T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA MANNHEIM EĞRİ ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZKAN COŞKUN

TEMMUZ 2010
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA MANNHEIM EĞRİ ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZKAN COŞKUN

UŞAK 2010

Özkan COŞKUN tarafından hazırlanan **"3-Boyutlu Öklid ve Minkowski Uzaylarında Mannheim Eğri Çiftleri"** adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ ....
Uşak Üniversitesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....
Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER ....
Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

15 / 07 / 2010

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa YALÇIN ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Özkan COŞKUN

3-BOYUTLU ÖKLİD VE MINKOWSKI UZAYLARINDA MANNHEIM EĞRİ ÇİFTLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Özkan COŞKUN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2010

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde temel tanımlar verildi.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında Mannheim eğri çiftlerinin karakterizasyonları incelendi.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Minkowski uzayında Mannheim eğri çiftlerinin karakterizasyonları incelendi.

Bilim Kodu : 53A04, 53A35, 53B30

Anahtar Kelimeler : Mannheim eğri, Mannheim eğri çiftleri, 3-boyutlu Öklid uzayı, 3-boyutlu Minkowski uzayı

Sayfa Adedi : 59

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

MANNHEIM PARTNER CURVES IN EUCLIDEAN AND MINKOWSKI 3-SPACES

(M. Sc. Thesis)

Özkan COŞKUN

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2010

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the basic definitions are given.

In the second chapter, characterizations of Mannheim partner curves in 3-dimensional Euclidean space are given.

In the third chapter, characterizations of Mannheim partner curves in 3-dimensional Minkowski space are given.

Science Code	**:**	**53A04, 53A35, 53B30**
Key Words	**:**	**Mannheim curve, Mannheim partner curves, 3-dimensional Euclidean space, 3-dimensional Minkowski space**
Page Number	**:**	**59**
Adviser	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında her konuda yakın ilgi, anlayış gösteren, önerileriyle destekleyen çok değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN'a içtenlikle teşekkür ederim.

Bu çalışmada önerileriyle katkıda bulunan Sayın Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER'e (Uşak Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve tezin kopyalarını gözden geçirmemde yardımcı olan meslektaşım Muhammed ÇETİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanmasında, teşviklerinden, gösterdikleri anlayış ve sevgiden dolayı başta babam, annem ve abim olmak üzere tüm aileme gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELERİN LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\langle , \rangle$	İç çarpım
τ_α	α eğrisinin burulması
κ_α	α eğrisinin eğriliği
T_α	α eğrisinin teğet vektörü
N_α	α eğrisinin asli normal vektörü
B_α	α eğrisinin binormal vektörü
T_β	β eğrisinin teğet vektörü
N_β	β eğrisinin asli normal vektörü
B_β	β eğrisinin binormal vektörü
κ_β	β eğrisinin eğriliği
τ_β	β eğrisinin burulması

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Eğriler teorisi klasik diferensiyel geometrinin temellerinden biridir. Son zamanlarda özel eğrilere ilgi giderek artmıştır. Bertrand eğri çiftleri, involüt-evolüt eğriler ve Mannheim eğri çiftleri bunlardandır.

S. Venant 1845 yılında bir eğrinin asli normali ile üretilen yüzey üzerinde bulunup bulunmadığını ve bu eğrinin asli normali ile lineer bağımlı olan ikinci bir eğrinin var olup olmadığı sorusunu ortaya atmıştır. Bu soru 1850 yılında J. Bertrand tarafınndan cevaplandırılmıştır. Buna göre Bertrand, böyle bir ikinci eğrinin var olabilmesi için gerek ve yeter şartın verilen bu eğrilerin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında sabit katsayılı lineer bir bağıntının olması gerektiğini göstermiştir. Bu çeşit eğri çiftleri Conjugate Bertrand Eğriler ya da yaygın olarak Bertrand Eğriler olarak adlandırılır [17].

İnvolüt ve evolüt eğriler ise her noktasında teğet vektörleri ortogonal olan eğriler olup bu konuyla ilgili bugüne kadar birtakım çalışmalar yapılmıştır.

H. Liu ve F. Wang 2008 yılında 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında Mannheim eğri çiftleri üzerinde çalışmalar yapmıştır [18].

Bu çalışmada ise α ve β, 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında iki eğri olmak üzere, bu eğrilerin Mannheim eğri çifti olma şartları ve aralarındaki karakterizasyonları incelenmiştir.

1.TEMEL TANIMLAR

Tanım 1.1 (Öklid Uzayı) R reel sayılar cismini göstermek üzere

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in R\}$$

vektör uzayında, $x = (x_1, x_2, x_3)$ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

eşitliği ile tanımlanan

$$\begin{aligned} R^3 \times R^3 &\to R \\ (x, y) &\to \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

fonksiyonu, R^3 uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, R^3 uzayının **doğal iç çarpımı** veya **Öklid iç çarpımı** denir.

$x \in R^3$ olmak üzere

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olmak üzere, $R^3 \to R, x \to \|x\|$ fonksiyonu, R^3 uzayında bir normdur. Buna göre, R^3 uzayı normlu bir vektör uzayıdır.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

biçiminde tanımlanan, $d : R^3 \times R^3 \to R$ fonksiyonu, R^3 uzayında bir metriktir. Dolayısıyla, R^3 bir metrik uzaydır. Her metrik uzay bir topolojik uzay olduğundan R^3 topolojik uzaydır. Bu uzaya **Öklid Uzayı** denir ve kimi zaman E^3 ile gösterilir [10].

Tanım 1.2 I **,** R nin bir açık aralığı olmak üzere

$$\alpha : I \subset R \to E^3$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, E^3 uzayı içinde bir eğri denir [12].

Tanım 1.3 E^3 uzayında $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi için

$$\forall s \in \mathrm{I} \text{ için } \|\alpha'(s)\| = 1$$

ise α eğrisine **birim hızlı eğri** denir [5].

Tanım 1.4 E^3 üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir. T, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **birim teğet vektör alanı** denir [5].

Tanım 1.5 E^3 üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to R, \ \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir [5].

Tanım 1.6 E^3 üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s)$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normali** denir. N, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **asli vektör alanı** denir [5].

Tanım 1.7 E^3 üç boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset R \to E^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **binormal vektörü** denir. B vektör alanına da α eğrisinin binormal vektör alanı denir [5].

Tanım 1.8 $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine, eğrinin noktasındaki **Frenet vektörleri** denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir. T, N, B vektör alanlarına **Frenet vektör alanları** denir [5].

Tanım 1.9 $\alpha : I \subset R \to E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \to R\,,\ \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir [5].

Tanım 1.10 $\alpha : I \subset R \to E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$T' = \kappa N\,,\ N' = -\kappa T + \tau B\,,\ B' = -\tau N$$

şeklindedir $[10]$.

Tanım 1.11 Tanım 1.10 da elde edilen eşitliklere E^3 'te birim hızlı bir eğri için **Frenet formülleri** denir [5].

Tanım 1.12 $s \in I \subset R$ için $\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlemi** ya da **dokunum düzlemi** denir. $\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **doğrultman düzlemi** ya da **rektifiyan düzlemi** denir. $\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** denir [8,10].

Tanım 1.13 $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

iç çarpımına **Lorentz (Minkowski) iç çarpımı** denir ve g metriğine **Lorentz (Minkowski) metriği** denir [5].

Tanım 1.14 Lorentz iç çarpımı ile tanımlı Öklid uzayına **Lorentz uzayı ya da Minkowski uzayı** denir ve E_1^3 ile gösterilir.

Özel olarak $n = 3$ alınırsa, E_1^3 uzayına **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Bu durumda bu uzayın standart metriği, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

şeklindedir [5].

Tanım 1.15 $x \in E_1^3$ olmak üzere

(i) $\langle x, y \rangle_L \rangle 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne **uzaysı (spacelike)** vektör

(ii) $\langle x, y \rangle_L \langle 0$ ise x vektörüne **zamansı (timelike)** vektör

(iii) $\langle x, y \rangle_L = 0$ ve $x \neq 0$ ise , bu durmda x vektörüne **ışıksı (lightlike, null veya isotropik)** vektör denir [9,14].

Tanım 1.16 E_1^3'te m sabit bir nokta ve $r \rangle 0$ olmak üzere

$$S_1^2(m,r) = \{u \in E_1^3 : \langle u-m, u-m \rangle = r^2\}$$

cümlesine yarı-Rieman küresi

$$H_0^2(m,r) = \{u \in E_1^3 : \langle u-m, u-m \rangle = -r^2\}$$

cümlesine yarı-Rieman hiperbolik uzayı

$$C(m) = \{u \in E_1^3 : \langle u-m, u-m \rangle = 0\}$$

cümlesine yarı-Rieman ışık konisi (quadrik koni) denir [15,16].

Tanım 1.17 E_1^3'te $\alpha : I \subset R \to E_1^3$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere

(i) $\langle T,T \rangle_L \rangle 0$ ise α eğrisine **uzaysı(spacelike)** eğri

(ii) $\langle T,T \rangle_L \langle 0$ ise α eğrisine **zamansı (timelike)** eğri denir [11,16].

Tanım 1.18 $\lambda : I \subset R \to R$ ve $\mu : I \subset R \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\forall s \in I \subset R$ için α nın yer vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

biçiminde ise α eğrisine **normal eğri** denir. Başka bir deyişle α eğrisi normal düzlemde yatıyor ise α eğrisine normal eğri denir [5].

Tanım 1.19 Asli normali uzaysı veya zamansı olan uzaysı eğrilerin Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir. α uzaysı bir eğri ve asli normali N, zamansı veya uzaysı olsun. Bu durumda

$$\langle T,T \rangle_L = 1, \langle N,N \rangle_L = -1, \langle B,B \rangle_L = 1, \langle T,N \rangle_L = 0, \langle T,B \rangle_L = 0, \langle N,B \rangle_L = 0$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

asli normali ışıksı olmayan uzaysı bir eğrinin Frenet denklemleri elde edilmiş olur [5].

Tanım 1.20 Zamansı eğrilerin Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir. α zamansı bir eğri ve

$$\langle T,T\rangle_L = -1, \langle N,N\rangle_L = 1, \langle B,B\rangle_L = 1, \langle T,N\rangle_L = 0, \langle T,B\rangle_L = 0, \langle N,B\rangle_L = 0$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

elde edilir [5].

Tanım 1.21 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gibi iki vektörün Minkowski 3-uzayında vektörel çarpımı

$$x \wedge_L y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \left(y_2 x_3 - x_2 y_3, y_1 c_3 - c_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1 \right)$$

biçiminde tanımlanır [13].

Tanım 1.22 Zamansı eğrilerin Frenet denklemleri aşağıdaki gibidir. α zamansı bir eğri ve

$$\langle T,T\rangle_L = 1, \langle N,N\rangle_L = 1, \langle B,B\rangle_L = -1, \langle T,N\rangle_L = 0, \langle T,B\rangle_L = 0, \langle N,B\rangle_L = 0$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

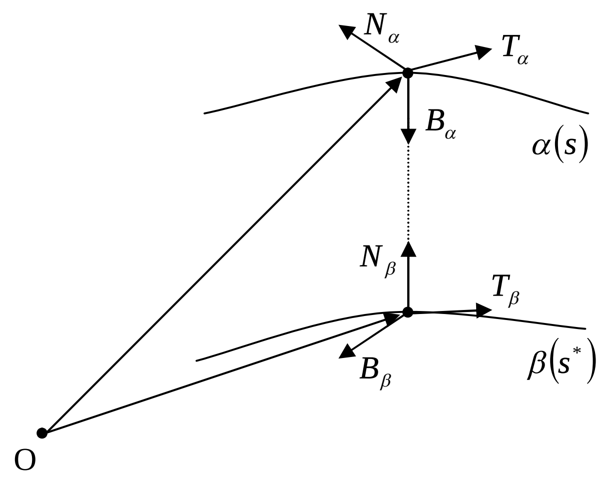
elde edilir [13].

