MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA BİHARMONİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZLI ARIK

TEMMUZ 2010

UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA BİHARMONİK EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZLI ARIK

UŞAK 2010

Nazlı ARIK tarafından hazırlanan **"3- Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Biharmonik Eğriler"** adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ ....

Uşak Üniversitesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....

Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER ....

Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

15 / 07 / 2010

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa YALÇIN ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nazlı ARIK

3-BOYUTLU ÖKLİD VE MİNKOWSKİ UZAYLARINDA BİHARMONİK EĞRİLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Nazlı ARIK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2010

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmuştur. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır ve bu kısımda konu hakkında ön bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, Öklid ve Minkowski Uzayına ve Bishop Çatısına ait genel tanımlar ve bilgiler sunulmuştur.

Üçüncü bölüm 3-boyutlu Öklid Uzayında biharmonik eğrileri içermektedir. Burada koşullarını sağlayan eğriler ele alınıp bir Frenet eğrisi için bazı karakterizasyonlar ve sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde 3-boyutlu Minkowski Uzayında biharmonik eğriler (timelike, spacelike ve null eğrileri) ve bu eğriler için bazı durumlar incelenmiştir.

Beşinci bölümde 3- boyutlu Öklid Uzayında Bishop Çatısına göre biharmonik eğriler ele alınmıştır. Benzer koşullar uygulanmıştır.

Son bölümde ise 3- boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına göre biharmonik eğriler incelenmiştir. Bu eğriler ayrı ayrı ele alınmıştır.

Bilim kodu :

Anahtar Kelimeler : 3-boyutlu Öklid Uzayı, 3-boyutlu Minkowski Uzayı, Laplace Opareterü, Biharmonik Eğri, Frenet Eğrisi, Bishop Çatısı, Slant ve C-Slant Helisler.

Sayfa adedi **: 66**

Tez yöneticisi :

BİHARMONİC CURVES IN EUCLİDEAN 3-SPACE AND MİNKOWSKİ 3-SPACE

(M. Sc. Thesis)

Nazlı ARIK

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2010

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters. The frist chapters has been seperated to the introduction part giving preliminaries abaut topic.

In the second chapter, some basic definition and informations have been presented concerning Euclied and Minkowski Space and Bishop Frame.

The third chapter is consisted of biharmonic curves in Euelied 3-space .Taking up curves suppiying here are same choracterzations and results have been given for curve.

In the fourth chapter, biharmonic curves in Minkowski 3-space (timelike, spacelike and null curves) and same canditians abaut these curves are studied.

In the fifth chapter, Biharmonic curves according to Bishop frame in euclied 3- space is examined appiying similier conditions.

Biharmonic curves according to Bishop Frame in Minkowski 3-Space is examined in the last chapter. In addition this curves is studied separetely.

Science Code :

Key Words : Euclied 3-Space, Minkowski 3-Space, Laplace Operator, Biharmonic Curve, Frenet Curve, Bishop Frame, Slant and C-Slant Helices

Page Number : 66

Adviser :

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Murat Kemal KARACAN’ a, maddi manevi destekleri için aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Nazlı ARIK

İÇİNDEKİLER

sayfa

SİMGELER DİZİNİ

γ	Diferensiyellenebilir ve birim hızlı bir eğr
T	Eğrinin teğet vektör alanı
N	Eğrinin asli normal vektör alanı
B	Eğrinin binormal vektör alanı
κ	Eğrinin eğriliği
τ	Eğrinin burulması
k_1	Eğrinin Bishop Çatısına göre birinci eğriliği
k_2	Eğrinin Bishop Çatısına göre ikinci eğriliği
E^n	n-boyutlu Öklid Uzayı
E^3	3-boyutlu Öklid Uzayı
E_1^n	n-boyutlu Minkowski Uzayı
E_1^3	3- boyutlu Minkowski Uzayı
M_q^n	n-boyutlu, q indeksli yarı-Riemann manifoldu
M_1^n	n-boyutlu Lorentz manifoldu
$\langle , \rangle$	Riemann metriği
D	Riemann manifodlu üzerindeki konneksiyon
Δ	Laplace operatörü
$\chi(M)$	M nin teğet vektör alanlarının uzayı
C^∞	Diferensiyellenebilme
g	Metrik tensör
$\lVert v \rVert$	v nin normu

1. GİRİŞ

Bu tez 3- boyutlu Öklid ve Minkowski manifoldlarındaki eğriler ve bu eğrilerin ortalama eğrilik vektör alanı belli diferensiyel operatörlerin çekirdeğinde yer alma durumları ile ilgilidir.

İlk olarak ortalama eğrilik vektör alanı Laplasiyenin çekirdeğinde (yani ortalama eğrilik vektör alanı harmonik) olan altmanifoldlar incelenecektir. IH ortalama eğrilik vektör alanı için harmoniklik ($\Delta IH = 0$), n-boyutlu Öklid Uzayında

$$x : M^m \to E^n$$

immersiyonlu altmanifoldunun biharmonikliğine denktir. Yani $\Delta x = -mIH$ için $\Delta\Delta x = 0$ dır. $x : M \to E^n$ altmanifoldu, $\Delta IH = 0$ ise biharmonik altmanifold olarak adlandırılır. Biharmonik olma koşulu

$$\Delta IH = \lambda IH \, , \lambda \in R \qquad \textbf{(1.1)}$$

denkleminin özel bir durumu olarak görülebilir. Kısacası ortalama eğrilik vektör alanı Laplasiyenin öz vektör alanıdır.

(1.1) denklemini sağlayan Öklid manifold çalışmaları 1988 de Chen tarafından başlatıldı ve E^n de altmanifoldların (1.1) denklemini sağlayan biharmonik ($\lambda = 0$) ya da null 2-tipli altmanifoldlar olduğu gösterildi. Yine Chen tarafından 1994 ve 1995 te Minkowski Uzayında (1.1) denklemini sağlayan spacelike altmanifoldlar incelendi.1997 de de Defever tarafından (1.1) denkleminini sağlayan hiperyüzeylerin sabit ortalama eğrilikli yüzeyler olduğu gösterildi .

Bu tezin 3 ve 4. bölümleri, [26] da yapılan çalışma temel alınmış olup, 3- boyutlu Öklid ve Minkowski Uzayında $\Delta IH = \lambda IH$, $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ denklemlerini sağlayan eğriler incelenip bazı özel eğriler için karakterizasyonlar ve bunlara ait sonuçlar ele alınmıştır. 3- boyutlu Minkowski Uzayında eğrinin timelike, spacelike ve null durumlarındaki koşulları incelenmiştir. Ayrıca, 3- boyutlu Öklid ve Minkowski Uzayında $\Delta IH = \lambda IH$, $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ denklemlerini sağlayan eğriler, Bishop çatısına göre incelenip, bu çatıya göre bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. (Öklid Uzayı): R reel sayılar cismini göstermek üzere,

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in R\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan,

$$R^n \times R^n \to R$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle$$

fonksiyonu R^n uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma **Öklid iç çarpımı** denir. Üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlı R^n topolojik uzayına **Öklid uzayı** denir ve kimi zaman E^n ile gösterilir[29].

Tanım 2.2: I, R nin bir açık aralığı olmak üzere,

$$\gamma : I \subset R \to E^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, E^n uzayı içinde bir **eğri** denir.

Tanım 2.3: E^n uzayında, $\gamma : I \subset R \to E^n$ eğrisi için

$$\forall s \in I \ , \ \left\| \gamma^{'}(s) \right\| = 1$$

ise γ eğrisine **birim hızlı bir eğri** denir[29].

Tanım 2.4: 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$T(s) = \gamma^{'}(s)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasında **birim teğet vektörü** denir. T, γ eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **birim teğet vektör alanı** denir[29].

Tanım 2.5: 3-boyutlu Öklid Uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$\kappa : I \to R$$
$$s \to \kappa(s) = \left\| T^{'}(s) \right\|$$

fonksiyonuna γ eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir[29].

Tanım 2.6: 3-boyutlu Öklid Uzayında birim hızlı $\gamma : I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T^{'}(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki **asli normali** denir. N,γ eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **asli vektör alanı** denir[29].

Tanım 2.7: 3-boyutlu Öklid Uzayında birim hızlı $\gamma: I \subset R \to E^3$ eğrisi için,

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki **binormal vektörü** denir ve B vektör alanına da γ eğrisinin **binormal vektör alanı** denir[29].

Tanım 2.8: $\gamma: I \subset R \to E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau : I \to R \quad , \quad \tau(s) = -\langle B^{'}(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, γ eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına $\gamma(s)$ noktasındaki **burulması** denir[29].

Tanım 2.9: $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in E^n$ olmak üzere,

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

iç çarpımına **Lorentz (Minkowski) iç çarpımı** denir[16].

Tanım 2.10: Minkowski iç çarpımı ile tanımlı Öklid uzayına **Lorentz uzayı** ya da **Minkowski uzayı** denir ve E_1^3 ile gösterilir.

Özel olarak $n = 3$ ise, E_1^3 uzayına **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Bu durumda standart metrik,

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in E_1^3$$

olmak üzere,

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

dir[16].

Tanım 2.11: M_q^n bir reimann manifoldu ve γ: $I \subset R \to M_q^n$ difernsiyellenebilir bir eğri olsun. γ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

(i) $\langle T, T \rangle < 0$ ise , γ eğrisine **time-like (zaman benzeri)** eğri,

(ii) $\langle T, T \rangle > 0$ ise, γ eğrisine **space-like (uzay benzeri)** eğri,

(iii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise, γ eğrisine **null (ışık benzeri)** eğrisi denir.

$\gamma(s) \in IE^3{}_L$ olmak üzere γ için üç durum söz konusudur[13].

I.Durum : γ (s) bir time-like eğri ise,

T time-like, N space-like, B space-like olsun.

$$\langle T, T \rangle_L = -1 \ , \langle N, N \rangle_L = 1 \, , \langle B, B \rangle_L = 1$$

$$\langle T,N\rangle_L = \langle N,B\rangle_L = \langle T,B\rangle_L = 0$$

ve

$$D_T T = \kappa N \tag{2.1.1}$$

$$D_T N = \kappa T + \tau B \tag{2.1.2}$$

$$D_T B = -\tau N \tag{2.1.3}$$

dir[23].

II.Durum: γ (s) bir space-like eğri ise,

1) T spacelike, N spacelike, B timelike olsun.

$$\langle T,T\rangle_L = 1 \ ,\langle N,N\rangle_L = 1 \ , \langle B,B\rangle_L = -1$$

$$\langle T,N\rangle_L = \langle N,B\rangle_L = \langle T,B\rangle_L = 0$$

ve

$$D_T T = \kappa N \tag{2.1.4}$$

$$D_T N = -\kappa T + \tau B \tag{2.1.5}$$

$$D_T B = \tau N \tag{2.1.6}$$

dir[24].

2) T space-like, N time-like, B space-like olsun.

$$\langle T,T\rangle_L = 1 \ , \langle N,N\rangle_L = -1 \ , \langle B,B\rangle_L = 1$$

$$\langle T,N\rangle_L = \langle N,B\rangle_L = \langle T,B\rangle_L = 0$$

$$D_T T = \kappa N \tag{2.1.7}$$

$$D_T N = \kappa T + \tau B \tag{2.1.8}$$

$$D_T B = \tau N \tag{2.1.9}$$

dir[24].

III.Durum: γ (s) bir null eğrisi ise,

$$\langle T,T\rangle_L = 0 \ ,\langle N,N\rangle_L = 1 \ , \langle B,B\rangle_L = 1$$

$$\langle T,N\rangle_L = \langle N,B\rangle_L = 0 \ , \langle T,B\rangle_L = 1$$

ve

$$D_T T = \kappa N \tag{2.1.10}$$

$$D_T N = \tau T - \kappa B \tag{2.1.11}$$

$$D_T B = -\tau N \tag{2.1.12}$$

dir[23].

Tanım 2.12: *M* ve *N*, sırası ile *n* ve (*n*+*d*) boyutlu birer C^∞ manifoldlar olmak üzere *x*: $M \to N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için

$$dx_p : T_p(M) \to T_{x(p)}(N)$$

türev dönüşümü bire bir ise *x* fonksiyonuna bir **immersiyon (daldırma)** denir[26].

Tanım 2.13: *Z*, *M* yüzeyinin birim dik vektör alanı olmak üzere, *M* nin her bir *p* noktasında,

$$S_p : T_p(M) \to T_p(M)\ ,\ S_P(v_p) = -D_{v_0} Z\ ,$$

biçiminde tanımlı *S* fonksiyonuna, *M* yüzeyinin, *Z* birim dik vektör alanına bağlı **şekil operatörü** (ve ya **Weingarten dönüşümü**) denir[29].

Tanım 2.14: *M* nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ...e_m\}$ olmak üzere;

$$IH = \frac{1}{m} \dot{I}z(h) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} h(e_j, e_j)$$

şeklinde tanımlı IH fonksiyonuna M nin **ortalama eğrilik vektör alanı** denir[8], [27].

Tanım 2.15. *M*, *n* boyutlu bir C^∞ manifold ve *M* üzerindeki C^∞ *M* vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. *M* üzerinde bir afin konneksiyon *D* olmak üzere

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} T:\ & \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ & (X, Y) \qquad \to T(X, Y) = D_X X - D_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan tensör alanına *M* nin **torsiyon tensörü** denir. Özel olarak *T* = 0 yani,

$$[X, Y] = D_X Y - D_Y X$$

ise D ye M üzerinde **sıfır torsiyonlu konneksiyon** adı verilir. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Sıfır torsiyonlu bir konneksiyon D için,

$$D_X(g(Y, Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)\ ;\ \forall X, Y, Z \in \chi(M)$$

ise D ye M nin **Levi-Civita konneksiyonu** denir[32].

Tanım 2.16: Riemann manifoldları için M nin bir ortanormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ve ortalama eğrilik vektör alanı *IH* olsun. *M* nin **Laplace operatörü**

$$\Delta IH = \sum_{j=1}^{m} (D_{D_{E_J} e_j} IH - D_{e_j} D_{e_j} IH)$$

ve **normal Laplace operatörü**

$$\Delta^\perp IH = \sum_{j=1}^{m} (D^\perp{}_{D_{e_j} e_j} IH - D^\perp{}_{e_j} D^\perp{}_{e_j} IH)$$

biçiminde tanımlanır[7].

Tanım 2.17: E^n Öklid (yarı-öklid) uzayında

$$x : M^m \to E^n$$

immersiyonunu ele alalım. $\chi(M) \subset E^n$ manifoldunun IH ortalama eğrilik vektör alanı için $\Delta IH = 0$ denklemine **harmonik denklemi** denir. **İmmersiyonun biharmonikliği** de $\Delta x = -mIH$ olduğundan $\Delta\Delta x = 0$ dır. Yani IH nin biharmonikliği ile immersiyonun biharmonikliği denktir[8].

Tanım 2.18: M, n-boyutlu C^∞ manifold olmak üzere $x : M \to E^{n+d}$ bir izometrik immersiyon olsun.

$$\Delta^2 x = \Delta(\Delta x) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa x izometrik immersiyonuna (ya da M manifolduna) **biharmoniktir** denir. Yani E^{n+d} nin bir M manifold olması için gerek ve yeter koşul M nin ortalama eğrilik vektörünün **harmonik** ($\Delta IH = 0$) olmasıdır[7].

Tanım 2.19: $\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$ Öklid 3-uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet çatı alanını{ T, N, B } ile gösterelim. γ nın Frenet-Serret Formülleri

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N \\ D_T B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada κ ve τ fonksiyonları sırasıyla γ eğrisinin eğriliği ve burulmasıdır[29].

* Özel olarak $\kappa = 0$ ise γ eğrisi **geodeziktir**.

* $\kappa = sbt$, τ =0 ise **çember (pseudo çemberi) dir**. Dolayısıyla geodezikler sıfır eğrilikli Reimann çemberleridir.

* $\dfrac{\kappa}{\tau} = sbt$ olan eğrilere **genel helis** denir.

* $\kappa = sbt$, $\tau = sbt$ olan eğrilere **dairesel helis** denir.

* E^3 te $\langle T,T \rangle \neq 0$ ise γ birim hızlı eğrisine bir **Frenet eğrisi** denir[8], [9], [15].

Tanım 2.20: Regüler bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için α nın $N_1(s)$ birim vektörü ile u sabit birim vektörü arsındaki θ açısı sabit yani $\langle N_1(s), u \rangle = \cos\theta$ ise α eğrisine Bishop Çatısına göre bir **slant helis** denir. Bir α slant helisi için $\dfrac{k_2}{k_1} = sbt$ tir. Eğer k_1 ve k_2 doğal eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ise α eğrisine Bishop Çatısına göre bir **c-Slant helisi** denir[33].

3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİHARMONİK EĞRİLER

3.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayında $\Delta IH = \lambda IH$ Denklemini Sağlayan Eğriler

D, E^3 ün Levi-Civita konneksiyonu ve IH da γ boyunca ortalama eğrilik vektör alanını göstersin. γ nın Frenet-Serret formüllernden IH ortalama eğrilik vektör alanı,

$$IH = D_{\gamma'}\gamma' = D_T T = \kappa N$$

şeklinde verilir, burada κ, γ nın eğriliğidir.

Laplasiyen operatörü ise

$$\Delta : \chi(M)^{\perp} \to \chi(M)$$
$$IH \to \Delta IH = -D_T{}^2 IH$$

ile tanımlanır[7], [15].

Teorem 3.1.1: $\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin

$$\Delta IH = \lambda IH$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa\kappa' = 0 \ , \ \kappa\tau^2 + \kappa^3 - \kappa'' = \lambda\kappa \ , \ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0 \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

olmasıdır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\Delta IH &= -D_T{}^2 IH = -D_T{}^2(\kappa N) \\
&= -D_T(\kappa' N + \kappa D_T N) \\
&= -D_T(\kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)) \\
&= -D_T(\kappa' N - \kappa^2 T + \kappa\tau B) \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^2 D_T T - \kappa'' N - \kappa' D_T N - (\kappa\tau)' B - (\kappa\tau) D_T B \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^2(\kappa N) - \kappa'' N - \kappa'(-\kappa T + \tau B) - (\kappa\tau)' B - (\kappa\tau)(-\tau N) \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^3 N - \kappa'' N - \kappa\kappa' T + -\kappa'\tau B - (\kappa\tau)' B + \kappa\tau^2 N \\
&= (3\kappa\kappa')T + (\kappa^3 - \kappa'' - \kappa\tau^2)N + (-\kappa'\tau - \kappa'\tau - \kappa\tau')B
\end{aligned}$$

Burada

$$\Delta IH = \lambda IH$$

olduğundan

$$3\kappa\kappa' = 0 \ , \ \kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2 = \lambda\kappa \ , \ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0 \ ,$$

$$\kappa\kappa' = 0 \ , \ \kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2 = \lambda\kappa \ , \ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

olur.

