T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİMET ERTÜRK

Temmuz 2010
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NİMET ERTÜRK

UŞAK 2010

Nimet ERTÜRK tarafından hazırlanan 3-Boyutlu Öklid Uzayında Eğri Çiftleri adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ ....

Mühendislik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: 15.07.2010

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa YALÇIN ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nimet ERTÜRK

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA EĞRİ ÇİFTLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Nimet ERTÜRK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2010

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, eğri çiftlerinin Frenet vektörlerinin karşılıklı olarak lineer bağımlı olma durumları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, eğri çiftlerinin Frenet vektörlerinin karşılıklı olarak ortogonal olma durumları incelenmiştir.

Bilim Kodu **:** 53A04

Anahtar Kelimeler **:** Bertrand eğri çifti, İnvolüt-Evolüt eğri çifti, Mannheim eğri çifti.

Sayfa Adedi **:** 102

Tez Yöneticisi **:** Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

CURVE COUPLES IN THE EUCLIDEAN 3-SPACE

(M. Sc. Thesis)

Nimet ERTÜRK

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2010

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In first chapter, basic definition and theorems are given.

In second chapter, the case of mutually linear dependence of Frenet vectors of curve pairs are studied

In third chapter, the case of mutually orthogonal of Frenet vectors of curve pairs are studied

Science Code **:** 53A04

Key Words **:** Bertrand pairs, Involut-Evolut pairs, Mannheim pairs.

Pace Number **:** 102

Adviser **:** Asst. Prof. Dr. Yılmaz TUNÇER

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER'e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve her zaman bana güç veren eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{E^n}$	Öklid uzay
$\langle , \rangle$	İç çarpım dönüşümü
$\boldsymbol{d}$	Uzaklık fonksiyonu
$\lVert , \rVert$	Norm
$\boldsymbol{C^k}$	Diferensiyellenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{K}$	Cisim
$\boldsymbol{T = V_1}$	E^n de teğet vektör
$\boldsymbol{N = V_2}$	E^n de aslî normal vektör
$\boldsymbol{B = V_3}$	E^n de binormal vektör
$\boldsymbol{k_1}$	$M \subset E^n$ de eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{k_1^*}$	$N \subset E^n$ de eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{k_2}$	$M \subset E^n$ de burulma (torsiyon)
$\boldsymbol{k_2^*}$	$N \subset E^n$ de burulma (torsiyon)
$\boldsymbol{\alpha}$	E^n de parametreyi vektöre dönüştüren eğri
$\boldsymbol{\beta}$	E^n de parametreyi vektöre dönüştüren eğri
$\boldsymbol{s}$	α eğrisi üzerindeki parametre
$\boldsymbol{s^*}$	β eğrisi üzerindeki parametre
Γ	E^n de (I, α) komşuluğuyla verilmiş eğri
$\tilde{\Gamma}$	E^n de (I, β) komşuluğuyla verilmiş eğri
$\boldsymbol{V_1^\alpha}$	Γ eğrisinin teğet vektörü
$\boldsymbol{V_2^\alpha}$	Γ eğrisinin aslî normal vektörü
$\boldsymbol{V_3^\alpha}$	Γ eğrisinin binormal vektörü

$\boldsymbol{V}_1^{\beta}$	$\tilde{\Gamma}$ eğrisinin teğet vektörü
$\boldsymbol{V}_2^{\beta}$	$\tilde{\Gamma}$ eğrisinin aslî normal vektörü
$\boldsymbol{V}_3^{\beta}$	$\tilde{\Gamma}$ eğrisinin binormal vektörü
$\boldsymbol{k}_1^{\alpha}$	α eğrisine bağlı eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{k}_1^{\beta}$	β eğrisine bağlı eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{k}_2^{\alpha}$	α eğrisine bağlı burulma (torsiyon)
$\boldsymbol{k}_2^{\beta}$	β eğrisine bağlı burulma (torsiyon)