2. BÖLÜM

2. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MANNHEİM EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde, Mannheim eğri çiftleri ve bazı karakterizasyonları incelendi.

Tanım 2.1 α ve β, 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı eğriler olsun. Eğer β eğrisinin asli normali ile α eğrisinin binormali lineer bağımlı ise, β eğrisine Mannheim eğrisi, α eğrisine de Mannheim eğri çifti denir [6].



Şekil-1

Şekil-1'e göre

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s) \tag{2.1}$$

yazılabilir. Burada s^* ve s, sırasıyla β ve α eğrilerinin yay parametreleridir.

Teorem 2.1 Öklid uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulmasının $\kappa_\beta = \lambda(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2)$ denklemini sağlamasıdır. Burada λ sabittir [6].

İspat

3-Boyutlu Öklid uzayında bir Mannheim eğrisi $\beta(s^*)=\alpha(s)+\lambda B_\alpha(s)$ olsun. Buna göre $\alpha(s)=\beta(s^*)+\lambda(s^*)N_\beta(s^*)$ yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının s değişkenine göre türevi alınırsa

$$\alpha'(s)=\beta'(s^*)+\lambda'(s^*)N_\beta(s^*)+\lambda(s^*)N'_\beta(s^*)$$

$$\alpha'(s)=T_\beta(s^*)+\lambda'(s^*)N_\beta(s^*)+\lambda(s^*)\left(-\kappa_\beta(s^*)T_\beta(s^*)+\tau_\beta(s^*)B_\beta(s^*)\right)$$

$$\alpha'(s)=(1-\lambda\kappa_\beta)T_\beta(s^*)+\lambda'(s^*)N_\beta(s^*)+\lambda(s^*)\tau_\beta(s^*)B_\beta(s^*) \quad \textbf{(2.2)}$$

olur.

$$\alpha'(s)\perp N_\beta \text{ ve } \alpha'(s)\perp B_\alpha .$$

Buna göre

$$\langle \alpha'(s), N_\beta(s^*)\rangle = 0$$

olur. Buradan

$$\lambda'\langle N_\beta(s^*), N_\beta(s^*)\rangle = 0$$

$$\lambda'(s^*)=0 \Rightarrow \lambda(s^*)=sabit \quad \textbf{(2.3)}$$

elde edilir.

(2.3) eşitliği (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\alpha'(s)=(1-\lambda\kappa_\beta)T_\beta(s^*)+\lambda\tau_\beta B_\beta(s^*) \quad \textbf{(2.4)}$$

eşitliği bulunur.

$$T_\alpha=\frac{d\alpha(s)}{ds}=\frac{d\alpha(s)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=\left[(1-\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda\tau_\beta B_\beta(s)\right]\frac{ds^*}{ds}$$

olmak üzere, eşitliğin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} T'_\alpha &= \left[-\lambda\kappa'_\beta T_\beta+\left[(1-\lambda\kappa_\beta)\kappa_\beta-\lambda\tau_\beta^2\right]N_\alpha+\lambda\tau'_\beta B_\beta(s)\right]\frac{ds^*}{ds} \\ &+\left[(1-\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda\tau_\beta B_\beta(s)\right]\frac{d^2s^*}{ds^2} \end{aligned} \quad \textbf{(2.5)}$$

elde edilir.

$$T'_\alpha \perp B_\alpha \text{ ve } T'_\alpha \perp N_\beta$$

olduğundan

$$\langle T'_\alpha, N_\beta\rangle = 0$$

yazılabilir.

(2.5) ile verilen denklem N_β ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\alpha{}', N_\beta \right\rangle = -\left\langle T_\beta, N_\beta \right\rangle \lambda \kappa'_\beta + \left(\kappa_\beta - \lambda \kappa_\beta{}^2 - \lambda \tau_\beta{}^2\right)\left\langle N_\beta, N_\beta \right\rangle + \lambda \tau'_\beta \left\langle B_\beta, N_\beta \right\rangle$$

$$\left[\left(1-\lambda\kappa_\beta\right)\kappa_\beta - \lambda\tau_\beta^2\right]\frac{ds^*}{ds} = 0, \frac{ds^*}{ds} \neq 0$$

$$\left(1-\lambda\kappa_\beta\right)\kappa_\beta - \lambda\tau_\beta^2 = 0$$

$$\lambda\left(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2\right) = \kappa_\beta$$

$$\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2 = \frac{1}{\lambda}\kappa_\beta \qquad \textbf{(2.6)}$$

bulunur.

Teorem 2.2 E^3'te $\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi olsun. Eğriliği κ_α ve burulması τ_α olan $\alpha(s)$ eğrisinin β'nın Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bazı λ sabitleri için $\tau'_\alpha = \frac{d\tau_\alpha}{ds} = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$ denklemin sağlanmasıdır [6].

İspat

$\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi olsun. O zaman $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliği yazılabilir. Buradan, $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda B'_\alpha(s) \qquad \textbf{(2.7)}$$

olur.

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha - \lambda \tau_\alpha N_\alpha(s) \qquad \textbf{(2.8)}$$

bulunur. Ayrıca

$$T_\beta = T_\alpha \cos\theta + N_\alpha \sin\theta \qquad \textbf{(2.9)}$$

eşitliğinde her iki tarafın T_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle = \left\langle T_\alpha, T_\alpha \right\rangle \cos\theta + \left\langle N_\alpha, T_\alpha \right\rangle \sin\theta$$

$$\left\langle T_\beta , T_\alpha \right\rangle = \cos\theta$$

bulunur.

(2.9) eşitliğinin her iki tarafının N_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta , N_\alpha \right\rangle = \left\langle T_\alpha , N_\alpha \right\rangle \cos\theta + \left\langle N_\alpha , N_\alpha \right\rangle \sin\theta$$

$$\left\langle T_\beta , N_\alpha \right\rangle = \sin\theta$$

bulunur.

$$\cos\theta = \lambda\tau_\alpha \sin\theta$$

$$\lambda\tau_\alpha = sabit \qquad \textbf{(2.10)}$$

elde edilir. Buradan λ 'nın sıfırdan farklı sabit bir sayı olduğu bulunur. Böylece

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha - \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s)$$

olur.

(2.9) eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha \cos\theta + N_\alpha \sin\theta$$

$$T_\beta{}' = T_\alpha' \cos\theta + T_\alpha (\cos\theta)' + N_\alpha' \sin\theta + N_\alpha (\sin\theta)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta = \kappa_\alpha N_\alpha \cos\theta + T_\alpha (\theta' \sin\theta) + (-\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha)\sin\theta + \theta' N_\alpha \cos\theta$$

$$\kappa_\beta N_\beta = -(\kappa_\alpha + \theta')\sin\theta\, T_\alpha + (\kappa_\alpha + \theta')\cos\theta\, N_\alpha + \tau_\alpha \sin\theta\, B_\alpha$$

olur. Buradan

$$(\kappa_\alpha + \theta')\sin\theta = 0$$

$$(\kappa_\alpha + \theta')\cos\theta = 0$$

$$\kappa_\alpha + \theta' = 0$$

elde edilir. O halde

$$\theta' = -\kappa_\alpha \qquad \textbf{(2.11)}$$

eşitliği bulunur.

(2.8) ve (2.9) eşitliklerinden

$$\frac{ds}{ds^*} = \cos\theta \; , \; \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cos\theta}$$

ve

$$\frac{ds}{ds^*}\lambda\tau_\alpha = -\sin\theta, \frac{ds^*}{ds} = -\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sin\theta}$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeler eşitlenirse

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sin\theta} \quad \textbf{(2.12)}$$

bulunur. Buradan

$$\lambda\tau_\alpha = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\lambda\tau_\alpha = -\tan\theta \quad \textbf{(2.13)}$$

elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\lambda\tau'_\alpha = -\theta'\left(1+\tan^2\theta\right) \quad \textbf{(2.14)}$$

elde edilir. (2.11) ve (2.13) eşitliklerinden

$$\lambda\tau'_\alpha = -(-\kappa_\alpha)\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$$

bulunur. Sıfırdan farklı λ sabiti için

$$\tau'_\alpha = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right) \quad \textbf{(2.15)}$$

denklemi elde edilir.

(2.1) denkleminin iki kez türevi alınarak Mannheim eğrileri ve Mannheim eğri çiftleri bulunabilir.

$$T'_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = \kappa_\alpha N_\alpha(s) - \lambda\tau'_\alpha N_\alpha(s) - \lambda\tau_\alpha N'_\alpha(s)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = \kappa_\alpha N_\alpha(s) - \lambda\tau'_\alpha N_\alpha(s) - \lambda\tau_\alpha\left(\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = \lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha T_\alpha + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau'_\alpha\right)N_\alpha - \lambda\tau_\alpha^2 B_\alpha \quad \textbf{(2.16)}$$

elde edilir.

(2.8) ve (2.16) ile verilen ifadeler vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left(T_\beta \wedge \kappa_\beta N_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 + \left(T_\beta \wedge T_\beta\right)\frac{d^2s^*}{ds^2}\frac{ds^*}{ds} &= \left(T_\alpha \wedge T_\alpha\right)\lambda\kappa_\alpha\tau_\alpha + \left(T_\alpha \wedge N_\alpha\right)\left(\kappa_\alpha - \lambda\tau'_\alpha\right) \\ &\quad -\left(T_\alpha \wedge B_\alpha\right)\lambda\tau_\alpha^2 - \left(N_\alpha \wedge T_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha^2\kappa_\alpha \\ &\quad -\left(N_\alpha \wedge N_\alpha\right)\lambda\tau_\alpha\left(\kappa_\alpha - \lambda\tau'_\alpha\right) + \left(N_\alpha \wedge B_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha^3\end{aligned}$$

$$\kappa_\beta B_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = (\kappa_\alpha - \lambda\tau'_\alpha)B_\alpha - \lambda\tau_\alpha^2(-N_\alpha) - \lambda^2\tau_\alpha^2\kappa_\alpha(-B_\alpha) + \lambda^2\tau_\alpha^3 T_\alpha$$

$$\kappa_\beta B_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha^3 T_\alpha + \lambda\tau_\alpha^2 N_\alpha + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau'_\alpha + \lambda^2\kappa_\alpha\tau_\alpha^2\right)B_\alpha$$

$$\kappa_\alpha - \lambda\tau'_\alpha + \lambda^2\kappa_\alpha\tau_\alpha^2 = 0$$

$$\kappa_\beta B_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha^3 T_\alpha + \lambda\tau_\alpha^2 N_\alpha \tag{2.17}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.8) ve (2.17) ile verilen ifadeler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge \kappa_\beta B_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = (T_\alpha \wedge T_\alpha)\lambda^2\tau_\alpha^3 + (T_\alpha \wedge N_\alpha)\lambda\tau_\alpha^2$$
$$- (N_\alpha \wedge T_\alpha)\lambda^3\tau_\alpha^4 - (N_\alpha \wedge N_\alpha)\lambda^2\tau_\alpha^3$$

$$-\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda\tau_\alpha^2 B_\alpha + \lambda^3\tau_\alpha^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = -\lambda\tau_\alpha^2\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right)B_\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak B_α ile N_β lineer bağımlı olur. Bundan dolayı $\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ Mannheim eğri çifti olur.

Sonuç 2.1

$$\tau'_\alpha = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$$

olmak üzere buradan

$$\int \tau'_\alpha = \frac{1}{\lambda}\int \kappa_\alpha\left(1+\lambda^2\tau_\alpha\right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda}\int (-\theta')\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda}\tan\left(\int \kappa_\alpha d_\alpha + c_0\right)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden herhangi bir Mannheim eğrisi için tek bir Mannheim eğri çifti vardır [6].

