T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA RİEMANN DELTA ve NABLA İNTEGRALİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA KARATAŞ

AĞUSTOS 2010
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA RİEMANN DELTA ve NABLA İNTEGRALİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TUĞBA KARATAŞ

UŞAK 2010

Tuğba KARATAŞ tarafından hazırlanan "**Zaman Skalasında Riemann Delta ve Nabla İntagrali**" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ ....

Mekanik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: 25/08/2010

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa Yalçın ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tuğba KARATAŞ

ZAMAN SKALASINDA RİEMANN DELTA VE NABLA İNTEGRALİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba KARATAŞ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2010

ÖZET

Son yıllarda büyük ilgi odağı olan Zaman Skalası kavramı ilk olarak 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora çalışmasında sürekli ve kesikli analizi birleştirilmek için ortaya atılmıştır. Örneğin, diferensiyel denklemler ile fark denklemleri bu çalışma ile dinamik denklemler adı altında genelleştirilmiştir.

Bu tezde, Riemann Delta ve Nabla integrali incelenmiştir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların Riemann Delta integrali ifade edilmiş, benzer şekilde Riemann Nabla integrali ile ilgili kavramlar kısaca tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, zaman skalasında Riemann integralinin özellikleri verilmiştir. İntegralin Darboux tanımı incelenmiştir. Ayrıca zaman skalasında Riemann integral tanımı verilmiş, Riemann ve Darboux integral tanımlarının eşit olduğu ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde ise, zaman skalasında integral hesabının temel teoremleri verilmiştir.

Bilim Kodu : 39A10
Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, Hilger türev, Riemann delta integrali
Sayfa Adedi : 51
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

THE RİEMANN DELTA AND NABLA İNTEGRALS ON TİME SCALES

(M. Sc. Thesis)

Tuğba KARATAŞ

UŞAK UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
August 2010

ABSTRACT

The theory of time scales, which has recently received a lot of attention, was introduced by Stefan Hilger in his PhD thesis in 1988 in order to unify continuous and discrete analysis. For example, in this study differential equations and difference equations under the name of the dynamic equations is generalized.

In this thesis, we consider Riemann Delta and Nabla integration on time scales. In chapter second, the basic definitions and theorems are given related to this subject.

In third chapter, real-valued bounded functions defined on $[a,b]$ of Riemann delta integration is stated; smilarly, the concepts of nabla integral are given briefly.

In forth chapter, the concepts of Riemann integral on time scales are given. The Darboux definition of the integral is considered. Here we give also the Riemann definition of the integral on time scales and we prove the equivalence of the Darboux and Riemann definitions of the integral.

Fundamental theorems of calculus on time scales are given in chapter fifth.

Science Code : 39A10
Key Words : Time Scale, Hilger derivative, Riemann delta integral
Page Number : 51
Adviser : Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren, yönlendiren önerilerde bulunarak değerli zamanını benden esirgemeyen Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit Seyyidoğlu'na ve desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tam sayılar kümesi
$[a,b]$	Kapalı aralık
P	Bir aralığın parçalanması
$\mathbb{P}$	$[a,b]$ aralığının tüm P parçalanmalarının kümesi
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Sıçrama fonksiyonu
f^{Δ}	f fonksiyonunun delta türevi
$f^{\Delta^{\sigma}}$	f fonksiyonunun delta türevinin ileri sıçraması
$f^{\Delta\Delta}$	f fonksiyonunun ikinci delta türevi
M_i	$M_i = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$
m_i	$m_i = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$
$Ü(f,P)$	Üst Darboux Δ-toplamı
$A(f,P)$	Alt Darboux Δ-toplamı
$R(f,P)$	Riemann toplamı
$\int_a^b f(t)\Delta t$	Darboux Δ-integrali
$\int_a^b f(t)\nabla t$	Darboux ∇-integrali

1.GİRİŞ

Son zamanlarda dikkat çeken yeni çalışma alanlarından birisi de zaman skalası teorisidir. Zaman skalası 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Stefan Hilger kesikli analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla bu teoriyi ortaya atmıştır. Bunun için her iki analizde kullanabileceği kümeleri göz önüne almış ve bu kümelere zaman skalası adını vermiştir. Daha sonra görüleceği gibi bu teori, zaman skalası reel sayılar cümlesi alındığında sürekli analiz ile, tamsayılar kümesi olarak alındığında ise kesikli analiz ile çakışmaktadır.

Reel sayıların boştan farklı kapalı alt kümesine **zaman skalası** denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Örneğin; $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $[2,3]\cup\{4\}\cup[5,8]$, Cantor kümesi gibi $\mathbb{R}$ nin kapalı altkümeleri birer zaman skalasıdır. Fakat $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, (0,1) kümeleri kapalı olmadıklarından birer zaman skalası değildir. Neden, reel sayıların "kapalı alt kümeleri" diye bir soru akıllara gelebilir. Buna cevap olarak reel sayıların açık alt kümelerinin yığılma noktalarının hepsini içermemesi verilebilir.

Sürekli ve kesikli analizdeki; süreklilik, türev, integral gibi birçok kavram ve bunlara bağlı olarak birçok teorem, zaman skalasında yeniden inşa edilebilmektedir. Böylece, zaman skalası teorisinde elde edilen sonuçlar, klasik teorideki sonuçlara nazaran çok daha genel olmakta ve klasik analizdeki sonuçlar, sırasıyla $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ alınması durumlarına karşılık gelmektedirler. Kısaca sıçrama operatörlerinin tanımları ile bu durumları örneklendirebiliriz. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t\in\mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ olmak üzere $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}$ ile, geri sıçrama operatörü $\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ olmak üzere $\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{T}:s<t\}$ ile tanımlanır. Eğer $\sigma(t)>t$ ise t noktasına *sağ saçılmış nokta*, eğer $\rho(t)<t$ ise t noktasına *sol saçılmış nokta* denir. $t<\sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t)=t$ ise t noktasına *sağ yoğun nokta*, eğer $t>\inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t)=t$ ise t noktasına *sol yoğun nokta* denir. Burada özel olarak, $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ alınırsa, her $t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t)=t=\rho(t)$ olur. Diğer taraftan her $t\in\mathbb{T}$ için $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ alınırsa, $\sigma(t)=t+1$ ve $\rho(t)=t-1$ olur.

Bu çalışmada, zaman skalasında temel kavramlar ele alınarak, Rieman Delta ve Nabla intagralleri verildi. Riemann integralinin özellikleri ve integral hesabının temel teoremleri incelendi.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanımlar, teoremler, bazı eşitsizlikler ve temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.1. Reel sayıların boş olmayan keyfi kapalı bir alt cümlesine *zaman skalası* adı verilir [1].

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$, yani, reel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tamsayılar zaman skalasına örnek olarak verilebilir. Zaman skalası genel olarak $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

ve geri sıçrama operatörü $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer t noktası, $\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum noktası ise $\sigma(t) = t$, t noktası $\mathbb{T}$ nin minimum noktası ise $\rho(t) = t$ olarak tanımlanır. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına *sağ saçılmış nokta*, eğer $\rho(t) < t$ ise t noktasına *sol saçılmış nokta* denir. t noktası hem sağ saçılmış nokta hem de sol saçılmış nokta ise *izole nokta* adını alır. $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına *sağ yoğun nokta*, eğer $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına *sol yoğun nokta* denir. Hem sağ yoğun hem de sol yoğun noktalara *yoğun nokta* adı verilir. $\mu(t) = \sigma(t) - t$ şeklinde tanımlanan $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna *sıçrama fonksiyonu* denir. $\mathbb{T}$ zaman skalası , m sol saçılmış maksimum noktasına sahip ise $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - \{m\}$ olarak aksi halde $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$$

biçiminde tanımlanır [1]. Noktaların sınıflandırılması ise

t sağ saçılmış nokta ise $t < \sigma(t)$

t sağ yoğun nokta ise $t = \sigma(t)$

t sol saçılmış nokta ise $\rho(t) < t$

t sol yoğun nokta ise $\rho(t) = t$

t izole nokta ise $\rho(t) < t < \sigma(t)$

t yoğun nokta ise $\rho(t) = t = \sigma(t)$

ile tanımlanır[1].

Örnek 2.3.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise her $t \in \mathbb{R}$ noktası için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

olacağından her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğun noktadır. Böylece μ fonksiyonu, her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

olarak bulunur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda, her t tamsayısı için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \ldots\} = t+1$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{\ldots, t-3,\ t-2,\ t-1\} = t-1$$

olacağından, $\rho(t) < t < \sigma(t)$ olur. Dolayısıyla her $t \in \mathbb{Z}$ noktası bir izole noktadır. Bu durumda μ fonksiyonu her $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$$

olur.

Örnek 2.4. Aşağıda verilen zaman skalaları için σ, ρ ve μ fonksiyonlarını bulalım.

(i) $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

(ii) $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$

Çözüm:

(i) $\mathbb{T}=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$ zaman skalasında $\sigma\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}$ olmak üzere,

$$\sigma(t)=\begin{cases}\frac{t}{1-t}, t\neq 1 & \text{ise}\\ 1 \quad , t=1 & \text{ise}\end{cases}$$

elde edilir. Burada $\sigma(1)=1$ olup $t=1$ noktası $\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum noktasıdır.

$\rho\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ olduğundan her $t\in\mathbb{T}$ için

$$\rho(t)=\frac{t}{t+1}$$

elde edilir. $\rho(0)=0$ olmak üzere, $t=0$ noktası $\mathbb{T}$ zaman skalasının minimum noktasıdır.

$$\mu(t)=\begin{cases}\frac{t^2}{1-t},\ t\neq 1 \text{ ise,}\\ 0\ ,\ t=1 \text{ ise,}\end{cases}$$

bulunur.

(ii) $\mathbb{T}=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{N}_0\right\}$ olmak üzere her $t\in\mathbb{T}$ için

$$\sigma(t)=t+\frac{1}{2}$$

$$\rho(t)=\begin{cases}0\ , t=0 & \text{ise,}\\ t-\frac{1}{2}, t\neq 0 & \text{ise,}\end{cases}$$

$$\mu(t)=\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.5. $\mathbb{T}$ zaman skalasındaki a ve b noktaları için $a\leq b$ olsun. $[a,b]$ aralığı,

$$[a,b]=\{t\in\mathbb{T}:a\leq t\leq b\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde açık aralıklar ve yarı açık aralıklar da tanımlanabilir. Eğer b sol yoğun nokta ise $[a,b]^{\kappa}=[a,b]$ ve eğer b sol saçılmış nokta ise $[a,b]^{\kappa}=[a,b)$ dir [1].

2.1. Diferensiyellenebilirlik

Şimdi bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu gözönüne alalım ve bir $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında f fonksiyonunun delta türevini tanımlayalım.

Tanım 2.6. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ sayısı ve t nin bir U komşuluğundaki her s elemanı için

$$\left|\,[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)\,[\sigma(t)-s]\,\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

olacak şekilde $f^{\Delta}(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki *delta türevi* veya *Hilger türevi* denir. Burada t noktasının bir U komşuluğu $\delta>0$ olmak üzere $U=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$ şeklindedir. Eğer her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $f^{\Delta}(t)$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde *delta diferensiyellenebilirdir* denir [1].

$$f^{\Delta}:\mathbb{T}^{\kappa}\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu f fonksiyonunun $\mathbb{T}^{\kappa}$ daki türevi olarak adlandırılır [1].

