KENMOTSU FINSLER MANİFOLDLARINDA BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Mehmet DAYAN

Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Dr. Öğr. Üye. Nesrin ÇALIŞKAN

Uşak

Eylül, 2019

KENMOTSU FINSLER MANİFOLDLARINDA BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Mehmet DAYAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Temel Eğitim Anabilim Dalı Sınıf Eğitimi Bölümü

Danışman : Dr. Öğr. Üye. Nesrin ÇALIŞKAN

Uşak

Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü

Eylül, 2019

ÖZET

KENMOTSU FINSLER MANİFOLDLARINDA BAZI EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Mehmet DAYAN
Temel Eğitim Anabilim Dalı
Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Eylül 2019
Danışman: Dr. Öğr. Üye. Nesrin ÇALIŞKAN

Bu tezde, Kenmotsu Finsler manifoldlarının eğrilikleri analiz edilmiştir. Giriş bölümünde Kenmotsu manifoldlar ve Finsler uzayı üzerine tarihsel hatırlatmalar sunulmuştur. Kavramsal çerçeve kısmında bu çalışma için gerekli olan temel kavramlar tanıtılmıştır. Bunun yanı sıra vektör demetleri üzerinde hemen hemen Kenmotsu Finsler yapılar ele alınmıştır. Sonrasında, Kenmotsu Finsler manifoldlarının Weyl projektif, $\mathcal{M}$ −projektif, conformal ve quasi-conformal eğrilik tensörleri tanımlanmış ve bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir. Bu bağlamda, Weyl projektif ve $\mathcal{M}$ -projektif olarak flat, $\xi - \mathcal{M} -$ projektif flat, lokal olarak $\varphi - \mathcal{M} -$ projektif simetrik, $\mathcal{M} -$ projektif semi-simetrik, $\varphi - \mathcal{M} -$ projektif flat, quasi$-\mathcal{M}$ −projektif flat ve $W(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ koşulunu sağlayan Kenmotsu Finsler manifoldları çalışılmıştır. İlaveten, $C(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$, $W(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ *ve* $C(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ eşitliklerini sağlayan Kenmotsu Finsler yapıları incelenmiştir. Son bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Kenmotsu Finsler yapı, Weyl projektif eğrilik tensörü, $\mathcal{M}$-projektif eğrilik tensörü, $\xi - \mathcal{M} -$projektif flat, Projektif flat, $\varphi - \mathcal{M} -$projektif simetrik, $\mathcal{M} -$projektif semi-simetrik, $\varphi - \mathcal{M} -$projektif flat, Quasi$-\mathcal{M} -$projektif flat, Concircular eğrilik tensörü, Quasi-conformal eğrilik tensörü, Conformal eğrilik tensörü.*

ABSTRACT

SOME CURVATURE PROPERTIES IN KENMOTSU FINSLER MANIFOLDS

Mehmet DAYAN
Department Of Basic Education
Social Sciences Institues Uşak University, September 2019
Advisor: Assist. Prof. Dr. Nesrin ÇALIŞKAN

In this thesis, curvatures of Kenmotsu Finsler manifolds are analyzed. In the introduction section, the historical reminds on Kenmotsu manifolds and Finsler space are presented. In the conceptual framework, the basic consepts which are necessary for this study are introduced. Besides, Kenmotsu Finsler structures on vector bundles are handled. Then, Weyl projective, $\mathcal{M}-$ projective, conformal and quasi-conformal curvatures of Kenmotsu Finsler manifolds are defined and their some curvature properties are examined. In this regard, Weyl projectively and $\mathcal{M}-$projectively flat, $\xi-\mathcal{M}-$projectively flat, locally $\varphi-\mathcal{M}-$projectively symmetric, $\mathcal{M}-$projectively semi-symmetric, $\varphi-\mathcal{M}-$ projectively flat, quasi $-\mathcal{M}-$ projectively flat and satisfying the condition $W(X^H,Y^H).\mathcal{M}=0$ Kenmotsu Finsler manifolds are studied. Additionally, Kenmotsu Finsler structures satisfying the relations, $C(X^H,Y^H).\mathcal{M}=0$, $W(\xi^H,Y^H).\widetilde{K}=0$ and $C(\xi^H,Y^H).\widetilde{K}=0$ are examined. In the last section, the obtained results are evaluated.

Keywords: *Kenmotsu Finsler structure, Weyl projective curvature tensor,* $\mathcal{M}$*-projective curvature tensor,* $\xi-\mathcal{M}-$ *projectively flat, Projectively flat,* $\varphi-\mathcal{M}-$ *projectively symmetric,* $\mathcal{M}-$ *projectively semi-symmetric,* $\varphi-\mathcal{M}-$*projectively flat, Quasi*$-\mathcal{M}-$*projectively flat, Concircular curvature tensor, Quasi-conformal curvature tensor, Conformal curvature tensor.*

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Temel Eğtim Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı 134002009 No'lu öğrencisi Mehmet DAYAN'ın "Kenmotsu Finsler Manifoldlarında Bazı Eğrilik Özellikleri" adlı tezi 27/09/2019 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Uşak Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca, Yüksek Lisans Tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Jüri		Adı Soyadı	İmza
Danışman	:	Dr. Öğr. Üye Nesrin ÇALIŞKAN	
Üye	:	Dr. Öğr. Üye Erhan BOZKURT	
Üye	:	Dr. Öğr. Üye Gülhan AYAR	

Enstitü Müdürü

Mehmet KARAYAMAN

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının her aşamasında desteğini esirgemeyen ve tecrübelerinden yararlandığım tez danışmanım sayın hocam Dr. Öğr. Üye. Nesrin ÇALIŞKAN'a çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca emekleri geçen Uşak Üniversitesi Temel Eğitim Anabilim dalındaki tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Uşak ili Sivaslı ilçesi Ağaçbeyli köyünde ilköğretim matematik öğretmeni olarak görev yaptığım okulda desteklerini esirgemeyen okul müdürüme ve öğretmen arkadaşlarıma, Sivaslı Dursun Yalım Fen lisesi belletmen öğretmen arkadaşlarıma yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsünün tüm çalışanlarına katkıları için şükranlarımı sunarım.

Son olarak da tez sürecim boyunca sürekli yanımda olan ve beni canı gönülden destekleyen annem, babam ve kardeşime teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Mehmet DAYAN

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Mehmet DAYAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Uşak - 27.07.1990

Lisans Öğretimi : Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans Öğretimi : Uşak Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Temel Eğitim Anabilim Dalı Sınıf Eğitimi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce, Almanca.

Bilimsel Faaliyetleri :

Caliskan, N. ve Dayan, M. (2019). On flatness of Weyl projective and $\boldsymbol{\mathcal{M}}-$projective curvature tensors of Kenmotsu Finsler manifolds. Z. Akar ve T. Özbilen (Ed.), *MAS 5. Uluslar Arası Matematik- Mühendislik- Fen ve Sağlık Bilimleri Kongresi* (ss. 116-121). Erzurum: Iksad Publications.

Caliskan, N. ve Dayan, M. (2019). On some symmetry properties of $\boldsymbol{\mathcal{M}}-$projective curvature tensor of Kenmotsu Finsler manifolds. Z. Akar ve T. Özbilen (Ed.), *MAS 5. Uluslar Arası Matematik- Mühendislik- Fen ve Sağlık Bilimleri Kongresi* (ss. 122-130). Erzurum: Iksad Publications.

Caliskan, N. ve Dayan, M. (2019). Some curvature relations of Kenmotsu Finsler manifolds. *VII. International symposium on Academic Studies in Science, Enginering and Architecture Studies*. Ankara. (Süreçte)

Caliskan, N. ve Dayan, M. (2019). One some certain quasi-conformal and concircular curvature conditions of Kenmotsu Finsler structures. *VII. International symposium on Academic Studies in Science, Enginering and Architecture Studies*. Ankara. (Süreçte)

İş Deneyimi

Çalıştığı Kurumlar : Ağaçbeyli Ortaokulu

İletişim

E-posta Adresi : mehmt.dyn@gmail.com

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\boldsymbol{M}$	Manifold
$\boldsymbol{G}$	Metrik tensör
$[,]$	Lie parantez operatörü
$\boldsymbol{C}^{\infty}$	Diferensiyellenebilme
$\boldsymbol{T}_{(x,y)}(\boldsymbol{M}^{\boldsymbol{0}})^{\boldsymbol{h}}$	$(M^0)^h$ manifoldunun (x,y) noktasındaki tanjant uzayı
$\chi(\boldsymbol{M})$	Vektör alanları uzayı
$\boldsymbol{\pi}$	Projeksiyon dönüşümü
$\oplus$	Tensör Toplamı
$\otimes$	Tensör Çarpımı
$\boldsymbol{\Omega}$	İkinci temel form
$\boldsymbol{R}$	M’nin Riemann eğrilik tensörü
$\boldsymbol{S}$	Ricci eğrilik tensörü
$\boldsymbol{r}$	Skaler eğrilik
$\boldsymbol{Q}$	Ricci operatörü
$\boldsymbol{\eta}$	1-Form
$\boldsymbol{\varphi}$	$(1,1)$ −tipinde tensör alanı
$\boldsymbol{\xi}$	Killing vektör alanı

$\boldsymbol{\mathcal{M}}$	M −projektif eğrilik tensörü
$\boldsymbol{W}$	Weyl projektif eğrilik tensörü
$\boldsymbol{C}$	Concircular eğrilik tensörü
$\boldsymbol{K}$	Conformal eğrilik tensörü
$\widetilde{\boldsymbol{K}}$	Quasi-conformal eğrilik tensörü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

1.1. Problem durumu

1959 yılında Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yapmış olduğu çalışmada $U(n) \times 1$ yapısal grubunun indirgenmesiyle oluşan hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Dolayısıyla $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapı; $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ ve $\eta(\xi) = 1$ eşitliklerini sağlayan (1,1)-tipindeki tensör alanı φ, (1,0)-tipindeki vektör alanı ξ ve (0,1) -tipindeki 1 -form η ile oluşturulan (φ, ξ, η) üçlüsüyle gösterilir (Gray, 1959).

1960 senesinde (φ, ξ, η) üçlüsüyle oluşturulan hemen hemen değme yapısı üzerinde $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ ve $\eta(X) = g(X, \xi)$ eşitlikleriyle gösterilen bir g metriği tanımlanmıştır (Sasaki, 1960). Ayrıca M, değme metrik yapısı $(\varphi, \xi, \eta\ , g)$ olan ve $(2n + l)$-boyutlu bir değme metrik manifoldu olmak üzere M 'nin değme metrik yapısı normal ise, yani $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi = 0$ koşulu sağlanıyor ise M, Sasakian yapıya sahiptir denir (Jun, Kim ve Kim, 1994).

M^{2n+1}, (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına sahip olan bir hemen hemen değme manifold ise $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde (φ, ξ, η) yapısı yardımıyla bir J hemen hemen kompleks yapısını tanımlamıştır. Bu durumda J ile birlikte $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ bir hemen hemen kompleks manifold olur. Eğer J integrallenebilir ise (φ, ξ, η) yapısına normaldir denir (Blair, 2010).

1969 yılında Tanno hemen hemen değme metrik manifoldları c sabit ve φ-kesitsel eğriliği olmak üzere otomorfizm grupları maksimum boyuta sahip olan, bağlantılı, üç sınıfa ayırmıştır. Bu sınıflar;

1) $c > 0$ iken Riemann manifoldunun sabit φ-kesitsel eğriliğine sahip bir homojen Sasakian manifoldudur.

2) $c = 0$ iken Riemann manifoldunun sabit φ -kesitsel eğriligine sahip Kaehler manifoldu ile bir çemberin ya da bir doğrunun çarpım manifoldudur.

3) Son olarak da $c\ <\ 0$ iken Riemann manifoldunun reel eksen ile kompleks düzlemin warped çarpımından oluştuğunu ifade etmiştir (Tanno, 1969).

1972 yılında Kenmotsu, Tanno'nun bu sınıflandırmasında yer alan üçüncü durumu tüm geometrik özellikleriyle inceleyerek hemen hemen değme metrik manifoldun yeni bir sınıfını tanımladığı görülmüştür (Kenmotsu,1972). Sonrasında Kenmotsu manifoldları olarak adlandırılan bu Riemannian yapıların eğrilik özellikleri ile ilgili birçok çalışma da yapılmıştır. Bunlardan bazıları (De, U. C. ve De, K., 2012; Hui, 2013; Shukla, S. S. ve Shukla, M. K., 2009; Sinha ve Srivastava, 1991; Wang ve Liu, 2015) olarak verilebilir.

Ayrıca 1953 yılında Yano ve Bochner tarafından Weyl Projektif eğrilik tensörünü, projektif olarak düzlük derecesini ölçmek amacıyla Riemann manifoldu için tanımlanmıştır (Yano ve Bochner, 1953). Ardından 1970 yılında Pokhariyal ve Mishra, temel fiziksel ve geometrik özellikleri ile $\mathcal{M}$-Projektif eğrilik tensörünü tanımlamışlardır (Pokhariyal ve Mishra, 1970). Daha sonra Kenmotsu manifoldlarının Weyl projektif ve $\mathcal{M}$-projektif eğrilik özellikleri detaylı olarak tartışılmıştır. (Chaubey, Prakash ve Nivas, 2012; Saroja Devi ve Singh, 2015) bu çalışmalara örnek olarak gösterilebilir. Ek olarak, Weyl projektif ve $\mathcal{M}$-projektif eğrilik tensörlerinin çeşitli özellikleri Kenmotsu'dan farklı yapılar için de incelenmiştir (Singh ve Pandey, 2013; Prakasha ve Mirji, 2017).

Yano ve Sawaki 1968 yılında quasi-conformal eğrilik tensörü kavramını tanımlamıştır (Yano ve Sawaki, 1968). Sonra genelleştirilmiş quasi-conformal eğrilik tensörü araştırılmıştır (Baishya ve Chowdhury, 2016). Kenmotsu manifoldlarında quasi-conformal eğrilik tensörünün farklı koşullardaki özelliklerini inceleyen çalışmalara sıklıkla rastlanmıştır (Dey ve Majhi, 2018; Haseeb, Siddiqi ve Shahid, 2017; Özgür ve De, 2006). İlaveten, Sasakian, trans-Sasakian yapılarının quasi-conformal eğrilik özelliklerinin incelendiği çalışmalar da mevcuttur (Prasad, 2010; Shah ve Shukla, 2017). Conformal eğrilik tensörü, quasi-conformal eğrilik tensörünün sabitler için özel hali olarak ele alınabileceğinden, ziyadesiyle, daha genel ifadesi olan quasi-conformal eğrilik tensörü konusu üzerinde çalışılmasına rağmen, conformal eğrilik tensörü ile ilgili yapılan çalışmalar da bulunmaktadır (Jeong, Lee, Oh ve Park, 1990).

Yano, 1940 yılında concircular eğrilik tensörü kavramını tanımlamıştır (Yano, 1940). Kenmotsu manifoldlarında, concircular eğrilik tensörünün farklı yapısal özelliklerinin çalışıldığı görüşülmüştür (Barman, 2015; Hong, Özgür ve

Tripathi, 2006). Bunun yanı sıra P-Sasakian, LP-Sasakian manifoldları gibi yapılarda da concircular eğrilik özelliklerinin ele alındığı çalışmalarla karşılaşılmıştır (Özgür ve Tripathi, 2007; Taleshian, Asghari ve On, 2010; Tripathi ve Kim, 2004).

Diğer yandan Finsler uzay ve Finsler manifold kavramları, Finsler'in 1918'deki doktora tezi sonrası ortaya çıkmıştır (Finsler, 1918). Bir Finsler uzay uzunluk fonksiyonu farklı tanımlandığında Riemannian uzayın genelleştirmesidir ve Minkowski geometrisinin lokal olarak ele elınmasıdır. Miron (1982), vektör demetlerinin Finsler geometrisini çalışırken sofistike bir yöntem olarak vektör demetinin toplam uzayı üzerinde Finsler geometrik nesneler teorisi oluşturmuştur. Ayrıca Klepp, Miron'un teorisindeki bu kavramları kullanarak vektör demeti üzerinde hemen hemen çarpımFinsler yapıları ve konneksiyonları çalışmıştır (Klepp, 1984). Buna benzer şekilde Sinha ve Yadav vektör demetleri üzerinde hemen hemen değme Finsler yapıları ve hemen hemen değme Finsler konneksiyonu tanımlamışlardır (Sinha ve Yadav, 1988, 1989, 1991). Daha sonra Yaliniz ve Çalışkan, Finsler vektör demetleri üzerinde hemen hemen değme ve Sasakian yapılarını ayrıntılı olarak ele almışlardır (Yaliniz ve Caliskan, 2013).

