE) kullanılmıştır. Fakat bu denklemlerin deterministik olması birçok etkinin sbit kabul edilmesi veya dikkate alınmaması tam çözümler ile model sonucu arasında önemli farklılıklar oluşturmaktadır. Bu nedenle diğer etkilerin ve belirsizlikten kaynaklanacak farklılıkların oluşturacağı bir terimi diferansiyel denkleme dahil etmenk gerekmektedir. Böylece Stokastik Diferansiyel Denklemler (SDE) gündeme gelmiştir(Applebaum, 2007; Bhat, 1981; Evans, 2012; Higham, 2001; Kloeden ve Platen, 2013; Lord vd. 2014; Mao, 2008; Oksendal, 2013).

Bir başlangıç değer problemi olan adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$\begin{cases} x'(t) = b(x(t)) & (t > 0) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.79}$$

Yukarıdaki denklemde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonun yörüngesi aşağıdaki gibi verilebilir(Evans, 2012).

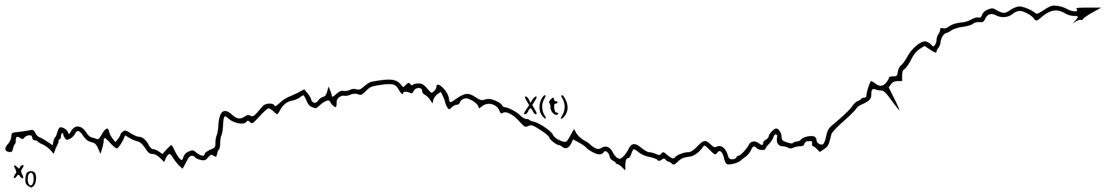


Şekil 4.2: Adi Diferansiyel Denklemin Örnek Çözüm Yörüngesi

Fakat diğer belirsizlikler "Ak Gürültü" (White Noise) terimi olarak denkleme ilave edilirse;

$$\begin{cases} X'(t) = b(X(t)) + B(X(t))\xi(t) & (t > 0) \\ X(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.80}$$

Burada $\xi(t) :=$ m-boyutlu "Ak Gürültü" ve $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}^{m \times n}$ tanımlıdır. Fonksiyonun yörüngesi ise aşağıdaki gibi verilebilir(Evans, 2012).



Şekil 4.3: Stokastik Diferansiyel Denklemin Örnek Çözüm Yörüngesi

(6.80) SDE sisteminde $m = n, x_0 = 0, b = 0$ ve $B = I$ değerleri için $n - boyutlu$ Brown Hareketi elde edilir. Kısaca $W(.)$ sembolü ile gösterilir. Ayrıca $W'(.) = \xi(.)$ dir. Ak gürültü ,Brown Hareketinin zamana göre türevidir. Yani (6.80) SDE,

$$\frac{dX(t)}{dt} = b(X(t)) + B(X(t))\frac{dW(t)}{dt} \tag{4.81}$$

dir. Dolayısıyla;

$$X(t) = x_0 + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t B(X(s))dW \tag{4.82}$$

genel çözümü formu elde edilir(Evans, 2012).

Brown Hareketinin hiçbir noktada türevlenememesi nedeniyle integralin hesaplanması için daha az kısıtlar gerekmektedir. Riemann-Stieltjes integrali yeterli değildir. Japon matematikçi Kiyosi Ito tarafından 1944-1946 yılları arasında yayınladığı makaleler stokastik integral hesaplanmasında önemli bir dönüm noktası olmuştur. (Ito, 1944 ve 1946)

Ito, yörüngeler üzerinde alınan Riemann-Stieltjes toplamlarının klasik limitleri yerine L^2 uzayında ya da olasılıkta limitlerini alarak stokastik integral tanımında geniş bir integrand ailesi üzerinde sonuca ulaşır.