Teorem 3.1.2: : $\gamma=\gamma(s): I\subset IR\to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin

$$\Delta IH=\lambda IH$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul γ nın bir dairesel helis olmasıdır. Burada

$$\lambda=\kappa^2+\tau^2$$

dir.

İspat: (⇒) Teorem 3.1.1 den $\Delta IH=\lambda IH$ denklemini sağlanması

$$\kappa\kappa'=0\ ,\ \kappa^3-\kappa''+\kappa\tau^2=\lambda\kappa\ ,\ 2\kappa'\tau+\kappa\tau'=0$$

denklemlerinin sağlanmasını gerektirir. γ Frenet eğrisi olduğundan $k\neq 0$ dır.

$$\kappa\kappa'=0\Rightarrow\kappa=sbt\ \Rightarrow\kappa'=0$$

$$2\kappa'\tau+\kappa\tau'=0\Rightarrow 2.0.\tau-\kappa.\tau'=0\Rightarrow\tau'=0\Rightarrow\tau=sbt$$

$$\kappa^3-\kappa''+\kappa\tau^2=\lambda\kappa\Rightarrow\kappa^3-0+\kappa\tau^2=\lambda\kappa\Rightarrow\kappa(\kappa^2+\tau^2)=\lambda\kappa$$

$$\Rightarrow\lambda=\kappa^2+\tau^2$$

dir.

(⇐) γ , dairesel helis olsun.

$$\kappa=sbt,\tau=sbt\ \text{ve}\ \lambda=\kappa^2+\tau^2$$

olduğundan (3.1.1) denklemleri sağlanır. Dolayısıyla $\Delta IH=\lambda IH$ dır.

Lemma 3.1.1: IH nin harmonik (yani $\Delta IH=0$) olması için gerek ve yeter koşul

$$D_{\gamma'}D_{\gamma'}D_{\gamma'}T=0$$

olmasıdır. 3-boyutlu Öklid uzayında γ nın harmonik ($\Delta IH=0$) olması için gerek ve yeter koşul γ nın biharmonik ($D_T D_T T=0$) olmasıdır[7].

Teorem 3.1.3: $\gamma=\gamma(s): I\subset IR\to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisi geodeziktir ⇔ γ boyunca $\Delta IH=0$ dır.

İspat: (⇒) γ eğrisi geodezik olsun. $\kappa=0$ olduğundan $\Delta IH=0$ dır.

(⇐) Tersine γ boyunca $\Delta IH=0$ olsun.

$$(3\kappa\kappa')T+(\kappa^3-\kappa''-\kappa\tau^2)N+(-\kappa'\tau-\kappa'\tau-\kappa\tau')B=0$$

dan,

$$\kappa\kappa'=0,\ \kappa^3-\kappa''+\kappa\tau^2=0, 2\kappa'\tau+\kappa\tau'=0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin sağlanması için $\kappa=0$ olmalıdır. Aksi takdirde bu denklemler sağlanmaz. Şimdi gösterelim.

Kabul edelim ki $\kappa \neq 0$ olsun. O zaman $\kappa\kappa^{'} = 0$ denkleminden $\kappa^{'} = 0$ ve $\kappa = c_1$ olur. Bu değerler $\kappa^3 - \kappa^{''} + \kappa\tau^2 = 0$ denkleminden $\tau^{'} = 0$ ve $\tau = c_2$ yerine yazılırsa $c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2} = 0$ olur. Burada da c_1 ve c_2 sabitlerinin kompleks sayılar dışında, reel olmaları durumunda her ikisinin de sıfır olmasıyla mümkündür. Öyleyse kabulümüz yanlış olup, $\kappa = 0$ dır. Böylece γ eğrisi geodezik olmak zorundadır.

Genelleme yapılırsa E^3 Öklid 3-uzayında birim hızlı biharmonik eğriler ancak ve ancak geodeziklerdir.

3.2. E^3 de 1.Tipten Harmonik Eğriler

Tanım 3.2.1: Bir $x : M \to E^{n+d}$ izometrik immersiyonunun ortalama eğrilik vektör alanı için

$$\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$$

koşulu sağlanıyorsa x e (ya da M ye) **1. tipten harmoniktir** denir[25].

$\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$ eğrisinin normal demetini $\chi^{\perp}(\gamma(\mathrm{I}))$ ile gösterelim. Burada

$$\chi(\gamma(\mathrm{I})) = Sp\{N(s), B(s)\}$$

şeklindedir. $\forall X \in \chi^{\perp}(\gamma(\mathrm{I}))$ için $D^{\perp}$ **normal konneksiyon**

$$D_{\mathrm{T}}^{\ \perp} : \chi^{\perp}(\gamma(\mathrm{I})) \to \chi^{\perp}(\gamma(\mathrm{I}))$$
$$D_T^{\ \perp} X = D_T X - \langle D_T X\ , T \rangle T$$

$D_{\mathrm{T}}^{\ \perp} X = D_{\mathrm{T}} X$ nın normal bileşeni ve $\Delta^{\perp}$ **normal Laplace operatörü** de

$$\Delta_{\mathrm{T}}^{\ \perp} : \chi^{\perp}(\gamma(\mathrm{I})) \to \chi^{\perp}(\gamma(\mathrm{I}))$$
$$\Delta^{\perp} X = -D_T^{\ \perp} D_T^{\ \perp} X$$

olarak tanımlanır[7].

Teorem 3.2.1: $\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa\tau^2 - \kappa^{''} = \lambda\kappa\ ,\ 2\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'} = 0 \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

olmasıdır.

İspat: (⇒) γ eğrisi 1. tipten harmonik eğri olduğundan $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ eşitliğini sağlar. Şimdi $\Delta^{\perp} IH$ hesaplayalım.

$$IH = D_{\gamma^{'}} \gamma^{'} = D_T T = \kappa N$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$D_T IH = -\kappa^2 T + \kappa^{'} N + \kappa\tau B$$

olup

$$D_T^{\perp} IH = \kappa N + \kappa\tau B$$

dır. Her iki tarafın da teğetsel yönde türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} D_T D_T^{\perp} IH &= D_T(\kappa' N + \kappa\tau B) \\ &= \kappa'' N + \kappa' D_T N + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau D_T B \\ &= \kappa'' N + \kappa'(-\kappa T + \tau B) + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau(-\tau N) \\ &= \kappa\kappa' T + (\kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B \end{aligned}$$

buradan

$$D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH = (\kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta^{\perp} IH &= -D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH \\ \Delta^{\perp} IH &= (\kappa\tau^2 - \kappa'') N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

olur. $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ denkleminden

$$(\kappa\tau^2 - \kappa'') N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B = \lambda\kappa N$$

dir ve buradan da (3.2.1) denklemleri elde edilir.

($\Leftarrow$) Tersine (3.2.1) denklemleri $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ eşitliğini sağlar.

Tanım 3.2.2: Bir $\chi : M \to E^{n+d}$ izometrik immersiyonunun ortalama eğrilik vektörü IH için

$$\Delta^{\perp} IH = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $\chi : M \to E^{n+d}$ izometrik immersiyonuna (ya da *M* alt manifolduna) **zayıf biharmoniktir** denir[25].

Teorem 3.2.2: $\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0 \, , \; 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0 \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) γ eğrisi zayıf biharmonik olduğundan tanım gereği $\Delta^{\perp} IH = 0$ olup (3.2.3) denklemleri sağlanır.

($\Leftarrow$) Tersine (3.2.3) denklemleri $\Delta^{\perp} IH = 0$ eşitliğini sağlar. Bu da γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.1: $\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$, eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun.γ eğrisinin zayıf biharmonik olması için gerek ve yeter koşul E^3 de bir geodezik olmasıdır.

İspat: **($\Rightarrow$)** γ eğrisinin zayıf biharmonik ise $\Delta^{\perp} IH = 0$ dır. Teorem 3.2.1 den

$$\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0,\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

denklemleri sağlanır. Bu diferensiyel denklemlerin aşikar çözümü de $\kappa = 0$ dır. Bu ise γ nın E^3 de bir geodezik olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$) Tersine γ geodezik ise $\kappa = 0$ olup, bu değer denklemlerini sağlar. Bu $\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0,\ 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ denklemler de $\Delta^{\perp} IH = 0$ eşitliğini sağlar. Bu da γ nın zayıf biharmonik olduğunu gösterir.

3.3 E^3 de Bir Frenet Eğrisini Karakterize Eden Denklem ve Sonuçları

Teorem 3.3.1: γ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisi olsun. κ ve τ, γ eğrisinin sırasıyla eğrilik ve burulması olmak üzere, γ eğrisini karakterize eden denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3 T - \left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right) D_T{}^2 T + \left(-\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \tau^2\right) D_T T + \left(\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'\right) T = 0 \quad \textbf{(3.3.1)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ birim hızlı Frenet eğrisinin Frenet formülleri,

$$D_T T = \kappa N \quad \textbf{(3.3.2)}$$

$$D_T N = -\kappa T + \tau B \quad \textbf{(3.3.3)}$$

$$D_T B = -\tau N \quad \textbf{(3.3.4)}$$

dir. Burada (3.3.3) den

$$B = \frac{1}{\tau} D_T N + \frac{\kappa}{\tau} T \quad \textbf{(3.3.5)}$$

ve (3.3.2) den

$$N = \frac{1}{\kappa} D_T T \quad \textbf{(3.3.6)}$$

eşitliğini (3.3.5) te yerine yazarsak

$$B = \frac{1}{\tau} D_T \left(\frac{1}{\kappa} D_T T\right) + \frac{\kappa}{\tau} T$$

$$B = \frac{1}{\tau}\left(-\frac{\kappa'}{\kappa^2} D_T T + \frac{1}{\kappa} D_T{}^2 T\right) + \frac{\kappa}{\tau} T$$

$$B = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} D_T T + \frac{1}{\kappa\tau} D_T{}^2 T + \frac{\kappa}{\tau} T \quad \textbf{(3.3.7)}$$

dir. Burada (3.3.7) nin teğetsel türevi alınırsa,

$$D_T B = -\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' D_T T - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right) D_T{}^3 T + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T + \frac{\kappa}{\tau} D_T T \qquad \textbf{(3.3.8)}$$

elde edilir. (3.3.6) değeri (3.3.4) değeri yerine yazılırsa

$$D_T B = -\tau N = -\frac{\tau}{\kappa} D_T T \qquad \textbf{(3.3.9)}$$

(3.3.8) ifadesi de (3.3.9) de yerine yazılırsa

$$-\frac{\tau}{\kappa} D_T T = -\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' D_T T - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right) D_T{}^3 T + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T + \frac{\kappa}{\tau} D_T T$$

bulunur. Bu son denklem düzenlendiğinde,

$$\frac{1}{\kappa} D_T{}^3 T + \left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right] D_T{}^2 T + \left[-\left(\frac{\kappa}{\tau\kappa^2}\right)' + \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa}\right] D_T T + \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T = 0$$

$$D_T{}^3 T + \kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right] D_T{}^2 T + \kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' + \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa}\right] D_T T + \kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T = 0$$

olur. Bu denklemdeki katsayılar sadeleştirilip düzenlenirse,

$$\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right] = \kappa\tau\left[\frac{-(\kappa\tau)'}{(\kappa\tau)^2} - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right]$$

$$= \kappa\tau\left[\frac{-\kappa'\tau - \kappa\tau}{(\kappa\tau)^2} - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right]$$

$$= -\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} - \frac{\kappa'}{\kappa}$$

$$\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right] = -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right)$$

$$\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' + \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa}\right] = -\kappa\tau\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' + \kappa^2 + \tau^2$$

$$= -\kappa\tau\left[\frac{\kappa''\tau\kappa^2 - k'(\tau'\kappa^2 - 2\kappa\kappa'\tau)}{(\tau\kappa^2)^2}\right] + \kappa^2 + \tau^2$$

$$= -\left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} - \frac{2(\kappa')^2}{\kappa^2}\right) + \kappa^2 + \tau^2$$

$$\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' + \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa}\right] = -\left(+\frac{\kappa''}{\kappa} - \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} - \frac{2(\kappa')^2}{\kappa^2}\right) + \kappa^2 + \tau^2$$

dir. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa (3.3.1) denklemi elde edilir.

Teorem 3.3.2: 3-boyutlu Öklid uzayında bir genel helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3T - 3\frac{\kappa'}{\kappa}D_T{}^2T + \left[-\frac{\kappa''}{\kappa} + 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \tau^2\right]D_T T = 0 \qquad \textbf{(3.3.10)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ Frenet eğrisi bir genel helis ise,

$$\frac{\kappa}{\tau} = sbt \Rightarrow \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{\tau'}{\tau}$$

dir. Bu değerler (3.3.1) denkleminde yerine yazılırsa, (3.3.10) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.3.1: 3-boyutlu Öklid uzayında bir genel helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa'}{\kappa}D_T IH + \left[\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - (\kappa^2 + \tau^2)\right]IH = 0 \qquad \textbf{(3.3.11)}$$

İspat: γ Frenet eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir genel helis ise,

$\frac{\kappa}{\tau} = sbt \Rightarrow \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{\kappa'}{k} = \frac{\tau'}{\tau}$, Laplace operatörü $\Delta = -\frac{d^2}{ds^2} = -D_T D_T$ ve ortalama eğrilik vektör alanı $IH = D_T\gamma' = D_T T$ olup bu değerler (3.3.1) de yerine yazılırsa, (3.3.11) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.3.2: 3-boyutlu Öklid uzayında bir dairesel helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3T + (\kappa^2 + \tau^2)T = 0 \qquad \textbf{(3.3.12)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ Frenet eğrisi dairesel helis ise,

$$\kappa = sbt,\ \tau = sbt,\ \kappa' = 0,\ \tau' = 0$$

dir. Bu değerler (3.3.1) denkleminde yerine yazılırsa (3.3.12) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.3.3: 3-boyutlu Öklid uzayında bir dairesel helisin diğer bir karakterizasyonu aşğıdaki gibidir.

$$\Delta IH - (\kappa^2 + \tau^2)IH = 0 \qquad \textbf{(3.3.13)}$$

İspat: Laplace operatörü $\Delta IH = -D_T D_T IH$ dir. Bu değerler (3.3.12) denkleminde yerine yazılırsa (3.3.13) denklemi elde edilir.

3.4. E^3 de Bir Frenet Eğrisini Normal Konneksiyona Göre Karakterize Eden Denklem ve Sonuçları

Teorem 3.4.1: γ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir Frenet eğrisi olsun. κ ve τ, γ eğrisinin sırasıyla eğrilik ve burulması olmak üzere, γ eğrisini normal konneksiyona göre karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T-\left(2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}+\frac{\tau^{'}}{\tau}\right)D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}+2\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2+\tau^2\right]D_T{}^{\perp}T=0 \quad \textbf{(3.4.1)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında normal konneksiyona göre bir eğrinin Frenet formülleri,

$$D_T{}^{\perp}T=\kappa N \quad \textbf{(3.4.2)}$$

$$D_T{}^{\perp}N=\tau B \quad \textbf{(3.4.3)}$$

$$D_T{}^{\perp}B=-\tau N \quad \textbf{(3.4.4)}$$

şeklindedir. (3.4.3) eşitliğinden

$$B=\frac{1}{\tau}D_T{}^{\perp}N \quad \textbf{(3.4.5)}$$

ve (3.4.2) eşitliğinden

$$N=\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}T$$

eşitliğini (3.4.5) eşitliğinde yerine yazarsak

$$B=\frac{1}{\tau}D_T{}^{\perp}\left(\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}T\right)$$

$$B=\frac{1}{\tau}\left[-\frac{\kappa^{'}}{\kappa^2}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T\right]$$

olup buradan

$$B=-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\kappa\tau}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T$$

bulunur. Bulunan N ve B değerlerini (3.4.4) eşitliğinde yerine yazarsak

$$D_T\left[-\frac{k^{'}}{\tau\kappa^2}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T\right]=-\tau\left[\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}T\right]$$

$$\left(-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}\right)^{'}D_T{}^{\perp}T-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)^{'}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\kappa\tau}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\frac{\tau}{\kappa}D_T{}^{\perp}T=0 \quad \textbf{(3.4.6)}$$

olur. Burada katsayılar sadeleştirilip düzenlenirse

$$\left(-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^{2}}\right)^{'}=\left(\frac{\kappa^{'}\tau^{'}\kappa^{2}+2\kappa\tau(k^{'})^{2}-\kappa^{''}\tau\kappa^{2}}{\tau^{2}\kappa^{4}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)^{'}=\left(\frac{-\kappa^{'}\tau-\kappa\tau^{'}}{\kappa^{2}\tau^{2}}\right)$$

olur. Denklemde yerine yazılırsa (3.4.1)eşitliği elde edilir.

Teorem 3.4.2: 3-boyutlu Öklid uzayında normal konneksiyona göre bir genel helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşğıdaki gibidir.

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left(-3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left(3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^{2}-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\tau^{2}\right)D_T{}^{\perp}T=0 \qquad \textbf{(3.4.7)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ Frenet eğrisi normal konneksiyona göre bir genel helis ise,

$$\frac{\kappa}{\tau}=sbt\Rightarrow\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'}=0\Rightarrow\frac{\kappa^{'}}{\kappa}=\frac{\tau^{'}}{\tau}$$

dir. Bu değerler (3.4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.4.7) eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.4.1: 3-boyutlu Öklid uzayında normal konneksiyona göre bir genel helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta^{\perp}IH+\left(3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)D_T{}^{\perp}IH+\left[-3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^{2}+\frac{\kappa^{''}}{\kappa}-\tau^{2}\right]IH=0 \qquad \textbf{(3.4.8)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ Frenet eğrisi normal konneksiyona göre bir genel helis ise,

$\frac{\kappa}{\tau}=sbt \Rightarrow \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'}=0 \Rightarrow \frac{\kappa^{'}}{\kappa}=\frac{\tau^{'}}{\tau}$ ve $\Delta^{\perp}=-D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}$, $IH=D_T{}^{\perp}T$ olup bu değerler (3.4.7) denkleminde yerine yazılırsa (3.4.8) denklemi elde edilir

Sonuç 3.4.2: 3-boyutlu Öklid uzayında normal konneksiyona göre bir dairesel helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}IH+\tau^{2}D_T{}^{\perp}IH=0 \qquad \textbf{(3.4.9)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir dairesel helis olduğundan

$$\kappa=sbt\,,\ \tau=sbt\ \Rightarrow\kappa^{'}=0\,,\tau^{'}=0$$

dir. Bu değerler (3.4.1) denkleminde yerine yazılırsa (3.4.9) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.4.2: 3-boyutlu Öklid uzayında normal konneksiyona göre bir dairesel helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta^{\perp}IH-\tau^{2}D_T{}^{\perp}IH=0 \qquad \textbf{(3.4.10)}$$

İspat: $\Delta^{\perp}=-D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}$ ve $IH=D_T{}^{\perp}T$ değerleri (3.4.9) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.4.10) denklemi elde edilmiş olur.

4. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA BİHARMONİK EĞRİLER

4.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında $\Delta IH = \lambda IH$ Denklemini Sağlayan Eğriler

Bir γ eğrisi üzerinde $D_{\gamma'}\gamma' = 0$ ise birim hızlı γ eğrisine bir **geodezik eğri** adı verilir. Burada D, L^3 deki Levi-Civita konneksiyonudur. L^3 de her Frenet γ eğrisi için, $\{T, N, B\}$, $T = \gamma'(s)$ olacak şekilde γ boyunca bir ortanormal çatı alanıdır. Riemann geometrisindeki durum gibi, bir γ frenet eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul $\kappa = 0$ olmasıdır. Sabit eğrilik ve sıfır burulmalı bir Frenet eğrisine **pseudo çember** denir. Dairesel helis, eğriliği ve burulması sabit olan bir Frenet eğrisidir. Çember olmayan helisler de proper helislerdir[15], [21], [22].

Teorem 4. 1. 1: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Frenet eğrisi $\gamma = \gamma(s) : I \subset R \to L^3$ olsun ve Laplasiyen operatörü Δ ile gösterilsin. γ eğrisinin $\Delta IH = \lambda IH$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul γ eğrisinin bir dairesel helis olmasıdır. Burada,

i) γ eğrisi $\lambda = -\kappa^2 + \tau^2$ olacak şekilde bir timelike dairesel helistir.

ii) γ eğrisi $\lambda = -\kappa^2 - \tau^2$ olacak şekilde asli normali time-like olan bir space-like dairesel helistir.

iii) γ eğrisi $\lambda = \kappa^2 - \tau^2$ olacak şekilde binormali time-like olan bir space-like dairesel helistir

iv) γ eğrisi $\lambda = -2\kappa\tau$ olacak şekilde null olan bir dairesel helistir.

İspat: ***i)*** (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) eşitliklerinden faydalanılarak

$$IH = D_T T = \kappa N$$

$$D_T IH = D_T(\kappa N) = \kappa' N + \kappa D_T N$$

$$= \kappa' N + \kappa(\kappa T + \tau B)$$

$$D_T IH = \kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

$$
\begin{aligned}
D_T D_T IH &= D_T(\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B) \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^2 D_T T + \kappa'' N + \kappa' D_T N + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau D_T B \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^2 D_T T + \kappa'' N + \kappa' D_T N + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau D_T B \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^3 N + \kappa'' N + \kappa'\kappa T + \kappa'\tau B + (\kappa\tau)' B - \kappa\tau^2 N \\
&= 3\kappa\kappa' T + (\kappa^3 + \kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B
\end{aligned}
$$

$$
\Delta IH = -D_T D_T IH = -3\kappa\kappa' T + (-\kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2) N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau') B \qquad \textbf{(4.1.2)}
$$

olduğunu söyleyebiliriz.

$$\Delta IH = \lambda IH$$

$$-3\kappa\kappa' T + (-\kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2) N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau') B = \lambda\kappa N$$

$$\kappa\kappa' = 0 \ , \ -\kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2 = \lambda\kappa \quad , \quad -2\kappa'\tau - \kappa\tau' = 0$$

γ eğrisi bir dairesel helis olduğundan

$$\kappa = sbt \ , \tau = sbt \ \Rightarrow \kappa' = 0 \ , \tau' = 0 \ \Rightarrow \kappa'' = 0, \tau'' = 0$$

dır.

$$
\begin{aligned}
-\kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2 = -\kappa^3 + \kappa\tau^2 &= \lambda\kappa \\
\Rightarrow \kappa(-\kappa^2 + \tau^2) &= \lambda\kappa \\
\Rightarrow -\kappa^2 + \tau^2 &= \lambda
\end{aligned}
$$

dir.

ii) (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) eşitliklerinden

$$IH = D_T T = \kappa N$$

$$
\begin{aligned}
D_T IH = D_T(\kappa N) &= \kappa' N + \kappa D_T N \\
&= \kappa' N + \kappa(\kappa T + \tau B)
\end{aligned}
$$

$$
D_T IH = \kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B \qquad \textbf{(4.1.3)}
$$

$$
\begin{aligned}
D_T D_T IH &= D_T(\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B) \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^2 D_T T + \kappa'' N + \kappa' D_T N + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau D_T B \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^2(\kappa N) + \kappa'' N + \kappa'(\kappa T + \tau B) + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau(\tau N) \\
&= 2\kappa\kappa' T + \kappa^3 N + \kappa'' N + \kappa'\kappa T + \kappa'\tau B + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau^2 N \\
&= 3\kappa\kappa' T + (\kappa^3 + \kappa'' + \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B
\end{aligned}
$$

$$
\Delta IH = -D_T D_T IH = -3\kappa\kappa' T - (\kappa^3 + \kappa'' + \kappa\tau^2) N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau') B \qquad \textbf{(4.1.4)}
$$

olduğunu söyleyebiliriz.

$$\Delta IH = \lambda IH$$

$$-3\kappa\kappa' T - (\kappa^3 + \kappa'' + \kappa\tau^2) N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau') B = \lambda\kappa N$$

γ eğrisi bir dairesel helis olduğundan

$$\kappa = sbt\ ,\tau = sbt\ \Rightarrow \kappa^{'} = 0\ ,\tau^{'} = 0\ \Rightarrow \kappa^{''} = 0, \tau^{''} = 0$$

dır.

$$-(\kappa^3 + \kappa^{''} + \kappa\tau^2) = \lambda\kappa$$

$$-2\kappa^{'}\tau - \kappa\tau^{'} = 0$$

$$-(\kappa^3 + \kappa^{''} + \kappa\tau^2) = -(\kappa^3 + \kappa\tau^2) = \lambda\kappa$$

$$\Rightarrow -\kappa(\kappa^2 + \tau^2) = \lambda\kappa$$

$$\Rightarrow -(\kappa^2 + \tau^2) = \lambda$$

dir.

iii) (2.1.7), (2.1.8), (2.1.9) eşitliklerinden benzer işlemler yapılırsa,

$$D_T IH = \kappa^2 T + \kappa^{'} N + \kappa\tau B \qquad \textbf{(4.1.5)}$$

$$\Delta IH = -D_T D_T IH = 3\kappa\kappa^{'} T + (\kappa^3 - \kappa^{''} - \kappa\tau^2)N + (-2\kappa^{'}\tau - \kappa\tau^{'})B \qquad \textbf{(4.1.6)}$$

dir. $\Delta IH = \lambda IH$ olduğundan

$$\kappa\kappa^{'} = 0\ \ ,\ (\kappa^3 - \kappa^{''} - \kappa\tau^2) = \lambda\kappa\ \ ,\ -2\kappa^{'}\tau - \kappa\tau^{'} = 0$$

eşitlikleri elde edilir. γ eğrisi bir dairesel helis olduğundan

$$\kappa = sbt\ ,\tau = sbt\ \Rightarrow \kappa^{'} = 0\ ,\tau^{'} = 0\ \Rightarrow \kappa^{''} = 0, \tau^{''} = 0$$

dır. Buradan da

$$(\kappa^3 - \kappa^{''} - \kappa\tau^2) = \kappa^3 - \kappa\tau^2 = \lambda\kappa$$

$$\Rightarrow \kappa^2 - \tau^2 = \lambda$$

dir.

iv) (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) eşitlikleri kullanılarak benzer işlemler null eğrisi için de yapıldığında

$$D_T IH = \kappa\tau T - \kappa^{'} N - \kappa^2 B \qquad \textbf{(4.1.7)}$$

$$\Delta IH = -D_T D_T IH = -(2\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'})T - (2\kappa\tau^2 + \kappa^{''})N + 3\kappa^{'}\kappa B \qquad \textbf{(4.1.8)}$$

bulunur. $\Delta IH = \lambda IH$ eşitliğinden

$$2\kappa^{'}\tau + \kappa\tau^{'} = 0\ \ ,\ \ -(2\kappa\tau^2 + \kappa^{''}) = \lambda\kappa\ ,\ \kappa\kappa^{'} = 0$$

elde edilir. γ eğrisi bir dairesel helis olduğundan

$$\kappa = sbt\ ,\tau = sbt\ \Rightarrow \kappa^{'} = 0\ ,\tau^{'} = 0\ \Rightarrow \kappa^{''} = 0, \tau^{''} = 0$$

dır. Bu değerler denklemde yerine yazıldığında

$$-(2\kappa\tau^2 + \kappa^{''}) = -2\kappa^2\tau = \lambda\kappa$$

$$-2\kappa\tau=\lambda$$

dir.

Sonuç 4.1.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ, null olmayan bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin geodezik olmayan biharmonik eğri olması için olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden birisinin geçerli olmasıdır.

i) γ eğrisi $\kappa=\pm\tau$ olacak şekilde timelike bir helis,

ii) γ eğrisi $\kappa=\pm\tau$ olacak şekilde binormali timelike olan bir spacelike helis,

3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan spacelike eğriler yoktur.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi biharmonik eğri olsun. $\Delta IH=0$ dır.

i) γ eğrisi timelike eğri olsun. Teorem 4.1.1 *i)* de $\kappa=sbt \Rightarrow \kappa'=0 \Rightarrow \kappa''=0$ olmasından yine $-\kappa^2+\tau^2=\lambda$ değeri elde edilir. Burada $\lambda=0$ olduğundan $\kappa^2=\tau^2 \Rightarrow \kappa=\pm\tau$ dır.

ii) γ eğrisi binormali timelike olan spacelike bir helis olsun. Teorem 4.1.1 *iii)* de $\kappa=sbt \Rightarrow \kappa'=0 \Rightarrow \kappa''=0$ olmasından yine $-\kappa^2+\tau^2=\lambda$ değeri elde edilir. Benzer şekilde $\lambda=0$ olduğundan $\kappa^2=\tau^2 \Rightarrow \kappa=\pm\tau$ dir.

3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan spacelike eğriler için Teorem 4.1.1. *ii)* de $\kappa=sbt \Rightarrow \kappa'=0 \Rightarrow \kappa''=0$ olmasından $\kappa^2+\tau^2=\lambda$ değeri elde edilir. $\lambda=0$ olduğundan $\kappa^2+\tau^2=0$ olacak şekilde κ ve τ değerleri yoktur.

Sonuç 4.1.2: 3- boyutlu Minkowski uzayında bir Frenet null eğrisi γ olsun. γ eğrisinin biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul $\tau=0$ olacak şekilde bir pseudo null çember olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi biharmonik olduğundan $\Delta IH=0$ dır. Teorem 4.1.1 den $\lambda=-2\kappa\tau$ denkleminde λ yı sıfır yapan değer, $\kappa=0$ ve ya $\tau=0$ dır. γ bir Frenet eğrisi olduğundan $\kappa\neq 0$ dır. Bu durumda $\tau=0$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ Tersine γ null eğrisi bir pseudo null çember olsun. $\tau=0$ dir ve $\lambda=-2\kappa\tau$ denklemini sıfır yapan değerdir. Buradan $\Delta IH=0$ olup γ eğrisi biharmonik null eğrisidir.

Teorem 4. 1. 2: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Frenet eğrisi $\gamma=\gamma(s):I\subset R\to L^3$ olsun. Δ Laplasiyen operatörü olmak üzere

$$\Delta IH+\lambda D_T IH+\mu IH=0 \qquad \textbf{(4.1.9)}$$

denklemi sağlanırsa,

i) γ eğrisi $\lambda = 3\dfrac{\kappa'}{\kappa}$, $\mu = \left(\dfrac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\dfrac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 - \tau^2 \right)$, olacak şekilde bir time-like eğridir.

ii) γ eğrisi $\lambda = 3\dfrac{\kappa'}{\kappa}$, $\mu = \left(\dfrac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\dfrac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \tau^2 \right)$, olacak şekilde asli normali time-like olan bir spacelike eğridir.

iii) γ eğrisi $\lambda = 3\dfrac{\kappa'}{\kappa}$, $\mu = \left(\dfrac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\dfrac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - \kappa^2 + \tau^2 \right)$, olacak şekilde binormali time-like olan bir spacelike eğridir.

iv) γ eğrisi $\lambda = 3\dfrac{\kappa'}{\kappa}$, $\mu = \left(\dfrac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\dfrac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + 2\kappa\tau \right)$, olacak şekilde bir null eğrisidir.

İspat:

i) γ bir timelike eğrisi için (4.1.1) ve (4.1.2) eşitlikleri (4.1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(-3\kappa\kappa' + \lambda\kappa^2)T + (-\kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2 + \lambda\kappa' + \mu\kappa)N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau' + \lambda\kappa\tau)B = 0$$

dir. Buradan

$$-3\kappa\kappa' + \lambda\kappa^2 = 0$$

$$-\kappa^3 - \kappa'' + \kappa\tau^2 + \lambda\kappa' + \mu\kappa = 0$$

$$-2\kappa'\tau - \kappa\tau' + \lambda\kappa\tau = 0$$

bulunur. Bu denklemlerden λ ve μ değerleri çekilirse

$$\lambda = 3\frac{\kappa'}{\kappa} , \ \mu = \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 - \tau^2 \right)$$

elde edilir.

ii) (4.1.3) ve (4.1.4) eşitliklerinden

$$D_T IH = \kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B$$

$$\Delta IH = -3\kappa\kappa' T - (\kappa^3 + \kappa'' + \kappa\tau^2)N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau')B$$

dir. Bu değerler (4.1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$(-3\kappa\kappa' + \lambda\kappa^2)T + (-\kappa^3 - \kappa'' - \kappa\tau^2 + \lambda\kappa' + \mu\kappa)N + (-2\kappa'\tau - \kappa\tau' + \lambda\kappa\tau)B = 0$$

denklemi bulunur ve burada

$$-3\kappa\kappa' + \lambda\kappa^2 = 0$$

$$-\kappa^3 - \kappa'' - \kappa\tau^2 + \lambda\kappa' + \mu\kappa = 0$$

$$-2\kappa^{'}\tau-\kappa\tau^{'}+\lambda\kappa\tau=0$$

dir. Bu denklemlerden de

$$\lambda=3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\ ,\ \mu=\left(\frac{\kappa^{''}}{\kappa}-3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^{2}+\kappa^{2}+\tau^{2}\right)$$

değerleri elde edilir.

iii) (4.1.5) ve (4.1.6) eşitlikleri (4.1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$(3\kappa\kappa^{'}-\lambda\kappa^{2})T+(\kappa^{3}-\kappa^{''}-\kappa\tau^{2}+\lambda\kappa^{'}+\mu\kappa)N+(-2\kappa^{'}\tau-\kappa\tau^{'}+\lambda\kappa\tau)B=0$$

dir. Buradan da

$$3\kappa\kappa^{'}-\lambda\kappa^{2}=0$$

$$\kappa^{3}-\kappa^{''}-\kappa\tau^{2}+\lambda\kappa^{'}+\mu\kappa=0$$

$$-2\kappa^{'}\tau-\kappa\tau^{'}+\lambda\kappa\tau=0$$

dir. Bu eşitliklerden de

$$\lambda=3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\ ,\ \mu=\left(\frac{\kappa^{''}}{\kappa}-3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^{2}-\kappa^{2}+\tau^{2}\right)$$

değerleri elde edilir.

iv) (4.1.7) ve (4.1.8) eşitlikleri (4.1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$(-2\kappa^{'}\tau-\kappa\tau^{'}+\lambda\kappa\tau)T+(-2\kappa\tau^{2}-\kappa^{''}+\lambda\kappa^{'}+\mu\kappa)N+(3\kappa^{'}\kappa-\lambda\kappa^{2})B=0$$

bulunur. Buradan

$$(-2\kappa^{'}\tau-\kappa\tau^{'}+\lambda\kappa\tau)=0$$

$$(-2\kappa\tau^{2}-\kappa^{''}+\lambda\kappa^{'}+\mu\kappa)=0$$

$$(3\kappa^{'}\kappa-\lambda\kappa^{2})=0$$

dir. Buradan da

$$\lambda=3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\ ,\ \mu=\left(\frac{\kappa^{''}}{\kappa}-3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^{2}+2\kappa\tau\right)$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.1.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir Frenet eğrisi $\gamma=\gamma(s):I\subset R\to L^{3}$ olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_{T}{}^{3}T+\lambda_{1}D_{T}{}^{2}T+\lambda_{2}D_{T}T+\lambda_{3}T=0$$

ve

i) γ eğrisi $\lambda_1 = -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right)$, $\lambda_2 = -\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} - 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - \kappa^2 + \tau^2$, $\lambda_3 = -\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$ olacak şekilde bir time-like eğridir.

ii) γ eğrisi $\lambda_1 = -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right)$, $\lambda_2 = -\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - \kappa^2 - \tau^2$, $\lambda_3 = -\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$ olacak şekilde asli normali time-like olan bir spacelike eğridir.

iii) γ eğrisi $\lambda_1 = -\left(2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}\right)$, $\lambda_2 = -\frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 - \tau^2$, $\lambda_3 = -\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)'$, olacak şekilde binormali time-like olan bir spacelike eğridir.

iv) γ eğrisi $\lambda_1 = -\frac{\kappa'}{\kappa}, \lambda_2 = -\frac{\kappa''}{\kappa} + 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - 2\kappa\tau$, $\lambda_3 = \kappa^2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)'$ olacak şekilde bir null eğrisidir.