Kenmotsu Finsler manifoldlarının eğriliklerine dair bir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Söz konusu eksikliğin, belli bir kısmının bu çalışmada tamamlanması hedeflenmiştir. Bu bağlamda, Kenmotsu Finsler manifoldlarının Weyl Projektif, $\mathcal{M}$-projektif, concircular ve quasi-conformal eğrilikleri tanımlanmış ve başlıca eğrilik özellikleri tarafımızdan çalışılmıştır.

1.2 Araştırmanın amacı

Bu çalışmanın amacı, Kenmotsu Finsler manifoldlarında eğrilikleri detaylı bir biçimde ele almaktır.

1.3 Alt problemler

Riemann eğrilik tensörü yardımıyla tanımlanan başlıca eğrilik tensörleri Kenmotsu Finsler manifoldları için nasıl tanımlanır?

Bu eğrilik tensörlerinin sahip olduğu özellikler, koşullara bağlı olarak nasıl ifade edilebilir?

i) Kenmotsu Finsler manifoldlarında Weyl Projektif eğrilik tensörünün başlıca özellikleri nelerdir?

ii) Kenmotsu Finsler manifoldlarında $\mathcal{M}$-Projektif eğrilik tensörünün başlıca özellikleri nelerdir?

iii) Kenmotsu Finsler manifoldlarında concircular eğrilik tensörünün başlıca özellikleri nelerdir?

iv) Kenmotsu Finsler manifoldlarında quasi-conformal ve conformal eğrilik tensörlerinin başlıca özellikleri nelerdir?

1.4 Araştırmanın önemi

Araştırmada Kenmotsu Finsler manifoldlarında eğrilikler ele alınmaktadır. İncelenen literatür dahilinde, Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan Kenmotsu yapıların daha genel bir manifold yapısı olan Finsler uzayında temel yapısal özelliklerinin çalışıldığı fakat eğrilikleri ile ilgili detaylı bir çalışmayla karşılaşılmamıştır. Dolayısıyla Kenmotsu Finsler manifoldlarının bazı eğrilikleri hakkında çalışma yapılmasının alana katkı sağlayacağı aşikârdır.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1 Temel Kavramlar/ Tanımlar

Bu bölümde bir sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar tanıtılmıştır.

Tanım 2.1.1 (Homomorfizm): P ile H iki vektör uzayı olsun.

$$Hom(P,H) = \{L: P \to H, Llineer\}$$

şeklinde tanımlanmış olan P'den H'ye tüm lineer dönüşümlerinin cümlesine P'den H'ye bir *homomorfizm* denir (Avodey, 2006).

Tanım 2.1.2 (İzomorfizm): P ile H iki vektör uzayı olsun. P'den H'ye tüm bijektif homomorfizmlerin cümlesine P'den H'ye bir *izomorfizm* denir (Avodey, 2006).

Tanım 2.1.3 (Ortonormal Baz): P, n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. (P,g) iç çarpım uzayının birbirine dik birim vektörlerinin oluşturduğu $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ kümesine P'nin *ortonormal bazı* denir (Duggal, Krishan ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.4 (Tanjant demeti): C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir bir M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. M'nin tüm p noktalarındaki T_pM tanjant uzaylarının ayrık bileşimi

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

olan TM'ye M'nin *tanjant demeti* denir (Yano ve Ishihara, 1973).

Tanım 2.1.5 (Alt demet): X topolojik uzayı üzerindeki V vektör demetinin U alt demeti, V'nin $x \in X$ noktasındaki V_x fibrelerinin V_x lineer alt uzaylarının bir koleksiyonudur ve bir vektör uzayı yapısı oluşturur. Dolayısıyla bu durum tek başına vektör demetidir (Lang, 1972).

Tanım 2.1.6 (Distribüsyon): M, m-boyutlu bir manifoldolmak üzere M üzerinde

$$D: M \rightarrow \bigcup T_p M$$

$$p \rightarrow D_p \subset T_p M,\ boy(D_p) = r$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne r-boyutlu *distribüsyon* denir. Ayrıca $X \in \chi(M)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Dolayısıyla her p noktası için D_p alt uzayına ait diferansiyellenebilir lineer bağımsız vektör sayısı r ise D distribüsyonunun diferansiyellenebilir olduğu söylenir (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.7 (Riemann Konneksiyonu): (M, g) , C^∞ -sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold ve V, M üzerinde tüm düzgün vektör alanlarının kümesi olsun. Bu durumda M üzerindeki bir konneksiyon veya bir kovaryant türev, ∇ operatörü yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\nabla: V \times V \rightarrow V$ için $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ olmak üzere;

i) $\nabla_{X_1 + X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$

ii) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

iii) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı herhangi bir düzgün fonksiyon olmak üzere $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ ‘dir.

iv) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı herhangi bir düzgün fonksiyon olmak üzere $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$ ‘dir.

Yukarıdaki şekilde M üzerinde tanımlanan ∇ konneksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa g metriğine göre *Riemann konneksiyonu* adını alır.

i) $\forall X, Y, Z \in V$ için $X\big(g(Y, Z)\big) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

ii) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Boothby, 1986).

Tanım 2.1.8 (Finsler Konneksiyonu): N , M üzerinde lineer olmayan bir konneksiyon olmak üzere, bir Finsler konneksiyonu (N, F, C) üçlüsü ile belirlenir. Burada, $F = (F^i_{jk})$, $C = (C^i_{jk})$ ‘ler lokal olarak tanımlanmış 0-homojen

F_{jk}^i, C_{jk}^i fonksiyonlarının koleksiyonlarıdır. Bu durumda, $F_{jk}^i, C_{jk}^i: TM \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $$\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i} F_{jk}^i = \frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^s}{\partial x^k} \tilde{F}_{rs}^l$$

ii) $$C_{jk}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial \tilde{x}^q}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^k} \tilde{C}_{qr}^p.$$

Kabul edelim ki $\pi: TM \to M$ bir kanonik projeksiyon olsun. Finsler konneksiyonu (indirgenmiş (N, F, C) konneksiyonu)

$\nabla: T_y(TM \setminus \{0\} \times \chi(M) \to T_{\pi(y)}(M),\ (Y, X) \mapsto \nabla_Y(X)$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan bir dönüşümdür:

1) ∇ konneksiyonu, X, Y $\in \mathbb{R}$ için lineerdir.

2) Eğer $f \in C^\infty(M)$ ise $y \in T_x M \setminus \{0\}$ için lokal koordinatları

$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}\big|_y} \left(f \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x \right) = df \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \right) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x + f F_{ij}^m(y) \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_x, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_y} \left(f \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_x \right) =$
$f C_{ij}^m(y) \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_x$ şeklindedir.

Yukarıdaki eşitliklerle belirlenen F_{jk}^ive C_{jk}^i ‘lar için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$X \in \chi(M)$ için;

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}}(X) = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^r}}(X),$$

$\frac{\partial}{\partial y^i}(X) = \frac{\partial \tilde{x}^r}{\partial x^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^r}}(X)$ ‘dir.

Yani ∇ , lokal koordinatlara bağlı değildir (Dahl, 2006).

Tanım 2.1.9 (Manifold): M bir Hausdorff uzay olmak üzere her $p \in M$ için $\mathbb{R}^m$deki herhangi bir açık kümeye, homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu olan U varsa M Hausdorff uzayına *topolojik manifold* ya da kısaca *manifold* adı verilir. Bu durumda $boy(\mathbb{R}^m) = m$ olduğundan manifold m-boyutludur (Şahin, 2012).

Tanım 2.1.10 (Einstein Manifold): $(M, g), n \geq 2$olmak üzere $n -$boyutlu bir Riemann manifoldu ve S, M'nin Ricci tensörü olmak üzere M üzerinde tanımlanan bir $\lambda: M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için;

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için $S(X, Y) = \lambda g(X, Y)$eşitliği sağlanıyor ise$M$ ye *Einstein manifoldu* denir (Chen, 1973).

Tanım 2.1.11 ($\boldsymbol{\eta -}$Einstein Manifold): M, $(2n + 1)$-boyutlu bir düzgün manifold ve S, M'nin Ricci tensörü olmak üzere

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y)$$

eşitliği $a, b \in \mathbb{R}$ve $\forall\, X, Y \in \chi(M)$için sağlanıyor ise *M'*ye bir $\eta -$*Einstein manifoldu*denir (Blair,1976).

Tanım 2.1.12 (Kenmotsu Manifold): $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için;

$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi(X)$ eşitliği sağlanıyor ise M'ye *Kenmotsu Manifold* denir (Kenmotsu, 1972).

Tanım 2.1.13 (Finsler Manifold): M, C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir manifold olmak üzere TM tanjant demeti üzerindeki v tanjant vektörleri için tanımlanan $F: TM\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ ifadesi bir Finsler fonksiyonu olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa

1) F fonksiyonu TM'nin sıfır kesitinin tümleyeni üzerinde C^∞-sınıfından diferensiyellenebilirdir.

2) $\forall v \in TM$ için $F(v) \geq 0, F(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$'dır (Pozitif tanımlılık).

3) $\forall v \in TM\backslash\{0\}$ için $\lambda \geq 0$ olmak üzere $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ 'dir (1. Dereceden pozitif homojen)

4) $\forall v, w \in TM \setminus \{0\}$ için $F(v+w) \leq F(v) + F(w)$ 'dir (Alt toplamsallık).

(M, F)'ye bir *Finsler manifoldudur* denir (Antonelli, 2003 ve Cobzaş, 2006).

Tanım 2.1.14 (Skaler eğrilik): (M, g) bir Riemann manifoldu ve $x \in M$ olmak üzere bu noktadaki tanjant uzay T_xM olsun. Dolayısıyla T_xM uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre olan kesit eğriliklerinin toplamına Mmanifoldunun *skaler eğriliği* denir. r ile gösterilir ve T_xM uzayının ortonormal bazı $\{E_i, \dots, E_n\}$ olup

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(E_{i,}E_i)$$

şeklinde ifade edilir (Weinberg, 1972).

Tanım 2.1.15 (Ricci Eğrilik Tensörü): (M, g) n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $\chi(M)$ 'nin bir bazı olan $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları için tanımlanan (0,2) tipindeki S tensör alanı, aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{R}$$

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X)E_i, Y)$$

Yukarıdaki eşitlikle belirtilen tensör alanına M'nin *Ricci eğrilik tensörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.16 (Ricci Operatörü) (M, g), m- boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere $\{ e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\chi(M)$'in bir bazı olsun.

$$Q: \chi(M) \times \chi(M)$$

$$T \to Q(T) = -\sum_{i=0}^{n} = R(T_i, T)T_i$$

şeklinde tanımlanan Q operatörüne M' nin *Ricci operatörü* denir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 2.1.17 (Riemann-Christoffel Eğrilik Tensörü): (M, g) bir Riemann manifoldu ve R, M üzerinde tanımlı eğrilik tensör alanı olsun.

Bu duruma bağlı olan $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$ ile tanımlı tensör alanına *Riemann-Christoffel eğrilik tensör alanı* denir (Şahin, 2012).

Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar:

$X, Y, Z, V, W \in \chi(M)$ için;

i) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$

ii) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$

iii) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z + R(Z, X)Y = 0$

iv) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$ şeklindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.18 (Weyl Projektif Eğrilik Tensörü): M, $(2n + 1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için *Weyl projektif eğrilik tensör* alanı

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{2n}[S(Y, Z)X - S(X, Y)Z]$$

bağıntısı ile tanımlanır (Yano ve Bochner, 1953).

Tanım 2.1.19 ($\mathcal{M}$-Projektif Eğrilik Tensörü): M, $(2n + 1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için $\mathcal{M}$ tensör alanı;

$\mathcal{M}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{4n}[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY]$ve

$$\mathcal{M}(X, Y, Z, U) = g(\mathcal{M}(X, Y)Z, U) = \mathcal{M}(Z, U, X, Y)$$

eşitlikleri ile tanımlandığında, $\mathcal{M}$ tensör alanına *$\mathcal{M}$-projektif eğrilik tensörü* denir (Chaubey ve Ojha, 2010).

Tanım 2.1.20 (Concircular Eğrilik Tensörü): M, $(2n + 1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için *concircular eğrilik tensör* alanı;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{r}{(2n + 1)2n}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bu bağıntıda yer alan Q, birRicci operatörüdür (Yano, 1940).

Tanım 2.1.21 (Conformal Eğrilik Tensörü): M, $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$için *conformal eğrilik tensör* alanı;

$$K(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{2n-1}[S(X,Y)Z - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX] - \frac{r}{2n(2n-1)}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]$$

bağıntısı ile tanımlanır. Bu bağıntıda yer alan Q, bir Ricci operatörüdür (Yano ve Sawaki, 1968). Eğer M manifoldunun conformal eğrilik tensörü $K=0$ ise manifold, *conformal olarak flat*tir denir.

Tanım 2.1.22 (Quasi-Conformal Eğrilik Tensörü): M, $(2n+1)$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\widetilde{K}(X,Y)Z = aR(X,Y)Z + b[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - G(X,Z)QY] - \frac{r}{(2n+1)}\left(\frac{a}{2n} + 2b\right)(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

eşitliği ile tanımlı olan (1,3) tipindeki $\tilde{Q}$ eğrilik tensörüne, *quasi-conformal eğrilik tensör* alanı denir. Bu eşitlikte yer alan a ile b sabitler, r ise skaler eğriliktir. Eğer $a = 1$ ve $b = -\frac{1}{n-2}$ olarak alırsak aşağıdaki hali alır:

$$\widetilde{K}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - G(X,Z)QY] + \frac{r}{(n-1)(n-2)}(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

$= K(X,Y)Z$ (Yano ve Sawaki, 1968).

Burada açıkça görüldüğü gibi conformal eğrilik tensörü K, quasi-conformal eğrilik tensörü $\widetilde{K}$ 'nin özel halidir.

2.2 Vektör Demetleri Üzerinde Hemen Hemen Kenmotsu Finsler Yapıları

$M, (2n+1)$ -boyutlu C^∞ -sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold ve TM de M 'nin tanjant demeti olsun. $\pi : TM \to M$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere TM'nin(x, y) noktasındaki tanjant uzayı $T_{(x,y)}TM$ ile gösterilsin. $X \in T_{(x,y)}TM$ tanjant vektörü için $\pi_*(X) = 0$ koşulu sağlanırsa dikey X vektörüne, dikey vektördür denir ve bu özellikteki dikey vektörler $T^V_{(x,y)}TM$ ile belirtilen dikey alt uzayın elemanıdır. Ayrıca $x \in M$ üzerindeki $\pi^{-1}(x)$ fibresi ile de örtüşür. M üzerinde tanımlanan lineer olmayan bir N konneksiyonu $(x, y) \in TM$ 'yi $N_{(x,y)} \subset T_{(x,y)}TM$ 'ye dağıtan bir yatay distribüsyondur ve böylelikle $T_{(x,y)}TM = N_{(x,y)} \oplus T^V{}_{(x,y)}(TM)$ bağıntısı sağlanır. $(x, y) \in TM$ 'deki N lineer olmayan konnensiyonu için $d\pi : N_{(x,y)} \to T_x M$ bağıntısı bir lineer izomorfizmdir ve ters dönüşümü olan $I_{h^V} : T_X(M) \to N_{(x,y)}$ bir yatay lift olarak adlandırılır. Bu nedenle $I_y : N_{(x,y)} \to T^V_{(x;y)}(TM)$ lineer izomorfizmi $I_y = I_{v^V}\, d\pi$ yardımıyla tanımlanır. Buradaki $I_{v^V} : T_X(M) \to T^V_{(x,y)}(TM)$ şeklinde bir dönüşümdür ve böylelikle $\pi(x, y)$ dikey lifti oluşturur (Sinha ve Yadav, 1991).

$M^0 \neq \emptyset, TM$'nin bir açık alt manifoldu olsun, projeksiyon dönüşümü $\pi(M^0) = M$ özelliğini sağlasın ve $\theta(M) \cap M^0 = \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki $M^0_x = T_X(M) \cap M^0$'nın bir pozitif konik kümesi olsun. Bu durumda $k > 0$ için $y \in M^0_x$ ve $k_y \in M^0_x$ elde edilir. Bir diğer ifade ile $M^0 = TM \setminus \theta(M)$ bir Finsler manifoldudur ve burada θ, TM'nin bir sıfır kesitidir (Bejancu ve Farran, 2013).