Stokastik İntegral

Tanım 57. *Basit Süreçler ve Ito Stokastik İntegralleri* $X = \{X_t : t \in [0,T]\}$ *süreci* τ_n *bölümüne göre aşağıdaki tanımlanıyorsa sürec e* Basit Süreç *denir(Çapar, 2013).*

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$$

$$X(\omega, t) = \sum_{i=1}^{n} Z_i(\omega) I_{[t_{i-1}, t_i)}(t) + Z_n(\omega) I_{\{t_n\}}(t) \tag{4.83}$$

yada kısaca

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i I_{[t_{i-1},t_i)} + Z_n I_{\{t_n\}} \tag{4.84}$$

dir.Basit sürecin açık yazılımı ise

$$X_t(\omega) = \begin{cases} Z_i(\omega) & t_{i-1} \leqslant t < t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \\ Z_n(\omega) & t = t_n = T \end{cases} \tag{4.85}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki tanımlamada Z_i ’ler, $\{\mathscr{F}_{t_i-1}\}$ filtrasyonuna göre karesi integrallenebilir rassal değişkenlerdir. Yani $E(Z_i^2) < \infty$ dir.

$X = \{X_s; 0 \leqslant s \leqslant T\}$ basit süreci için tanımlanancak olan Ito stokastik integrali,

$$\int_0^T X_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} Z_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} X_{i-1} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \tag{4.86}$$

formülleri ile verilir.Diğer bir ifade ile

$$\int_0^t X_s dB_s = \int_0^T X_s I_{[0,t]} dB_s := \sum_{i=1}^{n} Z_i (B_{min\{t_i,t\}} - B_{min\{t_{i-1},t\}}) \tag{4.87}$$

tanımlanır.

Basit Süreçlerin Ito Stokastik İntegralinin Özellikleri:

Basit sürecin stokastik integrali;

$$I_t(X)(\omega) := \int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega) \qquad (t \in [0,T]) \tag{4.88}$$

olarak tanımlanırsa $I_t(X)(\omega)$’da bir stokastik süreç olur. Bu süreç için;

i. $E(I_t(X)(\omega)) = 0$

ii. $E(I_t^2(X)(\omega)) = E((\int_0^t X_s(\omega) dB_s(\omega))^2) = \int_0^t E(X_s^2(\omega)) ds \qquad t \in [0,T]$

Bu özelliğe *İzometri Özelliği* denir.

iii.
- $I_t(X+Y) = I_t(X) + I_t(Y)$
- $I_t(cX) = cI_t(X) \qquad (c \in \mathbb{R})$

- $\int_0^T X_s dB_s = \int_0^t X_s dB_s + \int_t^T X_s dB_s$

iv. $I_t(X)$ yörüngeleri süreklidir.

v. $I_t(X)(\omega)$ süreci Brown sürecinin doğal filtrasyonuna adapted olan martengaldir.

Ito Stokastik İntegral X bir stokastik süreç ve ϕ_n basit stokastik süreç olmak üzere,

$$lim_{n\to\infty} E(\int_0^T (X(\omega) - \phi_n(\omega))^2 dt) \to 0 \tag{4.89}$$

olduğunu varsayımı altında Ito integrali ;

$$\int_0^T X_t(\omega) dB_t(\omega) = lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi_{n,t}(\omega) dB_t(\omega) \tag{4.90}$$

limiti ile $\mathscr{L}^2(P)$ içinde tanımlanır. Bu limitle hesaplanan Ito integralinin özellikleri,

i. $\int_0^T (X_t + Y_t) dB_t = \int_0^T X_t dB_t + \int_0^T Y_t dB_t$ dir

ii. $I_t(X) = \int_0^T X_s dB_s, (t \in [0,T])$ süreci Brown hareket sürecinin doğal filtrasyonuna göre martengaldir.

iii. $E(I_t(X)(\omega)) = 0$ dir

iv. $\{I_t(X)(\omega)\}$ stokastik sürecinin yörüngeleri süreklidir

v. $E((\int_0^t X_s dB_s)^2) = \int_0^t E(X_s^2) ds \qquad t \in [0,T]$

dir(Ito, 1944 ve 1946).