İspat: ***i)*** γ eğrisi bir timelike eğri ise (2.1.1) ve (2.1.3) eşitliklerinden

$$N = \frac{1}{\kappa} D_T T \qquad \textbf{(4.1.10)}$$

$$B = \frac{1}{\tau}\left[D_T N - \kappa T\right]$$
$$= \frac{1}{\tau}\left[D_T\left(\frac{1}{\kappa} D_T T\right) - \kappa T\right]$$

$$B = -\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} D_T T + \frac{1}{\kappa\tau} D_T{}^2 T - \frac{\kappa}{\tau} T \qquad \textbf{(4.1.11)}$$

(4.1.11) in teğetsel yönde türevi alınırsa

$$D_T B = -\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' D_T T - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right) D_T{}^3 T - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T - \frac{\kappa}{\tau} D_T T$$

(4.1.1) eşitliği (2.1.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$D_T B = -\tau N = -\frac{\tau}{\kappa} D_T T$$

dir. Denklemde yerine yazıldığında

$$-\frac{\tau}{\kappa} D_T T = -\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' D_T T - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{\kappa\tau}\right) D_T{}^3 T - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T - \frac{\kappa}{\tau} D_T T$$

$$\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right) D_T{}^3 T + \left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)' - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right] D_T{}^2 T + \left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' - \frac{\kappa}{\tau} + \frac{\tau}{\kappa}\right] D_T T - \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)' T = 0$$

$$D_T{}^3T+\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)^{'}-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}\right]D_T{}^2T+\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}\right)^{'}-\frac{\kappa}{\tau}+\frac{\tau}{\kappa}\right]D_TT-\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'}T=0$$

elde edilir. Katsayıları düzenlesek,

$$\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)^{'}-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}\right]=-\left(2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}+\frac{\tau^{'}}{\tau}\right)$$

$$\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}\right)^{'}+\frac{\kappa}{\tau}+\frac{\tau}{\kappa}\right]=\left(-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}+\frac{2(\kappa^{'})^2}{\kappa^2}\right)+\kappa^2+\tau^2$$

$$D_T{}^3T-\left(2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}+\frac{\tau^{'}}{\tau}\right)D_T{}^2T+\left[-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}-2\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2-\kappa^2+\tau^2\right]D_TT-\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'}T=0 \quad \textbf{(4.1.12)}$$

bulunur. Buradan da $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ değerleri elde edilir.

ii) γ eğrisi asli normali timelike olan spacelike bir helis olsun. (2.1.4), (2.1.5) ve (2.1.6) eşitlikleri kullanılarak *i)* ifadesine benzer şekilde işlemler yapıldığında

$$D_T{}^3T-\left(2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}+\frac{\tau^{'}}{\tau}\right)D_T{}^2T+\left[-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}+2\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2-\kappa^2-\tau^2\right]D_TT-\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'}T=0 \quad \textbf{(4.1.13)}$$

denklemi elde edilir. γ genel helis olduğunda (4.1.13) denklemi düzenlenirse,

$$D_T{}^3T-3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}D_T{}^2T+\left(\frac{\kappa^{''}}{\kappa}-3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2+\kappa^2+\tau^2\right)D_TT=0$$

bulunur. Buradan da $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ değerleri elde edilir.

iii) γ eğrisi binormali timelike olan spacelike bir helis olsun. (2.1.7), (2.1.8) ve (2.1.9) eşitlikleri kullanılarak ***i)*** ifadesine benzer şekilde işlemler yapıldığında

$$D_T{}^3T-\left(2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}+\frac{\tau^{'}}{\tau}\right)D_T{}^2T+\left[-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}+2\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2+\kappa^2-\tau^2\right]D_TT-\kappa\tau\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'}T=0 \quad \textbf{(4.1.14)}$$

bulunur. Buradan da $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ değerleri elde edilir.

iv) γ eğrisi bir null genel helisi olsun. (2.1.10), (2.1.11) ve (2.1.12) eşitlikleri kullanılarak benzer şekilde işlemler yapıldığında

$$D_T{}^3T-\frac{\kappa^{'}}{\kappa}D_T{}^2T+\left[-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2-2\kappa\tau\right]D_TT-\kappa^2\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^{'}T=0 \qquad \textbf{(4.1.15)}$$

bulunur. Buradan da $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ değerleri elde edilir.

Sonuç 4.1.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisinin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

i) γ bir timelike genel helis olduğunda

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T IH + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 - \tau^2 \right) IH = 0$$

ii) γ eğrisi asli normali timelike olan spacelike bir genel helis olduğunda

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T IH + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 + \tau^2 \right) IH = 0$$

iii) γ eğrisi binormali timelike olan spacelike bir genel helis olduğunda

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T IH + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 - \kappa^2 + \tau^2 \right) IH = 0$$

iv) γ eğrisi null olan bir genel helis olduğunda

$$\Delta IH + \frac{\kappa'}{\kappa} D_T IH + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + 2\kappa\tau \right) IH = 0$$

dir.

İspat:

$$\Delta IH = -D_T{}^3 T$$

$$D_T{}^2 T = D_T IH$$

değerleri kullanılırsa

i) $-D_T{}^3 T + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T{}^2 T + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 - \tau^2 \right) D_T T = 0$

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T IH + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 - \tau^2 \right) IH = 0$$

ii) $-D_T{}^3 T + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T{}^2 T + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 + \tau^2 \right) D_T T = 0$

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T IH + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 + \kappa^2 + \tau^2 \right) IH = 0$$

iii) $-D_T{}^3 T + 3\frac{\kappa'}{\kappa} D_T{}^2 T + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 - \kappa^2 + \tau^2 \right) D_T T = 0$

$$\Delta IH + 3\frac{\kappa^{'}}{\kappa}D_T IH + \left(\frac{\kappa^{''}}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2 - \kappa^2 + \tau^2\right)IH = 0$$

iv) $-D_T{}^3T + \frac{\kappa^{'}}{\kappa}D_T{}^2T + \left[\frac{\kappa^{''}}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2 + 2\kappa\tau\right]D_T T = 0$

$$\Delta IH + \frac{\kappa^{'}}{\kappa}D_T IH + \left(\frac{\kappa^{''}}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2 + 2\kappa\tau\right)IH = 0$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.4: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisinin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

i) γ eğrisi bir timelike dik dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^3T + (-\kappa^2 + \tau^2)D_T T = 0 \qquad \textbf{(4.1.16)}$$

ii) γ eğrisi asli normali timelike olan spacelike bir dik dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^3T + (-\kappa^2 - \tau^2)D_T T = 0 \qquad \textbf{(4.1.17)}$$

iii) γ eğrisi binormali timelike olan spacelike bir dik dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^3T + (\kappa^2 - \tau^2)D_T T = 0 \qquad \textbf{(4.1.18)}$$

iv) γ eğrisi null olan bir dik dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^3T + (-2\kappa\tau)D_T T = 0 \qquad \textbf{(4.1.19)}$$

dir.

İspat: γ eğrisi dik dairesel helis olduğundan

$$\kappa = sbt\ ,\ \tau = sbt \Rightarrow \kappa^{'} = 0 \text{ ve } \tau^{'} = 0 \Rightarrow \kappa^{''} = 0 \text{ ve } \tau^{''} = 0$$

dir.

i) γ eğrisi dik dairesel helis olduğunda değerler (4.1.12) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.1.16) denklemi elde edilir.

ii) (4.1.13) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.1.17) denklemi elde edilir.

iii) (4.1.14) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.1.18) denklemi elde edilir.

vi) (4.1.15) eşitliğinde yerine yazılırsa (4.1.19) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.1.5: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisinin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

i) γ eğrisi bir timelike dik dairesel helis olduğunda

$$\Delta IH + (\kappa^2 - \tau^2)IH = 0 \qquad \textbf{(4.1.20)}$$

ii) γ eğrisi asli normali timelike olan spacelike bir dik dairesel helis olduğunda

$$\Delta IH + (\kappa^2 + \tau^2) IH = 0 \qquad \textbf{(4.1.21)}$$

iii) γ eğrisi binormali timelike olan spacelike bir dik dairesel helis olduğunda

$$\Delta IH + (-\kappa^2 + \tau^2) IH = 0 \qquad \textbf{(4.1.22)}$$

iv) γ eğrisi null olan bir dik dairesel helis olduğunda

$$\Delta IH + (2\kappa\tau) IH = 0 \qquad \textbf{(4.1.23)}$$

dir.

İspat:

$$\Delta IH = -D_T{}^3 T$$

$$D_T T = IH$$

olduğu bilinmektedir.

i) (4.1.16) ifadesinden

$$-D_T{}^3 T + (\kappa^2 - \tau^2) D_T T = 0$$

dir. Buradan da (4.1.20) denklemi elde edilir.

ii) (4.1.17) ifadesinden

$$-D_T{}^3 T + (\kappa^2 + \tau^2) D_T T = 0$$

dir. Buradan (4.1.21) denklemi elde edilir.

iii) (4.1.18) ifadesinden

$$-D_T{}^3 T + (-\kappa^2 + \tau^2) D_T T = 0$$

dir. Buradan (4.1.22) eşitliği bulunur.

vi) (4.1.19) ifadesinden

$$-D_T{}^3 T + (2\kappa\tau) D_T T = 0$$

dir. Buradan da (4.1.23) eşitliği elde edilir.

4.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında 1. Tipten Harmonik Eğriler

Teorem 4.2.1: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisi 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

i) γ eğrisi $\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olan timelike bir eğridir.

ii) γ eğrisi $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olan asli normali timelike olan bir spacelike eğridir.

iii) γ eğrisi $\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olan binormali timelike olan bir spacelike eğridir.

iv) γ eğrisi $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $\kappa\kappa' = 0$ olan bir null eğrisidir.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ 1.tipten biharmonik olması için $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ olmalıdır.

$$\Delta^{\perp} IH = -D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH$$

i) γ timelike bir eğri olduğundan

$$\begin{aligned} D_T IH &= D_T(\kappa N) \\ &= \kappa' N + \kappa D_T N = \kappa' N + \kappa(\kappa T + \tau B) = \kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B \end{aligned}$$

$$D_T{}^{\perp} IH = \kappa' N + \kappa\tau B$$

$$\begin{aligned} D_T D_T{}^{\perp} IH &= D_T(\kappa' N + \kappa\tau B) \\ &= \kappa'' N + \kappa' D_T N + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau D_T B \\ &= \kappa'' N + \kappa'(\kappa T + \tau B) + (\kappa\tau)' B + \kappa\tau(-\tau N) \\ &= \kappa'\kappa T + (\kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B \end{aligned}$$

$$D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH = (\kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B$$

$$\begin{aligned} \Delta^{\perp} IH &= -D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH \\ \Delta^{\perp} IH &= (\kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B \end{aligned}$$

$$\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$$

olduğundan

$$(\kappa'' - \kappa\tau^2) N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B = \lambda\kappa N$$

dir. Buradan da teoremdeki eşitlikler elde edilir.

ii) γ asli normali timelike olan bir spacelike eğri olduğundan aynı işlemler uygulandığında

$$\Delta^{\perp} IH = -(\kappa'' + \kappa\tau^2) N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B$$

bulunur. $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ olduğundan

$$-(\kappa'' + \kappa\tau^2) N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B = \lambda\kappa N$$

dir. Buradan teoremdeki eşitlikler elde edilir.

iii) γ binormali timelike olan bir spacelike eğri olduğundan aynı işlemler uygulandığında

$$\Delta^{\perp} IH = -(\kappa'' - \kappa\tau^2) N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B$$

bulunur. Buradan da

$$-(\kappa'' - \kappa\tau^2) N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau') B = \lambda\kappa N$$

dir. Buradan teoremdeki eşitlikler elde edilir.

iv) γ bir null eğrisi olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH = -(\kappa'' + \kappa^2\tau) N + 3\kappa\kappa' B$$

dir.

$$-(\kappa'' + \kappa^2\tau)N + 3\kappa\kappa' B = \lambda\kappa N$$

$$-(\kappa'' + \kappa^2\tau)N = \lambda\kappa \ , \ \kappa\kappa' = 0$$

bulunur.

($\Leftarrow$) Tersine gerek koşulda elde edilen denklemler $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ eşitliğini sağladığından γ eğrisi 1. tipten harmoniktir.

Teorem 4.2.2: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ bir Frenet eğrisi olsun. γ eğrisinin 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul bir dik dairesel helis olmasıdır. Burada

i) γ eğrisi, timelike bir dik dairesel helis için $\lambda = \tau^2$,

ii) γ eğrisi, asli normali timelike olan dik dairesel helis için $\lambda = -\tau^2$,

iii) γ eğrisi, binormali timelike olan dik dairesel helis için $\lambda = \tau^2$,

iv) γ eğrisi, null dik dairesel helisi için $\lambda = -\tau^2$ dir.

İspat: ($\Rightarrow$) γ eğrisi 1. tipten harmonik eğri ise $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ denklemi sağlanır. Teorem 4.2.1 den

i) $\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$

ii) $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$

iii) $\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$

iv) $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$, $\kappa\kappa' = 0$

denklemleri vardır. γ bir Frenet eğrisi olduğundan $\kappa \neq 0$ dır. Bu denklemlerin sağlanması için $\kappa = sbt$ ve $\tau = sbt$ olmalıdır ve dolayısıyla sırasıyla λ değerleri sağlanır. Bu ise γ nın bir dik dairesel helis olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$) γ eğrisi dik dairesel helis olsun. $\kappa = sbt$, $\tau = sbt$ $\Rightarrow \kappa' = 0$, $\tau' = 0$ $\Rightarrow \kappa'' = 0, \tau'' = 0$ dir. Teorem 4.2.1 den

i) γ eğrisi, timelike eğri olduğundan $\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$ dir. Değerler yerine yazılırsa $\lambda = \tau^2$ elde edilir.

ii) γ eğrisi, asli normali timelike olan dik dairesel helis olduğundan $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = \lambda\kappa$ dir. Burada da $\lambda = -\tau^2$ elde edilir.

iii) Benzer şekilde γ eğrisi, binormali timelike olan dik dairesel helis olduğunda $\lambda = \tau^2$ dir.

iv) γ eğrisi, null dik dairesel helisi olduğundan $\lambda = -\tau^2$ elde edilir.

Teorem 4.2.3: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisi zayıf biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

i) γ eğrisi $\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olan bir timelike eğri

ii) γ eğrisi $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olan asli normali timelike olan bir spacelike eğri

iii) γ eğrisi $\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0$, $2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$ olan binormali timelike olan bir spacelike eğri

iv) γ eğrisi $-\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0$, $\kappa\kappa' = 0$ olan bir null eğrisi olmasıdır.

İspat: γ zayıf biharmonik olması için $\Delta^{\perp} IH = 0$ olmalıdır

i) γ timelike bir eğri olduğundan

$$\Delta^{\perp} IH = (\kappa'' - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B$$

dir. Burada $\Delta^{\perp} IH = 0$ olması için

$$(\kappa'' - \kappa\tau^2)N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B = 0$$

olmalıdır. Buradan da

$$\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0 \text{ , } 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

ii) γ asli normali timelike olan spacelike bir eğri olduğundan

$$\Delta^{\perp} IH = -(\kappa'' + \kappa\tau^2)N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B$$

dir. Burada $\Delta^{\perp} IH = 0$ olması için

$$-(\kappa'' + \kappa\tau^2)N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B = 0$$

olmalıdır. Buradan da

$$-\kappa'' - \kappa\tau^2 = 0 \text{ , } 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

iii) γ binormali timelike olan spacelike bir eğri olduğundan

$$\Delta^{\perp} IH = -(\kappa'' - \kappa\tau^2)N - (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B$$

dir. Buradan da benzer şekilde

$$\kappa\tau^2 - \kappa'' = 0 \text{ , } 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

iv) γ bir null eğrisi olduğundan

$$\Delta^{\perp} IH = -(\kappa'' + \kappa^2\tau)N + 3\kappa\kappa' B$$

dir. Benzer şekilde

$$-(\kappa'' + \kappa^2\tau) = 0 \text{ , } \kappa\kappa' = 0$$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.2.4: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisini normal konneksiyona göre karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

i) γ timelike genel helisi için

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[-2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}-\frac{\tau^{'}}{\tau}\right]D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[\tau^2-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}+2\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2\right]D_T{}^{\perp}T=0 \quad \textbf{(4.2.1)}$$

ii) γ spacelike genel helisi için

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[-2\frac{\kappa^{'}}{\kappa}-\frac{\tau^{'}}{\tau}\right]D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[-\tau^2-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+\frac{\kappa^{'}\tau^{'}}{\kappa\tau}+2\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2\right]D_T{}^{\perp}T=0 \quad \textbf{(4.2.2)}$$

iii) γ null genel helisi için

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\frac{\kappa^{'}}{\kappa}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[-\kappa\tau-\frac{\kappa^{''}}{\kappa}+3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2\right]D_T{}^{\perp}T=0 \qquad \textbf{(4.2.3)}$$

dir.

İspat:

i) γ bir timelike eğri olduğundan

$$D_T{}^{\perp}T=\kappa N \qquad \textbf{(4.2.4)}$$

$$D_T{}^{\perp}N=\tau B \qquad \textbf{(4.2.5)}$$

$$D_T{}^{\perp}B=-\tau N \qquad \textbf{(4.2.6)}$$

dir. (4.2.4)eşitliğinden

$$N=\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}T \qquad \textbf{(4.2.7)}$$

ve (4.2.5) eşitliğinden

$$B=\frac{1}{\tau}D_T{}^{\perp}N$$

dir. Bu eşitlikte (4.2.7) ifadesini yerine yazalım.

$$B=\frac{1}{\tau}D_T{}^{\perp}\left(\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}T\right)$$

$$B=\frac{1}{\tau}\left[-\frac{\kappa^{'}}{\kappa^2}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T\right]$$

$$B=-\frac{\kappa^{'}}{\tau\kappa^2}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\kappa\tau}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T \qquad \textbf{(4.2.8)}$$

(4.2.7) ve (4.2.8) eşitliklerini (4.2.6) ifadesinde yerine yazarsak

$$D_T{}^{\perp}\left[-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}D_T{}^{\perp}T+\frac{1}{\tau\kappa}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T\right]=-\tau\left(\frac{1}{\kappa}D_T{}^{\perp}T\right)$$

$$\left(-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'D_T{}^{\perp}T+\left(-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)'D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T=-\frac{\tau}{\kappa}D_T{}^{\perp}T$$

$$\frac{1}{\kappa\tau}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)'-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right]D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'+\frac{\tau}{\kappa}\right]D_T{}^{\perp}T=0$$

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)'-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right]D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'+\frac{\tau}{\kappa}\right]D_T{}^{\perp}T=0 \quad \textbf{(4.2.9)}$$

dir. Katsayıları düzenlersek,

$$\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)'-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right]=\left[-2\frac{\kappa'}{\kappa}-\frac{\tau'}{\tau}\right]$$

$$\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'+\frac{\tau}{\kappa}\right]=\left[\tau^2-\frac{\kappa''}{\kappa}+\frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau}+2\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2\right]$$

bulunur. Bu değerler de (4.2.9) eşitliğinde yazılırsa (4.2.1) denklemi elde edilir.

ii) γ bir spacelike eğri olduğundan

$$D_T{}^{\perp}T=\kappa N \qquad \textbf{(4.2.10)}$$

$$D_T{}^{\perp}N=\tau B \qquad \textbf{(4.2.11)}$$

$$D_T{}^{\perp}B=\tau N \qquad \textbf{(4.2.12)}$$

dir. *i)* ifadesine benzer işlemler burada da yapılırsa

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\kappa\tau\left[\left(\frac{1}{\kappa\tau}\right)'-\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right]D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T+\kappa\tau\left[-\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'-\frac{\tau}{\kappa}\right]D_T{}^{\perp}T=0$$

bulunur. Katsayılar düzenlendiğinde (4.2.2) denklemi elde edilir.

iii) γ bir null eğrisi olduğundan

$$D_T{}^{\perp}T=\kappa N$$

$$D_T{}^{\perp}N=-\kappa B$$

$$D_T{}^{\perp}B=-\tau N$$

dir. Yine *i)* ifadesinde olduğu gibi benzer işlemler yapılırsa

$$D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T-\kappa^2\left[\frac{\kappa'}{\kappa^3}-2\frac{\kappa\kappa'}{\kappa^4}\right]D_T{}^{\perp}D_T{}^{\perp}T-\kappa^2\left[\left(\frac{\kappa'}{\kappa^3}\right)'+\frac{\tau}{\kappa}\right]D_T{}^{\perp}T=0$$

bulunur. Katsayılar düzenlendiğinde (4.2.3) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.2.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisini normal konneksiyona göre diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

i) γ bir timelike eğri olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH + \left[2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau} \right] D_T^{\perp} IH + \left[-\tau^2 + \frac{\kappa''}{\kappa} - \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} - 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right] IH = 0 \qquad \textbf{(4.2.13)}$$

ii) γ bir spacelike eğri olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH + \left[-2\frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau} \right] D_T^{\perp} IH + \left[\tau^2 + \frac{\kappa''}{\kappa} - \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} - 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right] IH = 0 \qquad \textbf{(4.2.14)}$$

iii) γ bir null eğrisi olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH - \frac{\kappa'}{\kappa} D_T^{\perp} IH + \left[\kappa\tau + \frac{\kappa''}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right] IH = 0 \qquad \textbf{(4.2.15)}$$

dir.