$F: M^0 \to (0, \infty)$ düzgün fonksiyonu için $\{(U, \Phi): x^i, y^i\}$ sistemi, M 'de bir koordinat sistemi olmak üzere, F birinci dereceden pozitif homojen ise F^2 'nin Hessian matrisinin $(x, y) \in \Phi(U)$ noktasındaki değeri;

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}, i, j \in \{1,2, \dots, 2n+1\} \qquad (2.2.1)$$

$\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerindeki pozitif tanımlı quadratik formun bileşenleridir.

Böylelikle $F^{2n+1} = (M, M^0, F)$ yapısı Finsler manifoldudur ve burada F , F^{2n+1} 'in temel fonksiyonu olarak adlandırılır. $\pi : M^0 \to M$ submersionunun $\pi_* : TM^0 \to TM$ diferansiyel dönüşümü $(TM^0)^V = ker\pi_*$ dikey vektör demetini tanımlar. Lokal olarak $U \subset M^0$koordinat komşuluğunda $\pi^{\dot{\mathrm{I}}}(x,y) = x^i$ olduğunda $\pi_*^i\,(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \delta_j^i$ ve $\pi_*^i\left(\frac{\partial}{\partial n+y^j}\right) = 0$ elde edilir. Böylelikle $\left\{\frac{\partial}{\partial y^i}\right\}$, $\Gamma(TM^0|u)^V$'nin bir bazını oluşturur. $(TM^0)^V$, M^0 üzerinde rankı $(2n+1)$ olan integrallenebilir bir distribüsyondur. Bu durumda $(TM^0)^V$'ye F^{2n+1}'in dikey vektör demeti denir. Bu dikey vektör demetinin tamamlayıcı distribüsyonu $(TM^0)^H$ lineer olmayan bir konneksiyondur. Bir diğer ifadeyle $TM^0 = (TM^0)^H \oplus (TM^0)^V$ olarak ayrıştırılabilir. Bu durumda, $\pi_*(TM^0)^H = (M^0)^h, \pi_*(TM^0)^V = (M^0)^v$ şeklinde ifade edilir. Bu nedenle $\Gamma(TM^0|u)^H$'ın $\left\{\frac{\delta}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x^{2n+1}}\right\}$ baz vektörleri, $\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ bağıntısı ile elde edilir. Söz konusu baz vektörlerinin, dual baz vektörleri ise $(dx^i, \delta y^j)$ şeklindedir ve bu vektörler $\delta y^j = dy^j + N_i^j(x,y)dx^i$ bağıntısını sağlarlar. Buna bağlı olarak tam vektör alanı $X \in TM^0$ için $X = X^i(x,y)\,\frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{X}^i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y^j}$ ifadesi ile belirtilir. $\tilde{X}^i(x,y) = 0$ için, $(M^0)^h \subset M^0$'nin alt demeti; $X^i(x,y) = 0$ için, $(M^0)^v \subset M^0$ alt demeti elde edilir. Başka bir deyişle: $X^H = X^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i}$, $X^V = X^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ ve $\tilde{X}^i = X^i + N_j^i X^j$ şeklindedir. Benzer şekilde $\eta = \tilde{\eta}_i(x,y)dx^i + \eta_i(x,y)\,\delta y^i$ ifadesinden $\eta^H = \tilde{\eta}_i dx^i$, $\eta^V = \eta_i \delta y^i$, $\tilde{\eta}_i = \eta_i - N_j^i \eta_j$ eşitlikleri ile tanımlanan 1-form için $\eta^H(X^H) = 0$, $\eta^V(X^H) = 0$ sağlanır.

M^0'ın üzerinde tanımlanan φ tensör alanı, η 1-form, ξ vektör alanı olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\varphi = \varphi^H + \varphi^V = \varphi_j^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^j + \tilde{\varphi}_j^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^j$$

$$\eta = \eta^H + \eta^V = \eta_i(x,y)dx^i + \tilde{\eta}_i(x,y)\delta y^i \qquad (2.2.2)$$

$$\xi = \xi^H + \xi^V = \xi^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{\xi}^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}. \qquad (2.2.3)$$

Tanım 2.2.1: M^0'ın üzerinde tanımlanan φ, η ve ξ için (2.2.2) ve (2.2.3) eşitliklerine ilaveten

$$(\varphi^H)^2 = -I^H + \eta^H \otimes \xi^H,\ (\varphi^V)^2 = -I^V + \eta^V \otimes \xi^V \qquad (2.2.4)$$

$$\eta^H(\xi^H) = \eta^V(\xi^V) = 1 \qquad (2.2.5)$$

sağlansın. Bu durumda, $(\varphi^H, \eta^H, \xi^H)$ ve $(\varphi^V, \eta^V, \xi^V)$, $(M^0)^h$ ve $(M^0)^v$ üzerinde tanımlanan yapılar, hemen hemen değme Finsler yapılardır. Burada $M^0 = (M^0)^h \oplus (M^0)^v$ sırasıyla bir yatay ve dikey Finsler vektör demetleridir (Kim ve Pak, 2005; Sinha ve Yadav, 1988).

Teorem 2.2.2: $(M^0)^h$ *ve* $(M^0)^v$ *yatay ve dikey demetler olmak üzere hemen hemen değme Finsler yapılar olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$\varphi^H(\xi^H) = \varphi^V(\xi^V) = 0,\ \eta^H \circ \varphi^H = \eta^V \circ \varphi^V = 0 \qquad (2.2.6)$$

Açıklama 2.2.3:

$(\varphi^H, \xi^H, \eta^H)$ ve $(\varphi^V, \xi^V, \eta^V)$ yapıların, $(M^0)^h$ ve $(M^0)^v$'nin alt demetlerinde hemen hemen değme yapılar olduğunu kabul edelim. Sırasıyla burada $(M^0)^h$ ve $(M^0)^v(2n+1)$-boyutludur. Dolayısıyla $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H)$ ve $((M^0)^v, \varphi^V, \xi^V, \eta^V)$ hemen hemen değme Finsler manifoldlarıdır.

$F^{2n+1} = (M, M^0, F)$ şeklinde bir Finsler manifold olsun. $g^F: \Gamma(TM^0)^V \times (TM^0)^V \rightarrow \Im(M^0)$ bağıntısı tanımlanmak üzere;

$$g^F(X^V, Y^V)(x,y) = g^F_{ij}(x,y)X^V_i(x,y)Y^V_j(x,y) \qquad (2.2.7)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlikteki X^V_i ve Y^V_j lokal bileşenleri ile herhangi X^V ve Y^V Finsler vektör alanları, sırasıyla g^F_{ij} (2.2.1) tarafından elde edilen fonksiyonlardır. (2.2.7)'den türetilerek

$$g^F_{(ij)}(x,y) = g^F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)(x,y) \qquad (2.2.8)$$

eşitliği elde edilir. Açıkça g^F simetrik Finsler tensör alanıdır. Finsler vektör demeti $(TM^0)^V$ üzerinde g^F 'in bir Riemann metriği olarak değerlendirilebilir. Benzer şekilde

$g^F: \Gamma(TM^0)^H \times \Gamma(TM^0)^H \rightarrow \Im(M^0)$ tanımlarsak;

$$g^F(X^H, Y^H)(x,y) = g^F_{ij}(x,y)X^H_i(x,y)Y^H_j(x,y), 1 \le i,j \le 2n+1 \qquad (2.2.9)$$

$$g^F_{(ij)}(x,y) = g^F\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right)(x,y) \qquad (2.2.10)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada g_{ij}^F , (2.1.1) tarafından elde edilen fonksiyonlardır ve F^{2n+1} için Finsler metriktir. Bu nedenle g^F, Finsler vektör demeti olan $(TM^0)^H$ üzerinde pseudo-Riemann metriği olarak düşünülebilir (Bejancu ve Farran, 2013).

$G: \Gamma(TM^0) \times \Gamma(TM^0) \to \Im(M^0)$ şeklinde tanımlarsak $X, Y \in \Gamma(TM^0)$ için

$$G(X,Y) = G^H(X,Y) + G^V(X,Y) \tag{2.2.11}$$

eşitliği elde edilir. Açıkçası G, $(M^0)^h$ üzerinde (0,2) tipinde bir simetrik tensör alanıdır ve $(M^0)^h$ üzerinde bir Sasaki metriktir. O zaman

$$G = g_{(ij)}^F dx^i \otimes dx^j + g_{(ij)}^F \delta y^i \otimes \delta y^j = G^H + G^V \tag{2.2.12}$$

eşitliği sonucuna varabiliriz.

Tanım 2.2.4: Farz edelim ki $(\varphi^H, \xi^H, \eta^H)$ ve $(\varphi^V, \xi^V, \eta^V)$, sırasıyla yatay ve dikey Finsler vektör demetleri, $(M^0)^h$ ve $(M^0)^v$ üzerindeki hemen hemen değme yapılar olsun. Kim ve Pak (2005)'e göre;

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ ve $X^V, Y^V, Z^V \in T_{(x,y)}(M^0)^v$ için

$$G(\varphi X, \varphi Y) = G^H(\varphi X^H, \varphi Y^H) + G^V(\varphi X^V, \varphi Y^V),$$

$$G^H(\varphi X^H, \varphi Y^H) = G^H(X^H, Y^H) - \eta^H(X^H)\eta^H(Y^H),$$

$$G^V(\varphi X^V, \varphi Y^V) = G^V(X^V, Y^V) - \eta^V(X^V)\eta^V(Y^V) \tag{2.2.13}$$

eşitlikleri G^H ve G^V metrik yapıları için sağlanır.

Yukarıdaki ifadelere eşdeğer olan,

$$G^H(X^H, \xi^H) = \eta^H(X^H), G^V(X^V, \xi^V) = \eta^V(X^V),$$

$$G^H(\varphi X^H, \varphi Y^H) = -G^H(\varphi^2 X^H, Y^H), G^V(\varphi X^V, \varphi Y^V) = -G^V(\varphi^2 X^V, Y^V) \tag{2.2.14}$$

koşulları sağlandığında $(\varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ ve $(\varphi^V, \xi^V, \eta^V, G^V)$, sırasıyla $(M^0)^h$ ve $(M^0)^v$ üzerinde hemen hemen değme metrik Finsler yapılar olarak adlandırılır. Tüm bu verilerden yola çıkılarak

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$\Omega(X, Y) = G(X, \varphi Y)$$

$$\Omega(X^H, Y^H) = G(X^H, \varphi Y^H)$$

$$\Omega(X^V, Y^V) = G(X^V, \varphi Y^V) \tag{2.2.15}$$

eşitlikleri tanımlanır ve Ω, temel 2-form olarak adlandırılır (Kim ve Pak, 2005).

Tanım 2.2.5: $(M^0)^h$ ve $(M^0)^v$'nin alt demetlerinde Kenmotsu Finsler yapılar olsun. Buna göre sırasıyla $((M^0)^h, \phi^H, \xi^H, \eta^H)$ ve $((M^0)^v, \phi^V, \xi^V, \eta^V)$ ‘nin $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu Finsler manifold olduğu aşağıdaki eşitlikler sağlanırsa söylenebilir:

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$\varphi^2 = -I + \eta^H \otimes \xi^H + \eta^V \otimes \xi^V \tag{2.2.16}$$

$$\eta^H(\xi^H) = 1 = \eta^V(\xi^V), \varphi^H(\xi^H) = 0 = \varphi^V(\xi^V) \tag{2.2.17}$$

$$\eta^H \circ \varphi^H = 0 = \eta^V \circ \varphi^V, G(X^H, \xi^H) = \eta^H(X^H),\ G(X^V, \xi^V) = \eta^V(X^V) \tag{2.2.18}$$

$$G(X^H, Y^H) = G(\varphi^H X^H, \varphi^H Y^H) + \eta^H(X^H)\eta^H(Y^H)$$

$$G(X^V, Y^V) = G(\varphi^V X^V, \varphi^V Y^V) + \eta^V(X^V)\eta^V(Y^V) \tag{2.2.19}$$

$$R(X^H, Y^H)Z^H = \frac{1}{4}[G(X^H, Z^H)Y^H - G(Y^H, Z^H)X^H] \tag{2.2.20}$$

$$R(X^H, Y^H)\xi^H = \frac{1}{4}[\eta^H(X^H)Y^H - \eta^H(Y^H)X^H]$$

$$R(X^V, Y^V)\xi^V = \frac{1}{4}[\eta^V(X^V)Y^V - \eta^V(Y^V)X^V] \tag{2.2.21}$$

$$R(\xi^H, Y^H)Z^H = \frac{1}{4}[\eta^H(Z^H)Y^H - G(Y^H, Z^H)\xi^H]$$

$$R(\xi^V, Y^V)Z^V = \frac{1}{4}[\eta^V(Z^V)Y^V - G(Y^V, Z^V)\xi^V] \tag{2.2.22}$$

$$R(X^H, \xi^H)\xi^H = \frac{1}{4}(\eta^H(X^H)\xi^H - X^H),\ R(X^V, \xi^V)\xi^V = \frac{1}{4}(\eta^V(X^V)\xi^V - X^V) \tag{2.2.23}$$

$$S(X^H, \xi^H) = -\frac{n}{2}\eta^H(X^H),\ S(X^V, \xi^V) = -\frac{n}{2}\eta^V(X^V) \tag{2.2.24}$$

$$S(\xi^H, \xi^H) = -\frac{n}{2},\ S(\xi^V, \xi^V) = -\frac{n}{2} \tag{2.2.25}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} G(R(\varphi E_i^H, \varphi Y^H)\varphi Z^H, \varphi E_i^H) = S(\varphi Y^H, \varphi Z^H) + \frac{1}{4}G(\varphi Y^H, \varphi Z^H) \tag{2.2.26}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} S(\varphi E_i^H, \varphi E_i^H) = r + \frac{n}{2} \tag{2.2.27}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} G(\varphi E_i^H, \varphi E_i^H) = 2n \tag{2.2.28}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} G(\varphi E_i^H, \varphi Z^H)G(\varphi Y^H, \varphi E_i^H) = G(\varphi Y^H, \varphi Z^H) \tag{2.2.29}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} G(\varphi E_i^H, \varphi Z^H)S(\varphi Y^H, \varphi E_i^H) = S(\varphi Y^H, \varphi Z^H) \tag{2.2.30}$$

‘dir. Burada $\{{E_1}^H, \dots, {E_{2n}}^H, \xi^H\}$ ve $\{\varphi {E_1}^H, \dots, \varphi {E_{2n}}^H, \xi^H\}$, $T_u^h M^0$ için lokal ortonormal çatıdır. Ayrıca $(M^0)^h$’da φ bir tensör alanı, η bir 1-form, ξ bir vektör alanı, G simetrik bir tensör alanı, ∇ bir Finsler konneksiyon olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\varphi = \varphi^H + \varphi^V = \varphi_j^i(x, y)\frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^j + \tilde{\varphi}_j^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^j} \otimes \delta y^j,$$

$$\eta = \eta^H + \eta^V = \eta_i(x, y)dx^i + \tilde{\eta}_i(x, y)\delta y^i,$$

$$\xi = \xi^H + \xi^V = \xi^i(x, y)\frac{\delta}{\delta x^i} + \tilde{\xi}^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

$$G = G^H + G^V = g_{(ij)}^F\, dx^i \otimes dx^j + g_{(ij)}^F \delta y^i \otimes \delta y^j,$$

$$\nabla_X Y = \left(\nabla_{X^H}^H Y\right) + \left(\nabla_{X^V}^V Y\right), \forall X \in T_{(x,y)}M^0,$$

$$\nabla_X \eta = \left(\nabla_{X^H}^H \eta^H\right) + \left(\nabla_{X^V}^V \eta^V\right), \forall \eta \in {T^*}_{(x,y)}M^0.$$

Yukarıdaki belirtilen eşitliklere ilaveten manifoldun Ricci eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$S(X,Y) = G(QX,Y)\ . \tag{2.2.31}$$

Burada Q notasyonu, Ricci operatörünü göstermektedir.