Ito Lemmaları Ito'nun stokastik integral alarken kullandığı argümaanlardan en önemlileri arasına giren Ito Lemmmalarına stokastik değişken değiştirme gözü ile bakılabilir. Taylor açılımı yardımıyla tanımlanan bu lemmaların diferansiyel ve integral formu aşağıdaki gibidir. (Kloeden ve Platen, 2013; Lord vd., 2014; Mao, 2008; Oksendal, 2013)

- **Ito Lemması-1:**

Ito Lemması-1 (Diferansiyel Formu): f fonksiyonu 2.defa türevlenebilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt \tag{4.91}$$

Ito lemmasının diferansiyel formunu s'den t'ye integrali alınarak Ito lemmasının integral formu elde edilir.

Ito Lemması-1 (İntegral Formu):

$$\int_0^t d(f(B_x)) = f(B_t) - f(B_s) = \underbrace{\int_s^t f'(B_x)d(B_x)}_{Ito\,integrali} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx}_{Riemann\,integrali} \tag{4.92}$$

- **Ito Lemması-2:**

  $f(t,x)$ iki değişkenli, sürekli ve ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(t,B_x) - f(x,B_x) = \underbrace{\int_s^t [f_1(x,B_x)] + \frac{1}{2}f_{22}(x,B_x)]dx}_{Riemann\,integrali} + \underbrace{\int_s^t f_2(x,B_x)d(B_x)}_{Ito\,integrali} \tag{4.93}$$

  dir.

Ito Stokastik Adi Diferansiyel Denklemler Stokastik modellemelerde temel denklemlerden,

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t \quad X_0 = Y(\omega) \tag{4.94}$$

diferansiyel formu ile verilen stokastik diferansiyel denklemi integral formunda yazarsak;

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dB_s \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{4.95}$$

Ito stokastik diferansiyel denklemini elde ederiz. Denklemin özel durumlarını incelersek;

i. $X_0 = 0$, $a = 0$ ve $b = 1$ için $X_t = \int_0^t dB_t = B_t$ olur. Denklemin çözümü Brown hareket süreci olur.

ii. $X_0 = 0$, $a = \mu$ ve $b = 1$ için $X_t = \int_0^t \mu dt + \int_0^t dB_t = \mu t + B_t$ olur. Denklemin çözümü sürüklenmeli Brown hareket süreci olur.

iii. Ayrıca $a(t,x) = c_1(t)x + c_2(t)$ ve $b(t,x) = \sigma_1(t)x + \sigma_2(t)$ olmak üzere

$$X_t = X_0 + \int_0^t [c_1(s)X_s + c_2(s)]ds + \int_0^t [\sigma_1(s)X_s + \sigma_2(s)]dB_s \tag{4.96}$$

elde edilen stokastik diferansiyel denkleme *Genel Doğrusal Ito Diferansiyel Denklemi* denir.

Gronwall Eşitsizliği $f(t) \geqslant 0$ fonksiyonu $0 \leqslant t \leqslant T$ aralığında $a, c \in \mathbb{R}^+$ sabit değerler olmak üzere,$f(t) \leqslant c + a\int_0^t f(s)ds$ eşitsizliği mevcutsa

$$f(t) \leqslant ce^{at} \tag{4.97}$$

dir(Çapar, 2013).

Lipschitz Koşulu Bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y| \tag{4.98}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K \geqslant 0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(x)$'e Lipschitz fonksiyonu veya Lipschitz sürekli fonksiyon denir(Çapar, 2013).

Ito Stokastik Adi Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Genel doğrusal Ito diferansiyel denklemin özel hali olan,

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma\int_0^t X_s dB_s \quad \sigma > 0 \tag{4.99}$$

denkleminde X ve B süreçleri arasındaki çarpımsal ilişkide dolayı *Çarpımsal Gürültülü Doğrusal Stokastik Diferansiyel Denklem* denir.