İspat:

$$D_T IH = D_T D_T T \qquad \textbf{(4.2.16)}$$

$$\Delta^{\perp} IH = -D_T D_T IH \qquad \textbf{(4.2.17)}$$

i) γ bir timelike eğri olduğundan (4.2.1) eşitliğinden

$$-D_T^{\perp} D_T^{\perp} D_T^{\perp} T - \left[-2\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} \right] D_T^{\perp} D_T^{\perp} T - \left[\tau^2 - \frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right] D_T^{\perp} T = 0$$

dir. Burada (4.2.16) ve (4.2.17) eşitliklerinden (4.2.13) denklemi elde edilir.

ii) γ bir spacelike eğri olduğundan (4.2.2) eşitliğinden

$$-D_T^{\perp} D_T^{\perp} D_T^{\perp} T - \left[2\frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{\tau'}{\tau} \right] D_T^{\perp} D_T^{\perp} T - \left[-\tau^2 - \frac{\kappa''}{\kappa} + \frac{\kappa'\tau'}{\kappa\tau} + 2\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right] D_T^{\perp} T = 0$$

dir. Burada (4.2.16) ve (4.2.17) eşitliklerinden (4.2.14) denklemi elde edilir.

iii) γ bir null eğrisi olduğundan (4.2.3) eşitliğinden

$$-D_T^{\perp} D_T^{\perp} D_T^{\perp} T - \frac{\kappa'}{\kappa} D_T^{\perp} D_T^{\perp} T - \left[-\kappa\tau - \frac{\kappa''}{\kappa} + 3\left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 \right] D_T^{\perp} T = 0$$

dir. Benzer şekilde (4.2.16) ve (4.2.17) eşitliklerinden (4.2.15) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.2.2: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisinin normal konneksiyona göre diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

i) γ eğrisi bir timelike genel helis olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH + 3\frac{\kappa^{'}}{\kappa} D_T{}^{\perp} IH + \left[-\tau^2 + \frac{\kappa^{''}}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2 \right] IH = 0 \qquad \textbf{(4.2.18)}$$

ii) γ eğrisi bir spacelike genel helis olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH - \frac{\kappa^{'}}{\kappa} D_T{}^{\perp} IH + \left[\tau^2 + \frac{\kappa^{''}}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2 \right] IH = 0 \qquad \textbf{(4.2.19)}$$

iii) γ eğrisi bir null genel helis olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH - \frac{\kappa^{'}}{\kappa} D_T{}^{\perp} IH + \left[\kappa\tau + \frac{\kappa^{''}}{\kappa} - 3\left(\frac{\kappa^{'}}{\kappa}\right)^2 \right] IH = 0 \qquad \textbf{(4.2.20)}$$

dir.

İspat: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında bir genel helis olsun.

$$\frac{\kappa}{\tau} = sbt \Rightarrow \left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^{'} = 0 \Rightarrow \frac{\kappa^{'}}{\kappa} = \frac{\tau^{'}}{\tau}$$

dir.

i) Bu değerler (4.2.13) ifadesinde yerine yazılırsa (4.2.18) denklemi elde edilir

ii) Benzer şekilde bu değerler (4.2.14) denkleminde yerine yazıldığında (4.2.19) ifadesi elde edilir.

iii)Yine bu değerler (4.2.15) ifadesinde yerine yazıldığında (4.2.20) denklemi elde edilir.

Sonuç 4.2.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisini normal konneksiyona göre karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir

i) γ eğrisi bir timelike dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} T + \tau^2 D_T{}^{\perp} T = 0 \qquad \textbf{(4.2.21)}$$

ii) γ eğrisi bir spacelike dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} T - \tau^2 D_T{}^{\perp} T = 0 \qquad \textbf{(4.2.22)}$$

iii) γ eğrisi bir null dairesel helis olduğunda

$$D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} T - \kappa\tau D_T{}^{\perp} T = 0 \qquad \textbf{(4.2.23)}$$

dir.

İspat: γ eğrisi Minkowski 3-uzayında bir dairesel helis olsun.

$$\kappa = sbt, \tau = sbt \Rightarrow \kappa^{'} = 0, \tau^{'} = 0 \Rightarrow \kappa^{''} = 0, \tau^{''} = 0$$

dir.

i)Bu değerler (4.2.13) denkleminde yerine yazılırsa (4.2.21) ifadesi elde edilir

ii)Bu değerler (4.2.14) denkleminde yerine yazılırsa (4.2.22) ifadesi elde edilir.

iii)Benzer şekilde bu değerler (4.2.115) denkleminde yazıldığında (4.2.23) ifadesi bulunur.

Sonuç 4.2.4: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisinin normal konneksiyona göre diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

i) γ eğrisi bir timelike dairesel helis olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH - \tau^2 IH = 0 \tag{4.2.24}$$

ii) γ eğrisi bir spacelike dairesel helis olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH + \tau^2 IH = 0 \tag{4.2.25}$$

iii) γ eğrisi bir null dairesel helis olduğunda

$$\Delta^{\perp} IH + \kappa\tau IH = 0 \tag{4.2.26}$$

dir.

İspat: $\Delta^{\perp} IH = -D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH$ olduğunu biliyoruz.

i) γ eğrisi bir timelike dairesel helis olduğundan (4.2.21) eşitliğinden

$$-D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH - \tau^2 D_T{}^{\perp} T = 0$$

dir. Bu ifadede üstteki eşitliği yerine yazdığımızda (4.2.24) ifadesini elde ederiz.

ii) γ eğrisi bir spacelike dairesel helis olduğundan (4.2.22) eşitliğinden

$$-D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH + \tau^2 D_T{}^{\perp} T = 0$$

dir. Benzer şekilde üstteki eşitliği yerine yazdığımızda (4.2.25) eşitliğini elde edebiliriz.

iii) γ eğrisi bir null dairesel helis olduğundan (4.2.23) eşitliğinden

$$-D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH + \kappa\tau D_T{}^{\perp} T = 0$$

dir. Benzer şekilde buradan da (4.2.26) eşitliği elde edilir.

5. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE BİHARMONİK EĞRİLER

3-boyutlu Öklid uzayında Bishop Çatısına göre bir α eğrisinin sırsıyla doğal eğrilikleri k_1 ve k_2 ve $\{N_1(s), N_2(s)\}$ de keyfi baz olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N_1 \\ D_T N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$$k = \sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}} \quad , \quad \tau = -\left(arc\ \tan\left(\frac{k_2}{k_1} \right) \right)'$$

dir[6].

5.1. E^3 de $\Delta IH = \lambda IH$ Denklemini Sağlayan Eğriler

D, E^3 ün Levi-Civita konneksiyonu ve IH da γ boyunca ortalama eğrilik vektör alanını göstersin.

$$IH = D_T T = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

şeklinde verilir, burada k_1 ve k_2 sırasıyla γ nın birinci ve ikinci eğrilikleridir.

Teorem 5.1.1: $\gamma = \gamma(s) : I \subset IR \to E^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin Bishop Çatısına göre

$$\Delta IH = \lambda IH$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)' = 0 \quad , \quad \left[k_1\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) - k_1''\right] = \lambda k_1 \quad , \quad \left[k_2\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) - k_2''\right] = \lambda k_2 \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\Delta IH = \lambda IH$ eşitliği sağlansın.

$$\begin{aligned}
\Delta IH = -D_T^{\,2} IH &= -D_T^{\,2}\left(k_1 N_1 + k_2 N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1' N_1 + k_1 D_T N_1 + k_2' N_2 + k_2 D_T N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1' N_1 + k_1(-k_1 T) + k_2' N_2 + k_2(-k_2 T)\right) \\
&= -D_T\left((-k_1^{\,2} - k_2^{\,2})T + k_1' N_1 + k_2' N_2\right) \\
&= -\left[(-k_1^{\,2} - k_2^{\,2})' T + (-k_1^{\,2} - k_2^{\,2}) D_T T + k_1'' N_1 + k_1' D_T N_1 + k_2'' N_2 + k_2' D_T N_2\right] \\
&= \left[(k_1^{\,2} + k_2^{\,2})' T + (k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) D_T T - k_1'' N_1 - k_1'(-k_1 T) - k_2'' N_2 - k_2'(-k_2 T)\right] \\
&= 3(k_1 k_1' + k_2 k_2')T + \left(k_1(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) - k_1''\right)N_1 + \left(k_2(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) - k_2''\right)N_2
\end{aligned}$$

$\Delta IH = \lambda IH$ olduğundan

$$3(k_1k_1^{'}+k_2k_2^{'})T+\left(k_1(k_1^2+k_2^2)-k_1^{''}\right)N_1+\left(k_2(k_1^2+k_2^2)-k_2^{''}\right)N=\lambda\left(k_1N_1+k_2N_2\right)$$

dir. Buradan da

$$\left(k_1k_1^{'}+k_2k_2^{'}\right)^{'}=0\ ,\ \left[k_1\left(k_1^2+k_2^2\right)-k_1^{''}\right]=\lambda k_1\ ,\ \left[k_2\left(k_1^2+k_2^2\right)-k_2^{''}\right]=\lambda k_2$$

dir. Denklemler biraz daha düzenlendiğinde (5.1.1) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 5.1.2: γ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun.

$$\Delta IH=\lambda IH$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul γ eğrisinin bir c-slant helis olmasıdır ve

$$\lambda=k_1^2+k_2^2$$

dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\Delta IH=\lambda IH$ olsun.(5.1.1) eşitlikleri sağlanır. Birinci eşitlikten

$$\begin{aligned} k_1^2+k_2^2=sbt\ &\Rightarrow\ k_1=sbt\ ,\ k_2=sbt\\ &\Rightarrow\ k_1^{'}=0\quad,\ k_2^{'}=0\\ &\Rightarrow\ k_1^{''}=0\quad,\ k_2^{''}=0\end{aligned}$$

dir. Bu değerler de diğer iki denklemlerde yerlerine yazıldığında

$$k_1(k_1^2+k_2^2)=\lambda k_1\ ,\ k_2(k_1^2+k_2^2)=\lambda k_2$$

değerleri elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $\lambda=k_1^2+k_2^2$ değeri bulunur.

$(\Leftarrow)$ γ eğrisi bir c-slant helis olsun. $k_1=sbt$, $k_2=sbt$ dir. Buradan

$k_1^2+k_2^2=sbt$ ve $(k_1^2+k_2^2)^{'}=0$ elde edilir. Diğer taraftan $k_1^2+k_2^2=\lambda$ denilirse

$$\begin{aligned} k_1(k_1^2+k_2^2)=\lambda k_1\ &\Rightarrow\ k_1(k_1^2+k_2^2)-k_1^{''}=\lambda k_1\\ k_2(k_1^2+k_2^2)=\lambda k_2\ &\Rightarrow k_2(k_1^2+k_2^2)-k_2^{''}=\lambda k_2\end{aligned}$$

denklemleri de elde edilebilir. Bu denklemler de (5.1.1) eşitlikleridir. Dolayısıyla $\Delta IH=\lambda IH$ eşitliği sağlanır.

Teorem 5.1.3: 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun.

γ eğrisi geodeziktir $\Leftrightarrow$ γ boyunca $\Delta IH=0$ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi geodezik $(\kappa=0)$olsun. $\kappa=\sqrt{k_1^2+k_2^2}=0$ dır. Yani $k_1^2+k_2^2=0$dır.

Bu durum da yalnızca $k_1=0\ ,k_2=0$ olması ile sağlanır. Bu durumda $\Delta IH=0$ dir.

$(\Leftarrow)$ $\Delta IH=0$ olsun. Bu durumda

$$(k_1^2+k_2^2)^{'}=0\ \ ,\ k_1(k_1^2+k_2^2)-k_1^{''}=0\ \ ,\ k_2(k_1^2+k_2^2)-k_2^{''}=0$$

dır. Birinci denklemden $k_1 = sbt$, $k_2 = sbt$ $\Rightarrow$ $k_1^{'} = 0$, $k_2^{'} = 0 \Rightarrow$ $k_1^{''} = 0$, $k_2^{''} = 0$ dır. Burada $k_1 = c_1$ ve $k_2 = c_2$ olsun.

$$k_1(k_1^2 + k_2^2) - k_1^{''} = 0 \ \Rightarrow c_1\left(c_1^2 + c_2^2\right) = 0 \ \Rightarrow c_1 = 0 \text{ ve ya } c_1^2 + c_2^2 = 0$$

$$k_2(k_1^2 + k_2^2) - k_2^{''} = 0 \ \Rightarrow \ c_2\left(c_1^2 + c_2^2\right) = 0 \ \Rightarrow c_2 = 0 \ \text{ ve ya } c_1^2 + c_2^2 = 0$$

Burada $c_1 = 0, c_2 = 0$ ve ya $c_1^2 + c_2^2 = 0$ dir. İlk durumda zaten teorem sağlanır. $c_1^2 + c_2^2 = 0$ durumunda da c_1 ve c_2 sayılarının kompleks sayı dışında reel olmaları durumu da her ikisinin sıfır olmasıyla mümkündür. Bu durumda $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ dır. Yani γ eğrisi geodeziktir.

5.2. E^3 de Bishop Çatısına Göre 1. Tipten Harmonik Eğriler

Teorem 5.2.1: γ 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_1^{''}}{k_1} = \frac{k_2^{''}}{k_2} \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

olmasıdır.

İspat: :

$(\Rightarrow)$
$$\Delta^{\perp} IH = -D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH$$

$$D_T IH = -(k_1^2 + k_2^2)T + k_1^{'} N_1 + k_2^{'} N_2$$

$$D_T^{\perp} IH = k_1^{'} N_1 + k_2^{'} N_2$$

$$\begin{aligned} D_T D_T^{\perp} IH &= D_T\left(k_1^{'} N_1 + k_2^{'} N_2\right) \\ &= k_1^{''} N_1 + k_1^{'} D_T N_1 + k_2^{''} N_2 + k_2^{'} D_T N_2 \\ &= k_1^{''} N_1 + k_1^{'}(-k_1 T) + k_2^{''} N_2 + k_2^{'}(-k_2 T) \\ &= (-k_1 k_1^{'} - k_2 k_2^{'})T + k_1^{''} N_1 + k_2^{''} N_2 \end{aligned}$$

$$D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH = k_1^{''} N_1 + k_2^{''} N_2$$

$$\Delta^{\perp} IH = -D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH = -k_1^{''} N_1 - k_2^{''} N_2$$

γ 1. tipten harmonik bir eğri olduğundan $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ dır

$$\begin{aligned} -k_1^{''} N_1 - k_2^{''} N_2 &= \lambda\left(k_1 N_1 + k_2 N_2\right) \\ &= \lambda k_1 N_1 + \lambda k_2 N_2 \end{aligned}$$

$$-k_1^{''} = \lambda k_1 \ , \ -k_2^{''} = \lambda k_2$$

$$\lambda=-\frac{k_1''}{k_1}\ ,\ \lambda=-\frac{k_2''}{k_2}\Rightarrow\frac{k_1''}{k_1}=\frac{k_2''}{k_2}$$

dir.

$(\Leftarrow)$ Tersine $\frac{k_1''}{k_1}=\frac{k_2''}{k_2}$ olsun. $\frac{k_1''}{k_1}=\lambda$ diyelim. $k_1''=\lambda k_1$ ve $k_2''=\lambda k_2$ dir. Bu denklemler de $\Delta^{\perp}IH=\lambda IH$ eşitliğini sağlar.

Teorem 5.2.2: γ 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$k_1''=0\ ,\ k_2''=0 \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi zayıf biharmonik eğri olsun.

$$\Delta^{\perp}IH=0\Rightarrow\Delta^{\perp}IH=-k_1''N_1-k_2''N_2=0$$

olduğundan (5.2.2) eşitliği sağlanır.

$(\Leftarrow)$ Tersine (5.2.2) denklemleri $\Delta^{\perp}IH=0$ eşitliğini sağlar. Bu da γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olduğunu gösterir.

Sonuç 5.2.1: γ 3-boyutlu Öklid uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisi geodezik bir eğri ise zayıf biharmonik bir eğridir.

İspat: γ geodezik bir eğri olsun. $k_1=0$ ve $k_2=0$ dır. Bu değerler (5.2.2) değerlerini sağladığından γ eğrisi zayıf biharmonik bir eğridir.