Tanım 2.2.6: Kenmotsu Finsler manifoldu olan $(M^0)^h$'ın Weyl projektif eğrilik tensörü aşağıdaki eşitlik ile ifade edilmiştir:

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$W(X^H,Y^H)Z^H = R(X^H,Y^H)Z^H - \frac{1}{2n}[X^H S(Y^H,Z^H) - Y^H S(X^H,Z^H)]\ . \tag{2.2.32}$$

Tanım 2.2.7: Kenmotsu Finsler manifoldu olan $(M^0)^h$ın $\mathcal{M}$-projektif eğrilik tensörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$\mathcal{M}(X^H,Y^H)Z^H = R(X^H,Y^H)Z^H - \frac{1}{4n}[X^H S(Y^H,Z^H) - Y^H S(X^H,Z^H) + G(Y^H,Z^H)QX^H - G(X^H,Z^H)QY^H]. \tag{2.2.33}$$

2.3 Kenmotsu Finsler Manifoldlarının Weyl Projektif ve $\mathcal{M}$-Projektif Eğrilik Tensörü

2.3.1 Weyl Projektif ve $\mathcal{M}$-Projektif Olarak Flat Kenmotsu Finsler Manifoldları

Teorem 2.3.1.1: $(2n+1)$ *-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu* $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, *Weyl pojektif olarak flat ise Einstein manifoldudur ve sabit eğriliklidir.*

İspat 2.3.1.1:

Kenmotsu Finsler manifoldu, Weyl projektif olarak flat olduğundan $W(X^H,Y^H)Z^H = 0$ eşitliği sağlanır. U^H iç çarpım şeklinde kullanılırsa

$X^H, Y^H, Z^H, U^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$G(R(X^H,Y^H)Z^H, U^H) = \frac{1}{2n}\,[G(X^H,U^H)S(Y^H,Z^H) - G(Y^H,U^H)S(X^H,Z^H)] \tag{2.3.1.1}$$

elde edilir.

(2.3.1.1)'de belirtilen eşitlik; (2.2.18), (2.2.22) eşitlikleri yardımı ile ve $X^H = Y^H = \xi^H$ alınarak;

$$S(Y^H, Z^H) = -\frac{n}{2} G(Y^H, Z^H) \tag{2.3.1.2}$$

bulunur. Yani Einstein manifoldudur ve $r = -\frac{n}{2}(2n+1)$'dir.

Teorem 2.3.1.2: $(2n+1)$ *-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu* $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, *$\mathcal{M}$ −pojektif olarak flat ise bir Einstein manifoldudur ve sabit eğriliklidir.*

İspat 3.3.1.2:

Kenmotsu Finsler manifoldu, $\mathcal{M}$-projektif olarak flat olduğundan

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için $\mathcal{M}(X^H, Y^H)Z^H = 0$ olur.

Dolayısıyla $X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için

$$R(X^H, Y^H)Z^H = \frac{1}{4n}[X^H S(Y^H, Z^H) - Y^H S(X^H, Z^H) + G(Y^H, Z^H)QX^H - G(X^H, Z^H)QY^H] \tag{2.3.1.3}$$

eşitliği elde edilir.

(2.3.1.3)'de belirtilen eşitlikteki $X^H = \xi^H$ alınarak ve (2.2.17), (2.2.23) eşitlikleri yardımı ile $Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için

$$-G(Y^H, Z^H)\xi^H - \frac{1}{n}G(Y^H, Z^H)Q\xi^H = \frac{1}{n}S(Y^H, Z^H)\xi^H \tag{2.3.1.4}$$

bulunur. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa, (2.3.1.2) elde edilir. Yani $(M^0)^h$ bir Einstein manifoldudur ve skaler eğriliği $-\frac{n}{2}(2n+1)$'e eşittir.

Teorem 2.3.1.3: $(2n+1)$ -boyutlu *bir Kenmotsu Finsler manifoldu* $(M, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, *hem Weyl Projektif hem de $\mathcal{M}$ -Projektif olarak flat ise manifoldun Weyl Projektif ve $\mathcal{M}$-Projektif eğrilik tensörleri lineer bağımlıdır.*

İspat 2.3.1.3:

$\mathcal{M}$-Projektif eğrilik tensörü $\mathcal{M}$ ve Weyl Projektif eğrilik tensörü W, lineer bağımlı olduklarından;

$$\mathcal{M}(X^H, Y^H)Z^H = \lambda W(X^H, Y^H)Z^H \tag{2.3.1.5}$$

elde edilir. Burada $\lambda \neq 0$ olmak üzere bir reel sayıdır.

(2.3.1.5)'te (2.2.32) ve (2.2.33) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$(1-\lambda)R(X^H, Y^H)Z^H + (\tfrac{2\lambda-1}{4n})[X^H S(Y^H, Z^H) - Y^H S(X^H, Z^H)] - \frac{1}{4n}[QX^H G(Y^H, Z^H) - QY^H G(X^H, Z^H)] = 0 \tag{2.3.1.6}$$

elde edilir.

(2.3.1.6)'da $X^H = \xi^H$ alınarak ve (2.2.24), (2.2.25) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{1-\lambda}{4}[\eta^H(Z^H)Y^H - G(Y^H, Z^H)\xi^H] + \frac{\lambda-1}{2n}\left[\xi^H S(Y^H, Z^H) + \frac{n}{2}\eta(Z^H)Y^H\right] - \frac{1}{4n}[G(Y^H, Z^H)Q\xi^H - \eta(Z^H)QY^H] = 0 \tag{2.3.1.7}$$

sonucuna ulaşılır.

(2.3.1.7) eşitliğinin ξ^H ile iç çarpımı ve (2.2.31) eşitliğinin yardımı ile

$$S(Y^H, Z^H) = -\frac{(8(\lambda-1)+n)n}{2(2\lambda-1)}G(Y^H, Z^H) \tag{2.3.1.8}$$

bulunur.

(2.3.1.8)'de (2.3.1.2) eşitliğinin kullanılması ile $\lambda = \frac{7-n}{6}$ elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

2.3.2 $\xi - \mathcal{M}$ −Projektif Flat Kenmotsu Finsler Manifoldları

Tanım 2.3.2.1: $(M^0)^h$ üzerinde $(\varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ Kenmotsu Finsler metrik yapısı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanırsa $(M^0)^h$ manifoldu $\xi - \mathcal{M}$ −projektif olarak flattir denir

$X^H, Y^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$\mathcal{M}(X^H, Y^H)\xi^H = 0 \qquad (2.3.2.1)$$

Teorem 2.3.2.2: $(2n+1)$ -boyutlu *Kenmotsu Finsler manifoldu* $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$*'ın* $\xi - \mathcal{M}$ *−projektif olarak flat olması için gerek ve yeter koşul:* $(M^0)^h$*'ın Einstein manifold olmasıdır.*

İspat 2.3.2.2:

$(M^0)^h$ manifoldu $\xi - \mathcal{M} -$ Projektif flat olduğundan belirtilen (2.2.33) eşitliği gereği:

$$R(X^H, Y^H)\xi^H = \frac{1}{4n}[X^H S(Y^H, \xi^H) - Y^H S(X^H, \xi^H) + G(Y^H, \xi^H)QX^H - G(X^H, \xi^H)QY^H] \qquad (2.3.2.2)$$

ifadesi sağlanır.

(2.3.2.2)'de (2.2.21) ve (2.2.24) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{2}[\eta(X^H)Y^H - \eta(Y^H)X^H] = \frac{1}{n}[\eta(Y^H)QX^H - \eta(X^H)QY^H] \qquad (2.3.2.3)$$

elde edilir.

(2.3.2.3)'te (2.2.18) eşitliğinin kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$QX^H = -\frac{n}{2}X^H. \qquad (2.3.2.4)$$

(2.3.2.4) ifadesinin U^H ile iç çarpımı alındığında;

$$G(QX^H, U^H) = -\frac{n}{2}G(X^H, U^H) \qquad (2.3.2.5)$$

sonucuna ulaşılır. Buradan hareketle (2.3.1.2) eşitliğinin sağlandığı görülür. Yani Kenmotsu Finsler manifoldu, bir Einstein manifoldudur.

2.3.3 Lokal Olarak $\varphi - \mathcal{M}$ −Projektif Simetrik Kenmotsu Finsler Manifoldları

Tanım 2.3.3.1: Bir Kenmotsu Finsler manifoldu için aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa $\varphi - \mathcal{M}$ −Projektif simetriktir.

$X^H, Y^H, Z^H, U^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$\varphi^2(\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)Z^H = 0. \qquad (2.3.3.1)$$

Teorem 2.3.3.2: $(2n+1)$*-boyutlu bir Kenmotsu Finsler manifoldu, lokal olarak* $\varphi - \mathcal{M}$ *−Projektif simetrik ise bu manifold bir Einstein manifoldudur ve sabit eğriliğe sahiptir.*

İspat 2.3.3.2:

(2.2.16) ve (2.2.33) eşitlikleri kullanılarak

$$-(\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)Z^H + \eta\big((\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)Z^H\big)\xi^H = 0 \qquad (2.3.3.2)$$

elde edilir.

(2.3.3.2)'de (2.2.33) eşitliğinin kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$-G(\nabla_T^H R)(X^H, Y^H)Z^H, U^H) + \frac{1}{4n}[(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H)G(X^H, U^H) -$$
$$(\nabla_T^H S)(X^H, Z^H)G(Y^H, U^H) + G(Y^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(X^H, U^H) -$$
$$G(X^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(Y^H, U^H) + \eta\big((\nabla_T^H R)(X^H, Y^H)Z^H\big)\eta(U^H) -$$
$$\frac{1}{4n}[(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H)\eta(X^H) - (\nabla_T^H S)(X^H, Z^H)\eta(Y^H) + G(Y^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(X^H, \xi^H) -$$
$$G(X^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H)]\eta(U^H) = 0. \qquad (2.3.3.3)$$

$\{E_1{}^H, \dots, E_{2n}{}^H, E_{2n+1}{}^H\}$, $T_u(M^0)^h$ 'ın bir ortonormal çatısı olmak üzere (2.3.3.3)'te $X^H = U^H = E_i{}^H$eşitlikleri kullanılarak ve i üzerinden toplam alınmasıyla

$$-G((\nabla_T^H R)\big(E_i{}^H, Y^H\big)Z^H, E_i{}^H) + \frac{1}{4n}[(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H)G\big(E_i{}^H, E_i{}^H\big) -$$
$$(\nabla_T^H S)\big(E_i{}^H, Z^H\big)G\big(Y^H, E_i{}^H\big) + G(Y^H, Z^H)((\nabla_T^H S)\big(E_i{}^H, E_i{}^H\big)) -$$

$$G\left(E_i{}^H, Z^H\right)(\nabla_T^H S)\left(Y^H, E_i{}^H\right)] \quad + \eta((\nabla_T^H R)\left(E_i{}^H, Y^H\right)Z^H)\eta\left(E_i{}^H\right) -$$
$$\frac{1}{4n}[(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H)\eta\left(E_i{}^H\right) - (\nabla_T^H S)\left(E_i{}^H, Z^H\right)\eta(Y^H) +$$
$$G(Y^H, Z^H)((\nabla_T^H S)\left(E_i{}^H, \xi^H\right)) - G\left(E_i{}^H, Z^H\right)(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H)]\eta\left(E_i{}^H\right) = 0 \qquad (2.3.3.4)$$

ifadesi elde edilir.

Ricci tensörünün tanımı gereği (2.3.3.4) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H) + \frac{1}{4n}[2n(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H) - \nabla_T^H S(Y^H, Z^H) +$$
$$dr(u)G(Y^H, Z^H) - (\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H)] + \eta((\nabla_T^H R)\left(E_i{}^H, Y^H\right)Z^H)\eta\left(E_i{}^H\right) -$$
$$\frac{1}{4n}[(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H) - \nabla_T^H S(\xi^H, Z^H)\eta(Y^H) + G(Y^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(\xi^H, \xi^H) -$$
$$(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H)\eta(Z^H)] = 0. \qquad (2.3.3.5)$$

Diğer yandan kovaryant türevin özelliği gereği de aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$G\left((\nabla_T^H R)\left(E_i{}^H, Y^H\right)\xi^H, \xi^H\right) =$$
$$G\left(\nabla_T^H\left(R\left(E_i{}^H, Y^H\right)\xi^H\right), \xi^H\right) - G\left(R\left(\nabla_T^H E_i{}^H, Y^H\right)\xi^H, \xi^H\right) -$$
$$G\left(R\left(E_i{}^H, \nabla_T^H Y^H\right)\xi^H, \xi^H\right) - G(R(E_i{}^H, Y^H)\nabla_T^H \xi^H, \xi^H). \qquad (2.3.3.6)$$

(2.3.3.6)'da (2.2.21) ve (2.2.22) eşitliklerinin kulllanılmasıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$G\left((\nabla_T^H R)\left(E_i{}^H, Y^H\right)\xi^H, \xi^H\right) = \frac{1}{4}G(\nabla_T^H(\eta\left(E_i{}^H\right)Y^H - \eta(Y^H)E_i{}^H), \xi^H) -$$
$$\frac{1}{2}G(R\left(E_i{}^H, Y^H\right)U^H, \xi^H). \qquad (2.3.3.7)$$

(2.3.3.7)'de (2.2.17) ve (2.2.23) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$G((\nabla_T^H R)\left(E_i{}^H, Y^H\right)\xi^H, \xi^H) = 0 \qquad (2.3.3.8)$$

sonucu bulunur.

(2.3.3.8)'de $Z^H = \xi^H$ alınarak ve (2.3.3.5)'te (2.3.3.7) eşitliğinin kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H) = \frac{1}{2.(2n-1)}.dr(u).\eta(Y^H). \qquad (2.3.3.9)$$

(2.3.3.9)’da $Y^H = \xi^H$ alınarak ve (2.2.32) eşitliğinin kullanılmasıyla $dr(u) = 0$ sonucuna ulaşılır. Bir diğer ifadeyle r’nin sabit olduğu anlaşılır. İlaveten (2.3.3.9), aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H) = 0. \tag{2.3.3.10}$$

Kovaryant türevin özelliği gereği de aşağıdaki ifade doğrudur:

$$(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H) = \nabla_T^H\big(S(Y^H, \xi^H)\big) - S(\nabla_T^H Y^H, \xi^H) - S(Y^H, \nabla_T^H \xi^H). \tag{2.3.3.11}$$

(2.3.3.11)’de (2.3.3.10) kullanılarak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$0 = -\frac{n}{4}[G(Y^H, U^H) - \eta(Y^H)\eta(U^H)] - \frac{1}{2}S(Y^H, U^H) - \frac{n}{4}\eta(Y^H)\eta(U^H). \tag{2.3.3.12}$$

(2.3.3.12) eşitliğinin düzenlenmesiyle (2.3.1.2) eşitliği elde edilir. Böylelikle manifoldun Einstein olduğu görülür.

Teorem 2.3.3.3: $(2n+1)$*-boyutlu lokal olarak* $\varphi - \mathcal{M}$ *−projektif simetrik Kenmotsu Finsler manifoldu, lokal olarak* φ *−simetriktir.*

İspat 2.3.3.3:

(2.2.33) eşitliği yardımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} &G((\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)Z^H, U^H) = \\ &G((\nabla_T^H R)(X^H, Y^H)Z^H, U^H) - \frac{1}{4n}[G(X^H, U^H)(\nabla_T^H S)(Y^H, Z^H) - \\ &G(Y^H, U^H)(\nabla_T^H S)(X^H, Z^H) + G(Y^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(X^H, \xi^H) - \\ &G(X^H, Z^H)(\nabla_T^H S)(Y^H, \xi^H)]. \end{aligned} \tag{2.3.3.13}$$

(2.3.3.13)’te gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$G((\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)U^H, Z^H) = G((\nabla_T^H R)(X^H, Y^H)U^H, Z^H) \tag{2.3.3.14}$$

elde edilir.

Bunun yanı sıra (2.3.3.14)’te $Z^H = \xi^H$ alınarak aşağıdaki eşitliğin sağlandığı görülür:

$$(\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)U^H = (\nabla_T^H R)(X^H, Y^H)U^H. \tag{2.3.3.15}$$

Buradan hareketle aşağıdaki ifadenin elde edileceği aşikardır.

$$\varphi^2((\nabla_T^H \mathcal{M})(X^H, Y^H)U^H) = \varphi^2((\nabla_T^H R)(X^H, Y^H)U^H). \qquad (2.3.3.16)$$

Bu durumda manifold lokal olarak φ −simetriktir.

2.3.4 $\mathcal{M}$ −Projektif Semi-Simetrik Kenmotsu Finsler Manifoldları

Teorem 2.3.4.1 : $(2n+1)$-boyutlu $\mathcal{M}$ −*Projektif Semi-Simetrik Kenmotsu Finsler manifoldu, bir Einstein manifoldudur.*

İspat 2.3.4.1 :

Kenmotsu Finsler manifoldunun $\mathcal{M}$ −Projektif eğrilik tensörü semi-simetrik olduğundan

$$R(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0 \qquad (2.3.4.1)$$

eşitliği sağlanır. Buradan da

$$R(X^H, Y^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(R(X^H, Y^H)Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, R(X^H, Y^H)U^H)V^H - M(Z^H, U^H)R(X^H, Y^H)V^H = 0 \qquad (2.3.4.2)$$

bulunur.

(2.3.4.2)'de $X^H = \xi^H$ alınarak

$$R(\xi^H, Y^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(R(\xi^H, Y^H)Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, R(\xi^H, Y^H)U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, U^H)R(\xi^H, Y^H)V^H = 0 \qquad (2.3.4.3)$$

elde edilir.