$W^{(1)}$ ve $W^{(2)}$ Brown sürecinin doğal filtrasyonuna adapted süreçler olmak üzere,

$$X_t = X_0 + \int_0^t W_s^{(1)} ds + \int_0^t W_s^{(2)} dB_s \tag{4.100}$$

formunda verilen sürece *Ito Süreci* denir. Bu sürecin stokastik diferansiyel denklemi ise,

$$dX_t = W_t^{(1)}dt + W_t^{(2)}dB_t \tag{4.101}$$

formundadır.

- **Ito Lemması-3 :** (6.99) ve (6.100) denklemleri ile verilen Ito süreci ve $f(t,x)$ ikinci mertebe kısmi türevleri varolan ve sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$f(t,X_t) - f(s,X_s) = \int_s^t \left[f_1(x,X_x) + W_x^{(1)} f_2(x,X) + \frac{1}{2}[W_x^2]^2 f_{22}(x,X)\right] dx$$

$$+ \int_s^t f_2(x,X) W_x^2 dB_x \quad (s < t) \tag{4.24}$$

eşitliği elde edilir(Çapar, 2013).

Ito Çarpım Kuralı X_1 ve X_2 iki Ito süreci olmak üzere bu süreçlerin stokastik diferansiyelleri,

$$dX_{1,t} = W_t^{(1,1)}dt + W^{(2,1)}dB_t$$

$$dX_{2,t} = W_t^{(1,2)}dt + W^{(2,2)}dB_t$$

olsun. Bu taktirde X_1X_2 çarpımıda bir Ito süreci olup stokastik diferansiyeli,

$$d(X_1X_2) = X_{1,t}dX_{2,t} + X_{2,t}dX_{1,t} + W_t^{(2,1)}W^{(2,2)}dt \tag{4.102}$$

elde edilir.

Teorem 36. ***[Levy'nin Brown Hareket Sürecinin Karakterizasyonu:]*** $(\Omega,\mathscr{F},P)$ *olasılık uzayında tanımlanan* $\{X_t\};(t \geqslant 0)$ *sürekli stokastik süreci ve* $X_t^2 - t$ *süreci* $\{\mathscr{F}_t\}$ *doğal filtrasyonuna göre martengal olması ile* $\{X_t\}$*'nin Brown süreci olması denktir(Çapar, 2013).*

Girsanov Teoremi

Teorem 37. ***[Girsanov Teoremi:]*** *$X_t = \alpha t + B_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$, $X_0 = 0$ olmak üzere $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan bir Ito süreci olsun. Ayrıca $M_t = e^{-\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$ tanımlayalım. Bu taktirde;*

i. M_t , P ölçüsüne göre martengaldir.

ii. $Q(A) = \int_A M_T(\omega) dP(\omega) \quad A \in \mathscr{F}$ ile tanımlanan ölçü P ile eşdeğerdir.

iii. Q ölçüsü altında $X_t = \alpha t + B_t$ bir Brown sürecidir.

Kanıt. i. $f(t,x) = e^{-\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 t}$ fonksiyonu için M_t sürecine Ito lemması-2 uygulanırsa ,

$$f(t, B_t) = M_t$$

$$f_1(t,x) = -\frac{\alpha^2}{2} f(t,x), \quad f_2(t,x) = \alpha f(t,x)$$

ve

$$f_{22}(t,x) = \alpha^2 f(t,x)$$

yerine yazarsak ,

$$df(t,B_t) = [f_1(t,B_t) + \frac{1}{2} f_{22}(t,B_t)] + f_2(t,B_t) dB_t$$

$$= \frac{-\alpha^2}{2} f(t,B_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 f(t,B_t) - \alpha f(t,B_t) dB_t$$

olur. Buradan,

$$dM_t = -\alpha M_t dB_t$$

$$M_t = 1 - \int_0^t \alpha M_s dB_s \quad , M_0 = 1$$

dir.