Örnek 2.7. f^{Δ} fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

Çözüm. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için f fonksiyonunun $f_1^{\Delta}(t)$ ve $f_2^{\Delta}(t)$ gibi iki farklı delta türevinin olduğunu kabul edelim. O halde, $\varepsilon>0$ sayısına karşılık t nin öyle bir U komşuluğu vardır ki, her $s\in U$ için

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f_1^{\Delta}(t)\,[\sigma(t)-s]\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|$$

ve

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f_2^{\Delta}(t)\,[\sigma(t)-s]\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|$$

olur. Her $s\in U(t)$ için

$$\begin{aligned}\left|f_1^{\Delta}(t)-f_2^{\Delta}(t)\right|&=\left|f_1^{\Delta}(t)-\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}+\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-f_2^{\Delta}(t)\right|\\&\le\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-f_1^{\Delta}(t)\right|+\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-f_2^{\Delta}(t)\right|\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

bulunur. Bu da

$$f_1^{\Delta}(t) = f_2^{\Delta}(t)$$

demektir. O halde delta türevi iyi tanımlıdır.

Örnek 2.8.

(i) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ sabit$)$ ile tanımlanırsa $f^{\Delta}(t) = 0$ dır. Gerçekten delta türevin tanımından, her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $s \in U$ için

$$|\, f(\sigma(t)) - f(s) - 0 \cdot [\sigma(t) - s]\,| = |\,\alpha - \alpha\,| = 0 \leq \varepsilon |\,\sigma(t) - s\,|$$

olur.

(ii) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ile tanımlanırsa $f^{\Delta}(t) = 1$ dir. Gerçekten de her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $s \in U$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - 1[\sigma(t) - s]\,| = |\,\sigma(t) - s - \sigma(t) + s\,| = 0 \leq \varepsilon |\,\sigma(t) - s\,|$$

bulunur.

Örnek 2.9. $f(t) = t^2$ ile tanımlanan $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $t \in \mathbb{T}$ için f^{Δ} fonksiyonunu bulalım.

Çözüm: Verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için t noktasının bir $U = \mathbb{T} \cap (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ komşuluğunu göz önüne alalım. Her $s \in U$ için

$$\begin{aligned}
|f(\sigma(t)) - f(s) - (t + \sigma(t))(\sigma(t) - s)| &= \left|[\sigma(t)]^2 - s^2 - t\sigma(t) + ts - [\sigma(t)]^2 + \sigma(t)s\right| \\
&= \left|-s^2 + ts - t\sigma(t) + s\sigma(t)\right| \\
&= |(\sigma(t) - s)(s - t)| \\
&\leq |\,\sigma(t) - s\,||s - t\,| \\
&\leq \varepsilon |\,\sigma(t) - s\,|
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t)$ olur.

Teorem 2.10. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun.

(i) f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ise, f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ saçılmış nokta ise, f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

olur.

(iii) t sağ yoğun nokta ise f fonksiyonun t noktasında diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin var olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

(iv) f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ise

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat:

(i) Kabul edelim ki f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir olsun. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan $\varepsilon\in(0,1)$ alalım ve

$$\varepsilon^{*}=\varepsilon\left[1+\left|f^{\Delta}(t)\right|+2\mu(t)\right]^{-1}$$

olarak tanımlansın. O halde $\varepsilon^{*}\in(0,1)$ olur. Tanım 2.6 dan t noktasının öyle bir U komşuluğu vardır ki, her $s\in U$ için

$$\left|\,[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)\,[\sigma(t)-s]\,\right|\le\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $s\in U\cap\left(t-\varepsilon^{*},t+\varepsilon^{*}\right)$ için

$$\begin{aligned}|f(t)-f(s)|&=\left|\{f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\}-\{f(\sigma(t))-f(t)-\mu(t)f^{\Delta}(t)\}+(t-s)f^{\Delta}(t)\right|\\&\le\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|+\varepsilon^{*}\mu(t)+|t-s|\left|f^{\Delta}(t)\right|\\&\le\varepsilon^{*}|\sigma(t)-t+t-s|+\varepsilon^{*}\mu(t)+|t-s|\left|f^{\Delta}(t)\right|\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon^*\left(\mu(t)+|t-s|+\mu(t)+\left|f^{\Delta}(t)\right|\right)$$
$$< \varepsilon^*\left(1+\left|f^{\Delta}(t)\right|+2\mu(t)\right)$$
$$= \varepsilon$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonun t noktasında sürekli olduğu ispat edilmiş olur.

(ii) Kabul edelim ki f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ saçılmış nokta olsun. Süreklilikten,

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

elde edilir. Verilen $\varepsilon>0$ sayısı için t nin öyle bir U komşuluğu vardır ki, her $s\in U$ için

$$\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\right|\leq\varepsilon$$

kalır. Bu ise,

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

olması demektir.

(iii) Kabul edelim ki f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ve t sağ yoğun nokta olsun. $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir olduğundan t nin öyle bir U komşuluğu vardır ki, her $s\in U$ için

$$\left|\,[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)\,[\sigma(t)-s]\,\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olur. $\sigma(t)=t$ olduğundan her $s\in U$ için

$$\left|[f(t)-f(s)]-f^{\Delta}(t)(t-s)\right|\leq\varepsilon\,|\,t-s\,|$$

yazılabilir. $s\neq t$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafını $|\,t-s\,|$ ye bölersek

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-f^{\Delta}(t)\right|\leq\varepsilon$$

bulunur. Buradan ise,

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

eşitliği elde edilir.

Karşıt olarak, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ sağ yoğun nokta ve $\lim_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limiti var olsun.

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\mathrm{L}$$

diyelim. Bu taktirde $\varepsilon>0$ için t noktasının öyle bir U komşuluğunu bulabiliriz ki her $s\in U$ için

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-\mathrm{L}\right|\leq\varepsilon$$

olur. Her iki tarafı $|t-s|$ ile çarparsak her $s\in U$ için

$$|f(t)-f(s)-\mathrm{L}[t-s]|\leq\varepsilon|t-s|$$

bulunur. $\sigma(t)=t$ olduğundan

$$|f(\sigma(t))-f(s)-\mathrm{L}[\sigma(t)-s]|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olur. Buradan,

$$\mathrm{L}=f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olduğu görülür.

(iv) Eğer $\sigma(t)=t$ ise, bu taktirde,

$$\mu(t)=\sigma(t)-t=t-t=0$$

ve

$$f(\sigma(t))=f(t)=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer $\sigma(t)>t$ ise, (ii) den

$$\begin{aligned}f(\sigma(t))&=f(t)+\mu(t)\,\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\\&=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)\end{aligned}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi en iyi bilinen zaman skalaları olan reel ve tam sayılarda verilen bir f fonksiyonu için delta diferensiyellenebilir olma durumlarına bakalım.

Örnek 2.11.

(i) $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise, Teorem 2.10 (iii) den $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $t\in\mathbb{R}$ için

$$f'(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limitinin var olması, f fonksiyonunun t noktasında delta diferensiyellenebilir olduğunu ifade eder. Bu durumda f fonksiyonunun delta türevi

$$f'(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=f^{\Delta}(t)$$

bulunur.

(ii) Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise Teorem 2.10 (ii) den, f fonksiyonu $t\in\mathbb{Z}$ noktasında delta diferensiyellenebilirdir ve bu diferensiyel

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+1)-f(t)}{1}=f(t+1)-f(t)=\Delta f(t)$$

şeklindedir. Eşitliğin sağındaki Δ, ileri fark operatörünü göstermektedir.

Örnek 2.12. Aşağıda verilen $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının yanlarında verilen zaman skalalarındaki türevlerini bulunuz.

(i) $f(t)=\sigma(t),\mathbb{T}=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$,

(ii) $f(t)=t^2$, $\mathbb{T}=\left\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}_0\right\}$.

Çözüm:

(i) Örnek 2.4 (i) den $t\in\mathbb{T}-\{1\}$ için $\sigma(t)=\frac{t}{1-t}$ idi. $\sigma(t)$ fonksiyonu $t\neq 1$ noktası için süreklidir. Teorem 2.10 (ii) den

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

yazılabilir. O halde

$$\sigma^{\Delta}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sigma(\sigma(t))-\sigma(t)}{\sigma(t)-t}=\dfrac{1}{1-2t}, & t\neq 1, t\neq\dfrac{1}{2}\\[2ex] 0, & t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

olur. Teorem 2.10 (iii) den $t=0$ sağ yoğun nokta olduğundan

$$\sigma^{\Delta}(0)=\lim_{s\to 0}\frac{\sigma(0)-\sigma(s)}{0-s}=\lim_{s\to 0}\frac{\sigma(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1-s}=1$$

bulunur.

(ii) $\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{T}:s>t\}=\sqrt{t^2+1}$ ve $f(t)=t^2$ fonksiyonu t noktasında sürekli ve $\sigma(t)>t$ olduğundan Teorem 2.10 (ii) den

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f\left(\sqrt{t^2+1}\right)-t^2}{\sigma(t)-t}=\frac{t^2+1-t^2}{\sqrt{t^2+1}-t}=\sqrt{t^2+1}+t$$

elde edilir.

Teorem 2.13. $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında diferensiyellenebilir olsunlar. Bu taktirde,

(i) $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilirdir ve bu fonksiyonun diferensiyeli

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

şeklindedir.

(ii) Her α sabiti için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir olup

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

eşitliği vardır.

(iii) $f g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilirdir ve

$$(f g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

eşitlikleri sağlanır.

(iv) Eğer $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilirdir. Üstelik,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

olur.

(v) Eğer $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir olup

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat: Varsayalım ki f ve g fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında delta diferensiyellenebilir olsunlar.

(i) $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde t noktasının öyle bir U_1 komşuluğu vardır ki, her $s \in U_1$ için

$$\left| \left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left|\sigma(t) - s\right|$$

kalır. Benzer şekilde t noktasının öyle bir U_2 komşuluğu vardır ki, her $s \in U_2$ için

$$\left| \left[g(\sigma(t)) - f(s)\right] - g^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right] \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \left|\sigma(t) - s\right|$$

yazılabilir. $U = U_1 \cap U_2$ olsun. O halde, her $s \in U$ için

$$\left|(f+g)(\sigma(t)) - (f+g)(s) - \left(f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)\right)\left(\sigma(t) - s\right)\right|$$

$$= \left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) + g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right|$$

$$\leq \left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| + \left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t) - s\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t) - s\right|$$

$$= \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|$$

bulunur. Böylece $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun t noktasında diferensiyellenebilir olduğu ve

$$(f+g)^{\Delta} = f^{\Delta} + g^{\Delta}$$

eşitliğinin sağlanması gerektiği gösterilmiş olur.

(ii) $\alpha = 0$ için $(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t)$ olduğu açıktır. $\alpha \neq 0$ ise her $\varepsilon > 0$ sayısı için f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir olduğundan,

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\left|\sigma(t) - s\right|$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $|\alpha|$ ile çarpılırsa, her $s \in U$ için

$$\left|\alpha f(\sigma(t)) - \alpha f(s) - \alpha f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|$$

$$\left|(\alpha f)(\sigma(t))-(\alpha f)(s)-\alpha f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

elde edilir. O halde,

$$\alpha f^{\Delta}(t)=(\alpha f)^{\Delta}(t)$$

olur.