(2.3.4.3)'te (2.2.24)'ün kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{1}{4}[\eta(\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H)Y^H - G(Y^H, \mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H)\xi^H - \eta(Z^H)\mathcal{M}(Y^H, U^H)V^H + G(Y^H, Z^H)\mathcal{M}(\xi^H, U^H)V^H - \eta(U^H)\mathcal{M}(Z^H, Y^H)V^H + G(Y^H, U^H)\mathcal{M}(Z^H, \xi^H)V^H - \eta(V^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)Y^H + G(Y^H, V^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)\xi^H] = 0. \qquad (2.3.4.4)$$

(2.3.4.4)'de (2.2.17), (2.2.18), (2.2.23), (2.2.25), (2.2.31) ve (2.2.33) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{16}\{[G(Z^H,V^H)\eta(U^H)-G(U^H,V^H)\eta(Z^H)]Y^H-[G(Y^H,U^H)G(Z^H,V^H)-G(U^H,V^H)G(Y^H,Z^H)]\xi-\eta(Z^H)[G(Y^H,V^H)U^H-G(U^H,V^H)Y^H]-\eta(U^H)[G(Z^H,V^H)Y^H-G(Y^H,V^H)Z^H]-\eta(V^H)[G(Z^H,Y^H)U^H-G(U^H,Y^H)Z^H]\}+\frac{1}{16n}\{-S(U^H,V^H)\eta(Z^H)Y^H+S(Z^H,V^H)\eta(U^H)Y^H+G(U^H,V^H)\eta(QZ^H)Y^H+G(Z^H,V^H)\eta(QU^H)Y^H+S(U^H,V^H)G(Y^H,Z^H)\xi^H-S(Z^H,V^H)G(Y^H,U^H)\xi^H+G(U^H,V^H)G(Y^H,QZ^H)\xi^H-G(Z^H,V^H)G(Y^H,QU^H)\xi^H+[S(U^H,V^H)Y^H-S(Y^H,V^H)U^H+G(U^H,V^H)QY^H-G(Y^H,V^H)QU^H]\eta(Z^H)+[S(Y^H,V^H)Z^H-S(Z^H,V^H)Y^H+G(Y^H,V^H)QZ^H-G(Z^H,V^H)QY^H]\eta(U^H)+[S(U^H,Y^H)Z^H-S(Z^H,Y^H)U^H+G(U^H,Y^H)QZ^H-G(Z^H,Y^H)QU^H]\eta(V^H)\}+\frac{1}{4}\{G(Y^H,Z^H)[\eta(V^H)U^H-G(U^H,V^H)\xi^H]+G(Y^H,U^H)[G(Z^H,V^H)\xi^H-\eta(V^H)Z^H]+G(Y^H,V^H)[\eta(Z^H)U^H-\eta(U^H)Z^H]\}+\frac{1}{4n}\Big\{-\Big[S(U^H,V^H)\xi^H+\frac{n}{2}\eta(V^H)U^H+G(U^H,V^H)Q\xi^H-\eta(V^H)QU^H\Big]G(Y^H,Z^H)-\Big[-\frac{n}{2}\eta(V^H)Z^H-S(Z^H,V^H)\xi^H+\eta(V^H)QZ^H-G(Z^H,V^H)Q\xi^H\Big]G(Y^H,U^H)-\Big[-\frac{n}{2}\eta(U^H)Z^H+\frac{n}{2}\eta(Z^H)U^H+\eta(U^H)QZ^H-\eta(Z^H)QU^H\Big]G(Y^H,V^H)\Big\}=0 \qquad (2.3.4.5)$$

bulunur.

(2.3.4.5)'te $Y^H=Z^H=\xi^H$ alınarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{1}{16}\{[\eta(V^H)\eta(U^H)Y^H-G(U^H,V^H)Y^H]-[G(Y^H,U^H)\eta(V^H)-G(U^H,V^H)\eta(Y^H)]\xi^H-[G(Y^H,V^H)U^H-G(U^H,V^H)Y^H]-[\eta(V^H)\eta(U^H)Y^H-G(Y^H,V^H)\eta(U^H)\xi^H]-[\eta(Y^H)\eta(V^H)U^H-G(U^H,Y^H)\eta(V^H)\xi^H]\}+\frac{1}{16n}\Big\{-\Big[S(U^H,V^H)Y^H+\frac{n}{2}\eta(V^H)\eta(U^H)Y^H-\frac{n}{2}G(U^H,V^H)Y^H+\frac{n}{2}\eta(V^H)\eta(U^H)Y^H\Big]+\Big[S(U^H,V^H)\eta(Y^H)\xi^H+\frac{n}{2}\eta(V^H)G(Y^H,U^H)\xi^H-\frac{n}{2}G(U^H,V^H)\eta(Y^H)\xi^H-\eta(V^H)S(Y^H,U^H)\xi^H\Big]+\Big[S(U^H,V^H)Y^H-S(Y^H,V^H)U^H-\frac{n}{2}G(U^H,V^H)Y^H+\frac{n}{2}G(Y^H,V^H)U^H\Big]+$$

$\Big[S(Y^H,V^H)\eta(U^H)\xi^H + \frac{n}{2}\eta(V^H)\eta(U^H)Y^H - \frac{n}{2}G(Y^H,V^H)\eta(U^H)\xi^H +$
$\frac{n}{2}\eta(V^H)\eta(U^H)Y^H\Big] +$
$\Big[S(U^H,Y^H)\eta(V^H)\xi^H + \frac{n}{2}\eta(Y^H)\eta(V^H)U^H - \frac{n}{2}G(U^H,Y^H)\eta(V^H)\xi^H +$
$\frac{n}{2}\eta(Y^H)\eta(V^H)U^H\Big]\Big\} +$
$\frac{1}{4}\{[\eta(Y^H)\eta(V^H)U^H - \eta(Y^H)G(U^H,V^H)\xi^H] +$
$[G(Y^H,U^H)\eta(V^H)\xi^H - G(Y^H,U^H)\eta(V^H)\xi^H] +$
$[G(Y^H,V^H)U^H - G(Y^H,V^H)\eta(U^H)\xi^H]\} + \frac{1}{4n}\{-\Big[\eta(Y^H)S(U^H,V^H)\xi^H -$
$n\eta(Y^H)\eta(V^H)U^H - \frac{n}{2}G(U^H,V^H)\eta(Y^H)\xi^H\Big] — nG(Y^H,U^H)\eta(V^H)\xi^H +$
$\frac{n}{2}\eta(V^H)G(Y^H,U^H)\xi^H + \frac{n}{2}\eta(V^H)G(Y^H,U^H)\xi^H - [n\eta(U^H)G(Y^H,V^H)\xi^H +$
$nG(Y^H,V^H)U^H]\} = 0.$ (2.3.4.6)

(2.3.4.6)'da $Y^H = \xi^H$ alınarak (2.3.1.2)'in sağlandığı görülür. Böylelikle manifoldun Einstein olduğu anlaşılır.

2.3.5 $\varphi - \mathcal{M}$ −Projektif Flat Kenmotsu Finsler Manifoldları

Tanım 2.3.5.1: $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$ bir Kenmotsu Finsler manifold olsun. Eğer $(M^0)^h$ *manifoldu* $\varphi - \mathcal{M} -$ projektif flat ise $X^H, Y^H, Z^H, U^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$G(\mathcal{M}(\varphi X^H, \varphi Y^H)\varphi Z^H, \varphi U^H) = 0. \tag{2.3.5.1}$$

Teorem 2.3.5.2:

$(M^0)^h$, (2n+1)-boyutlu φ - $\mathcal{M}$ -projektif olarak flat Kenmotsu Finsler manifoldu olsun. Bu durumda manifold, η-Einsteindır ve sabit eğriliğe sahiptir.

İspat 2.3.5.2:

(2.3.5.1)'de (2.2.33) eşitliğinin kullanılmasıyla

$(R(\varphi X^H, \varphi Y^H)\varphi Z^H, \varphi U^H) - \frac{1}{4n}\{S(\varphi Y^H, \varphi Z^H)G(\varphi X^H, \varphi U^H) -$
$S(\varphi X^H, \varphi Z^H)G(\varphi Y^H, \varphi U^H) + G(\varphi Y^H, \varphi Z^H)S(\varphi X^H, \varphi U^H) -$
$G(\varphi X^H, \varphi Z^H)S(\varphi Y^H, \varphi U^H)\} = 0$ (2.3.5.2)

elde edilir.

(2.3.5.2)'de $X^H = U^H = E_i^H$ alınarak ve i üzerinden toplam alınırsa

$$G(R(\varphi E_i^H, \varphi Y^H)\varphi Z^H, \varphi E_i^H) = \frac{1}{4n}\{S(\varphi Y^H, \varphi Z^H)G(\varphi E_i^H, \varphi E_i^H) - S(\varphi E_i^H, \varphi Z^H)G(\varphi Y^H, \varphi E_i^H) + G(\varphi Y^H, \varphi Z^H)S(\varphi E_i^H, \varphi E_i^H) - G(\varphi E_i^H, \varphi Z^H)S(\varphi Y^H, \varphi E_i^H) \tag{2.3.5.3}$$

sonucuna ulaşılır.

(2.3.5.3)'te (2.2.26), (2.2.27), (2.2.28), (2.2.29) ve (2.2.30) eşitliklerinin yardımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$S(\varphi Y^H, \varphi Z^H) = \frac{2r-n}{4(n+1)} G(\varphi Y^H, \varphi Z^H). \tag{2.3.5.4}$$

(2.3.5.4)'de $Y^H = \varphi Y^H$ ve $Z^H = \varphi Z^H$ alınarak ve (2.2.16) eşitliğinin kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlik bulunur:

$Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$S(Y^H, Z^H) = \frac{2r-n}{4(n+1)} G(Y^H, Z^H) - \frac{2n^2+n+r}{4(n+1)} \eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H). \tag{2.3.5.5}$$

Kenmotsu Finsler manifoldu için η-Einstein manifold olma koşulu:

$$S(Y^H, Z^H) = aG(Y^H, Z^H) + b\eta^H(Y^H)\eta^H(Z^H) \tag{2.3.5.6}$$

olduğundan $a = \frac{2r-n}{4(n+1)}$ ve $b = -\frac{2n^2+n+r}{4(n+1)}$ için (2.3.5.6)'nın sağlandığı aşikardır. Bu şekildeki η -Einstein manifoldu için (2.3.5.5)'te $Y^H = Z^H = E_i^H$ alınarak skaler eğrilik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$r = \frac{n(2r-2n-1)}{2(n+1)}. \tag{2.3.5.7}$$

2.3.6 Quasi−$\mathcal{M}$ −Projektif Flat Kenmotsu Finsler Manifoldları

Tanım 2.3.6.1: $(\varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, $(M^0)^h$ üzerinde Kenmotsu Finsler metrik yapı olsun.

$X^H, Y^H, Z^H, U^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$G(\mathcal{M}(X^H, Y^H)Z^H, \varphi U^H) = 0 \qquad (2.3.6.1)$$

eşitliği sağlanırsa $(M^0)^h$, quasi$-\mathcal{M}$ $-$projektif flattir.

Teorem 2.3.6.2 : *(2n+1)-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $(M, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, quasi$-\mathcal{M}$ $-$projektif flat ise η $-$Einsteindır.*

İspat 2.3.6.2:

$X^H, Y^H, Z^H, U^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$G(R(X^H, Y^H)Z^H, \varphi U^H) = \frac{1}{4n}[S(Y^H, Z^H)G(X^H, \varphi U^H) - S(X^H, Z^H)G(Y^H, \varphi U^H)] + [G(Y^H, Z^H)S(X^H, \varphi U^H) - G(X^H, Z^H)S(Y^H, \varphi U^H)] \qquad (2.3.6.2)$$

eşitliği sağlanır. (2.3.6.2)'de (2.2.16), (2.2.19) ve (2.2.33) eşitliklerinin yardımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta(X^H)G(Y^H, \varphi U^H) - \eta(Y^H)G(X^H, \varphi U^H) = -\frac{1}{n}[-\frac{n}{2}\eta(Y^H)G(X^H, \varphi U^H) + \frac{n}{2}\eta(X^H)G(X^H, \varphi U^H) + \eta(Y^H)S(X^H, \varphi U^H) - \eta(X^H)S(Y^H, \varphi U^H)]. \qquad (2.3.6.3)$$

(2.3.6.3)'te $U^H = \varphi U^H$ alınarak

$$-G(Y^H, U^H) + \eta(U^H)\eta(Y^H) = \frac{1}{n}[S(Y^H, U^H) + \frac{n}{2}\eta(U^H)\eta(Y^H)] \qquad (2.3.6.4)$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısı ile $Y^H, U^H \in T_{(x,y)}M^0$ için; (2.2.17) sağlanır ve $(M^0)^h$, bir η $-$Einstein manifoldudur.

2.3.7 $W(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ Koşulunu Sağlayan Kenmotsu Finsler Manifoldları

Teorem 2.3.7.1: $(2n+1)$ *-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu için $W(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ koşulunu sağlandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:*

$$S(QU^H, Y^H) = -nS(U^H, Y^H) - \frac{n^2}{4}G(U^H, Y^H). \qquad (2.3.7.1)$$

İspat 2.3.7.1:

$W(X^H,Y^H).\mathcal{M}=0$ eşitliği $Z^H,U^H,V^H\in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için aşağidaki ifadeyle belirtilir:

$$W(X^H,Y^H)\mathcal{M}(Z^H,U^H)V^H-\mathcal{M}(W(X^H,Y^H)Z^H,U^H)V^H-\mathcal{M}(Z^H,W(X^H,Y^H)U^H)V^H-\mathcal{M}(Z^H,U^H)W(X^H,Y^H)V^H=0. \quad (2.3.7.2)$$

(2.3.7.1)'de $X^H=\xi^H$alınarak

$$W(\xi^H,Y^H)\mathcal{M}(Z^H,U^H)V^H-\mathcal{M}(W(\xi^H,Y^H)Z^H,U^H)V^H-\mathcal{M}(Z^H,W(\xi^H,Y^H)U^H)V^H-\mathcal{M}(Z^H,U^H)W(\xi^H,Y^H)V^H=0 \quad (2.3.7.3)$$

bulunur.

(2.3.7.3)'te (2.2.22), (2.2.24) ve (2.2.32) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\frac{1}{4}[G(Y^H,\mathcal{M}(Z^H,U^H)V^H)-G(Y^H,Z^H)\eta(\mathcal{M}(\xi^H,U^H)V^H)-G(Y^H,U^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H,\xi^H)V^H)-G(Y^H,V^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H,U^H)\xi^H)]+\frac{1}{2n}[S(Y^H,\mathcal{M}(Z^H,U^H)V^H)-S(Y^H,Z^H)\eta(\mathcal{M}(\xi^H,U^H)V^H)-S(Y^H,U^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H,\xi^H)V^H)-S(Y^H,V^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H,U^H)\xi^H)]=0 \quad (2.3.7.4)$$

elde edilir.

(2.3.7.4)'te (2.2.33) eşitliğinin yardımı ile

$$\frac{1}{4}[G(Y^H,\mathcal{M}(Z^H,U^H)V^H)-G(Y^H,Z^H)\eta(R(\xi^H,U^H)V^H)-G(Y^H,U^H)\eta(R(Z^H,\xi^H)V^H)-G(Y^H,V^H)\eta(R(Z^H,U^H)\xi^H)]+\frac{1}{16n}\Big[G(Y^H,Z^H)S(U^H,V^H)-\frac{n}{2}G(Y^H,Z^H)G(U^H,V^H)-n\eta(V^H)\eta(Z^H)G(Y^H,U^H)-S(Z^H,V^H)G(Y^H,U^H)+\frac{n}{2}G(Z^H,V^H)G(Y^H,U^H)\Big]+\frac{1}{2n}[S(Y^H,\mathcal{M}(Z^H,U^H)V^H)-(Y^H,Z^H)\eta(R(\xi^H,U^H)V^H)-S(Y^H,U^H)\eta(R(Z^H,\xi^H)V^H)-S(Y^H,V^H)\eta(R(Z^H,U^H)\xi^H)]+\frac{1}{8n}\Big[S(Y^H,Z^H)S(U^H,V^H)+nS(Y^H,Z^H)\eta(U^H)\eta(V^H)-\frac{n}{2}S(Y^H,Z^H)G(U^H,V^H)-nS(Y^H,U^H)\eta(V^H)\eta(Z^H)-S(Y^H,U^H)S(Z^H,V^H)+\frac{n}{2}S(Y^H,U^H)G(Z^H,V^H)\Big]=0$$

(2.3.7.5)

sonucuna ulaşılır.