M_t, Brown filtrasyonuna göre ölçülebilir olduğundan $E(M_t^2) = E(e^{-2\alpha B_t - \alpha^2 t})$ dir. $\mu = -\alpha^2$ ve $\sigma = -2\alpha$ için Geometrik Brown süreci olur.

$$\int_0^T E(M_t^2 dt = \int_0^T e^{-\alpha^2 t} dt < \infty$$

gerçekleşir.

$$M_t = \int_0^t \alpha M_s dB_s$$

bir Ito integraldir. Dolayısıyla M_t, P ölçüsüne göre martengaldir.

ii. Q ölçüsünün ifadesi P ölçüsüne göre mutlak sürekli olduğunu gösterir. $Q(A) = 0$ ise $M_t > 0$ olduğundan $P(A) = 0$ olur. Bu da bize Q ve P ölçülerinin eşdeğer olduğunu gösterir.

iii. Levy karakterizasyonuna göre X_t'nin Brown süreci olduğunu gösterelim. Yani,$X_t = \alpha t + B_t$ ve $X_t^2 - t$ süreçlerinin $dQ = M_t dP$'ye göre martengal olduğunu gösterelim. Bunun için $K_t = M_t X_t$ alınarak Ito çarpım kuralı uygulanırsa;

$$dK_t = M_t dX_t + X_t dM_t + dX_t dM_t$$

elde edilir. Buradan

$$dK_t = M_t(\alpha dt + dB_t) - X_t \alpha M_t dB_t - dB_t \alpha M_t dB_t$$

ve $M_t \alpha dt - \alpha M_t (dB_t)^2 = 0$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$dK_t = M_t(1 - \alpha X_t) dB_t$$

olur. Dolayısıyla P ölçüsüne göre martengaldir.

$$E_Q(X_t|\mathscr{F}_s) = \frac{E(M_t X_t|\mathscr{F}_s)}{E(M_t|\mathscr{F}_s)} = \frac{E(K_t|\mathscr{F}_s)}{E(M_t|\mathscr{F}_s)} = \frac{K_s}{M_s} = X_s (h.h.k)$$

Benzer şekilde $X_t^2 - t$ gösterilebilir(Çapar, 2013).

□

Girsanov Teoreminin Genel Hali: *$X_t, (\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan $dX_t = \alpha_t(\omega)dt + dB_t, t \in [0,T]$ ile verilen Ito süreci için*

$$M_t = e^{-\int_0^t \alpha_s(\omega) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \alpha_s^2(\omega) ds}, \quad t \in [0,T]$$

tanımını yapalım ve $\alpha_t(\omega)$ süreci için Novikov şartı P ölçüsüne göre $E(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2(\omega) ds}) <$

∞ sağlasın. Buna göre $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ üzerinde Q ölçüsü $dQ(\omega) = M_T(\omega)dP(\omega)$ şeklinde verilmişse,

a. M_t bir P martengaldir.

b. Q ölçüsü ile P ölçüsü eşdeğerdir.

c. Q ölçüsü altında X_t süreci bir Brown sürecidir(Çapar, 2013).

Stokastik Adi Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözüm Metotları

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x \tag{4.103}$$

stokastik diferansiyel denklemin tam çözümü,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \tag{4.104}$$

bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle nümerik metotlar aracılığıyla yakın değerlerle çözüme yaklaşılabilir.

Stokastik diferansiyel denklemlerin en basit nümerik metotlarından biri *Stokastik Euler Metodu* veya daha genel adıyla *Euler-Marumaya Metotudur.*(Çapar, 2013; Higham, 2001; Kloeden ve Platen, 2013; Lord vd., 2014)

Euler-Marumaya Metodu (6.103) ve (6.104) denklemleri ile verilen stokastik diferansiyel denklemin nümerik çözümünü yapmak için,

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s, X_s)dW_s \approx b(t_n, X_n)\Delta W_n \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(s, X_s)dW_s \approx a(t_n, X_n)\delta t$$

olmak üzere,

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)\delta t + b(t_n, X_n)\Delta W_n \tag{4.105}$$

iterasyon denklemi elde edilir.