Önerme 2.1 $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Öklid uzayında s^* yay parametresi boyunca Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ s yay parametresi boyunca Mannheim eğri olsun. $\beta(s^*)$ genelleştirilmiş bir helis ise o zaman $\alpha(s)$ bir doğru olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta, B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerinin tanımından

$$\langle B_\alpha, u\rangle = 0, \langle N_\beta, u\rangle = 0$$

eşitlikleri u sabit vektörü için elde edilir. Bu durumda $\tau_\alpha = \kappa_\alpha = 0$ olur. $\langle T_\beta, u\rangle = sbt$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa_\beta \langle N_\beta, u\rangle = 0$$

olur. Buradan $\langle N_\beta, u\rangle = 0$ ve $\langle B_\alpha, u\rangle = 0$ türevi alınırsa $\tau_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle = 0$ olur.

u oskülatör düzlemdedir. $\tau_\alpha = 0$ olur. (2.15) eşitliğinde $\tau_\alpha = 0$ değeri yerine yazılırsa $\kappa_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ bir doğrudur.

Önerme 2.2 Genelleştirilmiş helis, 3-boyutlu Öklid uzayında $\beta(s^*)$ eğrisinin mannheim eğri çifti ise

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{c_2}{2} e^{c_1 s} - \frac{1}{2c_2} e^{-c_1 s}$$

olup, burada c_1, c_2 sıfırdan farklı sabitler ve s yay paremetresidir. Özel olarak, $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ alınırsa

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \sinh s$$

olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta, B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerin tanımından

$$\langle N_\alpha, u\rangle = \cos\theta \tag{2.18}$$

elde edilir. Önerme 1'e göre $\cos\theta \neq 0$ ve $\dfrac{\tau}{\kappa}$ sabit değildir.

(2.18) eşitliğinin s değişkenine göre iki kez türevi alınırsa

$$\tau_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle - \kappa_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle = 0$$

ve

$$-\tau_\alpha^2 \langle N_\alpha , u\rangle + \tau'_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle - \kappa'_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle - \kappa_\alpha^2 \langle N_\alpha , u\rangle = 0$$
$$\tau'_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle - \kappa'_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle = \left(\tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2\right)\langle N_\alpha , u\rangle$$
$$\tau'_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle - \kappa'_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle = \left(\tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2\right)\cos\theta$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\langle T_\alpha , u\rangle = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\langle B_\alpha , u\rangle$$

$$\kappa_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle = \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha , u\rangle - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha , u\rangle = \kappa_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle + \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha}\langle N_\alpha , u\rangle$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha , u\rangle = \frac{\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha}\langle N_\alpha , u\rangle$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha , u\rangle = \frac{\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}}{\kappa_\alpha}\cos\theta$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha , u\rangle = \frac{1}{\lambda}\cos\theta$$

$$\langle B_\alpha , u\rangle = \frac{1}{\lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\cos\theta$$

$$\langle T_\alpha , u\rangle = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\langle B_\alpha , u\rangle$$

$$\langle T_\alpha , u\rangle = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\frac{1}{\lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\cos\theta$$

$$\langle T_\alpha , u\rangle = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha \lambda \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\cos\theta$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\langle B_\alpha , u\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle N_\alpha , u\rangle$$

$$\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}\langle B_\alpha , u\rangle - \tau_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds} = \frac{1}{\lambda}\left(-\kappa_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle + \tau_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle\right)$$

$$\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}\frac{1}{\lambda\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}}\cos\theta = \tau_\alpha \cos\theta \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} \qquad \textbf{(2.19)}$$

bulunur. (2.19) ve $\lambda\left(\tau_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2\right) = \kappa_\alpha$ eşitliklerinden

$$\kappa_\alpha + \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\lambda} - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\lambda} - \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\frac{\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\tau_\alpha \frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha\left(\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\tau_\alpha \dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha \left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds} \right)^2} \right) \tag{2.20}$$

bulunur. (2.19) ve (2.20) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}{\dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{\tau_\alpha \dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right)} = \frac{\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}{\dfrac{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} - \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2 - \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}$$

elde edilir.

$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = y(s)$ olsun. Bu durumda

$$\left(1+y^2\right)\frac{d^2y}{ds^2} - y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse

$$\frac{dy}{ds} = p, \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{ds} = p\frac{dp}{dy}$$

$$\left(1+y^2\right)p\frac{dp}{dy} - yp^2 = 0$$

$$\left(1+y^2\right)\frac{dp}{dy} = yp$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{y}{1+y^2}dy$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int\frac{y}{1+y^2}dy$$

$$\ln p = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + \ln c_1$$

$$p = c_1\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{ds} = c_1\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\arcsin(y) = c_1 s + c_2$$

bulunur. Böylece önerme ispatlamış olur.

3. BÖLÜM

3. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA MANNHEİM EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde, 3-Boyutlu Minkowski uzayında eğrinin casual karakterleri farklı olduğundan iki eğrinin Mannheim eğri çifti oluşturması için aşağıdaki 5 durum söz konusudur.

i) α asli normali spacelike olan timelike bir eğri, β asli normali spacelike olan timelike bir eğri olma durumu

ii) α asli normali timelike olan spacelike bir eğri, β asli normali spacelike olan timelike bir eğri olma durumu

iii) α asli normali spacelike olan spacelike bir eğri, β asli normali timelike olan spacelike bir eğri olma durumu

iv) α asli normali timelike olan spacelike bir eğri, β asli normali spacelike olan spacelike bir eğri olma durumu

v) α asli normali spacelike olan timelike bir eğri, β asli normali spacelike olan spacelike bir eğri olma durumu

3.1 α Asli Normali Spacelike Olan Timelike Bir Eğri, β Asli Normali Spacelike Olan Timelike Bir Eğri Olma Durumu

Teorem 3.1.1 Minkowski uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulmasının $\kappa_\beta = -\lambda\left(\kappa_\beta^2 - \tau_\beta^2\right)$ denklemini sağlamasıdır. Burada λ sabittir [6].

İspat

3-Boyutlu Minkowski uzayında bir Mannheim eğrisi $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ olsun. Buna göre $\alpha(s) = \beta\left(s^*\right) + \lambda\left(s^*\right) N_\beta\left(s^*\right)$ yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının s değişkenine göre türevini alınırsa

$$\alpha'(s)=\beta'(s^*)+\lambda' N_\beta(s^*)+\lambda N_\beta{}'(s^*)$$

$$\alpha'(s)=T_\beta+\lambda' N_\beta(s^*)+\lambda\kappa_\beta T_\beta(s^*)+\lambda\tau_\beta B_\beta(s^*)$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\alpha'(s)=(1+\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda' N_\beta(s)+\lambda\tau_\beta B_\beta \tag{3.1}$$

bulunur.

$$\alpha'(s)\perp B_\alpha \text{ ve } \alpha'(s)\perp N_\beta$$

olduğundan B_α ile N_β lineer bağımlı olur.

$$\left\langle \alpha'(s), N_\beta(s^*)\right\rangle_L=0$$

bulunur. Böylece

$$\lambda'=0$$

$$\lambda'=sabit \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.1) denkleminde (3.2) eşitliği yerine yazılırsa

$$\alpha'(s)=(1+\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda' N_\beta(s^*)+\lambda\tau_\beta B_\beta \tag{3.3}$$

eşitliği bulunur.

$$T_\alpha=\frac{d\alpha(s)}{ds}=\frac{d\alpha(s)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds}=\left[(1+\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{ds^*}{ds}$$

olmak üzere, bu eşitliğin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T'_\alpha=\left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta+(1+\lambda\kappa_\beta)T'_\beta+\lambda\tau'_\beta B_\beta+\lambda\tau_\beta B'_\beta\right]\frac{ds^*}{ds}+\left[(1+\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha=\left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta+(1+\lambda\kappa_\beta)\kappa_\beta N_\beta+\lambda\tau'_\beta B_\beta+\lambda\tau_\beta(-\tau_\beta N_\beta)\right]\frac{ds^*}{ds}+\left[(1+\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha=\left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta+(\kappa_\beta+\lambda\kappa_\beta{}^2-\lambda\tau_\beta{}^2)N_\beta+\lambda\tau'_\beta B_\beta\right]\frac{ds^*}{ds}+\left[(1+\lambda\kappa_\beta)T_\beta+\lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2s^*}{ds^2} \tag{3.4}$$

elde edilir.

$$T'_\alpha\perp B_\alpha \text{ ve } T'_\alpha\perp N_\beta$$

olduğundan

$$\left\langle T'_\alpha, N_\beta\right\rangle_L=0$$

yazılabilir. Buna göre (3.4) ile verilen denklem N_β ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\alpha{}', N_\beta\right\rangle_L=\left\langle T_\beta, N_\beta\right\rangle_L\lambda\kappa'_\beta+(\kappa_\beta+\lambda\kappa_\beta{}^2-\lambda\tau_\beta{}^2)\left\langle N_\beta, N_\beta\right\rangle_L+\lambda\tau'_\beta\left\langle B_\beta, N_\beta\right\rangle_L$$

$$\kappa_\beta + \lambda\kappa_\beta{}^2 - \lambda\tau_\beta{}^2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\kappa_\beta = -\lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right) \qquad \textbf{(3.5)}$$

yazılabilir.

Teorem 3.1.2 E^3'te $\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. Eğriliği κ_α ve burulması τ_α olan $\alpha(s)$ eğrisinin β'nın Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bazı λ sabitleri için $\tau'_\alpha = \frac{d\tau_\alpha}{ds} = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$ denkleminin sağlanmasıdır [6].

İspat

$\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. O zaman $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliği yazılabilir. Buradan, $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda B_\alpha{}'\left(s^*\right)$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha - \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s) \qquad \textbf{(3.6)}$$

olur.

$$T_\beta = T_\alpha \cosh\theta + N_\alpha \sinh\theta \qquad \textbf{(3.7)}$$

olmak üzere (3.7) eşitliğinin her iki tarafı T_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha\right\rangle_L = \cosh\theta\left\langle T_\alpha, T_\alpha\right\rangle_L + \sinh\theta\left\langle N_\alpha, T_\alpha\right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha\right\rangle_L = -\cosh\theta$$

elde edilir.

Aynı zamanda (3.7) eşitliğinin her iki tarafı N_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, N_\alpha\right\rangle_L = \cosh\theta\left\langle T_\alpha, N_\alpha\right\rangle_L + \sinh\theta\left\langle N_\alpha, N_\alpha\right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, N_\alpha\right\rangle_L = \sinh\theta$$

bulunur. Buradan

$$-\cosh\theta = \lambda\tau_\alpha \sinh\theta$$

$$\lambda\tau_\alpha = sabit$$

elde edilir. Böylece λ ’nın sıfırdan farklı sabit bir sayı olduğu bulunur.

(3.7) eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta{}' = T_\alpha{}' \cosh\theta + T_\alpha(\cosh\theta)' + N_\alpha{}' \sinh\theta + N_\alpha(\sinh\theta)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta = \kappa_\alpha N_\alpha \cosh\theta + T_\alpha(\theta'\sinh\theta) + (\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha)\sinh\theta + (\theta'\cosh\theta)N_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta = (\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta T_\alpha + (\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta N_\alpha + \tau_\alpha \sinh\theta B_\alpha$$

olur. Buradan

$$(\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta = 0 \text{ ve } (\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta = 0$$

ve

$$(\kappa_\alpha + \theta') = 0$$

elde edilir. O halde

$$\theta' = -\kappa_\alpha \qquad \textbf{(3.8)}$$

bulunur.

(3.6) denklemi $T_\beta = T_\alpha \dfrac{ds}{ds^*} - \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s)\dfrac{ds}{ds^*}$ şeklinde yazılırsa ve (3.7) denklemi ile eşlenirse

$$\frac{ds}{ds^*} = \cosh\theta$$

olur. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta} \qquad \textbf{(3.9)}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$-\lambda\tau_\alpha \frac{ds}{ds^*} = \sinh\theta$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = -\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta} \qquad \textbf{(3.10)}$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) eşitliklerinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta} = -\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta}$$

yazılabilir. Buradan

$$\lambda\tau_\alpha = -\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

olur. O halde

$$\lambda\tau_\alpha = -\tanh\theta \qquad \textbf{(3.11)}$$

elde edilir.