(2.3.7.5)'te $Z^H = V^H = \xi^H$ alınarak

$$\frac{1}{4}G(Y^H, \mathcal{M}(\xi^H, U^H)\xi^H) + \frac{1}{2n}G(QY^H, \mathcal{M}(\xi^H, U^H)\xi^H) + \frac{1}{16}\eta(Y^H)\eta(U^H) = 0$$

(2.3.7.6)

bulunur. Dolayısı ile (2.3.7.1) eşitliği sağlanmış olur.

2.4 Kenmotsu Finsler Manifoldlarının Concircular Eğrilik Tensörü

2.4.1 $C(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ Koşulunu Sağlayan Kenmotsu Finsler Manifoldları

Tanım 2.4.1.1: (2n + 1)-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $(M^0)^h$'ın concircular eğrilik tensörü C, aşağıdaki eşitlikte verildiği gibidir:

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$C(X^H, Y^H)Z^H = R(X^H, Y^H)Z^H - \frac{r}{(2n+1)(2n)}[G(Y^H, Z^H)X^H - G(X^H, Z^H)Y^H].$$

(2.4.1.1)

(2.4.1.1)'de $X^H = \xi^H$ alınarak ve (2.2.22)'nin bu eşitlikte kullanılmasıyla

$$C(\xi^H, Y^H)Z^H = \left(\frac{1}{4} + \frac{r}{(2n+1)(2n)}\right)[\eta(Z^H)Y^H - G(Y^H, Z^H)\xi^H] \quad (2.4.1.2)$$

elde edilir.

Teorem 2.4.1.2: $(2n+1)$*-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu* $(M^0)^h$ *, eğer* $C(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ *koşulunu sağlıyor ise skaler eğriliği* $-\frac{n}{2}(2n+1)$ *şeklindedir.*

İspat 2.4.1.2:

$C(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ koşulu sağlandığında $Z^H, U^H, V^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için;

$$C(X^H, Y^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(C(X^H, Y^H)Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, C(X^H, Y^H)U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, U^H)C(X^H, Y^H)V^H = 0 \quad (2.4.1.3)$$

elde edilir.

(2.4.1.3)’te $X^H = \xi^H$ alınırsa

$$C(\xi^H, Y^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(C(\xi^H, Y^H)Z^H, U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, C(\xi^H, Y^H)U^H)V^H - \mathcal{M}(Z^H, U^H)C(\xi^H, Y^H)V^H = 0 \tag{2.4.1.4}$$

halini alır.

(2.4.1.4)’teki denklemde, belirtilen (2.4.1.1) ve (2.2.20) eşitlikleri kullanılırsa

$$\left(\frac{r}{(2n+1)(2n)} + \frac{1}{4}\right)\{\eta(\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H)Y^H - G(Y^H, \mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H)\xi^H - \eta(Z^H)\mathcal{M}(Y^H, U^H)V^H + G(Y^H, Z^H)\mathcal{M}(\xi^H, U^H)V^H - \eta(U^H)\mathcal{M}(Z^H, Y^H)V^H + G(Y^H, U^H)\mathcal{M}(Z^H, \xi^H)V^H - \eta(V^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)Y^H + G(Y^H, V^H)\mathcal{M}(Z^H, U^H)\xi^H\} = 0 \tag{2.4.1.5}$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitliğin ξ^H ile iç çarpımı alınarak ve (2.2.20) ve (2.2.33) eşitlikleri kullanılarak

$$\left(\frac{r}{(2n+1)(2n)} + \frac{1}{4}\right)\{\eta(\mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H)\eta(Y^H) - G(Y^H, \mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H) + \eta(Z^H)\eta(\mathcal{M}(Y^H, U^H)V^H) + G(Y^H, Z^H)\eta(\mathcal{M}(\xi^H, U^H)V^H) + \eta(U^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H, Y^H)V^H) + G(Y^H, U^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H, \xi^H)V^H) - \eta(V^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H, U^H)Y^H) + G(Y^H, V^H)\eta(\mathcal{M}(Z^H, U^H)\xi^H)\} = 0 \tag{2.4.1.6}$$

sonucuna ulaşılır.

(2.4.1.6) eşitliğinde (2.2.17), (2.2.18) ve (2.2.24) eşitlikleri yardımıyla

$$\left(\frac{r}{(2n+1)(2n)} + \frac{1}{4}\right)\Big\{-G(Y^H, \mathcal{M}(Z^H, U^H)V^H) - \frac{1}{8}\big(G(U^H, V^H)G(Y^H, Z^H) - G(Z^H, V^H)G(Y^H, U^H) + G(Y^H, Z^H)\eta(V^H)\eta(U^H) - G(Y^H, U^H)\eta(Z^H)\eta(V^H)\big) + \frac{1}{4n}\big(-S(U^H, V^H)G(Y^H, Z^H) + S(Z^H, V^H)G(Y^H, U^H) - S(Z^H, Y^H)\eta(U^H)\eta(V^H) + S(U^H, Y^H)\eta(Z^H)\eta(V^H)\big)\Big\} = 0 \tag{2.4.1.7}$$

elde edilir.

(2.4.1.7)'de $Z^H = V^H = \xi^H$ alınırsa Kenmotsu Finsler manifoldunun skaler eğriliği $-\frac{n}{2}(2n+1)$olarak bulunur.

2.5 Kenmotsu Finsler Manifoldlarının Quasi-Conformal ve Conformal Eğrilik Tensörü

2.5.1 $W(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ Koşulunu Sağlayan Kenmotsu Finsler Manifoldları

Tanım 2.5.1.1: $(2\mathrm{n}+1)$ -boyutlu Kenmotsu Finsler manifold $(M^0)^h$ içinquasi-conformal eğrilik tensörü $\widetilde{Q}$, aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

$X^H, Y^H, Z^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$için;

$$\widetilde{K}(X^H, Y^H)Z^H = aR(X^H, Y^H)Z^H + b[S(Y^H, Z^H)X^H - S(X^H, Z^H)Y^H + G(Y^H, Z^H)QX^H - G(X^H, Z^H)QY^H] - \frac{r}{2n+1}\left(\frac{a}{2n} + 2b\right)(G(Y^H, Z^H)X^H - G(X^H, Z^H)Y^H). \tag{2.5.1.1}$$

Burada $a \neq 0 \neq b$ ve$r$ ise skaler eğrilik tensörüdür.

Eğer $a = 1$ ve $b = -\frac{1}{2n-1}$ alırsak (2.5.1.1) bağıntısı aşağıdaki hali alır:

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(X^H, Y^H)Z^H = R(X^H, Y^H)Z^H & \\ + \frac{1}{2n-1}&[S(Y^H, Z^H)X^H - S(X^H, Z^H)Y^H + G(Y^H, Z^H)QX^H \\ - G(X^H, Z^H)QY^H&] + \frac{r}{(2n)(2n-1)}(G(Y^H, Z^H)X^H - G(X^H, Z^H)Y^H)\end{aligned}$$

$$= K(X^H, Y^H)Z^H. \tag{2.5.1.2}$$

Burada K conformal eğrilik tensörüdür.

(2.5.1.1) ve (2.5.1.2) eşitliklerinden anlaşılacağı üzere conformal eğrilik tensörü, quasi-conformal eğrilik tensörünün özel halidir.

(2.5.1.1)'de $X^H = \xi^H$ olarak alınırsa ve (2.2.22) eşitliği yardımıyla

$$\widetilde{K}\left(\xi^H, Y^H\right)Z^H = \left(\frac{a}{4} + bn - c\right)\eta(Z^H)Y^H + \left(-\frac{a}{4} + \frac{bn}{2} + c\right)G(Y^H, Z^H)\xi^H + bS(Y^H, Z^H)\xi^H \tag{2.5.1.3}$$

halini alır.

(2.5.1.1)'de $X^H = \xi^H$ ve $Z^H = \xi^H$ olarak alınırsa

$$\widetilde{K}\left(\xi^H, Y^H\right)\xi^H = \left(\frac{a}{4} + bn - c\right)Y^H + \left(-\frac{a}{4} + c\right)\eta(Y^H)\xi^H \qquad (2.5.1.4)$$

olur.

(2.5.1.1)'de $X^H = \xi^H$ ve $Y^H = \xi^H$ olarak alınırsa

$$\widetilde{K}\left(\xi^H, \xi^H\right)Z^H = (bn)\eta(Z^H)\xi^H \qquad (2.5.1.5)$$

elde edilir.

Teorem 2.5.1.2: $(2n+1)$*-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu* $(M^0)^h$*, eğer* $W(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ *koşulunu sağlıyor ise skaler eğriliği* $r = -\frac{n}{2}(2n+1)$ *şeklindedir ya da bir* η*-Einstein manifoldudur.*

İspat 2.5.1.2:

$Z^H, U^H, V^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$ için $W(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\left(W(X^H, Y^H).\widetilde{K}\right)(Z^H, U^H)V^H =$$
$$W(X^H, Y^H)\widetilde{K}(Z^H, U^H)V^H - \widetilde{K}(W(X^H, Y^H)Z^H, U^H)V^H - \widetilde{K}(Z^H, W(X^H, Y^H)U^H)V^H -$$
$$\widetilde{K}(Z^H, U^H)W(X^H, Y^H)V^H = 0. \qquad (2.5.1.6)$$

Burada $X^H = \xi^H$ alınarak

$$\left(W(\xi^H, Y^H).\widetilde{K}\right)(Z^H, U^H)V^H =$$
$$W(\xi^H, Y^H)\widetilde{K}(Z^H, U^H)V^H - \widetilde{K}(W(\xi^H, Y^H)Z^H, U^H)V^H - \widetilde{K}(Z^H, W(\xi^H, Y^H)U^H)V^H -$$
$$\widetilde{K}(Z^H, U^H)W(\xi^H, Y^H)V^H = 0 \qquad (2.5.1.7)$$

sonucuna ulaşılır.

(2.5.1.7) eşitliğinin X^H ile iç çarpımının sonucu aşağıdaki gibidir:

$$G\big(W(\xi^H,Y^H)\widetilde{K}(Z^H,U^H)V^H,X^H\big) = G\big(W(\xi^H,Y^H)\widetilde{K}(Z^H,U^H)V^H,X^H\big) - G(\widetilde{K}(W(\xi^H,Y^H)Z^H,U^H)V^H,X^H) - G(\widetilde{K}(Z^H,W(\xi^H,Y^H)U^H)V^H,X^H) - G(\widetilde{K}(Z^H,U^H)W(\xi^H,Y^H)V^H,X^H) = 0. \quad (2.5.1.8)$$

Bu son eşitlikte (2.2.32) ifadesinin yardımıyla

$$\frac{1}{4}\{G\big(Y^H,\widetilde{K}(Z^H,U^H)V^H\big)n(X^H) - G(Y^H,Z^H)G\big(\widetilde{K}(\xi^H,U^H)V^H,X^H\big) - G(Y^H,U^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)V^H,X^H\big) - G(Y^H,V^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,U^H)\xi^H,X^H\big)\} + \frac{1}{2n}\{S\big(Y^H,\widetilde{K}(Z^H,U^H)V^H\big)n(X^H) - S(Y^H,Z^H)G\big(\widetilde{K}(\xi^H,U^H)V^H,X^H\big) - S(Y^H,U^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)V^H,X^H\big) - S(Y^H,V^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,U^H)\xi^H,X^H\big) = 0 \quad (2.5.1.9)$$

sonucu bulunur.

(2.5.1.9)'da $U^H = \xi^H$alınırsa

$$\frac{1}{4}G\big(Y^H,\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)V^H\big)\eta(X^H) - \frac{1}{4}\eta(Y^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)V^H,X^H\big) - \frac{1}{4}G(Y^H,V^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)\xi^H,X^H\big) + \frac{1}{2n}S\big(Y^H,\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)V^H\big)\eta(X^H) - \frac{1}{2n}\left(-\frac{n}{2}\right)\eta(Y^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)V^H,X^H\big) - \frac{1}{2n}S(Y^H,V^H)G\big(\widetilde{K}(Z^H,\xi^H)\xi^H,X^H\big) = 0$$

(2.5.1.10)

elde edilir.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa eşitlik:

$$\left(-\frac{a}{8}-\frac{bn}{8}+\frac{c}{4}\right)G(Y^H,Z^H)\eta(X^H)\eta(V^H) + \left(-\frac{a}{8}-\frac{bn}{4}+\frac{c}{4}\right)G(Y^H,V^H)\eta(X^H)\eta(Z^H) + \left(-\frac{a}{16}+\frac{bn}{8}-\frac{c}{4}\right)G(Y^H,V^H)G(X^H,Z^H) + \left(-\frac{a}{8n}+\frac{c}{2n}\right)S(Y^H,Z^H)\eta(X^H)\eta(V^H) + \left(-\frac{a}{8n}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2n}\right)S(Y^H,V^H)\eta(X^H)\eta(Z^H) + \left(\frac{a}{8n}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2n}\right)S(Y^H,V^H)G(X^H,Z^H) + S(X^H,Z^H)G(Y^H,V^H) + \left(-\frac{b}{4}\right)S(QZ^H,Y^H) + \left(\frac{b}{2n}\right)\eta(X^H)\eta(V^H) + \left(-\frac{b}{2n}\right)S(Y^H,V^H)S(Z^H,X^H) = 0 \quad (2.5.1.11)$$

halini alır.

$1 \leq\ i \leq (2n+1)$ olmak üzere $\{E_i^H\}$, $T_{(x,y)}(M^0)^h$ tanjant uzayının ortonormal bir bazı olsun. (2.5.1.11) eşitliğinde $Y^H = V^H = E_i^H$ alınarak ve i üzerinden 1'den $(2n+1)$'e kadar toplamının alınmasıyla

$$S(X^H, Z^H) = \frac{d}{2n^2+n+r} G(X^H, Z^H) + \frac{e}{2n^2+n+r} \eta(X^H)\eta(Z^H) \qquad (2.5.1.12)$$

elde edilir.

Buradaki d ile e'nin değeri:

$$d = \frac{n(2n+1)(a+2bn-4c)+2r(a\mp 2b-4c)}{4b},$$

$$e = \frac{n(2n+1)(-a-2bn+2c)+r(-a-4bn+4c)}{2b}$$

şeklindedir.

Böylelikle (2.3.5.6)'daki tanıma göremanifoldun η-*Einstein* olması anlamına gelir. Lakin (2.5.1.12) eşitliğinde $2n^2+n+r=0$ ise skaler eğrilik tensörü $-\frac{n}{2}(2n+1)$ olarak bulunur.

2.5.2 $\boldsymbol{C(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0}$ *Koşulunu Sağlayan Kenmotsu Finsler Manifoldları*

Teorem 2.5.2.1: $(2n+1)$ *-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu* $C(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ *koşulunu sağlıyorsa* η*-Einstein manifoldudur.*

İspat 2.5.2.1:

$Y^H, Z^H, U^H, V^H \in T_{(x,y)}(M^0)^h$*için;*

$$\big(C(\xi^H, Y^H).\widetilde{K}\big)(U^H, V^H)Z^H =$$
$$C(\xi^H, Y^H)\widetilde{K}(U^H, V^H)Z^H - \widetilde{K}(C(\xi^H, Y^H)U^H)V^H)Z^H - \widetilde{K}(U^H, C(\xi^H, Y^H)V^H)Z^H -$$
$$\widetilde{K}(U^H, V^H)C(\xi^H, Y^H)Z^H = 0 \qquad (2.5.2.1)$$

sonucu bulunur.

(2.5.2.1)'de $U^H = \xi^H$alınarak (2.4.1.2) eşitliği yardımıyla

$$C(\xi^H,Y^H)\widetilde{K}(\xi^H,V^H)Z^H - \widetilde{K}(C(\xi^H,Y^H)\xi^H,V^H)Z^H -$$
$$\widetilde{K}(\xi^H,C(\xi^H,Y^H)V^H)Z^H - \widetilde{K}(\xi^H,V^H)C(\xi^H,Y^H)Z^H = 0 \qquad (2.5.2.2)$$

elde edilir.