(iii) $\varepsilon\in(0,1)$ ve $\varepsilon^{*}=\varepsilon\left[1+|f(t)|+|g(\sigma(t))|+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]^{-1}$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon^{*}\in(0,1)$ olur. t noktasının öyle U_1,U_2 ve U_3 komşulukları bulunabilir ki, her $s\in U_1$ için

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|$$

ve her $s\in U_2$ için

$$\left|g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|$$

olur. Teorem 2.10 (i) den, her $s\in U_3$ için

$$|f(t)-f(s)|\leq\varepsilon^{*}$$

yazılabilir. $U=U_1\cap U_2\cap U_3$ ve $s\in U$ olsun.

$$\left|(f\,g)(\sigma(t))-(f\,g)(s)-\left[f^{\Delta}(t)\,g(\sigma(t))+f(t)g^{\Delta}(t)\right](\sigma(t)-s)\right|$$

$$=\Big|\left[f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right]g(\sigma(t))+\left[g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right]f(t)$$

$$+\left[g(\sigma(t))-g(s)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right]\left[f(s)-f(t)\right]+(\sigma(t)-s)g^{\Delta}(t)[f(s)-f(t)]\Big|$$

$$\leq\ \varepsilon^{*}|\sigma(t)-s||g(\sigma(t))|+\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s||f(t)|+\varepsilon^{*}\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|+\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|\left|g^{\Delta}(t)\right|$$

$$=\ \varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|\left[|g(\sigma(t))|+|f(t)|+\varepsilon^{*}+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]$$

$$\leq\ \varepsilon^{*}|\sigma(t)-s|\left[1+|f(t)|+|g(\sigma(t))|+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]$$

$$=\ \varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olur. Buna göre, t noktasında

$$(f\,g)^{\Delta}=f^{\Delta}g^{\sigma}+f\,g^{\Delta}$$

olmalıdır.

(iv) f fonksiyonu t noktasında diferensiyellenebilir ise

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=f^{\Delta}(t)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{\frac{1}{f(\sigma(t))}-\frac{1}{f(s)}}{\sigma(t)-s}&=\lim_{s\to t}\frac{-\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{f(\sigma(t))f(s)}}{\sigma(t)-s}\\&=\left(\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}\right)\left(\lim_{s\to t}\frac{-1}{f(\sigma(t))f(s)}\right)\\&=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(\sigma(t))f(t)}\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ olsun. Teorem 2.13 (iii) ve (iv) den bulunur.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)&=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)\\&=f(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))}\\&=-f(t)\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}+f^{\Delta}(t)\frac{1}{g(\sigma(t))}\\&=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}\end{aligned}$$

Örnek 2.14. Eğer x,y ve z fonksiyonları t noktasında delta diferensiyellenebilir ise,

$$(x\,y\,z)^{\Delta}=x^{\Delta}yz+x^{\sigma}y^{\Delta}z+x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}$$

olduğunu gösterelim. Bu formülü n tane fonksiyon için genelleştirelim.

Çözüm: Öncelikle Teorem 2.13 (iii) den $(x\,y)^{\Delta}=x^{\Delta}y+x^{\sigma}y^{\Delta}$ yazılabilir. Buradan tekrar Teorem 2.13 (iii) nin özelliklerini kullanırsak

$$\begin{aligned}[(xy)z]^{\Delta}&=(xy)^{\Delta}z+(xy)^{\sigma}z^{\Delta}\\&=\left(x^{\Delta}y+x^{\sigma}y^{\Delta}\right)z+(xy)^{\sigma}z^{\Delta}\\&=x^{\Delta}yz+x^{\sigma}y^{\Delta}z+x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $[xyzp]^{\Delta}$ türevini hesaplayalım. p fonksiyonu t noktasında delta diferensiyellenebilir olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
[xyzp]^{\Delta} &= [(xy)(zp)]^{\Delta} \\
&= (xy)^{\Delta}(zp) + (xy)^{\sigma}(zp)^{\Delta} \\
&= \left(x^{\Delta}y + x^{\sigma}y^{\Delta}\right)(zp) + (xy)^{\sigma}\left(z^{\Delta}p + z^{\sigma}p^{\Delta}\right) \\
&= x^{\Delta}yzp + x^{\sigma}y^{\Delta}zp + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}p + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\sigma}p^{\Delta}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde n tane fonksiyonun çarpımı için

$$[x_1x_2\ldots x_n]^{\Delta} = x_1{}^{\Delta}x_2\ldots x_n + x_1{}^{\sigma}x_2{}^{\Delta}x_3\ldots x_n + \ldots + x_1{}^{\sigma}x_2{}^{\sigma}\ldots x_{n-1}{}^{\sigma}x_n{}^{\Delta}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu ifade daha kısa olarak,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\Delta} = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\sigma}\right)x_k^{\Delta}\left(\prod_{i=k+1}^{n} x_i\right)$$

şeklinde gösterilebilir.

Teorem 2.15. α sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun.

(i) $f(t) = (t-\alpha)^m$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun Δ-türevi,

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}$$

şeklindedir.

(ii) $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m}$ olarak tanımlanan g fonksiyonu için $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$ ise,

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}(t-\alpha)^{\nu+1}}$$

olur [1].

İspat: (i) yi tümevarım metodu ile ispatlayalım. Eğer $m=1$ ise $f(t) = t-\alpha$ olmak üzere Örnek 2.7 (i), (ii) ve Teorem 2.13 (i) den $f^{\Delta}(t) = 1$ olduğu açıktır. Şimdi $f(t) = (t-\alpha)^m$ için $f^{\Delta}(t) = \sum_{\nu=0}^{m-1}(\sigma(t)-\alpha)^{\nu}(t-\alpha)^{m-1-\nu}$ sağlandığını kabul edelim ve bunun $m+1$ için sağlandığını gösterelim. $F(t) = (t-\alpha)^{m+1} = (t-\alpha)f(t)$ olsun. Teorem 2.13 (iii) den yararlanarak

$$
\begin{aligned}
F^{\Delta}(t) &= f(\sigma(t)) + (t-\alpha) f^{\Delta}(t) \\
&= (\sigma(t)-\alpha)^m + (t-\alpha)\sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu} (t-\alpha)^{m-1-\nu} \\
&= (\sigma(t)-\alpha)^m + \sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu} (t-\alpha)^{m-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{m} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu} (t-\alpha)^{m-\nu}
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

(ii) $g(t) = \dfrac{1}{(t-\alpha)^m} = \dfrac{1}{f(t)}$ fonksiyonu için Teorem 2.13 (iv) den, $(t-\alpha)(\sigma(t)-\alpha) \neq 0$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
g^{\Delta}(t) &= -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t) f(\sigma(t))} \\
&= -\frac{\sum_{\nu=0}^{m-1} (\sigma(t)-\alpha)^{\nu} (t-\alpha)^{m-1-\nu}}{(t-\alpha)^m (\sigma(t)-\alpha)^m} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{(t-\alpha)^{\nu+1} (\sigma(t)-\alpha)^{m-\nu}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Örnek 2.16. $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere, $f(t) = t^2$ nin türevi,

$$
f^{\Delta}(t) = \left(t^2\right)^{\Delta} = (t \cdot t)^{\Delta} = 1 \cdot t + t^{\sigma} \cdot 1 = t + \sigma(t)
$$

ve $g(t) = \dfrac{1}{t}$ nin türevi,

$$
g^{\Delta}(t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\Delta} = -\frac{t^{\Delta}}{t \cdot t^{\sigma}} = -\frac{1}{t\sigma(t)}
$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.17. Bir $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için f^{Δ} diferensiyeli mevcut olmak üzere, f fonksiyonunun $\mathbb{T}^{\kappa^2} = \left(\mathbb{T}^{\kappa}\right)^{\kappa}$ üzerindeki ikinci mertebeden türevi

$$
f^{\Delta\Delta} = \left(f^{\Delta}\right)^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}
$$

olup, benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevler

$$f^{\Delta^n}:\mathbb{T}^{\kappa^n}\to\mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $t\in\mathbb{T}$ için

$$\sigma^2(t)=\sigma(\sigma(t))$$

ve

$$\rho^2(t)=\rho(\rho(t))$$

veya genel olarak $n\in\mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ yukarıda ifade edildiği gibi tanımlanabilir. Bununla birlikte, yukarıdaki tanımlamalar için

$$\rho^0(t)=\sigma^0(t)=t$$

$$f^{\Delta^0}=f$$

$$\mathbb{T}^{\kappa^0}=\mathbb{T}$$

olarak tarif edilir [1].

Örnek 2.18. Keyfi bir zaman skalasında aşağıda verilen fonksiyonlar için ikinci mertebeden türevleri bulalım.

(i) $f(t)=1$; **(ii)** $f(t)=t$; **(iii)** $f(t)=t^2$.

Çözüm:

(i) $f(t)=1$ ise $f^{\Delta}(t)=0$ olup, buradan $f^{\Delta\Delta}(t)=0$ olduğu açıktır.

(ii) $f(t)=t$ olmak üzere $f^{\Delta}(t)=1$, dolayısıyla $f^{\Delta\Delta}(t)=(1)^{\Delta}=0$ bulunur.

(iii) $f(t)=t^2$, $f^{\Delta}(t)=t+\sigma(t)$ idi. Teorem 2.13 (i) den

$$f^{\Delta\Delta}(t)=[t+\sigma(t)]^{\Delta}=1+\sigma^{\Delta}(t)$$

bulunur.

Örnek 2.19. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ olmak üzere, $f(t)=t^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun $\mathbb{T}=\frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ zaman skalasında $f^{\Delta\Delta}$ türevini bulalım.

Çözüm: $f(t)=t^2$ fonksiyonunun birinci delta türevinin $f^{\Delta}(t)=2t+\frac{1}{2}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Teorem 2.13 (i) ve (ii) den yararlanarak $f(t)=t^2$ fonksiyonunun ikinci türevi,

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta} &= \left[f^{\Delta}(t)\right]^{\Delta} \\ &= \left[2t+\frac{1}{2}\right]^{\Delta} \\ &= (2t)^{\Delta}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta} \\ &= 2+0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.20. f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden türevlenebilir olmalarına rağmen $f\,g$ çarpım fonksiyonu genelde ikinci mertebeden türevlenemeyebilir. Biz biliyoruz ki çarpımın türevi;

$$(f\,g)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

şeklinde idi. Eğer f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden türevlenebilir ve f^{σ} diferensi-yellenebilir ise,

$$\begin{aligned} (f\,g)^{\Delta\Delta} &= \left(f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}\right)^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + \left(f^{\Delta\sigma}+f^{\sigma\Delta}\right)g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

olur. Burada $f^{\Delta^{\sigma}}$ yerine genellikle $f^{\Delta\sigma}$ gösterimi kullanılır.

Teorem 2.21 (Leibniz Formülü). $S_k^{(n)}$ ile k tane σ, $n-k$ tane Δ dan oluşan tüm kombinasyonların kümesini gösterelim. Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcut ise $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$(f\,g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda \in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k} \tag{2.22}$$

olur [1].

İspat: İspatı tümevarım metodu ile yapalım. Öncelikle, eğer $n=1$ ise (2.22) doğrudur (Örnek 2.20 den). Kabul edelim ki (2.22) eşitliği, $n=m\in\mathbb{N}$ için doğru olsun. Teorem 2.13 (i) ve (iii) den yararlanarak, $n=m+1$ için

$$(f\,g)^{\Delta^{m+1}}=\left\{\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}}f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k}\right\}^{\Delta}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\left\{\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}}f^{\Lambda}\right)^{\sigma}g^{\Delta^{k+1}}+\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}}f^{\Lambda}\right)^{\Delta}g^{\Delta^k}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\left(\sum_{\Lambda\in S_{k-1}^{(m)}}f^{\Lambda\sigma}\right)g^{\Delta^k}+\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}}f^{\Lambda\Delta}\right)g^{\Delta^k}$$

$$=\left(\sum_{\Lambda\in S_m^{(m)}}f^{\Lambda\sigma}\right)g^{\Delta^{m+1}}+\left(\sum_{\Lambda\in S_0^{(m)}}f^{\Lambda\Delta}\right)g+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_{k-1}^{(m)}}f^{\Lambda\sigma}+\sum_{\Lambda\in S_k^{(m)}}f^{\Lambda\Delta}\right)g^{\Delta^k}$$

$$=\left(\sum_{\Lambda\in S_{m+1}^{(m+1)}}f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^{m+1}}+\left(\sum_{\Lambda\in S_0^{(m+1)}}f^{\Lambda}\right)g+\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m+1)}}f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(m+1)}}f^{\Lambda}\right)g^{\Delta^k}$$

bulunur. Böylece, (2.22) eşitliğinin her $n\in\mathbb{N}_0$ için sağlandığı gösterilmiş olur.