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\lambda\tau_\alpha{}' = -\theta'\left(1-\tan^2 h\theta\right)$$

bulunur. Burada (3.8) ve (3.11) eşitliklerini yerlerine yazılırsa

$$\lambda\tau_\alpha{}' = -(-\kappa_\alpha)\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\tau_\alpha{}' = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right) \qquad \textbf{(3.12)}$$

bulunur.

Ayrıca (3.6) eşitliğinin iki kez türevi alınarak Mannheim eğrileri ve Mannheim eğri çiftleri bulunabilir.

$$T_\beta{}'\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = T_\alpha{}' - \lambda\tau_\alpha{}'N_\alpha(s) - \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = \kappa_\alpha N_\alpha(s) - \lambda\tau_\alpha{}'N_\alpha(s) - \lambda\tau_\alpha\left(\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = -\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha T_\alpha + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}'\right)N_\alpha(s) - \lambda\tau_\alpha{}^2B_\alpha \qquad \textbf{(3.13)}$$

elde edilir. (3.6) ve (3.13) ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta N_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 + \left(T_\beta \wedge_L T_\beta\right)\frac{d^2s^*}{ds^2}\frac{ds^*}{ds} = &-\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}'\right)\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)\\ &-\lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L B_\alpha\right) + \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)\\ &+\left(-\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha + \lambda^2\tau_\alpha\tau_\alpha{}'\right)\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)\\ &+\left(N_\alpha \wedge_L B_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha{}^3\end{aligned}$$

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = -\lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\right)B_\alpha$$

bulunur.

$$\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha = 0$$

olduğundan

$$\kappa_\beta B_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = -\lambda^2\tau_\alpha{}^3 T_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}^2 N_\alpha \qquad \textbf{(3.14)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.6) ve (3.14) eşitlikleriyle verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta B_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = -\lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right) + \lambda^3\tau_\alpha{}^4\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)$$

$$-\lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$

$$-\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha - \lambda^3\tau_\alpha{}^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = -\lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha + \lambda^3\tau_\alpha{}^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = -\lambda\tau_\alpha{}^2\left(1 - \lambda_\alpha{}^2\tau_\alpha{}^2\right) B_\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak B_α ile N_β lineer bağımlı olur. Bundan dolayı $\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ Mannheim eğri çifti olur.

Sonuç 3.1.1

$$\tau_\alpha' = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1 - \lambda^2\tau_\alpha^2\right)$$

olmak üzere buradan

$$\int \tau_\alpha' = \frac{1}{\lambda}\int \kappa_\alpha\left(1 - \lambda^2\tau_\alpha\right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda}\int (-\theta')\left(1 - \tanh^2\theta\right)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\tanh\left(\int \kappa_\alpha d_\alpha + c_0\right)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden herhangi bir Mannheim eğrisi için tek bir Mannheim eğri çifti vardır [6].

Önerme 3.1.1 $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Minkowski uzayında s^* yay parametresi boyunca Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ eğrisi de s yay parametresi boyunca Mannheim eğri çifti olsun. $\beta(s^*)$ genelleştirilmiş bir helis ise o zaman $\alpha(s)$ bir doğru olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerinin tanımından

$$\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0, \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

eşitlikleri u sabit vektörü için elde edilir. Bu durumda $\tau_\alpha = 0$ ve $\kappa_\alpha = 0$ olur. $\langle T_\beta, u\rangle_L = sbt$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa_\beta \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

olur. Buradan $\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$ ve $\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0$ türevi alınırsa $\tau_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L = 0$ elde edilir. u oskülatör düzlemdedir. $\tau_\alpha = 0$ olur. (3.12) eşitliğinde $\tau_\alpha = 0$ değeri yerine yazılırsa $\kappa_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ bir doğrudur.

Önerme 3.1.2 Genelleştirilmiş helis, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\beta(s^*)$ eğrisinin Mannheim eğri çifti ise

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{c_2}{2} e^{c_1 s} - \frac{1}{2c_2} e^{-c_1 s}$$

s yay paremetresi olmak üzere, özel olarak $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ için

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \sinh s$$

elde edilir [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerin tanımından

$$\langle N_\alpha, u\rangle_L = \cos\theta \qquad \textbf{(3.15)}$$

elde edilir. Önerme 3.1'den $\cos\theta \neq 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit değildir.

(3.15) eşitliğinin s değişkenine göre iki kez türevi alınırsa

$$\tau_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle_L + \kappa_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle_L = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\langle T_\alpha , u\rangle_L = -\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\langle B_\alpha , u\rangle_L \tag{3.16}$$

bulunur.

(3.16) denkleminin türevi alınırsa

$$\kappa_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle_L = -\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\langle B_\alpha , u\rangle_L + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle_L$$

olur. Bulunan bu denklem düzenlenirse

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\langle B_\alpha , u\rangle_L = -\kappa_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle_L + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle_L$$

elde edilir.

$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\langle B_\alpha , u\rangle_L = \frac{-\kappa_\alpha{}^2 + \tau_\alpha{}^2}{\kappa_\alpha}\langle N_\alpha , u\rangle_L$ denkleminde $\left(-\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2\right)$ yerine (3.5) eşitliği kullanılarak

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\langle B_\alpha , u\rangle_L = \frac{\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}}{\kappa_\alpha}\langle N_\alpha , u\rangle_L$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'\langle B_\alpha , u\rangle_L = \frac{1}{\lambda}\langle N_\alpha , u\rangle_L \tag{3.17}$$

bulunur. Buradan

$$\langle B_\alpha , u\rangle_L = \frac{1}{\lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\langle N_\alpha , u\rangle_L$$

bulunur.

$$\langle T_\alpha , u\rangle_L = -\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\langle B_\alpha , u\rangle = -\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\frac{1}{\lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\langle N_\alpha , u\rangle_L$$

$$\langle T_\alpha , u\rangle_L = -\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha \lambda \left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'} \langle N_\alpha , u\rangle_L$$

olur.

(3.17) denkleminin türevini alınırsa

$$\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}\langle B_\alpha , u\rangle_L - \tau_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle_L \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds} = \frac{1}{\lambda}\left(\kappa_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle_L + \tau_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle_L\right) \quad \textbf{(3.18)}$$

elde edilir.

$$\kappa_\alpha \langle T_\alpha , u\rangle + \tau_\alpha \langle B_\alpha , u\rangle = 0$$

olduğundan (3.18) denklemini düzenlenirse

$$\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}\frac{1}{\lambda \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}}\langle N_\alpha , u\rangle_L = \tau_\alpha \langle N_\alpha , u\rangle_L \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}$$

bulunur. Buradan

$$\tau_\alpha = \frac{\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\lambda \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} \quad \textbf{(3.19)}$$

elde edilir. (3.5) denklemi kullanılarak

$$\kappa_\alpha - \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha} = -\frac{1}{\lambda}$$

yazılabilir. Böylece

$$\kappa_\alpha = -\frac{1}{\lambda} + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha$$

olur. Burada (3.19) eşitliği yerine yazılırsa

$$\kappa_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{\tau_\alpha \dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right) \tag{3.20}$$

elde edilir.

(3.19) ve (3.20) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}{-\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{\tau_\alpha \dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right)} = -\frac{\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}{\dfrac{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}-\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = -\frac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2-\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}$$

elde edilir.

Eğer $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = y(s)$ denirse, o zaman

$$\left(1-y^2\right)\frac{d^2y}{ds^2} + y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

denklemi elde edilir.

$$\frac{dy}{ds} = p, \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{ds} = p\frac{dp}{dy}$$

ifadeleri, bu denklemde yerlerine yazılırsa

$$\left(1-y^2\right)p\frac{dp}{dy} + yp^2 = 0$$

olur. Bu denklem çözülürse

$$\left(1-y^2\right)\frac{dp}{dy} = -yp$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{y}{1-y^2}dy$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{y}{1-y^2}dy$$

$$\ln p = \frac{1}{2}\ln\left|1-y^2\right| + \ln c_1$$

$$p = c_1\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{ds} = c_1\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{dy}{\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int c_1 ds$$

$$\arcsin(y) = c_1 s + c_2$$

olur.

3.2 α Asli Normali Timelike Olan Spacelike Bir Eğri, β Asli Normali Spacelike Olan Timelike Bir Eğri Olma Durumu

Teorem 3.2.1 Minkowski uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulmasının $\kappa_\beta = -\lambda\left(\kappa_\beta^2 - \tau_\beta^2\right)$ denklemini sağlamasıdır. Burada λ sabittir [6].

İspat

3-Boyutlu Minkowski uzayında bir Mannheim eğrisi $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ olsun. Buna göre $\alpha(s) = \beta\left(s^*\right) + \lambda\left(s^*\right)N_\beta\left(s^*\right)$ yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının s değişkenine göre türevini alınırsa

$$\alpha'(s) = T_\beta + \lambda' N_\beta\left(s^*\right) + \lambda\kappa_\beta T_\beta\left(s^*\right) + \lambda\tau_\beta B_\beta\left(s^*\right)$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\alpha'(s) = \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta\left(s^*\right) + \lambda' N_\beta\left(s^*\right) + \lambda\tau_\beta B_\beta\left(s^*\right)$$

bulunur.

$$\alpha'(s) \perp B_\alpha \text{ ve } \alpha'(s) \perp N_\beta$$

lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle \alpha'(s), N_\beta\left(s^*\right)\right\rangle_L = 0$$

bulunur.

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda' = sabit$$

elde edilir. (3.1) denkleminde (3.2) eşitliği yerine yazılırsa

$$\alpha'\left(s^*\right) = \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta$$

$$T_\alpha = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \left[\left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{ds^*}{ds}$$

$$T'_\alpha = \left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)T'_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta B'_\beta\right]\frac{ds^*}{ds} + \left[\left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = \left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)\kappa_\beta N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta\left(-\tau_\beta N_\beta\right)\right]\frac{ds^*}{ds} + \left[\left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

elde edilir.

$$T'_\alpha \perp B_\alpha \text{ ve } T'_\alpha \perp N_\beta$$

olduğundan

$$\left\langle T_\alpha', N_\beta \right\rangle_L = 0$$

yazılabilir. Buna göre (3.4) ile verilen denklem N_β ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\alpha{}', N_\beta \right\rangle_L = \left\langle T_\beta, N_\beta \right\rangle_L \lambda\kappa_\beta' + \left(\kappa_\beta + \lambda\kappa_\beta{}^2 - \lambda\tau_\beta{}^2\right)\left\langle N_\beta, N_\beta \right\rangle_L + \lambda\tau_\beta' \left\langle B_\beta, N_\beta \right\rangle_L$$

$$\kappa_\beta + \lambda\kappa_\beta{}^2 - \lambda\tau_\beta{}^2 = 0$$

bulunur.

$$\kappa_\beta + \lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right) = 0$$

elde edilir.

$$\kappa_\beta = -\lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right)$$

veya

$$\kappa_\beta = \lambda\left(\tau_\beta{}^2 - \kappa_\beta{}^2\right)$$

bulunur.

Teorem 3.2.2 E^3'te $\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. Eğriliği κ_α ve burulması τ_α olan $\alpha(s)$ eğrisinin β'nın Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bazı λ sabitleri için $\tau_\alpha' = \frac{d\tau_\alpha}{ds} = -\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1 - \lambda^2\tau_\alpha^2\right)$ denkleminin sağlanmasıdır [6].

İspat

$\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. O zaman $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliği yazılabilir. Buradan, $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda B_\alpha{}'(s)$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s) \tag{3.21}$$

olur.