5.3. E^3 de Bishop Çatısına Göre Bir Eğriyi Karakterize Eden Denklem ve Sonuçları

Teorem 5.3.1: γ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun. k_1 ve k_2, γ eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, γ eğrisini normal konneksiyona göre karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH-\left(k_1^2+k_2^2\right)IH-3\left(k_1k_1'+k_2k_2'\right)T-\Delta^{\perp}IH=0 \qquad \textbf{(5.3.1)}$$

İspat:

$$IH=D_TT=k_1N_1+k_2N_2$$

$$\begin{aligned}D_TIH&=k_1'N_1+k_1D_TN_1+k_2'N_2+k_2D_TN_2\\&=k_1'N_1-k_1^2T+k_2'N_2-k_2^2T\\&=-\left(k_1^2+k_2^2\right)T+k_1'N_1+k_2'N_2\end{aligned}$$

$$D_T D_T IH = -\left(k_1^2 + k_2^2\right)^{'} T - \left(k_1^2 + k_2^2\right) D_T T + k_1^{''} N_1 + k_1^{'} D_T N_1 + k_2^{''} N_2 + k_2^{'} D_T N_2$$
$$= -\left(k_1^2 + k_2^2\right)^{'} T - \left(k_1^2 + k_2^2\right) IH + k_1^{''} N_1 - \left(k_1^{'} k_1 + k_2^{'} k_2\right) T + k_1^{''} N_1 + k_2^{''} N_2$$
$$= -\left(k_1^2 + k_2^2\right) IH + k_1^{''} N_1 - 3\left(k_1^{'} k_1 + k_2^{'} k_2\right) T + k_1^{''} N_1 + k_2^{''} N_2$$

dir. İfade biraz daha düzenlenirse ve $\Delta^{\perp} IH = -k_1^{''} N_1 - k_2^{''} N_2$ ve $\Delta IH = -D_T D_T IH$ değerleri denklemde yerine yazıldığında (5.3.1) eşitliği elde edilir.

Teorem 5.3.2: γ eğrisi 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğri olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^3 - 2\frac{k_1^{'}}{k_1} D_T^2 T + \left[-\frac{k_1^{''}}{k_1} + 2\left(\frac{k_1^{'}}{k_1}\right)^2 + k_1^2 + k_2^2\right] D_T T + \left[3k_2 k_2^{'} - \frac{\left(k_1^2 - 2k_2^2\right) k_1^{'}}{k_1}\right] T - k_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 = 0 \quad \textbf{(5.3.2)}$$

İspat: :

$$N_1 = \frac{1}{k_1} D_T T - \frac{k_2}{k_1} N_2$$

$$D_T N_1 = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T T + \frac{1}{k_1} D_T^2 T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} N_2 - \left(\frac{k_2}{k_1}\right) D_T N_2$$

$$-k_1 T = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T T + \frac{1}{k_1} D_T^2 T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} N_2 + \frac{k_2^2}{k_1} T$$

ifadenin teğetsel türevi alındığında

$$-k_1^{'} T - k_1 D_T T = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{''} D_T T + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^2 T + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^2 T + \frac{1}{k_1} D_T^3 T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} D_T N_2 + \left(\frac{k_2^2}{k_1}\right)^{'} T + \frac{k_2^2}{k_1} D_T T = 0$$

$$\frac{1}{k_1} D_T^3 T + 2\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^2 T + \left[\left(\frac{1}{k_1}\right)^{''} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right] D_T T + \left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} + \left(\frac{k_2^2}{k_1}\right)^{'} + k_1^{'}\right] T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 = 0$$

$$D_T^3 T + 2k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^2 T + k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)^{''} + \frac{k_2^2}{k_1} + k_1\right] D_T T + k_1\left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} + \left(\frac{k_2^2}{k_1}\right)^{'} + k_1^{'}\right] T - k_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 = 0 \text{ di}$$

r. Denklemin katsayıları düzenleyelim.

$$2k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} = 2k_1\left(-\frac{k_1^{'}}{k_1^2}\right) = -2\frac{k_1^{'}}{k_1}$$

$$k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' + \frac{k_2^{\,2}}{k_1} + k_1\right] = \left[-\frac{k_1''k_1^{\,2} - 2k_1^{\,2}\left(k_1'\right)^2}{k_1^{\,3}} + k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right]$$

$$= \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 + k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right]$$

$$k_1\left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2^{\,2}}{k_1}\right)' + k_1'\right] = k_1k_1' + 3k_2k_2' - 2\frac{k_2^{\,2}k_1'}{k_1} = 3k_2k_2' + \frac{\left(k_1^{\,2} - 2k_2^{\,2}\right)k_1'}{k_1}$$

Bu değerler denklemde yerine yazıldığında (5.3.2) eşitliği elde edilir.

Teorem 5.3.3: Öklid 3-uzayında bir slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^{\,3} - 2\frac{k_1'}{k_1}D_T^{\,2}T + \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 + k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right]D_T T + \left[\frac{\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)'}{2}\right]T = 0 \qquad \textbf{(5.3.3)}$$

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir slant helis olsun. O halde

$$\frac{k_2}{k_1} = sbt \;\Rightarrow\; \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0\;,\; \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1} \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' = 0$$

dir. Bu değerler de (5.3.2) denkleminde yerine yazıldığında (5.3.3) denklemi elde edilir.

Teorem 5.3.4: : 3-boyutlu Öklid uzayında bir c-slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^{\,3}T + \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)D_T T = 0 \qquad \textbf{(5.3.4)}$$

İspat: γ Bishop eğrisi bir slant helis ise,

$$k_1 = sbt\;,\; k_2 = sbt \;\Rightarrow\; k_1' = 0\,,\, k_2' = 0 \;\Rightarrow\; k_1'' = 0\,,\, k_2'' = 0$$

dır. Bu değerler (5.3.2) denkleminde yerine yazılırsa (5.3.4) elde edilir.

Sonuç 5.3.1: 3-boyutlu Öklid uzayında bir slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + 2\frac{k_1'}{k_1}D_T IH + \left[\frac{k_1''}{k_1} - 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 - k_1^{\,2} - k_2^{\,2}\right]IH - \left[k_1k_1' + k_2k_2'\right]T = 0 \qquad \textbf{(5.3.5)}$$

İspat: $\Delta IH = -D_T D_T IH$ dir. (5.3.3) denklemi bu ifadeye göre düzenlendiğinde (5.3.5) denklemi elde edilir.

Sonuç 5.3.2: 3-boyutlu Öklid uzayında bir c-slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH - \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)IH = 0$$

İspat: Benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

6. 3-BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA BİSHOP ÇATISINA GÖRE BİHARMONİK EĞRİLER

6.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Timelike Biharmonik Eğriler

3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop Çatısına göre bir α timelike eğrisinin sırsıyla doğal eğrilikleri k_1 , k_2 ve $\{N_1(s), N_2(s)\}$ de keyfi baz olmak üzere

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N_1 \\ D_T N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$\langle T,T\rangle = -1,\ \langle N_1,N_1\rangle = 1, \langle N_2,N_2\rangle = 1$ ve metrik $(-,+,+)$ olmak üzere

$$k = \sqrt{k_1^{\,2} + k_2^{\,2}} \quad , \quad \tau = -\left(arc\ \tan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right)'$$

dir[2].

6.1.1. $\Delta IH = \lambda IH$ denklemini sağlayan timelike eğriler

Teorem 6.1.1.1: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir eğri olsun.

$$\Delta IH = \lambda IH$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)' = 0 \ , \ -\left[k_1\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) + k_1''\right] = \lambda k_1 \ , \ -\left[k_2\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) + k_2''\right] = \lambda k_2 \qquad \textbf{(6.1.1.1)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\Delta IH = \lambda IH$ eşitliği sağlansın.

$$\begin{aligned}
\Delta IH = -D_T^{\,2} IH = -D_T^{\,2}\left(k_1 N_1 + k_2 N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1' N_1 + k_1 D_T N_1 + k_2' N_2 + k_2 D_T N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1' N_1 + k_1(k_1 T) + k_2' N_2 + k_2(k_2 T)\right) \\
&= -D_T\left((k_1^{\,2} + k_2^{\,2})T + k_1' N_1 + k_2' N_2\right) \\
&= -\left[(k_1^{\,2} + k_2^{\,2})' T + (k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) D_T T + k_1'' N_1 + k_1' D_T N_1 + k_2'' N_2 + k_2' D_T N_2\right] \\
&= -\left[(k_1^{\,2} + k_2^{\,2})' T + (k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) D_T T + k_1'' N_1 + k_1'(k_1 T) + k_2'' N_2 + k_2'(k_2 T)\right] \\
&= -3(k_1 k_1' + k_2 k_2')T - \left(k_1(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) + k_1''\right)N_1 - \left(k_2(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) + k_2''\right)N_2
\end{aligned}$$

$\Delta IH = \lambda IH$ olduğundan

$$-3(k_1 k_1' + k_2 k_2')T - \left(k_1(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) + k_1''\right)N_1 - \left(k_2(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}) + k_2''\right)N = \lambda\left(k_1 N_1 + k_2 N_2\right)$$

dir. Buradan da

$$\left(k_1k_1^{'}+k_2k_2^{'}\right)^{'}=0 \quad , \quad -\left[k_1\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)+k_1^{''}\right]=\lambda k_1 \quad , \quad -\left[k_2\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)+k_2^{''}\right]=\lambda k_2$$

dir. Denklemler biraz daha düzenlendiğinde (6.1.1.1) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 6.1.1.2: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike eğri olsun.

$$\Delta IH = \lambda IH$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul γ eğrisinin bir c-slant helis olmasıdır ve

$$\lambda = -\left(k_1^{\,2}+k_2^{\,2}\right)$$

dir.

İspat:

$(\Rightarrow)$ $\Delta IH = \lambda IH$ olsun. (6.1.1.1) eşitlikleri sağlanır. Birinci eşitlikten

$$\begin{aligned} k_1^{\,2}+k_2^{\,2}=sbt \quad &\Rightarrow \quad k_1=sbt \ , \ k_2=sbt \\ &\Rightarrow \quad k_1^{'}=0 \quad , \ k_2^{'}=0 \\ &\Rightarrow \quad k_1^{''}=0 \quad , \ k_2^{''}=0 \end{aligned}$$

dir. Bu değerler de diğer iki denklemlerde yerlerine yazıldığında

$$-k_1(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})=\lambda k_1 \ , -k_2(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})=\lambda k_2$$

eşitlikleri elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $\lambda=-k_1^{\,2}-k_2^{\,2}$ değeri bulunur.

$(\Leftarrow)$ γ eğrisi bir c-slant helis olsun. $k_1=sbt,\, k_2=sbt$ dir. Buradan $k_1^{\,2}+k_2^{\,2}=sbt$ ve $(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})^{'}=0$ elde edilir. Diğer taraftan $k_1^{\,2}+k_2^{\,2}=\lambda$ denilirse

$$\begin{aligned} -k_1(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})=\lambda k_1 \quad &\Rightarrow -k_1(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})-k_1^{''}=\lambda k_1 \\ -k_2(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})=\lambda k_2 \quad &\Rightarrow -k_2(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})-k_2^{''}=\lambda k_2 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilebilir. Bu denklemler de (6.1.1.1) eşitlikleridir. Dolayısıyla $\Delta IH = \lambda IH$ denklemi sağlanır.

Teorem 6.1.1.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir timelike eğri olsun.

γ eğrisi geodeziktir $\Leftrightarrow$ γ boyunca $\Delta IH = 0$ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi geodezik $(\kappa = 0)$ olsun. $\kappa=\sqrt{k_1^{\,2}+k_2^{\,2}}=0$ dır. Yani $k_1^{\,2}+k_2^{\,2}=0$ dır. Bu durum da yalnızca $k_1=0,\, k_2=0$ olması ile sağlanır. Bu durumda $\Delta IH = 0$ dir.

$(\Leftarrow)$ $\Delta IH = 0$ olsun. Bu durumda

$$(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})^{'}=0 \quad , \quad -k_1(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})-k_1^{''}=0 \quad , \quad -k_2(k_1^{\,2}+k_2^{\,2})-k_2^{''}=0$$

dır. Birinci denklemden

$$k_1=sbt \ , \ k_2=sbt \ \Rightarrow \ k_1^{'}=0 \quad , k_2^{'}=0 \Rightarrow \ k_1^{''}=0 \ , k_2^{''}=0$$

dır. Burada $k_1=c_1$ ve $k_2=c_2$ olsun.

$$-k_1(k_1^2+k_2^2)-k_1'' = 0 \;\Rightarrow -c_1\left(c_1^2+c_2^2\right)=0 \;\Rightarrow c_1 = 0 \text{ ve ya } c_1^2+c_2^2=0$$

$$-k_2(k_1^2+k_2^2)-k_2'' = 0 \;\Rightarrow\; c_2\left(c_1^2+c_2^2\right)=0 \;\Rightarrow c_2 = 0 \text{ ve ya } c_1^2+c_2^2=0$$

Burada $c_1 = 0,\, c_2 = 0$ ve ya $c_1^2+c_2^2=0$ dir. İlk durumda zaten teorem sağlanır. $c_1^2+c_2^2=0$ durumunda da c_1 ve c_2 sayılarının kompleks sayı dışında reel olmaları durumu da her ikisinin sıfır olmasıyla mümkündür. Bu durumda $k_1 = 0,\, k_2 = 0$ dır. Yani γ eğrisi geodeziktir.

6.1.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında 1.tipten timelike harmonik eğriler

Teorem 6.1.2.1: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir timelike eğri olsun. γ eğrisinin 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} \qquad \textbf{(6.2.1.1)}$$

olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$

$$\Delta^{\perp} IH = -D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH$$

$$D_T IH = (k_1^2+k_2^2)T + k_1' N_1 + k_2' N_2$$

$$D_T^{\perp} IH = k_1' N_1 + k_2' N_2$$

$$\begin{aligned} D_T D_T^{\perp} IH &= D_T\left(k_1' N_1 + k_2' N_2\right) \\ &= k_1'' N_1 + k_1' D_T N_1 + k_2'' N_2 + k_2' D_T N_2 \\ &= k_1'' N_1 + k_1'(k_1 T) + k_2'' N_2 + k_2'(k_2 T) \\ &= (-k_1 k_1' - k_2 k_2')T + k_1'' N_1 + k_2'' N_2 \end{aligned}$$

$$D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH = k_1'' N_1 + k_2'' N_2$$

$$\Delta^{\perp} IH = -D_T^{\perp} D_T^{\perp} IH = -k_1'' N_1 - k_2'' N_2$$

γ 1. tipten harmonik bir eğri olduğundan $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ dır.

$$\begin{aligned} -k_1'' N_1 - k_2'' N_2 &= \lambda\left(k_1 N_1 + k_2 N_2\right) \\ &= \lambda k_1 N_1 + \lambda k_2 N_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -k_1'' = \lambda k_1 \;,\; -k_2'' = \lambda k_2$$

$$\lambda = -\frac{k_1''}{k_1} \quad , \quad \lambda = -\frac{k_2''}{k_2} \;\Rightarrow\; \frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2}$$

dir.

$(\Leftarrow)$ Tersine $\dfrac{k_1''}{k_1} = \dfrac{k_2''}{k_2}$ olsun. $\dfrac{k_1''}{k_1} = \lambda$ diyelim. $k_1'' = \lambda k_1$ ve $k_2'' = \lambda k_2$ dir. Bu denklemler de $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ eşitliğini sağlar.

Teorem 6.1.2.2: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir timelike eğri olsun. γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$k_1'' = 0 \ , \ k_2'' = 0 \qquad \textbf{(6.1.2.2)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi zayıf biharmonik timelike eğri olsun.

$$\Delta^{\perp} IH = 0 \quad \Rightarrow \Delta^{\perp} IH = -k_1'' N_1 - k_2'' N_2 = 0$$

olduğundan (6.1.2.2) eşitliği sağlanır.

$(\Leftarrow)$ Tersine (6.1.2.2) denklemleri $\Delta^{\perp} IH = 0$ eşitliğini sağlar. Bu da γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olduğunu gösterir.

Sonuç 6.1.2.1: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir timelike eğri olsun. γ eğrisi geodezik bir eğri ise zayıf biharmonik bir eğridir.

İspat: γ geodezik bir eğri olsun. $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ dır. Bu değerler (6.1.2.2) değerlerini sağladığından γ eğrisi zayıf biharmonik bir eğridir.

6.1.3. 3- Boyutlu Minkowski Uzayında bir timelike eğrisini karakterize eden denklem ve sonuçları

Teorem 6.1.3.1: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike eğri olsun. k_1 ve k_2, γ eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + \left(k_1^2 + k_2^2\right) IH + 3\left(k_1 k_1' + k_2 k_2'\right) T - \Delta^{\perp} IH = 0 \qquad \textbf{(6.1.3.1)}$$

İspat:

$$IH = D_T T = k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$\begin{aligned} D_T IH &= k_1' N_1 + k_1 D_T N_1 + k_2' N_2 + k_2 D_T N_2 \\ &= k_1' N_1 + k_1^2 T + k_2' N_2 + k_2^2 T \\ &= \left(k_1^2 + k_2^2\right) T + k_1' N_1 + k_2' N_2 \end{aligned}$$

İfadenin tekrar türevi alınırsa

$$D_T D_T IH = \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)^{'} T + \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) D_T T + k_1^{''} N_1 + k_1^{'} D_T N_1 + k_2^{''} N_2 + k_2^{'} D_T N_2$$
$$= \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)^{'} T + \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) IH + k_1^{''} N_1 + \left(k_1^{'} k_1 + k_2^{'} k_2\right) T + k_1^{''} N_1 + k_2^{''} N_2$$
$$= \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right) IH + k_1^{''} N_1 + 3\left(k_1^{'} k_1 + k_2^{'} k_2\right) T + k_1^{''} N_1 + k_2^{''} N_2$$

dir. İfade biraz daha düzenlenirse ve $\Delta^{\perp} IH = -k_1^{''} N_1 - k_2^{''} N_2$ ve $\Delta IH = -D_T D_T IH$ değerleri denklemde yerine yazıldığında (6.1.3.1) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.1.3.2: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında bir timelike bir eğri olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^{\;3} - 2\frac{k_1^{'}}{k_1} D_T^{\;2} T + \left[-\frac{k_1^{''}}{k_1} + 2\left(\frac{k_1^{'}}{k_1}\right)^2 - k_1^{\,2} - k_2^{\,2} \right] D_T T + \left[-3k_2 k_2^{'} + \frac{\left(2k_2^{\,2} - k_1^{\,2}\right) k_1^{'}}{k_1} \right] T - k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 = 0 \quad \textbf{(6.1.3.2)}$$

İspat:

$$N_1 = \frac{1}{k_1} D_T T - \frac{k_2}{k_1} N_2$$

$$D_T N_1 = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T T + \frac{1}{k_1} D_T^{\;2} T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} N_2 - \left(\frac{k_2}{k_1}\right) D_T N_2$$
$$k_1 T = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T T + \frac{1}{k_1} D_T^{\;2} T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} N_2 - \frac{k_2^{\,2}}{k_1} T$$

ifadenin teğetsel türevi alındığında

$$k_1^{'} T + k_1 D_T T = \left(\frac{1}{k_1}\right)^{''} D_T T + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^{\,2} T + \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^{\,2} T + \frac{1}{k_1} D_T^{\,3} T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} D_T N_2 - \left(\frac{k_2^{\,2}}{k_1}\right)^{'} T - \frac{k_2^{\,2}}{k_1} D_T T = 0$$

$$\frac{1}{k_1} D_T^{\;3} T + 2\left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^{\;2} T + \left[\left(\frac{1}{k_1}\right)^{''} - \frac{k_2^{\,2}}{k_1} - k_1 \right] D_T T + \left[-k_2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} - \left(\frac{k_2^{\,2}}{k_1}\right)^{'} - k_1^{'} \right] T - \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 = 0$$

$$D_T^{\;3} T + 2k_1 \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} D_T^{\;2} T + k_1 \left[\left(\frac{1}{k_1}\right)^{''} - \frac{k_2^{\,2}}{k_1} - k_1 \right] D_T T - k_1 \left[k_2 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} + \left(\frac{k_2^{\,2}}{k_1}\right)^{'} + k_1^{'} \right] T - k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} N_2 = 0$$

dir. Denklemin katsayılarını düzenleyelim.

$$2k_1 \left(\frac{1}{k_1}\right)^{'} = 2k_1 \left(-\frac{k_1^{'}}{k_1^{\,2}}\right) = -2\frac{k_1^{'}}{k_1}$$

$$k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2^{\,2}}{k_1} - k_1\right] = \left[-\frac{k_1''k_1^{\,2} - 2k_1^{\,2}\left(k_1'\right)^2}{k_1^{\,3}} - k_1^{\,2} - k_2^{\,2}\right]$$

$$= \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 - k_1^{\,2} - k_2^{\,2}\right]$$

$$-k_1\left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2^{\,2}}{k_1}\right)' + k_1'\right] = -k_1k_1' - 3k_2k_2' + 2\frac{k_2^{\,2}k_1'}{k_1} = -3k_2k_2' + \frac{\left(2k_2^{\,2} - k_1^{\,2}\right)k_1'}{k_1}$$

Bu değerler denklemde yerine yazıldığında (6.1.3.2) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.1.3.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^{\,3} - 2\frac{k_1'}{k_1}D_T^{\,2}T + \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 - k_1^{\,2} - k_2^{\,2}\right]D_T T - \left[\frac{\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)'}{2}\right]T = 0 \quad \textbf{(6.1.3.3)}$$

İspat: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisi bir slant helis olsun. O halde

$$\frac{k_2}{k_1} = sbt \;\Rightarrow\; \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \;,\; \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1} \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' = 0$$

dir. Bu değerler de (6.1.3.2) denkleminde yerine yazıldığında (6.1.3.3) denklemi elde edilir.