2.2. Ortalama Değer Sonuçları

Tanım 2.22. Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyon ve $t_0\in\mathbb{T}\setminus\{\max\mathbb{T}\}$ olsun.

(i) t_0 sağ saçılmış nokta ise, $f(\sigma(t_0))>f(t_0)$;

(ii) t_0 sağ yoğun ise, bu taktirde t_0 ın öyle bir U komşuluğu vardır ki $t>t_0$ olacak şekildeki her $t\in U$ için $f(t)>f(t_0)$

şartlarını sağlayan fonksiyona t_0 noktasında *sağ-artan* denir [2].

Benzer şekilde, sağ azalan fonksiyon tanımı verilebilir.

Tanım 2.23. Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyon ve $t_0\in\mathbb{T}\setminus\{\max\mathbb{T}\}$ olsun.

(i) t_0 sağ saçılmış nokta ise $f(\sigma(t_0))<f(t_0)$,

(ii) t_0 sağ yoğun ise, bu taktirde t_0 noktasının bir U komşuluğu vardır öyle ki $t>t_0$ olacak şekildeki her $t\in U$ için $f(t)<f(t_0)$,

şartlarını sağlayan fonksiyona t_0 noktasında *sağ-azalan* denir [2].

Teorem 2.24. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $t_0\in\mathbb{T}\setminus\{\max\mathbb{T}\}$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. Eğer $f^{\Delta}(t_0)>0$ ise, f fonksiyonu sağ artandır [2].

İspat: Kabul edelim ki $f^{\Delta}(t_0)>0$ olsun. Eğer t_0 sağ saçılmış nokta ise, bu taktirde

$$f^{\Delta}(t_0)=\frac{f(\sigma(t_0))-f(t_0)}{\sigma(t_0)-t_0}$$

yazılabilir. Ayrıca $f^{\Delta}(t_0)>0$ olduğundan,

$$f(\sigma(t_0))-f(t_0)>0$$

olur. Buradan,

$$f(\sigma(t_0))>f(t_0)$$

elde edilir. Şimdi t_0 sağ yoğun nokta olsun. O halde,

$$f^{\Delta}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t_0)-f(t)}{t_0-t}$$

yazılabilir. $\varepsilon=f^{\Delta}(t_0)$ olsun. t_0 noktasının öyle bir U komşuluğu vardır ki $t\neq t_0$ olacak şekildeki her $t\in U$ için

$$\left|\frac{f(t_0)-f(t)}{t_0-t}-f^{\Delta}(t_0)\right|<\varepsilon$$

kalır. Buradan, $t\neq t_0$ olmak üzere her $t\in U$ için

$$\frac{f(t_0)-f(t)}{t_0-t}-f^{\Delta}(t_0)<\varepsilon$$

$$\frac{f(t_0)-f(t)}{t_0-t}<\varepsilon+f^{\Delta}(t_0)$$

$$0 < \frac{f(t_0) - f(t)}{t_0 - t} < 2f^{\Delta}(t_0)$$

elde edilir. $t > t_0$ olmak üzere her $t \in U$ için

$$f(t) > f(t_0)$$

bulunur. O halde f fonksiyonu t_0 noktasında sağ artandır.

Teorem 2.25. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. Eğer $f^{\Delta}(t_0) < 0$ ise, f fonksiyonu t_0 noktasında sağ azalandır [2].

Tanım 2.26. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ olsun.

(i) t_0 sağ-saçılmış ise, $f(\sigma(t_0)) \leq f(t_0)$,

(ii) t_0 sağ-yoğun ise, bu taktirde t_0 noktasının öyle bir U komşuluğu vardır ki $t > t_0$ olacak şekildeki her $t \in U$ için $f(t) \leq f(t_0)$,

şartlarını sağlayan f fonksiyonuna t_0 noktasında *yerel sağ maksimumuma* sahiptir denir [2].

Tanım 2.27. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ olsun.

(i) t_0 sağ-saçılmış ise, $f(\sigma(t_0)) \geq f(t_0)$,

(ii) t_0 sağ-yoğun ise, bu taktirde t_0 ın öyle bir U komşuluğu vardır ki $t > t_0$ olacak şekildeki her $t \in U$ için $f(t) \geq f(t_0)$,

şartlarını sağlayan f fonksiyonuna t_0 noktasında *yerel sağ minimuma* sahiptir denir [2].

Teorem 2.28. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında diferensiyellenebilir olduğunu varsayalım. Eğer $f^{\Delta}(t_0) > 0$ ise, bu taktirde f fonksiyonunun, t_0 da yerel sağ-minimumu vardır [2].

İspat: $f^{\Delta}(t_0) > 0$ olsun. Teorem 2.24 den f fonksiyonu t_0 noktasında sağ-artandır. Dolayısıyla, t_0 sağ saçılmış ise $f(\sigma(t_0)) > f(t_0)$ olur. Eğer t_0 sağ-yoğun ise, t_0 noktasının öyle bir U komşuluğu bulunabilir ki $t > t_0$ olmak üzere her $t \in U$ için $f(t) > f(t_0)$ olur. Buradan f fonksiyonunun t_0 noktasında yerel-sağ minimuma sahip olduğu görülür.

Teorem 2.29. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. $f^{\Delta}(t_0) \le 0$ ise f fonksiyonu t_0 noktasında yerel sağ-maksimuma sahiptir [2].

Teorem 2.30. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. Eğer f fonksiyonu t_0 noktasında yerel sağ minimuma sahip ise, $f^{\Delta}(t_0) \ge 0$ dır [2].

İspat: t_0 noktası f fonksiyonunun yerel sağ-minimum noktası olsun. $f^{\Delta}(t_0) \ge 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. Kabul edelim ki $f^{\Delta}(t_0) < 0$ olsun. Teorem 2.25 den f fonksiyonu sağ-azalan olur. O halde,

(i) t_0 sağ saçılmış nokta ise $f(\sigma(t_0)) < f(t_0)$

(ii) t_0 sağ yoğun ise, bu taktirde t_0 ın bir U komşuluğu vardır öyle ki $t > t_0$ olacak şekildeki her $t \in U$ için $f(t) < f(t_0)$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Varsayımımızın aksine, f fonksiyonu t_0 noktasında yerel sağ-minimuma sahip olur. Bu nedenle $f^{\Delta}(t_0) \ge 0$ olmalıdır.

Teorem 2.31. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\max \mathbb{T}\}$ noktasında diferensiyellenebilir olsun. Eğer f fonksiyonu t_0 noktasında yerel sağ maksimuma sahip ise $f^{\Delta}(t_0) \le 0$ dır [2].

Teorem 2.32. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli, $[a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir ve $f(a) = f(b)$ olsun. Bu taktirde,

$$f^{\Delta}(\tau) \le 0 \le f^{\Delta}(\xi)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\xi, \tau \in [a,b)$ noktaları vardır [2].

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ kompakt kümesi üzerinde sürekli olduğundan, minimum m ve maksimum M değerine sahiptir. Bu nedenle $m = f(\xi)$ ve $M = f(\tau)$ eşitliklerini sağlayacak $\xi, \tau \in [a,b]$ noktaları vardır. $f(a) = f(b)$ olduğundan, varsayabiliriz ki $\xi, \tau \in [a,b)$ olur. Açıkçası f fonksiyonu ξ de yerel-sağ minimuma ve τ da yerel-sağ maksimuma sahip olur. O halde, Teorem 2.30 dan $f^{\Delta}(\xi) \geq 0$ ve Teorem 2.31 den $f^{\Delta}(\tau) \leq 0$ eşitsizlikleri vardır. Buradan,

$$f^{\Delta}(\tau) \leq 0 \leq f^{\Delta}(\xi)$$

bulunur.

Teorem 2.33 (Ortalama Değer Teoremi). $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve $[a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$f^{\Delta}(\tau) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f^{\Delta}(\xi)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\xi, \tau \in [a,b)$ noktaları vardır [2].

İspat: $[a,b]$ aralığı üzerinde $\varphi(t) = f(t) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(t-a)$ şeklinde tanımlanmış φ fonksiyonunu gözönüne alalım. φ fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde diferensiyellenebilirdir. Ayrıca, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ olur. $\xi, \tau \in [a,b)$ için Teorem 2.32 den

$$\varphi^{\Delta}(\tau) \leq 0 \leq \varphi^{\Delta}(\xi)$$

yazılabilir.

$$\varphi^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

olduğundan,

$$\varphi^{\Delta}(\tau) = f^{\Delta}(\tau) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \text{ve} \quad \varphi^{\Delta}(\xi) = f^{\Delta}(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

olur. Böylece,

$$f^{\Delta}(\tau) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f^{\Delta}(\xi)$$

elde edilir.

3. RİEMANN DELTA ve NABLA İNTEGRALLERİ

Bu bölümde, $[a,b]\subset\mathbb{T}$ kapalı ve sınrlı aralığında tanımlı reel değerli sınırlı bir f fonksiyonunun Riemann Delta integrali kavramı ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Bu sonuçların benzerleri Riemann Nabla intagrali için kısaca incelenmiştir.

3.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $[a,b]\subset\mathbb{T}$ olsun. $t_i\in[a,b]$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ve

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$$

olmak üzere, $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ cümlesine $[a,b]$ *aralığının parçalanması* adı verilir.

σ ve ρ sırasıyla, $\mathbb{T}$ zaman skalasında ileri ve geri sıçrama operatörü olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı bir fonksiyon olsun. M, m, M_i ve m_i reel sayılarını,

$$M=\sup\{f(t):t\in[a,\rho(b)]\},\ m=\inf\{f(t):t\in[a,\rho(b)]\},$$

$$M_i=\sup\{f(t):t\in[t_{i-1},\rho(t_i)]\},\ m_i=\inf\{f(t):t\in[t_{i-1},\rho(t_i)]\}$$

şeklinde tarif edelim.

$$\ddot{U}(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})$$

ve

$$A(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

toplamlarına sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen *üst Darboux* Δ*-toplamı* ve *alt Darboux* Δ*-toplamı* adı verilir.

Burada $m\le m_i\le M_i\le M$ olduğu için

$$m(t_i-t_{i-1})\le m_i(t_i-t_{i-1})\le M_i(t_i-t_{i-1})\le M(t_i-t_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) \sum_{i=1}^{n} M(t_i - t_{i-1})$$

$$m(b-a) \le A(f,P) \le Ü(f,P) \le M(b-a)$$

yazılabilir. $[a,b]$ aralığının her $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ parçalanması için

$$m(b-a) \le A(f,P) \le Ü(f,P) \le M(b-a) \tag{3.1}$$

olur. f fonksiyonunun a dan b ye *üst Darboux* Δ*-integrali*,

$$Ü(f) = \inf\{Ü(f,P) : P, [a,b] \text{nin bir parçalanması}\}$$

ve *alt Darboux* Δ*-integrali*,

$$A(f) = \sup\{A(f,P) : P, [a,b] \text{nin bir parçalanması}\}$$

şeklinde tanımlanır. (3.1) eşitsizliğinden alt ve üst Darboux Δ-toplamalarının sınırlı olduğu görülür. Bu sebeple, üst Darboux ve alt Darboux Δ-integralleri her zaman mevcuttur [3].