(3.7) eşitliğinde her iki taraf T_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta \left\langle T_\alpha, T_\alpha \right\rangle_L + \sinh\theta \left\langle N_\alpha, T_\alpha \right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta$$

bulunur. (3.7) eşitliğinin her iki tarafı N_α ile iç çarpılırsa

$$\langle T_\beta, N_\alpha \rangle_L = \cosh\theta \langle T_\alpha, N_\alpha \rangle_L + \sinh\theta \langle N_\alpha, N_\alpha \rangle_L$$

$$\langle T_\beta, N_\alpha \rangle_L = -\sinh\theta$$

bulunur.

$$-\cosh\theta = \lambda\tau_\alpha \sinh\theta$$

$$\lambda\tau_\alpha = sabit$$

elde edilir. Buradan λ 'nın sıfırdan farklı sabit bir sayı olduğu bulunur.

(3.7) eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta = T_\alpha{}' \cosh\theta + T_\alpha(\cosh\theta)' + N_\alpha{}' \sinh\theta + N_\alpha(\sinh\theta)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta = \kappa_\alpha N_\alpha \cosh\theta + T_\alpha(\theta' \sinh\theta) + (\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha)\sinh\theta + (\theta' \cosh\theta) N_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta = (\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta T_\alpha + (\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta N_\alpha + \tau_\alpha \sinh\theta B_\alpha$$

$$(\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta = 0$$

ve

$$(\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta = 0$$

bulunur. Böylece

$$\theta' = -\kappa_\alpha$$

elde edilir.

(3.21) denklemini $T_\beta = T_\alpha \dfrac{ds}{ds^*} + \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s^*)\dfrac{ds}{ds^*}$ şeklinde yazıp ve (3.10) denklemi ile eşlenirse

$$\frac{ds}{ds^*} = \cosh\theta$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta}$$

bulunur. Ayrıca

$$\lambda\tau_\alpha \frac{ds}{ds^*} = \sinh\theta$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{ds^*}{ds}=\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta} \tag{3.22}$$

bulunur. (3.9) ve (3.22) eşitliklerinden

$$\frac{ds^*}{ds}=\frac{1}{\cosh\theta}=\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta}$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda\tau_\alpha=\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$\lambda\tau_\alpha=\tanh\theta \tag{3.23}$$

olur. (3.23) Eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\lambda\tau_\alpha{}'=\theta'\left(1-\tan^2 h\theta\right)$$

elde edilir. Burada (3.8) ve (3.27) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\lambda\tau_\alpha{}'=\left(-\kappa_\alpha\right)\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$$

bulunur. Buradan

$$\tau_\alpha{}'=-\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right) \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.21) denkleminin iki kez türevi alınarak Mannheim eğrileri ve Mannheim eğri çiftleri bulunabilir.

$$T_\beta{}'\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2+T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2}=T_\alpha{}'+\lambda\tau_\alpha{}'N_\alpha\left(s^*\right)+\lambda\tau_\alpha N_\alpha\left(s^*\right)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2+T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2}=\kappa_\alpha N_\alpha\left(s^*\right)+\lambda\tau_\alpha{}'N_\alpha\left(s^*\right)+\lambda\tau_\alpha\left(\kappa_\alpha T_\alpha+\tau_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2+T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2}=\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha T_\alpha+\left(\kappa_\alpha+\lambda\tau_\alpha{}'\right)N_\alpha\left(s^*\right)+\lambda\tau_\alpha{}^2B_\alpha \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.21) ve (3.25) eşitlikleri ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta N_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 + \left(T_\beta \wedge_L T_\beta\right)\frac{d^2 s^*}{ds^2}\frac{ds^*}{ds} = \lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}'\right)\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$
$$+\lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L B_\alpha\right) + \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)$$
$$+\left(\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha + \lambda^2\tau_\alpha\tau_\alpha{}'\right)\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$
$$+\left(N_\alpha \wedge_L B_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha{}^3$$

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3 T_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}^2 N_\alpha + \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\right)B_\alpha$$

olur. Burada

$$\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha = 0$$

olduğundan

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3 T_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}^2 N_\alpha \qquad \textbf{(3.26)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.21) ve (3.26) eşitlikleri ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta B_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right) + \lambda^3\tau_\alpha{}^4\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)$$
$$+\lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$

$$-\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha - \lambda^3\tau_\alpha{}^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = -\lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha + \lambda^3\tau_\alpha{}^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = -\lambda\tau_\alpha{}^2\left(1 - \lambda_\alpha{}^2\tau_\alpha{}^2\right)B_\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak B_α ile N_β lineer bağımlı olur. Bundan dolayı $\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ Mannheim eğri çifti olur.

Sonuç 3.2.1

$$\tau'_\alpha = -\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$$

ifadesi olmak üzere buradan

$$\int \tau'_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\int \kappa_\alpha\left(1-\lambda^2\tau_\alpha\right)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\int(-\theta')\left(1-\tanh^2\theta\right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda}\tanh\left(\int \kappa_\alpha d_\alpha + c_0\right)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden herhangi bir Mannheim eğrisi için tek bir Mannheim eğri çifti vardır [6].

Önerme 3.2.1 $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Minkowski uzayında s^* yay parametresi boyunca Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ s yay parametresi boyunca Mannheim eğri çifti olsun. $\beta(s^*)$ genelleştirilmiş bir helis ise o zaman $\alpha(s)$ bir doğru olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerinin tanımından

$$\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0, \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

eşitlikleri u sabit vektörü için elde edilir. Bu durumda $\tau_\alpha = 0$ ve $\kappa_\alpha = 0$ olur. $\langle T_\beta, u\rangle_L = sbt$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa_\beta\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

olur. Buradan $\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$ ve $\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0$ türevi alınırsa $\tau_\alpha\langle N_\alpha, u\rangle_L = 0$ olur.

u oskülatör düzlemdedir. $\tau_\alpha = 0$ olur. (3.24) eşitliğinde $\tau_\alpha = 0$ değeri yerine yazılırsa $\kappa_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ bir doğrudur.

3.3 α Asli Normali Spacelike Olan Spacelike Bir Eğri, β Asli Normali Timelike Olan Spacelike Bir Eğri Olma Durumu

Teorem 3.3.1 Minkowski uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulmasının $\kappa_\beta = -\lambda\left(\kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2\right)$ denklemini sağlamasıdır. Burada λ sabittir [6].

İspat

3-Boyutlu Minkowski uzayında bir Mannheim eğrisi $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ olsun. Buna göre $\alpha(s) = \beta\left(s^*\right) + \lambda\left(s^*\right) N_\beta\left(s^*\right)$ yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının s değişkenine göre türevini alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'\left(s^*\right) + \lambda' N_\beta\left(s^*\right) + \lambda N_\beta{}'\left(s^*\right)$$

$$\alpha'(s) = T_\beta + \lambda' N_\beta\left(s^*\right) + \lambda\kappa_\beta T_\beta\left(s^*\right) + \lambda\tau_\beta B_\beta\left(s^*\right)$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\alpha'(s) = \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right) T_\beta\left(s^*\right) + \lambda' N_\beta\left(s^*\right) + \lambda\tau_\beta B_\beta\left(s^*\right)$$

bulunur.

$$\alpha'(s) \perp B_\alpha \text{ ve } \alpha'(s) \perp N_\beta$$

lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle \alpha'(s), N_\beta\left(s^*\right)\right\rangle_L = 0$$

bulunur.

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda' = sabit$$

elde edilir. (3.1) denkleminde (3.2) eşitliği yerine yazılırsa

$$\alpha'(s) = \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right) T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta$$

$$T_\alpha = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \left[\left(1 + \lambda\kappa_\beta\right) T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{ds^*}{ds}$$

$$T'_\alpha = \left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right) T'_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta B'_\beta\right]\frac{ds^*}{ds} + \left[\left(1 + \lambda\kappa_\beta\right) T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = \left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(1 + \lambda\kappa_\beta\right)\kappa_\beta N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta\left(\tau_\beta N_\beta\right)\right]\frac{ds^*}{ds} + \left[\left(1 + \lambda\kappa_\beta\right) T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = \left[\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(\kappa_\beta + \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2\right)N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta\right]\frac{ds^*}{ds}$$
$$+\left[\left(1+\lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2s^*}{ds^2} \tag{3.27}$$

elde edilir.

$$T'_\alpha \perp B_\alpha \text{ ve } T'_\alpha \perp N_\beta$$

olduğundan

$$\left\langle T'_\alpha, N_\beta \right\rangle_L = 0$$

yazılabilir. Buna göre (3.27) ile verilen denklem N_β ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\alpha{}', N_\beta \right\rangle_L = \lambda\kappa'_\beta \left\langle T_\beta, N_\beta \right\rangle_L + \left(\kappa_\beta + \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2\right)\left\langle N_\beta, N_\beta \right\rangle_L + \lambda\tau'_\beta \left\langle B_\beta, N_\beta \right\rangle_L$$

$$\kappa_\beta + \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2 = 0$$

bulunur. Böylece

$$\kappa_\beta = -\lambda\left(\kappa_\beta{}^2 + \tau_\beta{}^2\right) \tag{3.28}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.2 E^3'te $\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. Eğriliği κ_α ve burulması τ_α olan $\alpha(s)$ eğrisinin β'nın Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bazı λ sabitleri için $\tau'_\alpha = \dfrac{d\tau_\alpha}{ds} = -\dfrac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$ denkleminin sağlanmasıdır [6].

İspat

$\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. O zaman $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliği yazılabilir. Buradan, $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda B_\alpha{}'(s)$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s)$$

olur. Ayrıca

$$T_\beta = T_\alpha \cos\theta + N_\alpha \sin\theta \qquad \textbf{(3.29)}$$

yazılabilir. (3.29) eşitliğinde her iki taraf T_α ile iç çarpılırsa

$$\langle T_\beta, T_\alpha \rangle_L = \cos\theta \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle_L + \sin\theta \langle N_\alpha, T_\alpha \rangle_L$$

$$\langle T_\beta, T_\alpha \rangle_L = \cos\theta$$

bulunur. (3.29) denklemi N_α ile iç çarpılırsa

$$\langle T_\beta, N_\alpha \rangle_L = \cos\theta \langle T_\alpha, N_\alpha \rangle_L + \sin\theta \langle N_\alpha, N_\alpha \rangle_L$$

$$\langle T_\beta, N_\alpha \rangle_L = \sin\theta$$

bulunur. Buradan

$$\cosh\theta = \lambda \tau_\alpha \sinh\theta$$

$$\lambda \tau_\alpha = sabit$$

elde edilir. Böylece λ'nın sıfırdan farklı sabit bir sayı olduğu bulunur. (3.29) eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta{}' = T_\alpha{}' \cos\theta + T_\alpha (\cos\theta)' + N_\alpha{}' \sin\theta + N_\alpha (\sin\theta)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta = \kappa_\alpha N_\alpha \cos\theta + T_\alpha(-\theta' \sin\theta) + (-\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha)\sin\theta + (\theta' \cos\theta) N_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta = (-\kappa_\alpha - \theta')\sin\theta T_\alpha + (\kappa_\alpha + \theta')\cos\theta N_\alpha + \tau_\alpha \sin\theta B_\alpha$$

$$(-\kappa_\alpha - \theta')\sin\theta = 0$$

ve

$$(\kappa_\alpha + \theta')\cos\theta = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\theta' = -\kappa_\alpha$$

bulunur. (3.21) denklemini $T_\beta = T_\alpha \dfrac{ds}{ds^*} + \lambda \tau_\alpha N_\alpha (s^*) \dfrac{ds}{ds^*}$ şeklinde yazıp ve (3.29) denklemi ile eşlenirse

$$\frac{ds}{ds^*} = \cos\theta$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cos\theta}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\lambda\tau_\alpha \frac{ds}{ds^*} = \sin\theta$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda\tau_\alpha}{\sin\theta}$$

elde edilir. Bu ifadelerin eşitliğinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\lambda\tau_\alpha}{\sin\theta}$$

yazılabilir.

$$\lambda\tau_\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\lambda\tau_\alpha = \tan\theta \qquad \textbf{(3.30)}$$

elde edilir. (3.30) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa $\lambda\tau_\alpha{}' = \theta'\left(1+\tan^2\theta\right)$ elde edilir. Burada (3.8) ve (3.30) eşitlikleri yerlerine yazılırsa $\lambda\tau_\alpha{}' = \left(-\kappa_\alpha\right)\left(1+\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$ şeklinde olur. Buradan

$$\tau_\alpha{}' = -\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right) \qquad \textbf{(3.31)}$$

bulunur.