(2.5.2.2) eşitliğinin X^H ile iç çarpımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{r}{(2n)(2n+1)}\right)\{\eta(\widetilde{K}(\xi^H,V^H)Z^H)G(Y^H,X^H) - G\big(Y^H,\widetilde{K}(\xi^H,V^H)Z^H\big)\eta(X^H) -$$
$$G\big(\widetilde{K}(Y^H,V^H)Z^H,X^H\big) + G\big(\widetilde{K}(\xi^H,V^H)Z^H,X^H\big)\eta(Y^H) - \eta(V^H)G\big(\widetilde{K}(\xi^H,Y^H)Z^H,X^H\big) +$$
$$G(Y^H,V^H)G\big(\widetilde{K}(\xi^H,\xi^H)Z^H,X^H\big) - \eta(Z^H)G\big(\widetilde{K}(\xi^H,V^H)Y^H,X^H\big) +$$
$$G(Y^H,Z^H)G\big(\widetilde{K}(\xi^H,V^H)\xi^H,X^H\big)\} = 0. \qquad (2.5.2.3)$$

(2.5.2.3)'te (2.5.1.3), (2.5.1.4) ve (2.5.1.5) eşitlikleri yardımıyla

$$-b\big[S(Y^H,Z^H)\eta(X^H)\eta(V^H) + S(Y^H,V^H)\eta(X^H)\eta(Z^H)\big] -$$
$$\frac{bn}{2}\big[G(Y^H,V^H)\eta(X^H)\eta(Z^H) + G(Y^H,Z^H)\eta(X^H)\eta(V^H)\big] + b\big[S(Y^H,Z^H)G(X^H,V^H) -$$
$$S(X^H,Y^H)G(V^H,Z^H) + S(X^H,V^H)G(Y^H,Z^H)\big] + \frac{bn}{2}\big[G(X^H,Y^H)G(V^H,Z^H) +$$
$$2G(Y^H,Z^H)G(X^H,V^H) = 0 \qquad (2.5.2.4)$$

sonucuna ulaşılır.

E_i^H, $1 \le i \le 2n+1$ olmak üzere $T_{(x,y)}(M^0)^h$'nin ortonormal bir bazı olsun ve $Y^H = Z^H = E_i^H$ alınsın. (2.5.2.4)'te i üzerinden 1'den $2n+1$'e kadar toplam alınırsa

$$S(X^H,V^H) = \frac{-\big(r+2n(n+1)\big)}{(2n+1)}G\big(X^H,V^H\big) + \frac{-r+\frac{n}{2}(2n+1)}{(2n+1)}\eta(X^H)\eta\big(V^H\big)$$

bulunur. Böylelikle manifoldun (2.3.5.6)'daki gibi η −Einstein olduğu görülür.

3. İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Gray (1959), tek boyutlu manifoldlar üzerinde $U(n) \times 1$ yapısal grubunun indirgenmesiyle oluşan hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. $(2n+1)$ - boyutlu bir hemen hemen değme yapıyı $\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ ve $\eta(\xi) = 1$eşitliklerini sağlayan $(1,1)$ -tipindeki tensör alanı φ, $(1,0)$ -tipindeki vektör alanı ξ ve $(0,1)$ - tipindeki 1-form η ile oluşturulan (φ, ξ, η) üçlüsüyle göstermiştir.

Sasaki (1960), (φ, ξ, η) üçlüsüyle oluşturulan hemen hemen değme yapısı üzerinde, $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ ve $\eta(X) = g(X, \xi)$ eşitlikleriyle gösterilen bir g metriğini tanımlamıştır.

Sasaki ve Hatakeyama (1961), (φ, ξ, η)-yapılar ve konneksiyonlar tarafından tanımlanan ve $\varphi_{j,}^{i}\ \xi^i, \eta_i$ kovaryant sabitlerinin oluşmasını sağlayan bazı tensör alanlarını çalışmışlardır. Bu bağlamda, Nijenhuis torsiyon tensörleriN_{jk}^i, N_j^i, N_{jk} ve $N_j$incelenmiştir.

Morimoto (1963), hemen hemen değme yapılar ile kompleks yapılar arasındaki bazı ilişkileri araştırmıştır. İki hemen hemen değme manifoldun çarpım manifoldları üzerindeki hemen hemen kompleks yapıyı tanımlamıştır.

Blair (1971), hemen hemen değme yapı tensörleri Killing olan hemen hemen değme metrik manifoldlarını çalışmıştır. Özellikle böyle yapı normal ise manifoldun kosimplektik olduğunu belirtmiştir.

Sato (1977), normal hemen hemen değme 3-manifoldlarını ve Sasaki-Hsu tarafından tanımlanan Brieskorn manifoldları üzerindeki değme yapıları incelemiştir.

Blair (1984), Ricci eğriliğinin karakteristik vektör alanı yönünde integrali alınarak kompakt manifold üzerinde bir değme form ile tüm Riemann metriklerin ailesini üzerinde bir fonksiyon tanımlayarak ilişkilendirmiştir. Bir kompakt regüler değme manifoldun üzerindeki bu fonksiyonun kritik noktalarının, izometrilerin bir grubunu üreten karakteristik vektür alanlarını oluşturan merikler olduğunu göstermiştir.

Davidov (2003), tek ve çift boyutlu Riemann manifoldlarının twistor uzayları arasındaki ilişkileri incelemiştir. Ayrıca tek boyutlu Riemann manifoldunun twistor uzayı üzerinde iki doğal hemen hemen değme metrik yapıların bazı özeliklerini belirli geometrik koşullar altında hemen hemen değme metrik manifoldlarına örnekler elde etmek için kullanılabileceğini göstermiştir.

Bukusheva ve Galaev (2011), hemen hemen değme metrik manifoldu D'nin intrinsik geometrisini tanımlamış ve çalışmışlardır. Bu bağlamda, D üzerindeki genişletilmiş konneksiyonu vektör demetinin toplam uzayı üzerinde kullanarak bir hemen hemen değme metrik yapı tanımlamışlar ve bu yapının özrlliklerini incelemişlerdir.

Gherici (2019), vektör alanınlarının global bazını kullanarak hemen hemen değme metrik manifoldun yeni bir sınıfını oluşturmuştur ve bu durumu somut bir örnek vererek göstermiş ve üç boyutlu manifold yapısını incelemiştir.

Kenmotsu (1972), hemen hemen değme Riemann metrik manifoldlarının yeni bir sınıfını tanımlamıştır. Normal olan fakat quasi-Sasakian ve dolayısıyla Sasakian olmayan bu yapılar sonrasında Kenmotsu manifoldları olarak adlandırılmıştır.

Janssens ve Vanhecke (1981), çalışmalarında hemen hemen değme yapıları ele almışlardır. Ayrıca hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek $\alpha -$Kenmotsu manifoldlarını tanımlamışlardır.

Olszak ve Rosca (1991), normal yerel conformal hemen hemen kosimplektik manifoldlar incelemişlerdir. Ayrıca $f -$ Kenmotsu manifoldlarında bazı eğrilik özelliklerini çalışmışlardır.

Kim ve Pak (2005), $\alpha -$Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapıları birleştirmişlerdir. Bu yapıların birleştirilmesiyle hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen $\alpha -$kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır.

De ve Özgür (2006), quasi-conformal olarak flat ve quasi-conformal semi-simetrik Kenmotsu manifoldlarını araştırmışlardır.

Dileo ve Pastore (2007), lokal olarak simetrik hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını incelemişlerdir. Ayrıca böyle bir manifold yapısının killing vektör alanı olan ξ'nin Lie türevinin sıfır olmasıyla elde edilebileceğini göstermişlerdir. İlaveten bu türev sıfıra eşit olmadığında elde edilen sonuçları da irdelemişlerdir.

De (2010), $\eta-$paralel Ricci tensörü ile üç boyutlu bir Kenmotsu manifoldu örneği oluşturmuştur. Ayrıca Kenmotsu manifoldundabir vektör alanının Killing vektör alanı olması koşulu elde edilmiştir.

Venkatesha ve Vishnuvardhana (2014), genişletilmiş bir genelleştirilmiş $\tau-\varphi-$tekrarlı Kenmotsu manifoldunun genelleştirilmiş bir Ricci-tekrarlı manifold olması için gerek ve yeter koşulu elde etmişlerdir. Sonra da $\tau-\varphi-$ simetrik Kenmotsu manifoldunu, $\tau-\xi-$ flat Kenmotsu manifoldunu ve $\tau(X,Y).R=0$ koşulunu sağlayan bir Kenmotsu manifoldu çalışmışlardır.

Venkatesha, Arasaiah, Vishnuvardhana ve Kumar (2019), semi-simetrik metrik konneksiyona sahip olan Kenmotsu madifoldlarının bazı simetri özelliklerini incelemişlerdir. Bu bağlamda, tanımlanan semi-simetrik metrik konneksiyona göre pseudo-simetrik, Ricci pseudo-simetrik, projektif pseudo-simetrik ve $\varphi-$projektif semi-simetrik Kenmotsu manifoldlarını ele almışlar ve bu eğrilik özelliklerini üç boyutta ispatlamışlardır.

Jun, De ve Pathak (2005), hemen hemen değme Riemann manifolduna bazı özel koşullar eklenmesiyle elde edilen Kenmotsu manifoldunu incelemişlerdir. Ayrıca Riemann manifoldlarında semi-simetrik, Ricci semi-simetrik veya Weyl semi-simetrik olma koşullarını irdelemişlerdir. Çalışmalarında Kenmotsu manifoldu kısmen sınıflandırmışlardır. Riemann eğrilik tensörünü ve Ricci tensörünü invaryant kılan bir dönüşümü göz önünde bulundurarak bir Kenmotsu manifoldu sınıflandırmışlardır.

Hong, Özgür ve Tripathi (2006), $\eta-$ Einstein, $\eta-$ paralel Ricci tensör $R(\xi,X).Z=0$, $R(\xi,X).R=0$, $Z(\xi,X).Z=0$, $Z(\xi,X).R=0$, $Z(\xi,X).S=0$ veya Ricci-pseudosimetrik koşullarını sağlayan Kenmotsu manifoldlarını çalışmışlardır. Bu araştırmada Riemann eğrilik tensörünü R, concircular eğrilik tensörünü Z ve Ricci eğrilik tensörünü S notasyonu ile göstermişlerdir.

Chaubey, Prakash ve Nivas (2012), Kenmotsu manifoldlarında $\mathcal{M}$ −projektif eğrilik tensörünün bazı özelliklerini incelemişlerdir. Bu özellikler $\mathcal{M}$ − projektif olarak flat Kenmotsu manifoldunun $R(X,Y).S = 0$, $W(X,Y).W^{*}$ koşularını sağlaması üzerinedir. Ayrıca semi-simetrik Kenmotsu manifoldlarını da araştırmışlardır.

Barman (2015), concircular eğrilik tensörünün belirli eğrilik koşullarını sağlayan semi-simetrik bir metrik konneksiyonu için Kenmotsu manifoldunu incelemiştir.

Saroja Devi ve Singh (2015), Kenmotsu manifoldları üzerindeki $\mathcal{M}$ − projektif eğrilik tensörünün özeliklerini çalışmışlardır. Ayrıca global φ − $\mathcal{M}$ − projektif olarak simetrik Kenmotsu manifoldlarının bir Einstein manifold olduğunu göstermişlerdir.

Dey ve Majhi (2018), quasi-conformal olarak flat ve ξ −quasi-conformal olarak flat hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını (k,μ) −nullity ve $(k,\mu)'$ −nullity distribüsyonları ile karakterize etmişlerdir.

İnal, Sarı ve Vanlı (2018), araştırmalarında genelleştirilmiş Kenmotsu manifoldları üzerinde concircular eğrilik tensörünü çalışmışlardır. Concircular düz ve φ −concircular düz genelleştirilmiş Kenmotsu manifoldlarını incelemişlerdir. Ayrıca φ − semi simetrik ve φ − concircular semi-simetrik genelleştirilmiş Kenmotsu manifoldları üzerine bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

Ayar ve Chaubey (2019), $\mathcal{M}$ −projektif eğrilik tensörü ile α −kosimplektik manifoldlarının özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca farklı eğrilik tensörleri arasında bazı konneksiyonlar elde etmişlerdir.

Jeong, Lee, Oh ve Park (1990), Sasaki manifoldları üzerinde conformal eğrilik tensör alanını Boothby-Wang'ın fibrasyonunu kullanarak yeni bir tensör alanı inşa etmişlerdir. Ayrıca Sasakian manifoldlarının conformal eğrilik tensörünün bazı özelliklerini çalışmışlardır.

Zhen, Cabrerizo, L. M. Fernández ve M. Fernández (1997) çalışmalarında K −değme manifoldlarının projektif flat olma koşullarını incelemişlerdir.

Tripathi ve Kim (2004), concircular eğrilik tensörü Z ve Ricci eğrilik tensörü S olmak üzere $Z(\xi,X).S = 0$ koşulunu sağlayan $(k,\mu)-$ manifoldlarının sınıflandırılmasını vermişlerdir.

Özgür ve Tripathi (2007), $Z(\xi,X).Z = 0$, $Z(\xi,X).R = 0$, $R(\xi,X).Z = 0$, $Z(\xi,X).S = 0$ ve $Z(\xi,X).C = 0$ koşullarını sağlayan P-Sasakian manifoldlarını araştırmışlardır.

Prasad (2010), trans-Sasakian manifoldlarınıquasi-conformal eğrilik tensörleri ile tartışmıştır. Ayrıca trans-Sasakian ve nearly trans-Sasakian manifoldlarını hemen hemen değme metrik manifoldları üzerinde tanımlamıştır.

Taleshian, Asghari ve On (2010), LP-Sasakian manifoldlarının $R(X,Y).S = 0$, $\tilde{C}(\xi,X).S = 0$ ve $R.\tilde{C} = R.R$ koşullarını sağladığında Einstein manifoldu olduğunu göstermiştir.

Singh ve Pandey (2013), $N_{(K)}$ $-$değme metrik manifoldlarında $\mathcal{M}$ $-$projektif eğrilik tensörünün özelliklerini araştırmıştır.

Prakasha ve Mirji (2017), $(k,\mu)-$ değme metrik manifoldları üzerinde $\mathcal{M}-$projektif eğrilik tensörünün özelliklerini incelemişlerdir. Sasakian olmayan (k,μ) $-$değme metrik manifold için $R(\xi,X).\mathcal{M} = 0$ ve $\mathcal{M}(\xi,X).S = 0$ koşullarını sağlayan bir sınıflandırma yapmışlardır. Bu koşularda belirtilen Riemann eğrilik tensörü R ile Ricci tensörü S ile göstermişlerdir. Ayrıca $(k,\mu)-$ değme metrik manifold M, genişletilmiş $\mathcal{M}$ $-$projektif eğrilik tensörünün yok edilmesiyle oluşan manifoldun Sasakian manifold olduğunu ispatlamışlardır.

Shah ve Shukla (2017), Sasaki manifoldları üzerinde quasi-conformal eğrilik tensörünün bazı eğrilik özellikleri incelemişlerdir. $R(X,Y).S = 0$ve$R(X,Y).W = 0$ eğrilik özelliklerini sağlayan bir $(2n+1)$ -boyutlu Sasakian manifoldunun bir Einstein manifold olduğunu kanıtlamışlardır.

Klepp (1984), Finsler geometrik nesneler teorisindeki kavramları kullanarak vektör demeti üzerinde hemen hemen çarpım Finsler yapıları ve konneksiyonları araştırmıştır.

Cheng ve Shen (2009), Riemann metriği ve 1-form ile tanımlanmış Finsler metriklerini çalışmışlardır. Sonra bu Finsler metriklerini izotropik S eğriliği ile karakterize etmişlerdir.

Sinha ve Yadav (1988), vektör demetleri üzerinde hemen hemen değme Finsler yapıları tanımlamışlardır. Sonra hemen hemen değme Finsler yapıların entegrasyon durumunu elde etmişlerdir.

Sinha ve Yadav (1989), diferansiyellenebilir bir manifold olan M üzerinde hemen hemen değme Finsler yapıyı ve hemen hemen para değme Finsler yapıyı birleştirmeye çalışmışlardır. Ayrıca tüm Finsler konneksiyonları birleşik yapı ile belirlemeye çalışmışlardır.

Sinha ve Yadav (1991), hemen hemen değme semi-simetrik metrik Finsler konneksiyonları V toplam uzayı üzerinde $V(M) = \{V, \pi, M\}$ vektör demeti ile tanımlamışlardır. Özellikle hemen hemen Sasakian semi-simetrik metrik ve Sasakian semi-simetrik Finsler konneksiyonları toplam uzayı üzerinde vektör demeti yaklaşımıyla incelemişlerdir.

Hasegawa, Yamauchi ve Shimada (1996), Finsler manifoldu üzerinde Sasakian yapıları tanımlamışlardır.

Sai Prasad (2008), Kenmotsu, P-Kenmotsu yapıları ve bu yapıların konneksiyonlarını vektör demeti üzerinde tanımlamıştır. Hemen hemen değme semi-simetrik metrik Finsler konneksiyonu ile hemen hemen Finsler konneksiyonu arasında ilişki kurmuştur. Kenmotsu ve P-Kenmotsu yapıların Finslermanifoldları üzerinde temel özelliklerini çalışmıştır.