1. GİRİŞ

Optik çalışması içinde kullanıldığı bilinen bir İnvolüt eğri düşüncesi C. Huygens tarafından ortaya çıkmıştır (1658). C. Huygens daha doğru ölçüm çalışmaları yapmaya çalışırken İnvolüt eğrileri keşfetmiştir [14]. 2008 yılı içerisinde dejenere alt manifoldlar teorisi araştırmacılar tarafından ortaya çıkarılmış ve bazı diferensiyel geometri konuları Lorentz manifoldlara genişletilmiştir. Minkowski uzayında İnvolüt-Evolüt eğriler detaylı çalışılmıştır [10]. Ayrıca İnvolüt-Evolüt eğri çifti 4-boyutlu Öklid uzayda ve özel olarak G_3 Galilean uzayında [6,7] incelenmiştir. Diferensiyel geometride E^3 Öklid uzayının bir düzgün eğrisi için iyi biliniyor ki önemli olan bu eğrinin tanımlanmasıdır. Eğrilik fonksiyonu k_1 (eğrilik κ) ve k_2 (torsiyon veya burulma) düzgün eğrinin şekil ve ölçüsünün belirlenmesinde önemli rol oynar. Örneğin; Eğer $k_1 = k_2 = 0$ ise eğri bir doğrudur. Eğer $k_1 \neq 0$ (sabit) ve $k_2 = 0$ ise eğri $\frac{1}{k_1}$ yarıçaplı bir çemberdir. Eğer $k_1 \neq 0$ (sabit) ve $k_2 \neq 0$ (sabit) ise eğri uzayda bir helistir. Diğer taraftan eğrinin tanımlanması ve sınıflaması eğrinin Frenet vektörleri arasındaki bağıntıya bağlıdır. Saint Venant 1845'de bir eğrinin aslî normal tarafından üretilen yüzey üzerinde olup olmadığı ve bu asli normale karşılık gelebilecek başka bir asli normal için ikinci bir eğrinin olup olmadığı sorusunu ortaya atmıştır. Bu soru 1850'de J. Bertrand tarafından yanıtlanmıştır ve J. Bertrand ikinci bir eğrinin var olması için gerekli ve yeterli koşulun, bir lineer bağıntı ile verilen orijinal eğrinin birinci ve ikinci eğrilikleri arasında sabit katsayı bulunması gerektiğini göstermiştir. Bu çeşit bir eğri çifti ***Conjugate Bertrand eğri çifti*** olarak tanımlanmıştır, çoğunlukla ***Bertrand eğriler***i ifadesiyle kullanılır. Bertrand eğrileri Weingarten yüzeylerinin bir boyutlu benzeri olarak göz önüne alınabilir. Bertrand çifti bilgisayar destekli çizimler içinde kullanılan karşılıklı eğrilerin özel bir örneğidir [11]. Diğer taraftan Bertrand çifti belirli metrik özeliklerle ifade edilen direkt izdüşümsel bağıntı olarak tanımlanabilir. Ayrıca Bertrand eğri çifti özel olarak G_3 Galilean uzayında incelenmiştir [8]. Yine W. K. Schief tarafından Razzaboni yüzeyleri ve Bertrand eğrilerinin integrallenebilirliği üzerine çalışmalar yapılmıştır [12]. Bir başka benzer eğri çifti olarak Mannheim eğri çifti tanımlanmıştır. Bu eğri çifti α ve β uzay eğrileri arasında bir bağıntı oluşturur. α eğrisinin aslî normal doğrusu ile β eğrisinin binormal doğrusu arasındaki lineer bağlantıdır. Liu ve Wang tarafından Mannheim eğri çifti üzerine Minkowski-3 ve Öklid-3 uzaylarında çalışmalar yapılmıştır [4,9,13]. Bu çalışmada, oluşturulan Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğri çiftlerinin özel birer eğri belirtip belirtmediği araştırılmış ve İnvolüt-Evolüt, Bertrand, Mannheim eğri çiftleriyle olan ilişkileri incelenmiştir.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1.1 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde bir ***iç çarpım*** diye aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan bir

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR$$

dönüşüm(reel değerli fonksiyon)üne denir ve değeri, $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir.

(i) Simetri aksiyomu:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle , \ \forall u, v \in V .$$

(ii) Bilineerlik aksiyomu:

$$\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle = \langle u, cv \rangle , \ \forall c \in IR , \ \forall u, v \in V ,$$

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle , \ \forall v \in V ,$$

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle , \forall u \in V .$$

Bu aksiyom kısaca

$$\langle au_1 + bu_2, v \rangle = a\langle u_1, v \rangle + b\langle u_2, v \rangle$$

$$\langle u, av_1 + bv_2 \rangle = a\langle u, v_1 \rangle + b\langle u, v_2 \rangle$$

şeklinde de yazılabilir.

(iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu:

$$\langle u, u \rangle \geq 0 , \ \forall u \in V ,$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0} \ [1].$$

Tanım 1.1.2 V bir kompleks vektör uzayı olsun. V vektör uzayı üzerinde bir ***iç çarpım*** diye aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan bir

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

dönüşüm(kompleks değerli fonksiyon)üne denir ve değeri, $u, v \in V$ olmak üzere $\langle u, v \rangle$ şeklinde gösterilir.

(i)’ Hermit aksiyomu:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} , \forall u, v \in V ,$$

burada $\overline{(\ )}$ kompleks eşleniği göstermektedir.

(ii)’ Bilineerlik aksiyomu:

$$\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle\,,\ c \in \mathbb{C};$$

$$\langle u, cv\rangle = \bar{c}\langle u, v\rangle\,,$$

$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle\,,$$

$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle\,.$$

(iii)' Pozitif tanımlılık aksiyomu:

$$\langle u, u\rangle \text{ reeldir ve } \geq 0$$

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0} \text{ [1].}$$

Tanım 1.1.3 IR^n de bir u vektörünün uzunluğu veya boyu $\|u\|$ ile gösterilir ve u ya karşılık gelen AB yönlü doğru parçasının uzunluğu olarak alınır. Eğer $AB = CD$ ise AB ve CD yönlü doğru parçalarının aynı uzunlukta oldukları açıktır. $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ olarak tanımlanır ve bu değere u vektörünün ***normu*** da denir [1].