Ayrıca (3.21) denkleminin iki kez türevi alınarak Mannheim eğrileri ve Mannheim eğri çiftleri bulunabilir.

$$T_\beta{}'\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta \frac{d^2s^*}{ds^2} = T_\alpha{}' + \lambda\tau_\alpha{}' N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha N_\alpha\left(s^*\right)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta \frac{d^2s^*}{ds^2} = \kappa_\alpha N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha{}' N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha\left(-\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta \frac{d^2s^*}{ds^2} = -\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha T_\alpha + \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}'\right)N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha \qquad \textbf{(3.32)}$$

elde edilir. (3.21) ve (3.32) eşitlikleri ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta N_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 + \left(T_\beta \wedge_L T_\beta\right)\frac{d^2s^*}{ds^2}\frac{ds^*}{ds} = -\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}'\right)\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$
$$+\lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L B_\alpha\right) - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)$$
$$+\left(\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha + \lambda^2\tau_\alpha\tau_\alpha{}'\right)\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$
$$+\left(N_\alpha \wedge_L B_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha{}^3$$

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha - \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}' + \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\right)B_\alpha$$

olur. Burada

$$\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}' + \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha = 0$$

olduğundan

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha$$

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha \qquad \textbf{(3.33)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.21) ve (3.33) ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta B_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right) + \lambda^3\tau_\alpha{}^4\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)$$
$$+\lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda\tau_\alpha{}^2B_\alpha + \lambda^3\tau_\alpha{}^4B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda\tau_\alpha{}^2B_\alpha + \lambda^3\tau_\alpha{}^4B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4 = \lambda\tau_\alpha{}^2\left(1 + \lambda_\alpha{}^2\tau_\alpha{}^2\right)B_\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak B_α ile N_β lineer bağımlı olur. Bundan dolayı $\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ Mannheim eğri çifti olur.

Sonuç 3.3.1

$$\tau'_\alpha = -\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1+\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$$

ifadesi olmak üzere, buradan

$$\int \tau'_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\int \kappa_\alpha\left(1+\lambda^2\tau_\alpha\right)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\int(-\theta')\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda}\tan\left(\int \kappa_\alpha d_\alpha + c_0\right)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden herhangi bir Mannheim eğrisi için tek bir Mannheim eğri çifti vardır [6].

Önerme 3.3.1 $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Minkowski uzayında s^* yay parametresi boyunca Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ s yay parametresi boyunca Mannheim eğri çifti olsun. $\beta(s^*)$ genelleştirilmiş bir helis ise o zaman $\alpha(s)$ bir doğru olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerinin tanımından

$$\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0, \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

eşitlikleri u sabit vektörü için elde edilir. Bu durumda $\tau_\alpha = 0$ ve $\kappa_\alpha = 0$ olur. $\langle T_\beta, u\rangle_L = sbt$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa_\beta\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

olur. Buradan $\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$ ve $\langle B_\alpha, u\rangle = 0$ eşitliklerinin türevi alınırsa $\tau_\alpha\langle N_\alpha, u\rangle_L = 0$ olur. u oskülatör düzlemdedir. $\tau_\alpha = 0$ olur. (3.21) eşitliğinde $\tau_\alpha = 0$ değeri yerine yazılırsa $\kappa_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ bir doğrudur.

3.4 α Asli Normali Timelike Olan Spacelike Bir Eğri, β Asli Normali Spacelike Olan Spacelike Bir Eğri Olma Durumu

Teorem 3.4.1 Minkowski uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulmasının $\kappa_\beta = \lambda\left(\kappa_\beta^2 - \tau_\beta^2\right)$ denklemini sağlamasıdır. Burada λ sabittir [6].

İspat

3-Boyutlu Minkowski uzayında bir Mannheim eğrisi $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ olsun. Buna göre $\alpha(s) = \beta\left(s^*\right) + \lambda\left(s^*\right)N_\beta\left(s^*\right)$ yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının s değişkenine göre türevini alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'\left(s^*\right) + \lambda' N_\beta\left(s^*\right) + \lambda N_\beta{}'\left(s^*\right)$$

denklemi düzenlenirse

$$\alpha'(s) = \left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta\left(s^*\right) + \lambda'\left(s^*\right)N_\beta\left(s^*\right) + \lambda\left(s^*\right)\tau_\beta\left(s^*\right)B_\alpha\left(s^*\right) \tag{3.34}$$

bulunur.

$$\alpha'(s) \perp B_\alpha \text{ ve } \alpha'(s) \perp N_\beta$$

lineer bağımlı olduğundan

$$\left\langle \alpha'(s), N_\beta\left(s^*\right)\right\rangle_L = 0$$

bulunur.

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda' = sabit$$

elde edilir. (3.34) denkleminde (3.2) eşitliği yerine yazılırsa

$$\alpha'(s) = \left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta\left(s^*\right) + \lambda\tau_\beta B_\beta\left(s^*\right)$$

$$T_\alpha = \frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{d\alpha(s)}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \left[\left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta(s)\right]\frac{ds^*}{ds}$$

$$T'_\alpha = \left[-\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)T'_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta B'_\beta\right]\frac{ds^*}{ds} + \left[\left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = \left[-\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)\kappa_\beta N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta\left(\tau_\beta N_\beta\right)\right]\frac{ds^*}{ds} + \left[\left(1 - \lambda\kappa_\beta\right)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta\right]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = \left[-\lambda\kappa'_\beta T_\beta + \left(\kappa_\beta - \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2\right) N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta \right] \frac{ds^*}{ds}$$
$$+ \left[\left(1 - \lambda\kappa_\beta\right) T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta \right] \frac{d^2 s^*}{ds^2} \qquad \textbf{(3.35)}$$

elde edilir.

$$T'_\alpha \perp B_\alpha \text{ ve } T'_\alpha \perp N_\beta$$

olduğundan

$$\left\langle T'_\alpha, N_\beta \right\rangle_L = 0$$

yazılabilir. Buna göre (3.35) eşitliği ile verilen denklem N_β ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\alpha{}', N_\beta \right\rangle_L = -\lambda\kappa'_\beta \left\langle T_\beta, N_\beta \right\rangle_L + \left(\kappa_\beta - \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2\right) \left\langle N_\beta, N_\beta \right\rangle_L + \lambda\tau'_\beta \left\langle B_\beta, N_\beta \right\rangle_L$$

$$\kappa_\beta - \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\kappa_\beta - \lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\kappa_\beta = \lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right) \qquad \textbf{(3.36)}$$

yazılabilir.

Teorem 3.4.2 E^3'te $\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. Eğriliği κ_α ve burulması τ_α olan $\alpha(s)$ eğrisinin β'nın Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bazı λ sabitleri için $\tau'_\alpha = \frac{d\tau_\alpha}{ds} = -\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1 - \lambda^2\tau_\alpha^2\right)$ denkleminin sağlanmasıdır [6].

İspat

$\beta(s^*)$ Mannheim eğrisi olsun. O zaman $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliği yazılabilir. Buradan, $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda B_\alpha{}'(s)$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s)$$

olur.

Ayrıca (3.7) eşitliğinde her iki taraf T_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta \left\langle T_\alpha, T_\alpha \right\rangle_L + \sinh\theta \left\langle N_\alpha, T_\alpha \right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta$$

bulunur. Benzer şekilde (3.7) denklemi N_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, N_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta \left\langle T_\alpha, N_\alpha \right\rangle_L + \sinh\theta \left\langle N_\alpha, N_\alpha \right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, N_\alpha \right\rangle_L = -\sinh\theta$$

bulunur. Buradan da

$$-\cosh\theta = \lambda\tau_\alpha \sinh\theta$$

$$\lambda\tau_\alpha = sabit$$

elde edilir. Böylece λ 'nın sıfırdan farklı sabit bir sayı olduğu bulunur.

(3.7) eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta = T_\alpha{}' \cosh\theta + T_\alpha(\cosh\theta)' + N_\alpha{}' \sinh\theta + N_\alpha(\sinh\theta)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta = \kappa_\alpha N_\alpha \cosh\theta + T_\alpha(\theta' \sinh\theta) + (\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha)\sinh\theta + (\theta' \cosh\theta)N_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta = (\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta T_\alpha + (\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta N_\alpha + \tau_\alpha \sinh\theta B_\alpha$$

$$(\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta = 0$$

ve

$$(\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta = 0$$

Bulunur. Buradan

$$\theta' = -\kappa_\alpha$$

elde edilir. (3.21) denklemini $T_\beta = T_\alpha \dfrac{ds}{ds^*} + \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s^*)\dfrac{ds}{ds^*}$ şeklinde yazıp ve (3.7) denklemi ile eşlenirse

$$\frac{ds}{ds^*} = \cosh\theta$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta}$$

bulunur. Ayrıca

$$\lambda\tau_\alpha \frac{ds}{ds^*} = \sinh\theta$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta}$$

elde edilir. Bulunan ifadelerinin eşitliğinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta} = \frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta}$$

yazılabilir. Böylece

$$\lambda\tau_\alpha = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$\lambda\tau_\alpha = \tanh\theta$$

elde edilir. (3.23) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa $\lambda\tau_\alpha{}' = \theta'\left(1-\tan^2 h\theta\right)$ elde edilir. Burada (3.8) ve (3.23) eşitlikleri yerlerine yazılırsa $\lambda\tau_\alpha{}' = \left(-\kappa_\alpha\right)\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$ şeklinde olur. Buradan

$$\tau_\alpha{}' = -\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$$

elde edilir. (3.21) ile verilen denklemin iki kez türevi alınarak Mannheim eğrileri ve Mannheim eğri çiftleri bulunabilir.

$$T_\beta{}'\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta \frac{d^2s^*}{ds^2} = T_\alpha{}' + \lambda\tau_\alpha{}' N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha N_\alpha\left(s^*\right)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta \frac{d^2s^*}{ds^2} = \kappa_\alpha N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha{}' N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha\left(\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta \frac{d^2s^*}{ds^2} = \lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha T_\alpha + \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}'\right)N_\alpha\left(s^*\right) + \lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha$$

elde edilir. (3.21) ve (3.25) eşitlikleri ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta N_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 + \left(T_\beta \wedge_L T_\beta\right)\frac{d^2s^*}{ds^2}\frac{ds^*}{ds} &= \lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \left(\kappa_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}'\right)\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)\\ &+ \lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L B_\alpha\right) + \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right)\\ &+ \left(\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha + \lambda^2\tau_\alpha\tau_\alpha{}'\right)\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right)\\ &+ \left(N_\alpha \wedge_L B_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha{}^3\end{aligned}$$

$$-\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3=\lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha+\lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha+\left(\kappa_\alpha+\lambda\tau_\alpha{}'-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\right)B_\alpha$$

bulunur. Burada

$$\kappa_\alpha+\lambda\tau_\alpha{}'-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha=0$$

olduğundan

$$-\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3=\lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha+\lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha$$

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3=-\lambda^2\tau_\alpha{}^3T_\alpha-\lambda\tau_\alpha{}^2N_\alpha \qquad \textbf{(3.37)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.21) ve (3.37) eşitlikleri ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left(T_\beta\wedge_L\kappa_\beta B_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4=&\ \lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(T_\alpha\wedge_L T_\alpha\right)+\lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha\wedge_L N_\alpha\right)+\lambda^3\tau_\alpha{}^4\left(N_\alpha\wedge_L T_\alpha\right)\\&+\lambda^2\tau_\alpha{}^3\left(N_\alpha\wedge_L N_\alpha\right)\end{aligned}$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4=\lambda\tau_\alpha{}^2B_\alpha-\lambda^3\tau_\alpha{}^4B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4=\lambda\tau_\alpha{}^2B_\alpha-\lambda^3\tau_\alpha{}^4B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^4=\lambda\tau_\alpha{}^2\left(1-\lambda_\alpha{}^2\tau_\alpha{}^2\right)B_\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak B_α ile N_β lineer bağımlı olur. Bundan dolayı $\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ Mannheim eğri çifti olur.