Tanım 3.1. $A(f) = Ü(f)$ şartını sağlayan f fonksiyonuna a dan b ye Δ*-integrallenebilir* denir ve $\int_a^b f(t)\Delta t$ ile gösterilir. Bu integrale aynı zamanda *Darboux* Δ*-integrali* denir [3].

Lemma 3.2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer P_0 ve P, $[a,b]$ aralığının iki parçalanması ve $P_0 \subseteq P$ ise, bu taktirde,

$$A(f,P_0) \le A(f,P) \le Ü(f,P) \le Ü(f,P_0) \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır [3].

İspat: Ortadaki eşitsizlik açıktır. Birinci ve üçüncü eşitsizlikler ise benzerdir. Bu sebeple, birinci eşitsizliği, yani

$$A(f,P_0) \le A(f,P) \tag{3.3}$$

olduğunu gösterelim. İspatı önce şu özel durum için yapalım. Kabul edelim ki P parçalanması P_0 dan sadece bir tane fazla noktaya sahip olsun. Bu noktayı τ ile gösterelim.

$$P_0 = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$$

ve

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < \tau < t_k < \ldots < t_n = b \}$$

olsun.

$$m_k = \inf\{f(t) : t \in [t_{k-1}, \rho(t_k)]\} \tag{3.4}$$

$$m_k^{(1)} = \inf\{f(t) : t \in [t_{k-1}, \rho(\tau)]\} \tag{3.5}$$

$$m_k^{(2)} = \inf\{f(t) : t \in [\tau, \rho(t_k)]\} \tag{3.6}$$

olmak üzere, $m_k^{(1)} \geq m_k$ ve $m_k^{(2)} \geq m_k$ eşitsizlikleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
A(f,P) - A(f,P_0) &= m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + \ldots + m_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) + m_k^{(1)}(\tau - t_{k-1}) \\
&\quad + m_k^{(2)}(t_k - \tau) + \ldots + m_n(t_n - t_{n-1}) - m_1(t_1 - t_0) - m_2(t_2 - t_1) - \ldots \\
&\quad - m_k(t_k - t_{k-1}) - \ldots - m_n(t_n - t_{n-1}) \\
&= m_k^{(1)}(\tau - t_{k-1}) + m_k^{(2)}(t_k - \tau) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\
&\geq m_k(\tau - t_{k-1}) + m_k(t_k - \tau) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. $A(f,P_0) \leq A(f,P)$ elde edilir. Şimdi kabul edelim ki, P nin P_0 dan r tane fazla noktası olsun. Bu noktalara $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_r^*$ diyelim. $[a,b]$ aralığının $P_1 = P_0 \cup \{t_1^*\}$, $P_2 = P_1 \cup \{t_2^*\}, ..., P_r = P_{r-1} \cup \{t_r^*\}$ parçalanmaları için $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{r-1} \subset P_r = P$ olacağından, yukarıdaki ispattan

$$A(f,P_0) \leq A(f,P_1) \leq \ldots \leq A(f,P_r) = A(f,P)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Dolayısıyla,

$$A(f,P_0) \leq A(f,P)$$

elde edilir.

Lemma 3.3. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon, P_1 ve P_2 $[a,b]$ aralığının herhangi iki parçalanması ise,

$$A(f,P_1) \leq \ddot{U}(f,P_2)$$

eşitsizliği sağlanır [3].

İspat: Varsayalım ki, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı, P_1 ve P_2, $[a,b]$ aralığının birer parçalanması olsunlar. O halde $P_1 \cup P_2$ kümesi de $[a,b]$ aralığının bir parçalanması olur. $P_1 \subseteq P_1 \cup P_2$ ve $P_2 \subseteq P_1 \cup P_2$ olduğundan, Lemma 3.2 den,

$$A(f,P_1) \leq A(f,P_1 \cup P_2) \leq Ü(f,P_1 \cup P_2) \leq Ü(f,P_2)$$

olduğu görülür. Buradan,

$$A(f,P_1) \leq Ü(f,P_2)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.4. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$A(f) \leq Ü(f)$$

olur [3].

İspat: $[a,b]$ aralığının herhangi iki P_1 ve P_2 parçalanmaları verilsin. P_1, $[a,b]$ nin sabit bir parçalanması olsun. Lemma 3.3 gösterir ki, $A(f,P_1)$

$$\{Ü(f,P_2) : P_2, [a,b] \text{nin bir parçalanması}\}$$

kümesi için bir alt sınır olur. O halde, $A(f,P_1)$ bu kümenin en büyük alt sınırından az ya da eşit olmak zorundadır. Yani,

$$A(f,P_1) \leq Ü(f) \tag{3.7}$$

dir. (3.7) eşitsizliği gösterir ki, $Ü(f)$

$$\{A(f,P_1) : P_1, [a,b] \text{nin bir parçalanması}\}$$

kümesi için bir üst sınır olur. Buradan

$$A(f) \leq Ü(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.5. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında Δ-integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için $[a,b]$ aralığının

$$Ü(f,P) - A(f,P) < \varepsilon \tag{3.8}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir P parçalanmasının var olmasıdır[3].

İspat: Varsayalım ki, f fonksiyonu $\Delta-$integrallenebilir ve $\varepsilon>0$ olsun.

$$A(f)=\sup\{A(f,P_1): P_1, [a,b] \text{nin bir parçalanması}\}$$

ve

$$\ddot{U}(f)=\inf\{\ddot{U}(f,P_2): P_2, [a,b] \text{nin bir parçalanması}\}$$

olmak üzere, infimum ve supremum özelliklerinden, $[a,b]$aralığının

$$A(f,P_1)>A(f)-\frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \ddot{U}(f,P_2)<\ddot{U}(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde P_1 ve P_2 parçalanmaları vardır. $P=P_1\cup P_2$ olsun. Lemma 3.2 ve son iki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\ddot{U}(f,P)-A(f,P)&\leq \ddot{U}(f,P_2)-A(f,P_1)\\ &<\ddot{U}(f)+\frac{\varepsilon}{2}-\left[A(f)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\\ &=\ddot{U}(f)-A(f)+\varepsilon\end{aligned}$$

yazılabilir. f fonksiyonu Δ-integrallenebilir olduğundan,

$$\ddot{U}(f)=A(f)$$

eşitliği vardır. Böylece, (3.8) eşitsizliği elde edilir.

Karşıt olarak, kabul edelim ki her $\varepsilon>0$ için $\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\varepsilon$ olacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanması mevcut olsun. O halde,

$$\ddot{U}(f)\leq \ddot{U}(f,P)=\ddot{U}(f,P)-A(f,P)+A(f,P)<\varepsilon+A(f,P)\leq\varepsilon+A(f)$$

bulunur. ε keyfi olduğundan, $\ddot{U}(f)\leq A(f)$ olur. Ayrıca Teorem 3.4 den,

$$A(f)\leq \ddot{U}(f)$$

olduğundan,

$$\ddot{U}(f)=A(f)$$

elde edilir.

Lemma 3.6. Her $\delta>0$ için $[a,b]$ nin bir $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ parçalanması vardır öyle ki her $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ için ya $t_i-t_{i-1}\leq\delta$ ya da $t_i-t_{i-1}>\delta$ ve $\rho(t_i)=t_{i-1}$ olur [3].

İspat: $t_0=a$ olmak üzere $t_0<t_1<\ldots<t_n$ noktalarını sırasıyla düzenleyelim. Yani,

$$A_i = \{\, t \in [a,b] : t_{i-1} < t \le t_{i-1} + \delta \,\}, \quad t_i = \begin{cases} \sup A_i \;, A_i \ne \varnothing \text{ ise} \\ \sigma(t_{i-1}),\; A_i = \varnothing \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlarsak, her $i \ge 1$ için $a = t_0 < t_1 < \ldots$ ve $t_{i+1} - t_{i-1} \ge \delta$ dır. Bu durumda bir pozitif n tamsayı için $t_n = b$ olur.

Her $\delta > 0$ için Lemma 3.6 da belirtilen özelliği sağlayan $[a,b]$ nin bütün parçalanmaları-nın kümesi $\mathbb{P}_\delta([a,b])$ veya kısaca $\mathbb{P}_\delta$ ile gösterilir.

Kolayca görüleceği gibi, $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ olduğunda $\mathbb{P}_\delta([a,b])$ sınıfı, $[a,b]$ aralığının normu δ dan küçük veya eşit bütün parçalanmalarından oluşur. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ve $\delta < 1$ ise $\mathbb{P}_\delta([a,b])$ sınıfı $[a,b]$ aralığının bütün noktalarından oluşan bir tek parçalanmadan ibarettir.

Teorem 3.7. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde Δ-integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $[a,b]$ aralığının her $P \in \mathbb{P}_\delta$ parçalanması için

$$Ü(f,P) - A(f,P) < \varepsilon \tag{3.9}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının mevcut olmasıdır[3].

İspat: Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $[a,b]$ nin her $P \in \mathbb{P}_\delta$ parçalanması için $Ü(f,P) - A(f,P) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ sayısı mevcut olsun. Teorem 3.5 ten f fonksiyonunun Δ-integrallenebilir olduğu açıktır.

Karşıt olarak, kabul edelim ki f fonksiyonu a dan b ye Δ-integrallenebilir olsun. $\varepsilon > 0$ için $[a,b]$ nin öyle bir $P_0 = \{\, a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = b \,\}$ parçalanması vardır ki,

$$Ü(f,P_0) - A(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10}$$

yazılabilir. $\delta > 0$ sayısını $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(\,8lB\,)}$ olarak seçelim. Burada $B = \sup\{\, |f(t)| : t \in [a,b] \,\}$ ve $l+1$, P_0 parçalanmasının noktalarının sayısıdır. (3.9) u elde etmek için $[a,b]$ aralığının $P \in \mathbb{P}_\delta$ olacak şekilde herhangi bir

$$P = \{\, a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b \,\}$$

parçalanmasını göz önüne alalım. $P_2 = P \cup P_0$ olsun. Eğer P_2, P den bir tane fazla noktaya sahip ise, bu noktaya τ dersek, $t_{k-1} < \tau < t_k$ olacak şekilde $k \in \{1,2,\dots,n\}$ vardır. Gerçekten, $t_k - t_{k-1} > \delta$ ise $P \in \mathbb{P}_\delta$ koşuluyla $\rho(t_k) = t_{k-1}$ olur ve bu nedenle $\mathbb{T}$ nin $t_{k-1} < \tau < t_k$ olacak şekilde bir τ noktası yoktur. Şimdi Lemma 3.2 nin ispatında olduğu gibi (3.4), (3.5) ve (3.6) eşitliklerini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
A(f,P_2) - A(f,P) &= m_1(t_1 - t_0) + m_2(t_2 - t_1) + \dots + m_{k-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) + m_k^{(1)}(\tau - t_{k-1}) \\
&\quad + m_k^{(2)}(t_k - \tau) + \dots + m_n(t_n - t_{n-1}) - m_1(t_1 - t_0) - m_2(t_2 - t_1) - \dots \\
&\quad - m_k(t_k - t_{k-1}) - \dots - m_n(t_n - t_{n-1}) \\
&= m_k^{(1)}(\tau - t_{k-1}) + m_k^{(2)}(t_k - \tau) - m_k(t_k - t_{k-1}) \\
&\le B\left[(\tau - t_{k-1}) + (t_k - \tau) + (t_k - t_{k-1})\right] \\
&= 2B(t_k - t_{k-1}) \\
&\le 2B\delta
\end{aligned}
$$

kalır. P_2, P de olmayan en fazla $l-1$ noktaya sahip olduğundan,

$$A(f,P_2) - A(f,P) \le 2(l-1)\,B\,\delta = 2(l-1)B\frac{\varepsilon}{8lB} < \frac{\varepsilon}{4}$$

yazılabilir. Lemma 3.2 den $A(f,P_0) \le A(f,P_2) \le \ddot{U}(f,P_2) \le \ddot{U}(f,P_0)$ ve

$$A(f,P_0) < A(f,P_2)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$A(f,P_0) - A(f,P) < A(f,P_2) - A(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}$$

bulunur. O halde,

$$A(f,P_0) - A(f,P) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.11}$$

olmalıdır. Benzer şekilde,

$$\ddot{U}(f,P) - \ddot{U}(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.12}$$

olacağından (3.11) ve (3.12) den

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\ddot{U}(f,P_0)-A(f,P_0)+\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Son olarak (3.10) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir.