Teorem 6.1.3.4: : 3-boyutlu Minkowski uzayında bir c-slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^{\,3}T - \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)D_T T = 0 \qquad \textbf{(6.1.3.4)}$$

İspat: γ timelike eğrisi bir slant helis ise,

$$k_1 = sbt \;,\; k_2 = sbt \;\Rightarrow\; k_1' = 0 \,,\, k_2' = 0 \;\Rightarrow\; k_1'' = 0 \,,\, k_2'' = 0$$

dır. Bu değerler (6.1.3.2) denkleminde yerine yazılırsa (6.1.3.4) elde edilir.

Sonuç 6.1.3.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + 2\frac{k_1'}{k_1}D_T IH + \left[\frac{k_1''}{k_1} - 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 + k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right]IH + \left[\frac{\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)'}{2}\right]T = 0 \quad \textbf{(6.1.3.5)}$$

İspat: $\Delta IH = -D_T D_T IH$ dir. (6.1.3.3) denklemi bu ifadeye göre düzenlendiğinde (6.1.3.5) denklemi elde edilir.

Sonuç 6.1.3.2: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir c-slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + \left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2}\right)IH = 0$$

İspat: Benzer şekilde kolayca gösterilebilir

6.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Asli Normali Timelike Olan Spacelike Biharmonik Eğriler

3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop Çatısına göre bir α asli normali timelike olan spacelike eğrisinin sırsıyla doğal eğrilikleri k_1 , k_2 ve $\{N_1(s), N_2(s)\}$ de keyfi baz olmak üzere

$$\begin{bmatrix} D_T T \\ D_T N_1 \\ D_T N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$\langle T, T\rangle = 1,\ \langle N_1, N_1\rangle = -1, \langle N_2, N_2\rangle = 1$ ve metrik $(+,-,+)$

$$\kappa = \sqrt{\left|k_2{}^2 - k_1{}^2\right|} \quad , \quad \tau = \left(arc\ \tan h\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right)'$$

dir[4]

6.2.1. $\Delta IH = \lambda IH$ denklemini sağlayan asli normali timelike olan spacelike eğriler

Teorem 6.2.1.1: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir eğri olsun. γ eğrisinin,

$$\Delta IH = \lambda IH$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(k_2{}^2 - k_1{}^2\right)' = 0 \quad , \quad -\left[k_1\left(k_2{}^2 - k_1{}^2\right) + k_1{}''\right] = \lambda k_1 \quad , \quad \left[k_2\left(k_1{}^2 - k_2{}^2\right) + k_2{}''\right] = -\lambda k_2 \quad \textbf{(6.2.1.1)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\Delta IH = \lambda IH$ eşitliği sağlansın.

$$\begin{aligned}
\Delta IH = -D_T{}^2 IH = -D_T{}^2\left(k_1 N_1 - k_2 N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1{}' N_1 + k_1 D_T N_1 - k_2{}' N_2 - k_2 D_T N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1{}' N_1 + k_1(k_1 T) - k_2{}' N_2 - k_2(k_2 T)\right) \\
&= -D_T\left((k_1{}^2 - k_2{}^2)T + k_1{}' N_1 - k_2{}' N_2\right) \\
&= -\left[(k_1{}^2 - k_2{}^2)' T + (k_1{}^2 - k_2{}^2) D_T T + k_1{}'' N_1 + k_1{}' D_T N_1 - k_2{}'' N_2 - k_2{}' D_T N_2\right] \\
&= -\left[(k_1{}^2 - k_2{}^2)' T + (k_1{}^2 - k_2{}^2) D_T T + k_1{}'' N_1 + k_1{}'(k_1 T) - k_2{}'' N_2 - k_2{}'(k_2 T)\right] \\
&= -3(k_1 k_1{}' - k_2 k_2{}')T - \left(k_1(k_1{}^2 - k_2{}^2) + k_1{}''\right)N_1 + \left(k_2(k_1{}^2 - k_2{}^2) + k_2{}''\right)N_2
\end{aligned}$$

$\Delta IH = \lambda IH$ olduğundan

$$-3(k_1 k_1{}' - k_2 k_2{}')T - \left(k_1(k_1{}^2 - k_2{}^2) + k_1{}''\right)N_1 + \left(k_2(k_1{}^2 - k_2{}^2) + k_2{}''\right)N = \lambda\left(k_1 N_1 - k_2 N_2\right)$$

dir. Buradan da

$$\left(k_1k_1^{'}-k_2k_2^{'}\right)=0\ ,\quad -\left[k_1\left(k_1^{2}-k_2^{2}\right)+k_1^{''}\right]=\lambda k_1\ ,\quad \left[k_2\left(k_1^{2}-k_2^{2}\right)+k_2^{''}\right]=-\lambda k_2$$

dir. Denklemler biraz daha düzenlendiğinde (6.2.1.1) eşitlikleri elde edilir

6.2.2. 3-boyutlu Minkowski uzayında 1.tipten asli normali timelike olan spacelike harmonik eğriler

Teorem 5.2.2.1: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler asli normali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_1^{''}}{k_1}=\frac{k_2^{''}}{k_2} \qquad \textbf{(6.2.2.1)}$$

olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$

$$\Delta^{\perp}IH=-D_T^{\perp}D_T^{\perp}IH$$

$$D_TIH=(k_1^{2}-k_2^{2})T+k_1^{'}N_1-k_2^{'}N_2$$

$$D_T^{\perp}IH=k_1^{'}N_1-k_2^{'}N_2$$

$$\begin{aligned}D_TD_T^{\perp}IH&=D_T\left(k_1^{'}N_1-k_2^{'}N_2\right)\\&=k_1^{''}N_1+k_1^{'}D_TN_1-k_2^{''}N_2-k_2^{'}D_TN_2\\&=k_1^{''}N_1+k_1^{'}(k_1T)-k_2^{''}N_2-k_2^{'}(k_2T)\\&=(k_1k_1^{'}-k_2k_2^{'})T+k_1^{''}N_1-k_2^{''}N_2\end{aligned}$$

$$D_T^{\perp}D_T^{\perp}IH=k_1^{''}N_1-k_2^{''}N_2$$

$$\Delta^{\perp}IH=-D_T^{\perp}D_T^{\perp}IH=-k_1^{''}N_1+k_2^{''}N_2$$

γ 1. tipten harmonik bir eğri olduğundan $\Delta^{\perp}IH=\lambda IH$ dır.

$$\begin{aligned}-k_1^{''}N_1+k_2^{''}N_2&=\lambda\left(k_1N_1-k_2N_2\right)\\&=\lambda k_1N_1-\lambda k_2N_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -k_1^{''}=\lambda k_1\ ,\ k_2^{''}=-\lambda k_2$$

$$\lambda=-\frac{k_1^{''}}{k_1}\quad ,\ \lambda=-\frac{k_2^{''}}{k_2}\ \Rightarrow\ \frac{k_1^{''}}{k_1}=\frac{k_2^{''}}{k_2}$$

dir.

$(\Leftarrow)$ Tersine $\frac{k_1^{''}}{k_1}=\frac{k_2^{''}}{k_2}$ olsun. $-\frac{k_1^{''}}{k_1}=\lambda$ diyelim. $-k_1^{''}=\lambda k_1$ ve $k_2^{''}=-\lambda k_2$ dir. Bu denklemler de $\Delta^{\perp}IH=\lambda IH$ eşitliğini sağlar.

Teorem 6.2.2.2: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler asli normali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$k_1'' = 0\,,\; k_2'' = 0 \qquad \textbf{(6.2.2.2)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi zayıf biharmonik asli normali timelike olan spacelike bir eğri olsun.

$$\Delta^{\perp} IH = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta^{\perp} IH = -k_1'' N_1 + k_2'' N_2 = 0$$

olduğundan (6.2.2.2) eşitliği sağlanır.

$(\Leftarrow)$ Tersine (6.2.2.2) denklemleri $\Delta^{\perp} IH = 0$ eşitliğini sağlar. Bu da γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olduğunu gösterir.

6.2.3. 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan bir spacelike eğriyi karakterize eden denklem ve sonuçları

Teorem 6.2.3.1: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan spacelike bir eğrisi olsun. k_1 ve k_2 γ eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + \left(k_1^2 - k_2^2\right) IH + 3\left(k_1 k_1' - k_2 k_2'\right) T - \Delta^{\perp} IH = 0 \qquad \textbf{(6.2.3.1)}$$

İspat:

$$IH = D_T T = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

$$\begin{aligned} D_T IH &= k_1' N_1 + k_1 D_T N_1 - k_2' N_2 - k_2 D_T N_2 \\ &= k_1' N_1 + k_1^2 T - k_2' N_2 - k_2^2 T \\ &= \left(k_1^2 - k_2^2\right) T + k_1' N_1 - k_2' N_2 \end{aligned}$$

İfadenin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} D_T D_T IH &= \left(k_1^2 - k_2^2\right)' T + \left(k_1^2 - k_2^2\right) D_T T + k_1'' N_1 + k_1' D_T N_1 - k_2'' N_2 - k_2' D_T N_2 \\ &= \left(k_1^2 - k_2^2\right)' T + \left(k_1^2 - k_2^2\right) IH + k_1'' N_1 + \left(k_1' k_1 - k_2' k_2\right) T + k_1'' N_1 - k_2'' N_2 \\ &= \left(k_1^2 - k_2^2\right) IH + k_1'' N_1 + 3\left(k_1' k_1 - k_2' k_2\right) T + k_1'' N_1 - k_2'' N_2 \end{aligned}$$

dir. İfade biraz daha düzenlenirse ve $\Delta^{\perp} IH = -k_1'' N_1 - k_2'' N_2$ ve $\Delta IH = -D_T D_T IH$ değerleri denklemde yerine yazıldığında (6.2.3.1) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.2.3.2: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3 - 2\frac{k_1'}{k_1}D_T{}^2T + \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 - k_1{}^2 + k_2{}^2\right]D_TT + \left[3k_2k_2' - \frac{\left(2k_2{}^2 + k_1{}^2\right)k_1'}{k_1}\right]T + k_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)''N_2 = 0 \quad \textbf{(6.2.3.2)}$$

İspat:

$$N_1 = \frac{1}{k_1}D_TT + \frac{k_2}{k_1}N_2$$

$$D_TN_1 = \left(\frac{1}{k_1}\right)'D_TT + \frac{1}{k_1}D_T{}^2T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'N_2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)D_TN_2$$

$$k_1T = \left(\frac{1}{k_1}\right)'D_TT + \frac{1}{k_1}D_T{}^2T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'N_2 + \frac{k_2{}^2}{k_1}T$$

İfadenin teğetsel türevi alındığında

$$k_1'T + k_1D_TT = \left(\frac{1}{k_1}\right)''D_TT + \left(\frac{1}{k_1}\right)'D_T{}^2T + \left(\frac{1}{k_1}\right)'D_T{}^2T + \frac{1}{k_1}D_T{}^3T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)''N_2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'D_TN_2 + \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)'T + \frac{k_2{}^2}{k_1}D_TT = 0$$

$$\frac{1}{k_1}D_T{}^3T + 2\left(\frac{1}{k_1}\right)'D_T{}^2T + \left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' + \frac{k_2{}^2}{k_1} - k_1\right]D_TT + \left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' - k_1'\right]T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)''N_2 = 0$$

$$D_T{}^3T + 2k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)'D_T{}^2T + k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' + \frac{k_2{}^2}{k_1} - k_1\right]D_TT + k_1\left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' - k_1'\right]T + k_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)''N_2 = 0$$

dir. Denklemin katsayıları düzenleyelim.

$$2k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)' = 2k_1\left(-\frac{k_1'}{k_1{}^2}\right) = -2\frac{k_1'}{k_1}$$

$$k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' + \frac{k_2{}^2}{k_1} - k_1\right] = \left[-\frac{k_1''k_1{}^2 - 2k_1{}^2\left(k_1'\right)^2}{k_1{}^3} - k_1{}^2 + k_2{}^2\right]$$

$$= \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 - k_1{}^2 + k_2{}^2\right]$$

$$k_1\left[k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' + \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' - k_1'\right] = -k_1k_1' + 3k_2k_2' - 2\frac{k_2{}^2k_1'}{k_1} = 3k_2k_2' - \frac{\left(k_1{}^2 + 2k_2{}^2\right)k_1'}{k_1}$$

Bu değerler denklemde yerine yazıldığında (6.2.3.2) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.2.3.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan spacelike bir slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3 - 2\frac{k_1^{'}}{k_1}D_T{}^2T + \left[-\frac{k_1^{''}}{k_1} + 2\left(\frac{k_1^{'}}{k_1}\right)^2 - k_1{}^2 + k_2{}^2\right]D_TT + \frac{(k_2{}^2 - k_1{}^2)^{'}}{2}T = 0 \qquad \textbf{(6.2.3.3)}$$

İspat: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisi bir slant helis olsun. O halde

$$\frac{k_2}{k_1} = sbt \;\Rightarrow\; \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{'} = 0\;,\; \frac{k_2^{'}}{k_2} = \frac{k_1^{'}}{k_1} \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^{''} = 0$$

dir. Bu değerler de (6.2.3.2) denkleminde yerine yazıldığında (6.2.3.3) denklemi elde edilir.

Teorem 6.2.3.4: : 3-boyutlu Minkowski uzayında bir c-slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3T - \left(k_1{}^2 - k_2{}^2\right)D_TT = 0 \qquad \textbf{(6.2.3.4)}$$

İspat: γ eğrisi bir slant helis ise,

$$k_1 = sbt\;,\; k_2 = sbt \;\Rightarrow\; k_1^{'} = 0\,,\, k_2^{'} = 0 \;\Rightarrow\; k_1^{''} = 0\,,\, k_2^{''} = 0$$

dır. Bu değerler (6.2.3.2) denkleminde yerine yazılırsa (6.2.3.4) elde edilir.

Sonuç 6.2.3.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + 2\frac{k_1^{'}}{k_1}D_TIH + \left[\frac{k_1^{''}}{k_1} - 2\left(\frac{k_1^{'}}{k_1}\right)^2 + k_1{}^2 - k_2{}^2\right]IH + \frac{(k_2{}^2 - k_1{}^2)^{'}}{2}T = 0 \qquad \textbf{(6.2.3.5)}$$

İspat: $\Delta IH = -D_TD_TIH$ dir. (6.2.3.3) denklemi bu ifadeye göre düzenlendiğinde (6.2.3.5) denklemi elde edilir.

Sonuç 6.2.3.2: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir c-slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + \left(k_1{}^2 - k_2{}^2\right)IH = 0$$

İspat: Benzer şekilde kolayca gösterilebilir

6.3. 3-boyutlu Minkowski Uzayında Bishop Çatısına Göre Binormali Timelike Olan Spacelike Biharmonik Eğriler

3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop Çatısına göre bir α binormali timelike olan spacelike eğrisinin sırsıyla doğal eğrilikleri k_1 , k_2 ve $\{N_1(s), N_2(s)\}$ de keyfi baz olmak üzere

$$\begin{bmatrix} D_TT \\ D_TN_1 \\ D_TN_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

$\langle T,T\rangle = 1,\ \langle N_1,N_1\rangle = 1, \langle N_2,N_2\rangle = -1$ ve metrik $(+,+,-)$

$$\kappa = \sqrt{\left|k_1^{\,2} - k_2^{\,2}\right|} \quad , \quad \tau = \left(arc\ \tanh\left(\frac{k_2}{k_1}\right)\right)'$$

dir[5].