Sonuç 3.4.1

$$\tau'_\alpha=-\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha^2\right)$$

ifadesi olmak üzere

$$\int\tau'_\alpha=-\frac{1}{\lambda}\int\kappa_\alpha\left(1-\lambda^2\tau_\alpha\right)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{\lambda}\int(-\theta')(1-\tanh^2\theta)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda}\tanh\left(\int \kappa_\alpha d_\alpha + c_0\right)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden herhangi bir Mannheim eğrisi için tek bir Mannheim eğri çifti vardır [6].

Önerme 3.4.1 $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Minkowski uzayında s^* yay parametresi boyunca Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$ s yay parametresi boyunca Mannheim eğri çifti olsun. $\beta(s^*)$ genelleştirilmiş bir helis ise o zaman $\alpha(s)$ bir doğru olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerinin tanımından

$$\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0, \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

eşitlikleri u sabit vektörü için elde edilir. Bu durumda $\tau_\alpha = 0$ ve $\kappa_\alpha = 0$ olur. $\langle T_\beta, u\rangle_L = sbt$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa_\beta \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

olur. Buradan $\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$ ve $\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0$ türevi alınırsa $-\tau_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L = 0$ olur. u oskülatör düzlemdedir. $\tau_\alpha = 0$ olur. (3.24) eşitliğinde $\tau_\alpha = 0$ değeri yerine yazılırsa $\kappa_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ bir doğrudur.

3.5 α Asli Normali Spacelike Olan Timelike Bir Eğri, β Asli Normali Spacelike Olan Spacelike Bir Eğri Olma Durumu

Teorem 3.5.1 Minkowski uzayında bir eğrinin Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin, eğrilik ve burulmasının $\kappa_\beta = \lambda(\kappa_\beta^2 - \tau_\beta^2)$ denklemini sağlamasıdır. Burada λ sabittir [6].

İspat

3-Boyutlu Minkowski uzayında bir Mannheim eğrisi $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ olsun. Buna göre $\alpha(s) = \beta(s^*) + \lambda(s^*)N_\beta(s^*)$ yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının s değişkenine göre türevini alınırsa

$$\alpha'(s) = \beta'(s^*) + \lambda' N_\beta(s^*) + \lambda N_\beta{}'(s^*)$$

$$\alpha'(s) = T_\beta + \lambda' N_\beta(s^*) - \lambda\kappa_\beta T_\beta(s^*) + \lambda\tau_\beta B_\beta(s^*)$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\alpha'(s) = (1 - \lambda\kappa_\beta)T_\beta(s^*) + \lambda' N_\beta(s^*) + \lambda\tau_\beta B(s^*)_\beta$$

bulunur.

$$\alpha'(s) \perp B_\alpha \text{ ve } \alpha'(s) \perp N_\beta$$

lineer bağımlı olduğundan

$$\langle \alpha'(s), N_\beta(s^*) \rangle_L = 0$$

bulunur. Böylece

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda' = sabit$$

elde edilir. (3.34) denkleminde (3.2) eşitliği yerine yazılırsa

$$\alpha'(s) = (1 - \lambda\kappa_\beta)T_\beta(s^*) + \lambda\tau_\beta B_\beta(s^*)$$

$$T_\alpha = \frac{d\alpha(s^*)}{ds^*} = \frac{d\alpha(s^*)}{ds}\frac{ds}{ds^*} = [(1 - \lambda\kappa_\beta)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta]\frac{ds}{ds^*}$$

$$T'_\alpha = [-\lambda\kappa'_\beta T_\beta + (1 - \lambda\kappa_\beta)T'_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta B'_\beta]\frac{ds^*}{ds} + [(1 - \lambda\kappa_\beta)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = [-\lambda\kappa'_\beta T_\beta + (1 - \lambda\kappa_\beta)\kappa_\beta N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta + \lambda\tau_\beta(\tau_\beta N_\beta)]\frac{ds^*}{ds} + [(1 - \lambda\kappa_\beta)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

$$T'_\alpha = [-\lambda\kappa'_\beta T_\beta + (\kappa_\beta - \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2)N_\beta + \lambda\tau'_\beta B_\beta]\frac{ds^*}{ds} + [(1 - \lambda\kappa_\beta)T_\beta + \lambda\tau_\beta B_\beta]\frac{d^2 s^*}{ds^2}$$

elde edilir.

$$T'_\alpha \perp B_\alpha \text{ ve } T'_\alpha \perp N_\beta$$

olduğundan

$$\langle T'_\alpha, N_\beta \rangle_L = 0$$

yazılabilir. Buna göre (3.35) ile verilen denklem N_β ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\alpha{}', N_\beta \right\rangle = -\lambda\kappa'_\beta \left\langle T_\beta, N_\beta \right\rangle + \left(\kappa_\beta - \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2\right)\left\langle N_\beta, N_\beta \right\rangle + \lambda\tau'_\beta \left\langle B_\beta, N_\beta \right\rangle$$

$$\kappa_\beta - \lambda\kappa_\beta{}^2 + \lambda\tau_\beta{}^2 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\kappa_\beta - \lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right) = 0$$

veya

$$\kappa_\beta = \lambda\left(\kappa_\beta{}^2 - \tau_\beta{}^2\right)$$

yazılabilir.

Teorem 3.5.2 E^3'te $\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi olsun. Eğriliği κ_α ve burulması τ_α olan $\alpha(s)$ eğrisinin β'nın Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bazı λ sabitleri için $\tau'_\alpha = \dfrac{d\tau_\alpha}{ds} = \dfrac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1 - \lambda^2\tau_\alpha^2\right)$ denkleminin sağlanmasıdır [6].

İspat

$\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi olsun. O zaman $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliği yazılabilir. Buradan, $\beta\left(s^*\right) = \alpha(s) + \lambda B_\alpha(s)$ eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha + \lambda B_\alpha{}'\left(s^*\right)$$

$$T_\beta \frac{ds^*}{ds} = T_\alpha - \lambda\tau_\alpha N_\alpha\left(s^*\right)$$

olur.

(3.7) eşitliğinde her iki taraf T_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta \left\langle T_\alpha, T_\alpha \right\rangle_L + \sinh\theta \left\langle N_\alpha, T_\alpha \right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, T_\alpha \right\rangle_L = -\cosh\theta$$

bulunur. Benzer şekilde (3.7) eşitliği ile verilen denklem N_α ile iç çarpılırsa

$$\left\langle T_\beta, N_\alpha \right\rangle_L = \cosh\theta \left\langle T_\alpha, N_\alpha \right\rangle_L + \sinh\theta \left\langle N_\alpha, N_\alpha \right\rangle_L$$

$$\left\langle T_\beta, N_\alpha \right\rangle_L = \sinh\theta$$

olur. Ayrıca

$$-\cosh\theta = \lambda\tau_\alpha \sinh\theta$$

$$\lambda\tau_\alpha = sabit$$

elde edilir. Böylece, λ 'nın sıfırdan farklı sabit bir sayı olduğu bulunur. (3.7) eşitliğinin her iki tarafının s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$T_\beta = T_\alpha{}' \cosh\theta + T_\alpha(\cosh\theta)' + N_\alpha{}' \sinh\theta + N_\alpha(\sinh\theta)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta = \kappa_\alpha N_\alpha \cosh\theta + T_\alpha(\theta' \sinh\theta) + (\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha)\sinh\theta + (\theta' \cosh\theta)N_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta = (\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta T_\alpha + (\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta N_\alpha + \tau_\alpha \sinh\theta B_\alpha$$

$$(\kappa_\alpha + \theta')\sinh\theta = 0$$

ve

$$(\kappa_\alpha + \theta')\cosh\theta = 0$$

olduğundan

$$\theta' = -\kappa_\alpha$$

bulunur. (3.6) ile verilen denklem, $T_\beta = T_\alpha \dfrac{ds}{ds^*} - \lambda\tau_\alpha N_\alpha(s^*)\dfrac{ds}{ds^*}$ şeklinde yazılıp ve (3.7) denklemi ile eşlenirse

$$\frac{ds}{ds^*} = \cosh\theta$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta}$$

bulunur. Ayrıca

$$-\lambda\tau_\alpha \frac{ds}{ds^*} = \sinh\theta$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{ds^*}{ds} = -\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadelerinin eşitliğinden

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\cosh\theta} = -\frac{\lambda\tau_\alpha}{\sinh\theta}$$

yazılabilir. Böylece

$$\lambda\tau_\alpha = -\frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$\lambda\tau_\alpha = -\tanh\theta$$

elde edilir. (3.11) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa $\lambda\tau_\alpha{}' = -\theta'\left(1-\tan^2 h\theta\right)$ elde edilir. Burada (3.8) ve (3.11) eşitlikleri yerlerine yazılırsa $\lambda\tau_\alpha{}' = -\left(-\kappa_\alpha\right)\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$ şeklinde olur. Buradan

$$\tau_\alpha{}' = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda}\left(1-\lambda^2\tau_\alpha{}^2\right)$$

elde edilir. Ayrıca (3.6) denkleminin iki kez türevi alınarak Mannheim eğrileri ve Mannheim eğri çiftleri bulunabilir.

$$T_\beta{}'\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = T_\alpha{}' - \lambda\tau_\alpha{}' N_\alpha\left(s^*\right) - \lambda\tau_\alpha N_\alpha\left(s^*\right)'$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = \kappa_\alpha N_\alpha\left(s^*\right) - \lambda\tau_\alpha{}' N_\alpha\left(s^*\right) - \lambda\tau_\alpha\left(\kappa_\alpha T_\alpha + \tau_\alpha B_\alpha\right)$$

$$\kappa_\beta N_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 + T_\beta\frac{d^2s^*}{ds^2} = -\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha T_\alpha + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}'\right)N_\alpha\left(s^*\right) - \lambda\tau_\alpha{}^2 B_\alpha$$

elde edilir. (3.6) ve (3.13) ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned}\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta N_\beta\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 + \left(T_\beta \wedge_L T_\beta\right)\frac{d^2s^*}{ds^2}\frac{ds^*}{ds} = {} & -\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha\left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}'\right)\left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha\right) \\ & -\lambda\tau_\alpha{}^2\left(T_\alpha \wedge_L B_\alpha\right) + \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha\right) \\ & +\left(-\lambda\tau_\alpha\kappa_\alpha + \lambda^2\tau_\alpha\tau_\alpha{}'\right)\left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha\right) \\ & +\left(N_\alpha \wedge_L B_\alpha\right)\lambda^2\tau_\alpha{}^3\end{aligned}$$

$$-\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = -\lambda^2\tau_\alpha{}^3 T_\alpha + \lambda\tau_\alpha{}^2 N_\alpha + \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\right)B_\alpha$$

$$\kappa_\beta B_\beta\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^3 = \lambda^2\tau_\alpha{}^3 T_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}^2 N_\alpha - \left(\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha\right)B_\alpha$$

bulunur. Burada

$$\kappa_\alpha - \lambda\tau_\alpha{}' - \lambda^2\tau_\alpha{}^2\kappa_\alpha = 0$$

olduğundan

$$\kappa_\beta B_\beta \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^3 = \lambda^2 \tau_\alpha{}^3 T_\alpha - \lambda \tau_\alpha{}^2 N_\alpha$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.6) ve (3.33) eşitlikleri ile verilen denklemler vektörel çarpılırsa

$$\left(T_\beta \wedge_L \kappa_\beta B_\beta \right) \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^4 = \lambda^2 \tau_\alpha{}^3 \left(T_\alpha \wedge_L T_\alpha \right) - \lambda \tau_\alpha{}^2 \left(T_\alpha \wedge_L N_\alpha \right) - \lambda^3 \tau_\alpha{}^4 \left(N_\alpha \wedge_L T_\alpha \right)$$

$$+ \lambda^2 \tau_\alpha{}^3 \left(N_\alpha \wedge_L N_\alpha \right)$$

$$- \kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^4 = -\lambda \tau_\alpha{}^2 B_\alpha + \lambda^3 \tau_\alpha{}^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^4 = \lambda \tau_\alpha{}^2 B_\alpha - \lambda^3 \tau_\alpha{}^4 B_\alpha$$

$$\kappa_\beta N_\beta \left(\frac{ds^*}{ds} \right)^4 = \lambda \tau_\alpha{}^2 \left(1 - \lambda_\alpha{}^2 \tau_\alpha{}^2 \right) B_\alpha$$

bulunur. Sonuç olarak B_α ile N_β lineer bağımlı olur. Bundan dolayı $\beta\left(s^*\right)$ Mannheim eğrisi ve $\alpha\left(s\right)$’de Mannheim eğri çifti olur.