Tanım 3.8. $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir f fonksiyonunun Riemann Δ-integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon>0$ sayısı ve $[a,b]$ aralığının her $P\in\mathbb{P}_\delta$ parçalanması için

$$\left|R(f,P)-I\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısının ve ε dan bağımsız bir I reel sayısının var olmasıdır. Burada $\xi_i\in[t_{i-1},\rho(t_i))$ olup $R(f,P)$ Riemann toplamı

$$R(f,P)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(t_i-t_{i-1}) \tag{3.13}$$

ile tarif edilir [3].

Teorem 3.9. $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir f fonksiyonunun Riemann Δ-integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Δ-integrallenebilir olmasıdır [3].

İspat: Kabul edelim ki, f fonksiyonu a dan b ye (Darboux) Δ-integrallenebilir olsun. Yani

$$\ddot{U}(f)=A(f)$$

olsun. O halde, her $\varepsilon>0$ sayısı için öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki her $P\in\mathbb{P}_\delta$ için

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $P\in\mathbb{P}_\delta$ için

$$\left|R(f,P)-\int_a^b f(t)\Delta t\right|<\varepsilon \tag{3.14}$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$A(f,P)\le R(f,P)\le\ddot{U}(f,P) \tag{3.15}$$

eşitsizliğinin doğruluğu açıktır. (3.9) daki eşitsizlikten,

$$\ddot{U}(f,P) < A(f,P) + \varepsilon \le A(f) + \varepsilon = \int_a^b f(t)\Delta t \ + \varepsilon \tag{3.16}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$A(f,P) > \ddot{U}(f,P) - \varepsilon \ge \ddot{U}(f) - \varepsilon = \int_a^b f(t)\, \Delta t - \varepsilon \tag{3.17}$$

bulunur. (3.15), (3.16) ve (3.17) eşitsizliklerinden

$$\int_a^b f(t)\Delta t - \varepsilon < R(f,P) < \int_a^b f(t)\Delta t + \varepsilon$$

elde edilir ki bu ise

$$I = \int_a^b f(t)\Delta t$$

olması demektir.

Karşıt olarak, f fonksiyonunun Riemann Δ-integrallenebilir olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ olsun. Tanım 3.8 deki anlamda $\delta > 0$ ve I sayıları vardır. $P \in \mathbb{P}_\delta$ olacak şekilde herhangi bir

$$P = \{ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \}$$

parçalanmasını ve her bir $i = 1,2,\ldots,n$ için $[t_{i-1}, \rho(t_i)]$ aralığından ξ_i sayılarını

$$f(\xi_i) < m_i + \varepsilon$$

olacak şekilde seçelim. Burada $m_i = \inf\{ f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$ dir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $(t_i - t_{i-1})$ ile çarpılır ve 1 den n ye kadar toplam alınırsa, Riemann Δ-toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})$$

$$R(f,P) \le A(f,P) + \varepsilon(b-a)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca f fonksiyonu Riemann Δ-integrallenebilir olduğundan

$$| R(f,P) - I | < \varepsilon$$

kalır. Buradan

$$A(f) \ge A(f,P) \ge R(f,P) - \varepsilon(b-a) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a)$$

yazılabilir. ε keyfi olduğundan, $A(f) \geq I$ bulunur. Benzer şekilde $\ddot{U}(f) \leq I$ olduğu gösterilebilir. $M_i = \sup\{ f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$ olmak üzere, $[t_{i-1}, \rho(t_i)]$ aralığından ξ_i sayılarını

$M_i - \varepsilon < f(\xi_i)$

olacak şekilde seçelim. Ayrıca Riemann Δ-toplamı $R(f, P)$, bu ξ_i seçimi için

$$\ddot{U}(f, P) - \varepsilon(b - a) \leq R(f, P)$$

eşitsizliğini sağlar. f fonksiyonu Riemann Δ-integrallenebilir olduğundan

$$|\, R(f, P) - I \,| < \varepsilon$$

eşitsizliği vardır. Buradan

$$\ddot{U}(f) \leq \ddot{U}(f, P) \leq R(f, P) + \varepsilon(b - a) < I + \varepsilon + \varepsilon(b - a)$$

bulunur. ε keyfi olduğundan $\ddot{U}(f) \leq I$ olmalıdır. Böylece

$$A(f) \geq I \geq \ddot{U}(f)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Öte yandan Teorem 3.4 den $A(f) \leq \ddot{U}(f)$ olması sebebiyle

$$A(f) = \ddot{U}(f) = I$$

bulunur. Bu ise f fonksiyonunun (Darboux) Δ-integrallenebilir olması ve

$$\int_a^b f(t)\Delta t = I$$

eşitliğinin sağlanması anlamına gelir. □

$a < b$ olduğu zaman $\int_b^a f(t)\Delta t = -\int_a^b f(t)\Delta t$ ve $\int_c^c f(t)\Delta t = 0$ olarak tanımlanır. Ayrıca,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = [\sigma(t) - t\,] f(t) \tag{3.18}$$

eşitliği her zaman geçerlidir. Gerçekten, eğer $\sigma(t) = t$ ise (3.18) eşitliğinin her iki tarafı sıfıra eşittir. $\sigma(t) > t$ ise, $[t, \sigma(t)]$ nin bir tek $P = \{t = s_0 < s_1 = \sigma(t)\}$ parçalanması vardır ve burada $\rho(s_1) = s_0 = t$ dir. Dolayısıyla,

$$\ddot{U}(f, P) = f(t)[\,\sigma(t) - t\,] = A(f, P)$$

eşitliği elde edilir.

Belirtelim ki, f fonksiyonunun P parçalanması ile ilgili Riemann Δ-toplamı

$$[\sigma(t)-t]f(t)$$

dir. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ durumunda Tanım 3.1 ile Tanım 3.8 de verilen integral tanımları denktir.

Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\mathbb{P}_\delta([a,b])$, $[a,b]$ aralığının, normu δ dan küçük eşit olan bütün parçalanmalarından oluşur.

Şimdi $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{Z}$ ve pozitif p tamsayısı için $b=a+p$ olsun. $[a,b]$ aralığının

$$P^*=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$$

parçalanmasını düşünelim. Burada $t_0=a,\ t_1=a+1$, $t_2=a+2$, $\ldots,t_p=a+p=b$ dir. P^* parçalanması, $[a,b]$ aralığının bütün noktalarından oluşur ve her $i=1,2,\ldots,n$ için $\rho(t_i)=t_{i-1}$ olur. O halde,

$$\begin{aligned}
Ü(f,P^*) &= \sum_{i=1}^{p} M_i(t_i-t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p} f(t_{i-1}) \\
&= f(t_0)+f(t_1)+\ldots+f(t_{p-1}) \\
&= f(a)+f(a+1)+\ldots+f(a+p-1) \\
&= f(a)+f(a+1)+\ldots+f(b-1) \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} f(k)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$A(f,P^*)=\sum_{i=1}^{p} m_i(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{p} f(t_{i-1})=\sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

elde edilir. Böylece

$$Ü(f,P^*)=A(f,P^*)=\sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

olur. Dolayısıyla, f fonksiyonu Darboux Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(t)\Delta t=\sum\nolimits_{k=a}^{b-1} f(k) \tag{3.19}$$

dır.

Her pozitif $\delta<1$ için $\mathbb{P}_\delta([a,b])$, tek P^* parçalanmasından oluşur ve P^* parçalanması ile ilgili Riemann Δ-toplamı

$$R\left(f,P^*\right)=\sum_{i=1}^{p} f\left(\xi_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{p} f\left(t_{i-1}\right)=\sum_{k=a}^{b-1} f(k)$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu Riemann Δ-integrallenebilirdir ve f fonksiyonunun Riemann Δ-integrali, (3.19) a eşittir.

Şimdi kısaca, zaman skalasında $\nabla-$ integral kavramını verelim.

$[a,b]$ nin bir parçalanması $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}$ ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$M'=\sup\{f(t):t\in[\sigma(a),b]\},\quad m'=\inf\{f(t):t\in[\sigma(a),b]\},$$
$$M_i'=\sup\{f(t):t\in[\sigma(t_{i-1}),t_i]\},\quad m_i'=\inf\{f(t):t\in[\sigma(t_{i-1}),t_i]\}$$

şeklinde tarif edelim. $[a,b]$ aralığının bütün parçalanmalarının kümesini $\mathbb{P}$ ile gösterelim. f fonksiyonunun sırasıyla *üst* ve *alt Darboux* $\nabla-$*toplamı*,

$$\ddot{U}'(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i'\left(t_i-t_{i-1}\right) \text{ ve } A'(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i'\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

dır. Böylece,

$$m'(b-a)\le A'(f,P)\le \ddot{U}'(f,P)\le M'(b-a)$$

olur. f fonksiyonunun a dan b ye *üst* ve *alt Darboux* $\nabla-$*integralleri* sırasıyla

$$\ddot{U}'(f)=\inf\{\ \ddot{U}'(f,P):P\in\mathbb{P}\}$$

ve

$$A'(f)=\sup\{A'(f,P):P\in\mathbb{P}\}$$

şeklinde tanımlanır. Sınırlı bir f fonksiyonu için $\ddot{U}'(f)$ ve $A'(f)$ sonlu ve $A'(f)\le\ddot{U}'(f)$ olur. Eğer $A'(f)=\ddot{U}'(f)$ ise, f fonksiyonuna a dan b ye *Darboux* ∇*-integrallenebilir* (nabla integrallenebilir) denir ve bu integral $\int_a^b f(t)\nabla t$ ile gösterilir. Bir f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen *Riemann* ∇*-toplamı*, $i=1,2,\ldots,n$ için $\xi_i\in[\sigma(t_{i-1}),t_i]$ olmak üzere,

$$R'(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

olarak tanımlanır. Eğer aşağıdaki özelliği sağlayan bir I' sayısı var ise, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında *Riemann* $\nabla-$*integrallenebilir* denir. Her $\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki f fonksiyonunun $P\in\mathbb{P}_\delta$ (Lemma 3.6 da verilen özellikte $t_{i-1}<t_i$ iken

$\rho(t_i) = t_{i-1}$ yerine $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ olur.) parçalanmasına karşılık gelen her Riemann ∇-toplamı $R'(f,P)$ için

$$|\,R'(f,P) - I'\,| < \varepsilon$$

kalır. I' sayısına f fonksiyonunun a dan b ye *Riemann* ∇*-integrali* adı verilir.