İterasyonun uygulanması sırasındaki adımlarda $t_n = n\delta t$ olmak üzere,

$$X_t^{\delta t} = X_n + \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n}(X_{n+1} - X_n) \qquad t \in [t_n, t_{n+1}) \tag{4.106}$$

iterasyon sonucu çıkan değere karşılık X_t kesin çözümü kıyaslandığında;

i. Eğer $\lim_{\delta t \to 0} E(|X_t - X_t^{\delta t}|) = 0$ ise iterasyon güçlü yakınsar,

ii. Eğer bütün $g(x)$ polinomları için $\lim_{\delta t \to 0} |E(g(X_t) - E(g(X_t^{\delta t}))| = 0$ iterasyon zayıf yakınsar denir.

iii. γ mertebeden(order) güçlü ve zayıf yakınsama ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E(|X_t - x_t^{\delta t}|) \leqslant K(\delta t)^{\gamma} \quad (K; sabit)$$

γ. mertebeden güçlü yakınsama

$$|E(g(X_t) - E(g(X_t^{\delta t}))| \leqslant K(\delta t)^{\gamma} \quad (K; sabit)$$

γ. mertebeden zayıf yakınsamadır.

Milstein Metodu Stokastik nümerik metotlarından biri de Milstein metodudur. (6.103) ve (6.104) denklemleri ile verilen stokastik diferansiyel denklemin nümerik çözümünü farklı bir yaklaşım kullanarak elde etmeye çalışır. Milstein metodu, Stokastik Taylor açılımının Ito formülüne uygulanması esasına dayalıdır.

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s, X_s) dW_s \approx b(t_n, X_n) \Delta W_n \qquad \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(s, X_s) dW_s \approx a(t_n, X_n) \delta t$$

ve $b(t_n, X_n)$ 1. türevi $b'(t_n, X_n)$ olmak üzere,

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n)\delta t + b(X_n)\Delta W_n + \frac{1}{2} b'(X_n) b(X_n)((\Delta W_n)^2 - \delta t) \tag{4.107}$$

denklemi elde edilir (Milstein, 1974).

Örnek: Geometrik Brown sürecinin stokastik diferansiyel denklemi,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad X(0) = X_0$$

için olmak üzere Euler-Marumaya ve Milstein metotları uygulanırsa

$$X_{n+1} = X_n + \mu X_n \Delta t + \sigma X_n \sqrt{\Delta} Z \qquad (Euler - Marumaya)$$

ve

$$X_{n+1} = X_n + \mu X_n \Delta t + \sigma X_n \sqrt{\Delta} Z + \frac{1}{2}\sigma^2 (Z^2 - 1) \qquad (Milstein)$$

Ayrıca Geometrik Brown süreci finansal değerlemede kullanılan tam çözümü için,

$$X_T = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \omega(T)}$$

denklemi de kullanılır.

Örnek: CIR(Cox- Ingersol-Ross) stokastik diferansiyel denklemi,

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma \sqrt{X_t} dW_t, \quad X(0) = X_0 > 0$$

için

$$f(X_t) = (\alpha - \beta)X_t \quad g(X_t) = \sigma \sqrt{X_t}$$

Euler-Marumaya ve Milstein metotları uygulanırsa

$$X_{n+1} = X_n + (\alpha - \beta) X_n \Delta t + \sigma \sqrt{X_n} \sqrt{\Delta} Z \qquad (Euler - Marumaya)$$

ve

$$X_{n+1} = X_n + (\alpha - \beta) X_n \Delta t + \sigma \sqrt{X_n} \sqrt{\Delta} Z + \frac{1}{4}\sigma^2 (Z^2 - 1) \qquad (Milstein)$$

dir (Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

Örnek: Vasicek stokastik diferansiyel denklemi ise

$$dX_t = (\beta - \alpha X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X(0) = X_0 > 0$$

şeklindedir (Yıldırak ve Çalışkan, 2008).

CIR ve Vasicek modelleri birbiribe benzeyen tahvil fiyatları ile kısa dönem faiz haddi arasındaki doğrusal ilişkiyi veren stokastik modellerdir(Yıldırak ve Çalışkan, 2008).