Sonuç 3.5.1

$$\tau'_\alpha = \frac{\kappa_\alpha}{\lambda} \left(1 - \lambda^2 \tau_\alpha^2 \right)$$

ifadesi olmak üzere

$$\int \tau'_\alpha = \frac{1}{\lambda} \int \kappa_\alpha \left(1 - \lambda^2 \tau_\alpha \right)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\lambda} \int \left(-\theta' \right) \left(1 - \tanh^2 \theta \right)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \tanh \left(\int \kappa_\alpha d_\alpha + c_0 \right)$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden herhangi bir Mannheim eğrisi için tek bir Mannheim eğri çifti vardır [6].

Önerme 3.5.1 $\beta(s^*)$ 3-boyutlu Minkowski uzayında s^* yay parametresi boyunca Mannheim eğrisi ve $\alpha(s)$'de s yay parametresi boyunca Mannheim eğri çifti olsun. $\beta(s^*)$ genelleştirilmiş bir helis ise o zaman $\alpha(s)$ bir doğru olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerinin tanımından

$$\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0, \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

eşitlikleri u sabit vektörü için elde edilir. Bu durumda $\tau_\alpha = 0$ ve $\kappa_\alpha = 0$ olur. $\langle T_\beta, u\rangle_L = sbt$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\kappa_\beta \langle N_\beta, u\rangle_L = 0$$

olur. Buradan $\langle N_\beta, u\rangle_L = 0$ ve $\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0$ eşitliklerinin türevi alınırsa $-\tau_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L = 0$ olur. u oskülatör düzlemdedir. $\tau_\alpha = 0$ olur. (3.12) eşitliğinde $\tau_\alpha = 0$ değeri yerine yazılırsa $\kappa_\alpha = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ bir doğrudur.

Önerme 3.5.2 Genelleştirilmiş helis, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\beta(s^*)$ eğrisinin mannheim eğri çifti ise

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{c_2}{2} e^{c_1 s} - \frac{1}{2c_2} e^{-c_1 s}$$

dır. s yay paremetresi olmak üzere, özel olarak $c_1 = 1$ ve $c_2 = 1$ alınırsa

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{e^s - e^{-s}}{2} = \sinh s$$

olur [6].

İspat

$T_\beta, N_\beta(B_\alpha), B_\beta$ sırasıyla $\beta(s^*)$ eğrisinin teğet, normal ve binormal vektör alanları olsun. Genelleştirilmiş helislerin özeliğinden ve Mannheim eğrilerilerin tanımından

$$\langle N_\alpha, u\rangle_L = \cos\theta$$

elde edilir. Önerme 3.1'den $\cos\theta \neq 0$ ve $\frac{\tau}{\kappa}$ sabit değildir.

(3.15) eşitliğinin s değişkenine göre iki kez türevi alınırsa

$$\tau_\alpha \langle B_\alpha, u\rangle_L + \kappa_\alpha \langle T_\alpha, u\rangle_L = 0$$

ve

$$\langle T_\alpha, u\rangle_L = -\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\langle B_\alpha, u\rangle_L$$

bulunur. (3.16) denkleminin türevi alınırsa

$$\kappa_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L = -\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha, u\rangle_L + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha, u\rangle_L = -\kappa_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha \langle N_\alpha, u\rangle_L$$

olur.

$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha, u\rangle_L = \frac{-\kappa_\alpha{}^2 + \tau_\alpha{}^2}{\kappa_\alpha}\langle N_\alpha, u\rangle_L$ denkleminde $\left(-\kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2\right)$ yerine (3.36) eşitliği kullanılırsa

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha, u\rangle_L = \frac{-\frac{\kappa_\alpha}{\lambda}}{\kappa_\alpha}\langle N_\alpha, u\rangle_L$$

$$\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' \langle B_\alpha, u\rangle_L = -\frac{1}{\lambda}\langle N_\alpha, u\rangle_L \qquad \textbf{(3.38)}$$

bulunur. Buradan

$$\langle B_\alpha, u\rangle_L = -\frac{1}{\lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\langle N_\alpha, u\rangle_L$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle T_\alpha, u\rangle_L = -\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\langle B_\alpha, u\rangle_L = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\frac{1}{\lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\langle N_\alpha, u\rangle_L$$

$$\langle T_\alpha, u\rangle_L = \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha \lambda\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)'}\langle N_\alpha, u\rangle_L$$

olur. (3.38) denkleminin türevini alınırsa

$$\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}\langle B_\alpha, u\rangle_L - \tau_\alpha\langle N_\alpha, u\rangle_L \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds} = -\frac{1}{\lambda}\left(\kappa_\alpha\langle T_\alpha, u\rangle_L + \tau_\alpha\langle B_\alpha, u\rangle_L\right) \quad \textbf{(3.39)}$$

bulunur. Burada

$$\kappa_\alpha\langle T_\alpha, u\rangle_L + \tau_\alpha\langle B_\alpha, u\rangle_L = 0$$

olduğundan, (3.39) denklemi düzenlenirse

$$\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}\frac{-1}{\lambda\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}}\langle N_\alpha, u\rangle_L = \tau_\alpha\langle N_\alpha, u\rangle_L \frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}$$

elde edilir. Buradan

$$\tau_\alpha = -\frac{\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} \quad \textbf{(3.40)}$$

elde edilir. (3.36) denkleminden

$$\kappa_\alpha - \frac{\tau_\alpha^2}{\kappa_\alpha} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\lambda} + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\tau_\alpha$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\lambda} + \frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\frac{-\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\tau_\alpha\frac{d^2\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha\left(\frac{d\left(\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right)$$

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{\tau_\alpha \dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha \left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right) \qquad \textbf{(3.41)}$$

bulunur.

(3.40) ve (3.41) eşitliklerinden

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{-\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\lambda\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}{\dfrac{1}{\lambda}\left(1 - \dfrac{\tau_\alpha \dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\kappa_\alpha \left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}\right)} = -\frac{\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}{\dfrac{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2} - \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\dfrac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2}}$$

$$\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = -\frac{\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}{\left(\dfrac{d\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds}\right)^2 - \dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\dfrac{d^2\left(\dfrac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)}{ds^2}}$$

olur. Eğer $\frac{\tau_\alpha}{\kappa_\alpha} = y(s)$ denirse, o zaman aşağıdaki denklem

$$\left(1 - y^2\right)\frac{d^2 y}{ds^2} - y\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

elde edilir. $\frac{dy}{ds} = p, \frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{ds} = p\frac{dp}{dy}$ ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\left(1 - y^2\right)p\frac{dp}{dy} + yp^2 = 0$$

bulunur. Bu denklem çözülürse

$$\left(1 - y^2\right)\frac{dp}{dy} = -yp$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{y}{1 - y^2}dy$$

$$\int\frac{dp}{p} = -\int\frac{y}{1 - y^2}dy$$

$$\ln p = \frac{1}{2}\ln\left|1 - y^2\right| + \ln c_1$$

$$p = c_1\left(1 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{ds} = c_1\left(1 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\frac{dy}{\left(1 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \int c_1 ds$$

$$\arcsin(y) = c_1 s + c_2$$

olur.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H. H., "Diferensiyel Geometri I. Cilt", ***Ankara Üniversitesi Yayınları***, Ankara, 139-259 (1998).

[2] Hacısalihoğlu, H. H., "Diferensiyel Geometri II. Cilt", ***Ankara Üniversitesi Yayınları***, Ankara, 33-37 (1994).

[3] Hacısalihoğlu, H. H., "Lineer Cebir I. Cilt", ***Ankara Üniversitesi Yayınları***, Ankara, 99-178 (2000).

[4] Özkaldı, S., İlarslan, K. and Yaylı, Y. "On Mannheim partner curve in dual space", ***An. Şt. Univ. Ovidius Constanta***, 17(2): 131-142 (2009).

[5] Güngör, İ., "3-Boyutlu Minkowski uzayında normal eğrilerin karakterizasyonları", Yüksek lisans Tezi, ***Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Afyon, 1-27 (2007).

[6] Liu, H. L., "Mannheim partner curves in 3-space", ***Journal of Geometry***, 88:120-126 (2008).

[7] Orbay, K. and Kasap E., "On Mannheim partner curves in E^3", ***International Journal of Physical Sciences***, 4(5): 261-264 (2009).

[8] Chen, B. Y., "When does the position vector of a space curve always lie inits rectifing plane?", ***Amer. Math. Mountly***, 110, 147-152 (2003).

[9] İlarslan, K. "Öklid olmayan manifoldlar üzerindeki bazı özel eğriler", Doktora Tezi, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimlari Enstitüsü***, Ankara, (2002).

[10] Sabuncuoğlu, A., "Diferensiyel Geometri II. Baskı", ***Nobel Yayın Dağıtım***, Ankara, 1-556 (2004).

[11] Soytürk, E., İlarslan, K. ve Sağlam, D., "Osculating spheres and osculating cırcles of a curve in Semi-Riemannian space", ***Commu. Fac. Sci. Univ. Ank., Series A1,*** 54(2): 39-48 (2005).

[12] Walrave, J., "Curves and surfaces in Minkowski space", ***Pd. D. Thesis***, ***K.U.Leuven, Fac. Of Science, Leuven***, (1995).

[13] Karacan, M. K. and Yaylı, Y., "On the Geodesics of Tubalar Surfaces in Minkowski 3-Space", ***Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*** 31(2): 1-10 (2008).

[14] İlarslan, K., Nešović, E. and Petrović-Torgašev, M. "Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space", ***Novi sad J. Math***. 33(2): 23-32 (2003).

[15] Petrović-Torgašev, M. and Nešović, E., "Some characterizations of curves lying on the pseudohyperbolik space H_0^2 in the Minkowski space E_1^3", Kragujevac, ***J. Math.*** 22, 71-82 (2000).

[16] Petrović-Torgašev, M. and Nešović, E., "Some characterizations of Lorentzian spherical spacelike curves with the timelike and null principal normal", ***Mathematica Moravica***, 4, 83-92 (2000).

[17] Parkinson, G. A., "Pairs of curves in an S_n", ***The Annals of Mathematics***, 33(4): 649-657 (1932).

[18] Liu, H. and Wang, F., "Mannheim partner curves in 3-space", ***Journal of Geometry***, 88: 120-126 (2008).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: COŞKUN, Özkan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 28.04.1972 Kütahya
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (505) 641 58 59
e-mail	: ozkncoskun@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Anadolu Üniversitesi	
	Fen Edebiyat Matematik Bölümü	1996
Lise	Sivas Atatürk Lisesi	1989

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
1996	Uşak Çağdaş Final Dershanesi	Matematik Öğretmeni
1997	Uşak Bil-Tek Dershanesi	Matematik Öğretmeni
1997-	Uşak Anadolu Öğretmen Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Doğa yürüyüşü, avcılık, bilgisayar teknolojileri