Δ integralde olduğu gibi, kolayca gösterilebilir ki $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir f fonksiyonunun ∇-integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Riemann ∇-integrallenebilir olmasıdır. Bu durumda, bu iki integralin değeri eşittir.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ durumunda Riemann ∇-integrali, Δ-integralde olduğu gibi, genel Riemann integraline karşılık gelir.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olması halinde $a \in \mathbb{Z}$ için $b = a + p$ (p pozitif tamsayı) olsun. $[a,b]$ nin $P' = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ parçalanmasını düşünelim. Burada

$$t_0 = a,\ t_1 = a+1, t_2 = a+2, \ldots, t_p = a + p = b$$

olmak üzere, P' parçalanması $[a,b]$ aralığının bütün noktalarından oluşur ve $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ için $\sigma(t_{i-1}) = t_i$ olur. O halde $M_i' = \sup\{\, f(t) : t \in [\sigma(t_{i-1}), t_i]\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \ddot{U}(f,P') &= \sum_{i=1}^{p} M_i'(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{p} f(t_i) \\ &= f(t_1) + f(t_2) + \ldots + f(t_p) \\ &= f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(a+p) \\ &= \sum_{k=a+1}^{b} f(k) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde,

$$A(f,P') = \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece,

$$\int_{k=a+1}^{b} f(t)\nabla t = \sum\nolimits_{k=a+1}^{b} f(k)$$

olduğu açıktır. Ayrıca, bu eşitlik (3.19) ile karşılaştırılırsa, delta ve nabla integrallerinin genellikle farklı olduğu görülür[3].

4. RİEMANN İNTEGRALİNİN ÖZELLİKLERİ

4.1. İntegrallenebilen Bazı Fonksiyon Sınıfları

Teorem 4.1. $[a,b]$ üzerinde monoton her fonksiyon Δ-integrallenebilirdir [3].

İspat: Varsayalım ki $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olsun. Her $t\in[a,b]$ için

$$f(a)\le f(t)\le f(b)$$

olduğundan, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı olur. Verilen $\varepsilon>0$ sayısına karşılık δ sayısını $\delta=\varepsilon/f(b)-f(a)+1$ seçelim. $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}\in\mathbb{P}_\delta$ için

$$\begin{aligned}
\ddot{U}(f,P)-A(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})\\
&=\sum_{i=1}^{n}f(\rho(t_i))(t_i-t_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}f(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})\\
&=\sum_{i=1}^{n}[f(\rho(t_i))-f(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})\\
&=\sum_{t_i-t_{i-1}\le\delta}[f(\rho(t_i))-f(t_i)](t_i-t_{i-1})\\
&\quad+\sum_{t_i-t_{i-1}>\delta}[f(\rho(t_i))-f(t_{i-1})](t_i-t_{i-1})
\end{aligned}\tag{4.1}$$

elde edilir. $P\in\mathbb{P}_\delta$ koşulundan, $t_i-t_{i-1}>\delta$ olduğunda $\rho(t_i)=t_{i-1}$ olacağından (4.1) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci toplam sıfıra eşit olur.

İlk toplam ise,

$$\begin{aligned}
\delta\sum_{i=1}^{n}[f(\rho(t_i))-f(t_{i-1})]&\le\delta\sum_{i=1}^{n}[f(t_i)-f(t_{i-1})]\\
&=\delta[f(t_1)-f(t_0)+f(t_2)-f(t_1)+\ldots+f(t_n)-f(t_{n-1})]\\
&=\delta[f(t_n)-f(t_0)]\\
&=\delta[f(b)-f(a)]\\
&<\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece, $\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\varepsilon$ olup f fonksiyonunun Δ-integrallenebilir olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.2. $[a,b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde Δ-integrallenebilirdir [3].

İspat: $\varepsilon>0$ olsun. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan, $\mathbb{T}$ zaman skalasının $[a,b]$ kompakt altkümesi üzerinde düzgün süreklidir. Dolayısıyla, $\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki bütün $t,\tau\in[a,b]$ noktaları için $|t-\tau|<\delta$ olacak şekilde

$$|f(t)-f(\tau)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \tag{4.2}$$

kalır. Şimdi herhangi bir $P=\{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b\}\in\mathbb{P}_\delta$ parçalanmasını gözönüne alalım. f fonksiyonu her kompakt $[t_{i-1},\rho(t_i)]$ aralığında minimum ve maksimum değere sahip olduğundan (4.2) den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\ddot{U}(f,P)-A(f,P)&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\
&=\sum_{t_i-t_{i-1}\le\delta}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})+\sum_{t_i-t_{i-1}>\delta}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\
&=\sum_{t_i-t_{i-1}\le\delta}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1})\\
&<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{t_i-t_{i-1}\le\delta}(t_i-t_{i-1})\\
&\le\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\\
&=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)\\
&=\varepsilon
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada, $t_i-t_{i-1}>\delta$ iken $\rho(t_i)=t_{i-1}$ olacağından $M_i=m_i$ dir. O halde,

$$\ddot{U}(f,P)-A(f,P)<\varepsilon$$

olup f fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir.

Teorem 4.3. f ve g, $[a,b]$ üzerinde Δ-integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu taktirde, $f+g$ fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b [f(t)+g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$$

eşitliği sağlanır[3].

İspat: f ve g fonksiyonlarının $[a,b]$ üzerinde Δ-integrallenebilir fonksiyonlar olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ için $[a,b]$ aralığının

$$\ddot{U}(f,P_1) - A(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.3}$$

ve

$$\ddot{U}(g,P_2) - A(g,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4}$$

olacak şekilde P_1 ve P_2 parçalanmaları vardır. $P = P_1 \cup P_2$ olsun. Ayrıca,

$$M_i(f) = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} \tag{4.5}$$

$$m_i(f) = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} \tag{4.6}$$

$$M_i(f+g) = \sup\{(f+g)(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} \tag{4.7}$$

ve

$$m_i(f+g) = \inf\{(f+g)(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} \tag{4.8}$$

eşitlikleri olmak üzere, $\ddot{U}(f+g,P) - A(f+g,P) < \varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
&\ddot{U}(f+g,P) - A(f+g,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f+g)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f+g)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\sup\{(f+g)(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} - \inf\{(f+g)(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}](t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} [\sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} + \sup\{g(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}](t_i - t_{i-1}) \\
&- [\inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} + \inf\{g(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}](t_i - t_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} - \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}](t_i - t_{i-1}) \\
&+ [\sup\{g(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\} - \inf\{g(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}](t_i - t_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)](t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - m_i(g)](t_i - t_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\ddot{U}(f+g,P)-A(f+g,P)<\varepsilon \tag{4.9}$$

olduğu görülür ki, bu ise $f+g$ fonksiyonunun $\Delta-$integrallenebilir olması demektir.

Teorem 4.4. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde $\Delta-$integrallenebilir olsunlar. Bu taktirde,

a) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, αf fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$$

eşitliği sağlanır [3].

b) $f \geq 0$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$ olur.

c) f^2 fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir.

d) $f \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ fonksiyonu Δ- integrallenebilirdir.

e) $|f|$ fonksiyonu Δ-integrallenebilir olup

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\Delta t$$

eşitsizliği mevcuttur [3].

f) fg fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir [3].

İspat: a) $\alpha = 0$ ise αf fonksiyonu sıfır sabit fonksiyonu olur. Dolayısıyla, αf fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir.

Şimdi $\alpha \neq 0$ olsun. f fonksiyonu Δ-integrallenebilir olduğundan, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz ki, $\xi_i \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere, her $P \in \mathbb{P}_\delta$ parçalanması için

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i - \int_a^b f(t)\Delta t\right| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|} \tag{4.10}$$

olur. Buradan,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\Delta t_i - \alpha\int_a^b f(t)\Delta t\right| < \varepsilon \tag{4.11}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise, αf fonksiyonun Δ-integrallenebilir olduğunu ve

$$\int_a^b \alpha f(t)\Delta t = \alpha\int_a^b f(t)\Delta t$$

eşitliğinin sağlandığını gösterir.

b) $f \geq 0$ olsun. f fonksiyonu Δ-integrallenebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz ki, $\xi_i \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere, her $P \in \mathbb{P}_\delta$ parçalanması için

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t - \int_a^b f(t)\Delta t \right| < \varepsilon \tag{4.12}$$

yazılabilir. $f \geq 0$ olduğundan toplamdaki her bir $f(\xi_i)\Delta t_i$ terimi pozitif veya sıfırdır. Dolayısıyla,

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

elde edilir.

c) f fonksiyonu sabit ise f^2 fonksiyonu da sabittir. Dolayısıyla, f^2 fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir. Şimdi f fonksiyonu sabit olmasın. Önce $f \geq 0$ olduğunu kabul edelim. $\sup\{f(t) : t \in [a,b]\} = M$ olsun. f fonksiyonu Δ-integrallenebilir olduğundan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $[a,b]$ aralığının öyle bir P parçalanması bulunabilir ki,

$$\ddot{U}(f,P) - A(f,P) < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{4.13}$$

kalır. $m_i = \inf\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$, $M_i = \sup\{f(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$ olmak üzere, $f \geq 0$ olduğundan sırasıyla $m_i^2 = \inf\{f^2(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$, $M_i^2 = \sup\{f^2(t) : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\}$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\ddot{U}(f^2,P) - A(f^2,P) &= \sum_{i=1}^{n} \left(M_i^2 - m_i^2\right)\Delta t_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(M_i + m_i)\Delta t_i \\
&\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta t_i \\
&= 2M\left[\ddot{U}(f,P) - A(f,P)\right]
\end{aligned}$$

$$< 2M\,\frac{\varepsilon}{2M}$$
$$= \varepsilon$$

bulunur. O halde, $f \geq 0$ için f^2 fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir.

Şimdi, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde Δ-integrallenebilen herhangi bir fonksiyon olsun. $m = \inf\{f(t) : t \in [a,b]\}$ dersek, $f - m \geq 0$ olur. Yukarıdaki ispattan $(f-m)^2$ fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir. Ayrıca

$$(f-m)^2 = f^2 - 2mf + m^2 \tag{4.14}$$

eşitliğinde $(f-m)^2, -2mf$ ve m^2 Δ-integrallenebilen fonksiyonlar olduklarından f^2 fonksiyonu da integrallenebilirdir.

d) $f \geq 0$ olsun. f fonksiyonu Δ-integrallenebilir olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $[a,b]$ aralığının öyle bir P parçalanması vardır ki bu parçalanma ve bundan ince her parçalanma için

$$\ddot{U}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon^2$$

kalır.

$$m_i = \inf\left\{\sqrt{f(t)} : t \in [t_{i-1}, \rho(t_i)]\right\}$$

ve

$$M_i = \sup\left\{\sqrt{f(t)} : t \in [t_{i-1}, \rho(t)]\right\}$$

olmak üzere,

$$A = \{i : M_i + m_i < \varepsilon\} \text{ ve } B = \{i : M_i + m_i \geq \varepsilon\}$$

olsun. Bu taktirde,

$$\sum_{i\in A}(M_i - m_i)\Delta t_i \leq \sum_{i\in A}(M_i + m_i)\Delta t_i < \varepsilon \sum_{i\in A} \Delta t_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \varepsilon(b-a) \tag{4.15}$$

$$\sum_{i\in B}(M_i - m_i)\Delta t_i = \sum_{i\in B}\left(M_i^2 - m_i^2\right)\Delta t_i \frac{1}{M_i + m_i} \leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i\in B}\left(M_i^2 - m_i^2\right)\Delta t_i$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\left(M_i^2 - m_i^2\right)\Delta t_i = \frac{1}{\varepsilon}\left[\ddot{U}(f,P) - A(f,P)\right] < \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 = \varepsilon \tag{4.16}$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
\ddot{U}\left(\sqrt{f},P\right)-A\left(\sqrt{f},P\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(M_i-m_i\right)\Delta t_i \\
&= \sum_{i\in A}\left(M_i-m_i\right)\Delta t_i+\sum_{i\in B}\left(M_i-m_i\right)\Delta t_i \\
&< \varepsilon\left(b-a\right)+\varepsilon \\
&= \varepsilon\left(b-a+1\right)
\end{aligned}$$

olur ki, bu ise $\sqrt{f}$ fonksiyonunun Δ-integrallenebilir olduğunu gösterir.