6.3.1. $\Delta IH = \lambda IH$ denklemini sağlayan binormali timelike olan spacelike eğriler

Teorem 6.3.1.1: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler bir eğri olsun.

$$\Delta IH = \lambda IH$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\left(k_1^{\,2} - k_2^{\,2}\right)' = 0 \quad , \quad \left[-k_1\left(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}\right) + k_1''\right] = \lambda k_1 \quad , \quad \left[k_2\left(k_2^{\,2} - k_2^{\,2}\right) + k_2''\right] = \lambda k_2 \qquad \textbf{(6.3.1.1)}$$

dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\Delta IH = \lambda IH$ eşitliği sağlansın.

$$\begin{aligned}
\Delta IH = -D_T^{\,2} IH &= -D_T^{\,2}\left(k_1 N_1 - k_2 N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1' N_1 + k_1 D_T N_1 - k_2' N_2 - k_2 D_T N_2\right) \\
&= -D_T\left(k_1' N_1 + k_1(-k_1 T) - k_2' N_2 - k_2(-k_2 T)\right) \\
&= -\,D_T\left((k_2^{\,2} - k_1^{\,2})T + k_1' N_1 - k_2' N_2\right) \\
&= -\left[(k_2^{\,2} - k_1^{\,2})' T + (k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) D_T T + k_1'' N_1 + k_1' D_T N_1 - k_2'' N_2 - k_2' D_T N_2\right] \\
&= -\left[(k_2^{\,2} - k_1^{\,2})' T + (k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) D_T T + k_1'' N_1 + k_1'(-k_1 T) - k_2'' N_2 - k_2'(-k_2 T)\right] \\
&= 3(k_1 k_1' - k_2 k_2')T - \left(k_1(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) + k_1''\right)N_1 + \left(k_2(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) + k_2''\right)N_2
\end{aligned}$$

$\Delta IH = \lambda IH$ olduğundan

$$3(k_1 k_1' - k_2 k_2')T - \left(k_1(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) + k_1''\right)N_1 + \left(k_2(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}) + k_2''\right)N = \lambda\left(k_1 N_1 - k_2 N_2\right)$$

dir. Buradan da

$$\left(k_1 k_1' - k_2 k_2'\right)' = 0 \quad , \quad -\left[k_1\left(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}\right) + k_1''\right] = \lambda k_1 \quad , \quad \left[k_2\left(k_2^{\,2} - k_1^{\,2}\right) + k_2''\right] = \lambda k_2$$

dir. Denklemler biraz daha düzenlendiğinde (6.3.1.1) eşitlikleri elde edilir

6.3.2. 3-boyutlu Minkowski 3-uzayında 1.tipten binormali timelike olan spacelike harmonik eğriler

Teorem 6.3.2.1: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler binormali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin 1. tipten harmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_1''}{k_1} = \frac{k_2''}{k_2} \qquad \textbf{(6.3.2.1)}$$

olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow)$
$$\Delta^{\perp} IH = -D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH$$

$$D_T IH = (k_2{}^2 - k_1{}^2)T + k_1{}' N_1 - k_2{}' N_2$$

$$D_T{}^{\perp} IH = k_1{}' N_1 - k_2{}' N_2$$

$$\begin{aligned} D_T D_T{}^{\perp} IH &= D_T\left(k_1{}' N_1 - k_2{}' N_2\right) \\ &= k_1{}'' N_1 + k_1{}' D_T N_1 - k_2{}'' N_2 - k_2{}' D_T N_2 \\ &= k_1{}'' N_1 + k_1{}'(-k_1 T) - k_2{}'' N_2 - k_2{}'(-k_2 T) \\ &= (-k_1 k_1{}' + k_2 k_2{}')T + k_1{}'' N_1 - k_2{}'' N_2 \end{aligned}$$

$$D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH = k_1{}'' N_1 - k_2{}'' N_2$$

$$\Delta^{\perp} IH = -D_T{}^{\perp} D_T{}^{\perp} IH = -k_1{}'' N_1 + k_2{}'' N_2$$

γ 1. tipten harmonik bir eğri olduğundan $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ dır

$$\begin{aligned} -k_1{}'' N_1 + k_2{}'' N_2 &= \lambda\left(k_1 N_1 - k_2 N_2\right) \\ &= \lambda k_1 N_1 - \lambda k_2 N_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -k_1{}'' = \lambda k_1 \ , \ k_2{}'' = -\lambda k_2$$

$$\lambda = -\frac{k_1{}''}{k_1} \quad , \ \lambda = -\frac{k_2{}''}{k_2} \ \Rightarrow \ \frac{k_1{}''}{k_1} = \frac{k_2{}''}{k_2}$$

dir.

$(\Leftarrow)$ Tersine $\dfrac{k_1{}''}{k_1} = \dfrac{k_2{}''}{k_2}$ olsun. $-\dfrac{k_1{}''}{k_1} = \lambda$ diyelim. $-k_1{}'' = \lambda k_1$ ve $-k_2{}'' = \lambda k_2$ dir. Bu denklemler de $\Delta^{\perp} IH = \lambda IH$ eşitliğini sağlar.

Teorem 6.3.2.2: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler binormali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$k_1{}'' = 0 \ , \ k_2{}'' = 0 \qquad \textbf{(6.3.2.2)}$$

olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ γ eğrisi zayıf biharmonik binormali timelike olan spacelike bir eğri olsun.

$$\Delta^{\perp} IH = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta^{\perp} IH = -k_1{}'' N_1 + k_2{}'' N_2 = 0$$

olduğundan (6.3.2.2) eşitliği sağlanır.

$(\Leftarrow)$ Tersine (6.3.2.2) denklemleri $\Delta^{\perp} IH = 0$ eşitliğini sağlar. Bu da γ eğrisinin zayıf biharmonik eğri olduğunu gösterir.

Sonuç 6.3.2.1: γ 3-boyutlu Minkowski uzayında regüler binormali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisi geodezik bir eğri ise zayıf biharmonik bir eğridir.

İspat: γ geodezik bir eğri olsun. $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ dır. Bu değerler (6.3.2.2) değerlerini sağladığından γ eğrisi zayıf biharmonik bir eğridir.

6.3.3. 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan bir spacelike eğrisini karakterize eden denklem ve sonuçları

Teorem 6.3.3.1: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında asli normali timelike olan bir eğri olsun. k_1 ve k_2 γ eğrisinin sırasıyla birinci ve ikinci eğrilikleri olmak üzere, γ eğrisini karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + \left(k_1^2 - k_2^2\right)IH - 3\left(k_1 k_1' - k_2 k_2'\right)T - \Delta^{\perp} IH = 0 \qquad \textbf{(6.3.3.1)}$$

İspat:

$$IH = D_T T = \kappa_1 N_1 - \kappa_2 N_2$$

$$\begin{aligned} D_T IH &= k_1' N_1 + k_1 D_T N_1 - k_2' N_2 - k_2 D_T N_2 \\ &= k_1' N_1 - k_1^2 T - k_2' N_2 + k_2^2 T \\ &= \left(-k_1^2 + k_2^2\right)T + k_1' N_1 - k_2' N_2 \end{aligned}$$

ifadenin tekrar türevi alınırsa

$$\begin{aligned} D_T D_T IH &= \left(-k_1^2 + k_2^2\right)' T + \left(-k_1^2 + k_2^2\right) D_T T + k_1'' N_1 + k_1' D_T N_1 - k_2'' N_2 - k_2' D_T N_2 \\ &= \left(-k_1^2 + k_2^2\right)' T + \left(-k_1^2 + k_2^2\right) IH + k_1'' N_1 + \left(-k_1' k_1 + k_2' k_2\right)T + k_1'' N_1 - k_2'' N_2 \\ &= \left(-k_1^2 + k_2^2\right) IH - 3\left(k_1' k_1 - k_2' k_2\right)T + k_1'' N_1 - k_2'' N_2 \end{aligned}$$

dir. İfade biraz daha düzenlenirse ve $\Delta^{\perp} IH = -k_1'' N_1 + k_2'' N_2$ ve $\Delta IH = -D_T D_T IH$ değerleri denklemde yerine yazıldığında (6.3.3.1) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.3.3.2: γ eğrisi 3-boyutlu Minkowski uzayında binormali timelike olan spacelike bir eğri olsun. γ eğrisini karakterize eden denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T^3 - 2\frac{k_1'}{k_1} D_T^2 T + \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 + k_1^2 - k_2^2\right] D_T T + \left[-3k_2 k_2' + \frac{\left(k_1^2 + 2k_2^2\right)k_1'}{k_1}\right] T + k_1 \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' N_2 = 0 \ \textbf{(6.3.3.2)}$$

İspat:

$$N_1 = \frac{1}{k_1} D_T T + \frac{k_2}{k_1} N_2$$

$$D_T N_1 = \left(\frac{1}{k_1}\right)' D_T T + \frac{1}{k_1} D_T{}^2 T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' N_2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right) D_T N_2$$

$$-k_1 T = \left(\frac{1}{k_1}\right)' D_T T + \frac{1}{k_1} D_T{}^2 T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' N_2 - \frac{k_2{}^2}{k_1} T$$

İfadenin teğetsel türevi alındığında

$$-k_1' T - k_1 D_T T = \left(\frac{1}{k_1}\right)'' D_T T + \left(\frac{1}{k_1}\right)' D_T{}^2 T + \left(\frac{1}{k_1}\right)' D_T{}^2 T + \frac{1}{k_1} D_T{}^3 T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' N_2 + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' D_T N_2 - \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' T - \frac{k_2{}^2}{k_1} D_T T = 0$$

$$\frac{1}{k_1} D_T{}^3 T + 2\left(\frac{1}{k_1}\right)' D_T{}^2 T + \left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2{}^2}{k_1} + k_1\right] D_T T + \left[-k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' - \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' + k_1'\right] T + \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' N_2 = 0$$

$$D_T{}^3 T + 2k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)' D_T{}^2 T + k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2{}^2}{k_1} + k_1\right] D_T T + k_1\left[-k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' - \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' + k_1'\right] T + k_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' N_2 = 0$$

dir. Denklemin katsayıları düzenleyelim.

$$2k_1\left(\frac{1}{k_1}\right)' = 2k_1\left(-\frac{k_1'}{k_1{}^2}\right) = -2\frac{k_1'}{k_1}$$

$$k_1\left[\left(\frac{1}{k_1}\right)'' - \frac{k_2{}^2}{k_1} - k_1\right] = \left[-\frac{k_1'' k_1{}^2 - 2k_1{}^2 (k_1')^2}{k_1{}^3} + k_1{}^2 - k_2{}^2\right]$$

$$= \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 + k_1{}^2 - k_2{}^2\right]$$

$$k_1\left[-k_2\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' - \left(\frac{k_2{}^2}{k_1}\right)' + k_1'\right] = k_1 k_1' - 3k_2 k_2' + 2\frac{k_2{}^2 k_1'}{k_1} = -3k_2 k_2' + \frac{(k_1{}^2 + 2k_2{}^2)k_1'}{k_1}$$

Bu değerler denklemde yerine yazıldığında (6.3.3.2) eşitliği elde edilir.

Teorem 6.3.3.3: 3-boyutlu Minkowski uzayında binormali timelike olan spacelike bir slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3 - 2\frac{k_1'}{k_1} D_T{}^2 T + \left[-\frac{k_1''}{k_1} + 2\left(\frac{k_1'}{k_1}\right)^2 + k_1{}^2 - k_2{}^2\right] D_T T + \frac{(k_1{}^2 - k_2{}^2)}{2} T = 0 \qquad \textbf{(6.3.3.3)}$$

İspat: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ eğrisi bir slant helis olsun. O halde

$$\frac{k_2}{k_1} = sbt \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0 \ , \ \frac{k_2'}{k_2} = \frac{k_1'}{k_1} \Rightarrow \left(\frac{k_2}{k_1}\right)'' = 0$$

dir. Bu değerler de (6.3.3.2) denkleminde yerine yazıldığında (6.3.3.3) denklemi elde edilir.

Teorem 6.3.3.4: : 3-boyutlu Minkowski uzayında binormali timelike olan spacelike bir c-slant helisi karakterize eden diferensiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$D_T{}^3 T + \left(k_1{}^2 - k_2{}^2\right) D_T T = 0 \qquad \textbf{(6.3.3.4)}$$

İspat: γ eğrisi bir slant helis ise,

$$k_1 = sbt \ , \ k_2 = sbt \ \Rightarrow \ k_1{}' = 0 \ , \ k_2{}' = 0 \ \Rightarrow \ k_1{}'' = 0 \ , \ k_2{}'' = 0$$

dır. Bu değerler (6.3.3.2) denkleminde yerine yazılırsa (6.3.3.4) elde edilir.

Sonuç 6.3.3.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH + 2\frac{k_1{}'}{k_1} D_T IH + \left[\frac{k_1{}''}{k_1} - 2\left(\frac{k_1{}'}{k_1}\right)^2 + k_1{}^2 + k_2{}^2\right] IH + \frac{(k_1{}^2 - k_2{}^2)}{2} T = 0 \qquad \textbf{(6.3.3.5)}$$

İspat: $\Delta IH = -D_T D_T IH$ dir. (6.3.3.3) denklemi bu ifadeye göre düzenlendiğinde (6.3.3.5) denklemi elde edilir.

Sonuç 6.3.3.2: 3-boyutlu Minkowski uzayında bir c-slant helisin diğer bir karakterizasyonu aşağıdaki gibidir.

$$\Delta IH - \left(k_1{}^2 - k_2{}^2\right) IH = 0$$

İspat: Benzer şekilde kolayca gösterilebilir

KAYNAKLAR

[1] Bonnar W.B., “Null Curves in a Minkowski Space- Time”.

[2] Bukcu, B., Karacan M. K., 2008, “On The Slant Helices According to Bishop Frame of The Timelike Curve in Larentzian Space”, *Tamkang Journal of Mathematics*, Vol 39, No 3.

[3] Bukcu, B., Karacan M.K., 2009, “The Slant Helices According to Bishop Frame”, *International Journal of Computational and Mathematical Sciences* 3:2.

[4] Bukcu, B., Karacan M.K., 2010, “ Bishop Darboux Rotation Axis of The Spacelike Curves With a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space”, *Notas de Matematical*, No:279.

[5] Bukcu, B., Karacan M.K., 2010, “Bishop Frame of The Spacelike Curve With a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space”, *Selçuk J. Appl. Math.*,Vol. 11- No 11.

[6] Bukcu, B., Kracan M. K. and Yüksel, N., 2008, “On The Dual Bishop Darboux Rotation Axis of The Dual Space Curve”, *Balkan Society of Geometers*, 53A04, 53A17, 53A25.

[7] Chen, B. Y., 1984, “Total Mean Curvature and Submanifolds of Fimite Type”, *Word Scientific*

[8] Chen, B. Y. And Ishikawa, S. 1991, “Biharmonic Surface in Pseudo-Euclidean Spaces”, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, A45: 323-347.

[9] Chen, B. Y. And Ishikawa, S., 1998, “Biharmonic Pseudo-Riemannia Submanifolds in Pseudo-Euclidean Spaces”, *Kyushu J. Math*. 52, 167-185.

[10] Defever, F., 1997, "Hypersurfaces of E^4 Satiffying, $\Delta IH = \lambda IH$, *Michigan Math*., J. 44; 355-364.

[11] Defever, F., 1998, "Hypersurfaces of E^4 With Harmonic Mean Curvature Vecter", *Math. Nach*., 196: 61-69.

[12] Dimitric, I, 1992, "Submanifolds of E^m With Harmonic Mean Curvature Vector", *Bull. İnst. Acad. Sinica*, 20; 53-65.

[13] Duggal, K.L. and Beyancu, A. 1996. "Lightlike Submanifold of Semi-Riemannian Manifolds and Appicatiens." *Kluwer Academic Publisher*.

[14] Ekmekçi, N. And İlarslan, K., 2000, "On Characterization of General Helices in Lorentzian Space", *Hadronic J*., 23 (6): 677-682.

[15] Ferrandez, A., Lucas, P. And Merano, M.A., 1998, "Biharmonic Hopf Cylinders", *Rocky Mountain J. Math*. 28; 957-975.

[16] Güngör, İ., 2007, "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Normal Eğrilerin Karakterizasyonları", Yüksek Lisans Tezi, *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, 3-7.

[17] Hacısalihoğlu, H. H, 2000, "Diferansiyel Geometri", Ankara.

[18] Inoguchi, J., 2000, " Submanifolds With Harmonic Mean Curvature Vector Field in Contact 3- Manifolds", *AMS Math. Subject Classification*, 53C42 53010.

[19] Inoguchi, J., 2003, " Biharmonic Curves inMinkowski 3-Space", *Intermational J. Math. And Mathematical Sciences*, 21; 1365-1368.

[20] Inoguchi, J., 2006, "Biharmonic Curves in Minkowski 3-Space. Part II", *International J. Math and Mathematical Sciences*, 92349.

[21] Izumiya, S. and Takiyama, A., 1997, "A Timelike Surface in Minkowski 3-Space Which Contarn Preudocircles", *Proc. Edindurgh Math.* Soc, 40; 127-136.

[22] Izumiya, S. and Takiyama, A., 1999, "A Time-Like Surface in Minkowski 3-Space Which Contain LİGht-Like Lines", *J. Geom.*, 64; 95-101.

[23] İlarslan, K., Nesovic E., 2004, "Timelike and Null Normal Curues in Minkovuski Space IE_1^3",*Indian J. Pure appl. Math*., 35(7): 882.

[24] Karacan, M.K., Yaylı, Y., 2000, "On The Geodesics of Tabular Surfaces in Minkavuski 3-Space", *Mathematics Subject Classification*: 53A35, 53B30, 1-3.

[25] Kılıç, B., 2002, "Sonlu Tipli Eğriler ve Yüzeyler", Doktora Tezi, *Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*.

[26] Kocayiğit, H.,2004, "Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontak Geometri", Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*

[27] Neill, B., 1983, "Semi-Riermannian Geometry With Applications to Relativity", *Academic Pres. New York*.

[28] Petrovic-Torgasev, M. and Sucurovic, E., "Some Charocterization of Curves Lying On The Preudohyperbolic Space IH_0^2 İn The Minkowski Space E_1^3", *Kragujevac, J. Match*. 22, 2000, 71-82.

[29] Sabuncuoğlu A., 2004, "Diferansiyel Geometri", *Ankara*.

[30] Soytürk E., İlarslan K. ve Sağlam D., "Osculating Spheres and Osculating Cırdes of a Curve in Semi-Riermannian Space", *Cammu Fac. Sci. Univ. Ank. Series Al*, V. 54 (No.2) pp. 39-48(2005).

[31] Th., Hasanis and Th., Vlohos, 1995, “Hypersurfaces in E^4 With Harmonic Mean Curvature Vector Field”, *Math, Nachr*., 172; 145-169.

[32] Yano, K. and Kon, M., 1984, “Structures on manifolds”, *Series in Pure Matematics,* Singapore, vol.3

[33] Yüksel, N., Bukcu, B. and Karacan, M.K., 2010, “Pozition Vectors of The C-Slant Helix According to Bishop Frame in 3-Space”, *(Hakemde).*

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Nazlı ARIK
Uyruğu	: T.C
Doğum tarihi ve yeri	: 27.01.1988-Afyon
Medeni Hali	: Bekâr
Telefon	: (0272) 248 38 23
Mail	: nazli_arik@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	: Uşak Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2010
Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi /Matematik Bölümü	2008
Lise	: Afyon Fatih Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009- 2010	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Kitap okuma, voleybol oynama, müzik dinleme