Yaliniz ve Çalışkan (2013), hemen hemen değme Finsler yapıları vektör demeti üzerinde tanımlamışlardır. Hemen hemen değme Finsler yapının integrallenebilir tensör alanını incelemişlerdir. Sonra Sasakian Finsler manifoldların Riemann, Ricci, kesitsel eğriliklerini çalışmışlardır.

Çalışkan ve Yalınız (2016), tanjant demetleri üzerindeki Sasakian Finsler yapıların quasi-conformal eğrilik tensörünü ele almışlardır. $C^*(X^H, Y^H) = 0$ koşulunu sağlayan Sasakian Finsler manifoldlarını incelemişlerdir. Ayrıca Sasakian Finsler yapılar ile η −Einstein yapılar arasındaki ilişkileri araştırmışlardır.

Çalışkan (2017), tanjant demetleri üzerindeki Sasakian Finsler yapıların konharmonik eğrilik tensörünü çalışmıştır. Bu şekilde quasi-konharmonik flat, ξ −konharmonik flat, φ −konharmonik flat Sasakian Finsler yapılarını irdelemiştir.

Çalışkan ve Sağlamer (2018a), yatay ve dikey tanjant demeti difüzyonları üzerinde φ −tekrarlı Sasakian Finsler yapıları ve bu yapıların geometrik özelliklerini ele almışlardır.

Çalışkan ve Sağlamer (2018b), yatay ve dikey tanjant demetleri üzerinde genelleştirilmiş ve genişletilmiş genelleştirilmiş φ − tekrarlı Sasakian Finsler Sasakian Finsler yapıları ve bunların çeşitli geometrik özelliklerini araştırmışlardır.

Çalışkan ve Sağlamer (2018c), tanjant demetlerinin disribüsyonları üzerinde lokal olarak φ −quasi-conformal simetrik Sasakian Finsler yapıları tanıtmışlardır. Ayrıca 3 boyutlu yatay ve dikey Sasakian Finsler manifold örneği bu yapıların varlığını göstermiş ve belirtilen geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

4. BULGULAR

1. $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, Weyl projektif olarak flat ise Einstein manifoldudur ve sabit eğriliklidir.

2. $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, $\mathcal{M}$-projektif olarak flat ise bir Einstein manifoldudur ve sabit eğriliklidir.

3. $(2n+1)$-boyutlu bir Kenmotsu Finsler manifoldu $(M, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, hem Weyl projektif hem de $\mathcal{M}$-projektif olarak flat ise manifoldun Weyl projektif ve $\mathcal{M}$-projektif eğrilik tensörleri lineer bağımlıdır

4. $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $((M^0)^h, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$'ın; $\xi - \mathcal{M} -$ projektif olarak flat olması için, gerek ve yeter koşul $(M^0)^h$'ın Einstein manifold olmasıdır.

5. $(2n+1)$ -boyutlu bir Kenmotsu Finsler manifoldu, lokal olarak $\varphi - \mathcal{M}$ $-$projektif simetrik ise bu manifold bir Einstein manifoldudur ve sabit eğriliğe sahiptir.

6. $(2n+1)$ -boyutlu lokal olarak $\varphi - \mathcal{M} -$ projektif simetrik Kenmotsu Finsler manifoldu, lokal olarak φ $-$simetriktir.

7. $(2n+1)$ -boyutlu $\mathcal{M} -$ projektif semi-Simetrik Kenmotsu Finsler manifoldu, bir Einstein manifoldudur.

8. $(M^0)^h$, $(2n+1)$-boyutlu $\varphi - \mathcal{M}$ $-$Projektif olarak flat Kenmotsu Finsler manifoldu olsun. Bu durumda manifold, η $-$Einsteindır ve sabit eğriliğe sahiptir.

9. $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $(M, \varphi^H, \xi^H, \eta^H, G^H)$, quasi$-\mathcal{M}$ $-$projektif flat ise η $-$Einsteindır.

10. $(2n+1)$-boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu için $W(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ koşulunu sağlandığında aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$S(QU^H, Y^H) = -nS(U^H, Y^H) - \frac{n^2}{4} G(U^H, Y^H).$$

11. $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $(M^0)^h$, eğer $C(X^H, Y^H).\mathcal{M} = 0$ koşulunu sağlıyor ise skaler eğriliği $-\frac{n}{2}(2n+1)$ şeklindedir.

12. $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu $(M^0)^h$, eğer $W(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ koşulunu sağlıyor ise skaler eğriliği $r = -\frac{n}{2}(2n+1)$ şeklindedir ya da bir η-Einstein manifoldudur.

13. $(2n+1)$ -boyutlu Kenmotsu Finsler manifoldu, $C(\xi^H, Y^H).\widetilde{K} = 0$ koşulunu sağlıyorsa η-Einstein manifoldudur.

KAYNAKÇA

Antonelli, P. L. (2003). *Handbook of Finsler Geometry* (Vol. 1). Dordrecht: Kluver Academic Publishers.

Awodey, S. (2006). *Category Theory*. Oxford: Clarendon Press.

Ayar, G. ve Chaubey, S. K. (2019). M-projective curvature tensor over cosymplectic manifolds. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, *21*, 23-33.

Baishya, K. K. ve Chowdhury, P. R. (2016). On generalized quasi-conformal N(k,μ)-manifolds. *Commun. Korean Math. Soc*, *31*(1), 163-176.

Barman, A. (2015). Concircular curvature tensor of a semi-symmetric metric connection in a Kenmotsu manifold. *Thai Journal of Mathematics*, *13*(1), 245-257.

Bejancu, A. ve Farran, H. R. (2013). *Geometry of Pseudo-Finsler Submanifolds (Vol. 527)*. New York: Springer Science-Business Media.

Blair, D. E. (1971). Almost contact manifolds with killing structure tensors. *Pacific Journal of Mathematics*, *39*(2), 285-292.

Blair, D. E. (1976). *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin.

Blair, D. E. (1984). Critical associated metrics on contact manifolds. *Journal of the Australian Mathematical Society*, *37*(1), 82-88.

Blair, D. E. (2010). *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*. New York: Springer Science-Business Media.

Boothby, W. M. (1986). *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (Vol. 120). London: Academic press.

Bukusheva, A. V. ve Galaev, S. V. (2011). Almost contact metric structures defined by connection over distribution. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Mathematics, Informatics, Physics. Series III*, *4*(2), 13.

Caliskan, N. ve Yaliniz, A. F. (2016). Sasakian Finsler structures on diffusion of tangent bundles satisfying $C^*(X^H, Y^H) = 0$. *International Journal of Engineering Technology Science and Research, 3*(10), 1-3.

Caliskan, N. (2017). On conharmonic curvature tensor of Sasakian Finsler structures on tangent bundles. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, *67*(2), 282-290.

Caliskan, N. ve Saglamer, A. F. (2018a). $\varphi-$ recurrent Sasakian Finsler structures. *International Electronic Journal of Geometry*, *11*(2), 54-60.

Caliskan, N. ve Saglamer, A. F. (2018b). On generalized and extended generalized φ −recurrent Sasakian Finsler structures. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *22*, 493-497.

Caliskan, N. ve Saglamer, A. F. (2018c). Locally φ −quasiconformally symmetric Sasakian Finsler structures on tangent bundles. *Novi Sad J. Math*, *48*(1), 61-71.

Chaubey, S. K. ve Ojha, R. H. (2010). On the m-projective curvature tensor of a Kenmotsu manifold. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, *12*, 52-60.

Chaubey, S. K., Prakash, S. H. A. S. H. I., ve Nivas, R. (2012). Some properties of m-projective curvature tensor in Kenmotsu manifolds. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, *4*(3), 48-56.

Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*. Pure ve Applied Mathematics, No.22. New York: Marcel Dekker, Inc..

Cheng, X. ve Shen, Z. (2009). A class of Finsler metrics with isotropic S-curvature. *Israel Journal of Mathematics*, *169*(1), 317-340.

Cobzaş, S. (2006). Compact operators on spaces with asymmetric norm. *Stud. Univ. Babeş Bolyai Math., 51*(4), 69–87.

Dahl, M. (2006). A brief introduction to Finsler geometry.

Davidov, J. (2003). Almost contact metric structures and twistor spaces. *Houston J. Math*, *29*(3), 639-674.

De, A. (2010). On Kenmotsu manifold. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, *2*(3), 1-6.

De, U. C. ve De, K. (2012). On $\phi-$ concircularly symmetric Kenmotsu manifolds. *Thai Journal of Mathematics*, *10*(1), 1-11.

Dey, D. ve Majhi, P. (2018). On the quasi-conformal curvature tensor of an almost Kenmotsu manifold with nullity distributions. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, *33*(2), 255-268.

Dileo, G. ve Pastore, A. M. (2007). Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, *14*(2), 343-354.

Duggal, Krishan L. ve Bejancu, A. (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Finsler, P. (1918). *Über Kurven und Flächen in Allgemeinen Räumen*. PhD Thesis, University of Göttingen, Göttingen.

Gherici, B. (2019). Almost G-contact metric manifold. *International Journal of Maps in Mathematics-IJMM*, *2*(2), 175-186.

Gray, J. W. (1959). Some global properties of contact structures. *Annals of Mathematics*, 421-450.

Hasegawa, I., Yamauchi, K., & Shimada, H. (1996). Sasakian structures on Finsler manifolds. In Antonelli, P. L., & Miron, R. (Eds.), *Lagrange and Finsler geometry.* (pp. 75-80). Dordrecht: Springer Science-Business Media.

Haseeb, A., Siddiqi, M. D. ve Shahid, M. H. (2017). Quasi-conformal curvature tensor with respect to a semi-symmetric non-metric connection in a Kenmotsu manifold. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, *8*(3), 153-161.

Hong, S., Özgür, C. ve Tripathi, M. M. (2006).On some special classes of Kenmotsu manifolds. *Kuwait J. Sci. Eng*, *33*(2), 19-32.

Hui, S. K. (2013). On ϕ-pseudo symmetric Kenmotsu manifolds. *Novi Sad J. Math*, *43*(1), 89-98.

Janssens, D. ve Vanhecke, L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal*, *4*(1), 1-27.

Jeong, J. C., Lee, J. D., Oh, G. H. ve Park, J. S. (1990). On the contact corformal curvature tensor*. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, *27*(2), 133-142.

Jun, J. B., Kim, I. B. ve Kim, U. K. (1994). On 3-dimensional almost contact metric manifolds. *Kyungpook Math. J*, *34*(2), 293-301.

Jun, J. B., De, U. C. ve Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *J. Korean Math. Soc*, *42*(3), 435-445.

Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *24*(1), 93-103.

Kim, T. W. ve Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica*, *21*(4), 841-846.

Klepp, C. (1984). Almost product Finsler structures and connections on vector bundle. *Proc. of tlie third Nat. Sem. Flnsler Spaces, University of Brasov*,105-115.

Kobayashi, S. ve Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry (Vol. 1, No. 2).* New York: John Wiley-Sons.

Lang, S. (1972). *Differential Manifolds*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Miron, R. (1982). Vector bundles Finsler geometry. *In Proc. of the Nat. Seminar on Finsler spaces, Brasov* (pp. 147-188).

Morimoto, A. (1963). On normal almost contact structures. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, *15*(4), 420-436.

Olszak, Z. ve Rosca, R. (1991). Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds. *Publ. Math. Debrecen*, *39*(3-4), 315-323.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity (Vol. 103*). California: Academic press.

Özgür, C. ve De, U. C. (2006). On the quasi-conformal curvature tensor of a Kenmotsu manifold. *Mathematica Pannonica*, *17*(2), 221-228.

Özgür, C. ve Tripathi, M. M. (2007). On P-Sasakian manifolds satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor. *Turkish Journal of Mathematics*, *31*(2), 171-179.

Pokhariyal, G. P. ve Mishra, R. S. (1970).Curvature tensors and their relativistic significance.*Banaras Hindu Univercity Department of Matematics,* September 28, 105-108.

Prakasha, D. G. ve Mirji, K. K. (2017). On the $\mathcal{M}-$ Projective curvature tensor of (κ, μ) $-$contact metric manifold. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics,* 117-128.

Prasad, R. (2010). Quasi-conformal curvature on trans-Sasakian manifolds. *Proceedings of the Indian National Science Academy-Part A: Physical Sciences*, *76*(1), 7.

Sai Prasad, K. L. (2008). Kenmotsu and P-Kenmotsu Finsler structures and connections on vector bundle. *International Mathematical Forum*, Vol. 3, No. 17, pp. 837-846.

Sai Prasad, K. L. (2009). Certain classes of almost contact Riemannian manifolds. In *International Mathematical Forum*, Vol. 16, No. 4, pp. 773-778.

Saroja Devi, M. ve Singh, J. P. (2015). On a type of $\mathcal{M}$ $-$projective curvature tensor on Kenmotsu manifold. *International J. Of Math.Sci.& Engg.Appls,* Vol. 9, No. III, 37-49.

Sato, H. (1977). Remarks concerning contact manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *29*(4), 577-584.

Sasaki, S. (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *12*(3), 459-476.

Sasaki, S. ve Hatakeyama, Y. (1961). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure (II). *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *13*(2), 281-294.

Shah, R. J. ve Shukla, N. V. C. (2017). Quasi-conformal curvature tensor on Sasakian manifolds. *Journal of Institute of Science and Technology*, *22*(1), 94-98.

Shukla, S. S. ve Shukla, M. K. (2009). On φ-Ricci symmetric Kenmotsu manifolds. *Novi Sad J. Math*, *39*(2), 89-95.

Singh, R. N. ve Pandey, S. K. (2013).On the φ −Projective curvature tensor of- N(κ) −contact metric manifolds. *ISRN Geometry*.

Sinha, B. B. ve Yadav, R. K. (1988). On almost contact Finsler structures on vector bundle. *Indian J. pure appl. Math*, *19*(1), 27-35.

Sinha B. B. ve Yadav R. K. (1989). On almost unified contact Finsler structures and connections, *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics, 20*(9), 887-892.

Sinha, B. B. ve Srivastava, A. K. (1991). Curvatures on Kenmotsu manifold. *Indian J. pure appl. Math*, *22*(1), 23-28.

Sinha, B. B. ve Yadav, R. K. (1991). Almost contact semi symmetric metric Finsler connections on vector bundle. *Indian J. pure appl. Math*, *22*(1), 29-39.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi (1. Basım).*Ankara: Nobel Yayın.

Taleshian, A., Asghari, N. ve On, L. P. (2010). On LP-Sasakian manifolds satisfying certain conditions on the concircular curvature tensor. *Differential geometry-dynamical systems*, *12*, 228-232.

Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, *21*(1), 21-38.

Tripathi, M. M. ve Kim, J. S. (2004). On the concircular curvature tensor of a (κ, μ)-manifold. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, *9*(2), 104-114.

Ünal, İ., Sarı, R. ve Vanlı, A. T. (2018). Concircular curvature tensor on generalized kenmotsu manifolds. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 99-105.

Venkatesha, V. ve Vishnuvardhana, S. V. (2014). τ − curvature on Kenmotsu manifold. *J.T.S.,* Special Vol. 8, pp. 103-111.

Venkatesha, V., Arasaiah, A., Vishnuvardhana, S. V. ve Kumar, R. T. N. (2019). Some symmetric properties of Kenmotsu manifolds admitting semi-symmetric metric connection. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, *34*(1), 35-44.

Wang, Y. ve Liu, X. (2015). Locally symmetric CR-integrable almost Kenmotsu manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, *12*(1), 159-171.

Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications Of The General Theory Of Relativity.* New York: John Wiley-Sons.

Yaliniz, A. F. ve Çalışkan, N. (2013). Sasakian Finsler manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, *37*(2), 319-339.

Yano, K. (1940). Concircular geometry I. concircular transformations. *Proceedings of the Imperial Academy*, *16*(6), 195-200.

Yano, K. ve Bochner, S. (1953). *Curvature and Betti Numbers*. Princeton: Princeton University Press.

Yano, K. ve Ishihara, S. (1973). *Tangent and Cotangent Bundles.* New York: Marcel Dekker, Inc.

Yano K. ve Kon M. (1984). *Structures on Manifolds.* Singapore: World Scientific.

Yano, K. ve Sawaki, S. (1968). Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group. *Journal of Differential Geometry*, *2*(2), 161-184.

Zhen, G., Cabrerizo, J. L., Fernández, L. M. ve Fernández, M. (1997). On ξ-conformally flat contact metric manifolds. *Indian J. Pure Appl. Math*, *28*(6), 725-734.