e) $|f|=\sqrt{f^2}$ olduğundan, $|f|$ fonksiyonunun Δ-integrallenebilir olduğu (c) ve (d) den açıktır. Şimdi

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \le \int_a^b |f(t)|\Delta t \tag{4.17}$$

olduğunu gösterelim. $|f|+f\ge 0$ olduğundan Teorem 4.4 (b) gereğince

$$\int_a^b\left[|f(t)|+f(t)\right]\Delta t\ge 0$$

yazılabilir. Buradan da

$$-\int_a^b f(t)\Delta t\le\int_a^b |f(t)|\Delta t \tag{4.18}$$

elde edilir. Ayrıca $|f|-f\ge 0$ olduğundan

$$\int_a^b\left[|f(t)|-f(t)\right]\Delta t\ge 0$$

yazılabilir. Böylece,

$$\int_a^b f(t)\Delta t\le\int_a^b |f(t)|\Delta t \tag{4.19}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.18) ve (4.19) dan

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \le \int_a^b |f(t)|\Delta t$$

bulunur.

f) f ve g fonksiyonları Δ-integrallenebilir olduğundan, Teorem 4.3 den $f+g$ ve $f-g$ fonksiyonları da Δ-integrallenebilirdir. Teorem 4.4 (c) gereğince $(f+g)^2$ ve $(f-g)^2$ fonksiyonları da Δ-integrallenebilirdir. Diğer taraftan

$$f\,g=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$$

olduğundan $f\,g$ fonksiyonun Δ-integrallenebilir olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 4.5. Eğer f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında Δ-integrallenebilir ve her $t\in[a,b]$ için $f(t)\le g(t)$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t\ \le\int_a^b g(t)\Delta t$$

eşitsizliği vardır [3].

İspat: Varsayalım ki f ve g fonksiyonları Δ-integrallenebilir ve her $t\in[a,b]$ için $f(t)\le g(t)$ olsun. Bu durumda, $h(t)=g(t)-f(t)$ fonksiyonu da Δ-integrallenebilir olup $h(t)\ge 0$ olacağından Teorem 4.4 (b) den

$$0\le\int_a^b h(t)\Delta t=\int_a^b\left[g(t)-f(t)\right]\Delta t=\int_a^b g(t)\Delta t-\int_a^b f(t)\Delta t$$

yazılabilir. Böylece,

$$\int_a^b g(t)\Delta t\ge\int_a^b f(t)\Delta t$$

elde edilir.

Teorem 4.6. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c\in\mathbb{T}$ için $a<c<b$ olsun. Eğer f fonksiyonu, a dan c ye ve c den b ye Δ-integrallenebilir ise, f fonksiyonu a dan b ye Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\Delta t$$

eşitliği sağlanır [3].

İspat: $\int_a^c f(t)\Delta t=I_1$ ve $\int_c^b f(t)\Delta t=I_2$ olsun. $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde, $[a,c]$ aralığının,

$$|\,R(f,P')-I_1\,|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir P' parçalanması bulunabilir. Benzer şekilde, $[c,b]$ aralığının,

$$|R(f,P'')-I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir P'' parçalanması vardır. $P=P'\cup P''$ parçalanması $[a,b]$ aralığının bir parçalanması olup

$$R(f,P)=R(f,P')+R(f,P'')$$

olacağından,

$$\begin{aligned}|R(f,P)-(I_1+I_2)| &= |R(f,P')+R(f,P'')-(I_1+I_2)| \\ &\le |R(f,P')-I_1|+|R(f,P'')-I_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\Delta t$$

olduğu görülür.

5. TÜREV VE İNTEGRAL

5.1. İntegral Hesabının Temel Teoremleri

Teorem 5.1. g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Δ-diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve g^{Δ} türevi ise, $[a,b]$ aralığında Δ-integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$\int_a^b g^{\Delta}(t)\Delta t = g(b) - g(a) \tag{5.1}$$

eşitliği mevcuttur [3].

İspat : g^{Δ} fonksiyonu Δ-integrallenebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı için $[a,b]$ aralığının

$$\ddot{U}(g^{\Delta}, P) - A(g^{\Delta}, P) < \varepsilon \tag{5.2}$$

şartını sağlayan bir $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ parçalanması vardır. Teorem 2.33 ü g fonksiyonuna her $[t_{i-1}, t_i]$ aralığı için uygulayalım. Bu taktirde,

$$g^{\Delta}(\tau_i) \le \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \le g^{\Delta}(\xi_i)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\xi_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ noktaları vardır. Buradan,

$$(t_i - t_{i-1})g^{\Delta}(\tau_i) \le g(t_i) - g(t_{i-1}) \le (t_i - t_{i-1})g^{\Delta}(\xi_i) \tag{5.3}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte 1 den n ye kadar toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})g^{\Delta}(\tau_i) \le \sum_{i=1}^{n}\left[g(t_i) - g(t_{i-1})\right] \le \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})g^{\Delta}(\xi_i) \tag{5.4}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})g^{\Delta}(\tau_i) \le \left[g(b) - g(a)\right] \le \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})g^{\Delta}(\xi_i) \tag{5.5}$$

elde edilir. Buradan

$$A(g^{\Delta}, P) \le g(b) - g(a) \le \ddot{U}(g^{\Delta}, P) \tag{5.6}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$A\left(g^{\Delta},P\right)\leq\int_a^b g^{\Delta}(t)\Delta t\leq \ddot{U}\left(g^{\Delta},P\right)$$

olduğundan, (5.2) ve (5.6) eşitsizliklerinden,

$$\left|\int_a^b g^{\Delta}(t)\Delta t-\left[g(b)-g(a)\right]\right|<\varepsilon \tag{5.7}$$

olduğu görülebilir. Böylece, (5.1) eşitliğinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Teorem 5.2. u ve v fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde Δ-diferensiyellenebilir, u^{Δ} ve v^{Δ} türevleri $[a,b]$ aralığında Δ-integrallenebilir ise,

$$\int_a^b u^{\Delta}(t)v(t)\Delta t+\int_a^b u(\sigma(t))v^{\Delta}(t)\Delta t=g(b)-g(a)=u(b)v(b)-u(a)v(a) \tag{5.8}$$

eşitliği vardır [3].

İspat: $g=uv$ olsun. g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde Δ-diferensiyellenebilir olduğundan,

$$g^{\Delta}(t)=u^{\Delta}(t)v(t)+u(\sigma(t))v^{\Delta}(t) \tag{5.9}$$

eşitliği yazılabilir ve g^{Δ} türevi integrallenebilirdir. Teorem 5.1 den dolayı,

$$\int_a^b g^{\Delta}(t)\Delta t=g(b)-g(a)=u(b)v(b)-u(a)v(a)$$

olur. Bu da (5.8) eşitliğinin sağlandığını gösterir.

Not. $a>b$ için $\int_a^b f(t)\Delta t=-\int_b^a f(t)\Delta t$.

Teorem 5.3. f fonksiyonu a dan b ye Δ-integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $t\in[a,b]$ noktası için

$$F(t)=\int_a^t f(s)\Delta s$$

olsun. Bu taktirde, F fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde süreklidir. Ayrıca, eğer f fonksiyonu $t_0\in[a,b)$ noktasında sürekli ise F fonksiyonu t_0 noktasında Δ-diferensiyellenebilirdir ve

$$F^{\Delta}(t_0) = f(t_0)$$

olur [3].

İspat: Her $t \in [a,b]$ için $|f(t)| \leq B$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $B > 0$ seçelim. $t, \tau \in [a,b]$ $(t < \tau)$ ve $|t - \tau| < \dfrac{\varepsilon}{B}$ olsun. Bu durumda,

$$|F(\tau) - F(t)| = \left| \int_t^{\tau} f(s)\Delta s \right| \leq \int_t^{\tau} |f(s)| \Delta s \leq \int_t^{\tau} B\,\Delta s = B(\tau - t) < \varepsilon$$

yazılabilir. Bu gösterir ki, F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında (düzgün) sürekli olur. f fonksiyonu $t_0 \in [a,b)$ noktasında sürekli olsun. t_0 sağ saçılmış nokta ise,

$$F^{\Delta}(t_0) = \frac{F(\sigma(t_0)) - F(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} = \frac{1}{\sigma(t_0) - t_0} \left[\int_a^{\sigma(t_0)} f(s)\Delta s - \int_a^{t_0} f(s)\Delta s \right]$$

$$= \frac{1}{\sigma(t_0) - t_0} \int_{t_0}^{\sigma(t_0)} f(s)\Delta s = \frac{1}{\sigma(t_0) - t_0} f(t_0)[\sigma(t_0) - t_0] = f(t_0)$$

bulunur. Şimdi t_0 sağ yoğun nokta olsun. Bu durumda,

$$F^{\Delta}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

olmalıdır. Diğer taraftan,

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \left[\int_a^{t} f(s)\Delta s - \int_a^{t_0} f(s)\Delta s \right] = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} f(s)\Delta s$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} f(s)\Delta s = f(t_0) \qquad (5.10)$$

eşitliğini ispatlamak yeterlidir. $\varepsilon > 0$ olsun. f fonksiyonu t_0 noktasında sürekli olduğundan, $s \in [a,b]$ ve $|s - t_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı vardır ve

$$|f(s) - f(t_0)| < \varepsilon$$

kalır. O halde, $t \neq t_0$ ve $|t - t_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $t \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} f(s)\Delta s - f(t_0)\right| &= \left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} [f(s)-f(t_0)]\Delta s\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} |f(s)-f(t_0)|\Delta s\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|t-t_0|}\left|\int_{t_0}^{t}\Delta s\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{|t-t_0|}|t-t_0| \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

kalır. Böylece, (5.10) eşitliği gösterilmiş olur. O halde,

$$F^{\Delta}(t_0) = f(t_0)$$

eşitliği mevcuttur.

KAYNAKLAR

[1] Bohner, M. and Peterson, A. , 2001, ‘‘Dynamic Equations on Time Scales: An İntroduction with Applications’’ , *Birkhauser*, Boston.

[2] Bohner, M., Peterson, A. , 2003, ‘‘Advances in Dynamic Equations on Time scales’’ , *Birkhauser*, Boston.

[3] Guseinov, G. Sh., Kaymakçalan, B. , 2002, ‘‘Basics of Riemann delta nabla integration on time scales’’ , *J. Difference Equ. Appl.* , Vol. 8(11): 1001–1017

[4] Guseinov, G. Sh., 2003, ‘‘ İntegration on time scales’’ , *J. Math. Anal. Appl.*, 285: 107–127.

[5] Hilger, S., 1988, ‘‘Ein MaBkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten’’ , Ph. D. thesis, Universitat Würzburg.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı: KARATAŞ, Tuğba

Uyruğu: T.C.

Doğum tarihi ve yeri: 19.11.1985 Midyat

Medeni hali: Bekar

Telefon: 0 (276) 227 76 11

e-mail: tugba_ktas@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Uşak Üniversitesi /Matematik Bölümü	2010
Lisans	Kırıkkale Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2008
Lise	Uşak Orhan Dengiz Anadolu Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Sinema, Kitap, Bilgisayar teknolojileri