Tanım 1.1.4 Normu 1 olan vektöre bir ***birim vektör*** denir. Eğer $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ iken $\langle x, y\rangle = 0$ ise bu iki vektöre birbirlerine ***ortogonaldir***ler denir. Sıfırdan farklı vektörlerin bir S cümlesinde herhangi iki vektör birbirine dikse bu S cümlesine ***ortogonaldir*** denir. S ortogonal iken S deki her bir vektör birer birim vektör ise S ye ***ortonormal*** denir [1].

Tanım 1.1.5 V ve W aynı bir K cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olsunlar. Bir

$$A : V \to W$$

dönüşümü için aşağıdaki iki aksiyom sağlanıyor ise bu dönüşüme ***lineer***dir denir.

(i) $A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta),\ \forall \alpha, \beta \in V$;

(ii) $A(c\alpha) = cA(\alpha),\ \forall c \in K$.

Bir lineer dönüşüme bir ***homeomorfizm*** de denir [1].

Tanım 1.1.6 Eğer

$$A : V \to W$$

lineer dönüşümü birebir ve üzerine (örten) ise bir ***lineer izomorfizm*** olarak adlandırılır [1].

Tanım 1.1.7 K cismi üzerindeki vektör uzaylarından biri V olsun. V vektör uzayının elemanlarının bir $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ cümlesi için

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i = 0\,,\ (1 \leq i \leq k) \Rightarrow \forall c_i = 0$$

ise bu cümleye ***lineer bağımsız*** aksi halde ***lineer bağımlı***dır denir [1]. Diğer bir ifadeyle, eğer $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ lineer bağımlı ise

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_k \in K$ vardır. V vektör uzayında sıfır olmayan p tane $x_1, x_2, ..., x_p$ vektörlerini alalım.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_p x_p = 0$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan p tane $c_1, c_2, ..., c_p$ sayısını bulmak imkânsız ise, bu vektörlerin p-inci dereceden ***lineer olarak bağımsız*** bir sistem meydana getirdikleri söylenir. Aksi halde, verilen p vektörden ibaret olan sisteme ***lineer olarak bağlı*** denir. Lineer olarak bağlı sistem ile lineer olarak bağımsız sistem ifadelerinin yerine, söyleyişi kısaltmak maksadıyla bazen ***bağlı sistem*** ve ***serbest sistem*** ifadeleri kullanılır [1].

Tanım 1.1.8 Bir vektör uzayının bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özeliğe sahipse V vektör uzayının bir ***bazı*** adını alır [1].

B1. S lineer bağımsızdır.

B2. $V = Sp(S)$, yani $\alpha \in V$ elemanı S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer birleşimidir. Bu ikinci aksiyoma baz için ***Germe aksiyomu*** denir [1].

Tanım 1.1.9 Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir

$$f : A \times A \to V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir ***afin uzay*** denir:

(A1). $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(A2). $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [2].

Tanımdaki (A1) önermesinin anlamı açıktır. (A2) önermesinin biraz daha açıklanması gerekirse denilebilir ki "A da bir P noktası ve V de bir α vektörü verildiğinde, $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde A cümlesinin en az bir Q noktası vardır". Bir başka deyişle, A da bir nokta tespit edildiğinde V vektör uzayının vektörleriyle A cümlesinin geri kalan noktaları arasında birebir bir eşleme gerçekleşmiş olur. P , $Q \in A$ için $f(P,Q)$ vektörü genellikle $f(P,Q) = \overrightarrow{PQ}$ biçiminde gösterilir ve P ye ***başlangıç***, Q ya da ***uç noktası*** denir [2].

Tanım 1.1.10 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa bu işlem yardımı ile A da bir uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Burada $x = (x_1,..., x_n)$, $y = (y_1,..., y_n)$. Böylece A afin uzayı da yeni bir ad olarak ***Öklid uzayı*** adını alır. Örnek 1.1.1'de verildiği gibi $A = IR^n$ ve $V = IR^n$ olması hali esas alınır ve ayrıca $A = IR^n$ Öklid uzayı, standart Öklid uzayı anlamında diğerlerinden fark etmesi için, E^n ile gösterilir [2].

Örnek 1.1.1 1-Boyutlu Standart Öklid Uzayı.

Reel sayılar ekseni olarak şimdiye kadar duyulan sayı doğrusu ele alınırsa. Bu doğru, reel sayılar cismi (kendi üstünde bir boyutlu reel vektör uzayıdır) ile birleştirilmiş IR^1 afin uzayıdır. Ayrıca bu vektör uzayında

$$\langle , \rangle : IR \times IR \to IR$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \to \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = xy$$

şeklinde tanımlandığı için IR^1 afin uzayı 1-boyutlu Öklid uzayı olur ve E ile gösterilen bu uzaya ***Öklid doğrusu*** da denir. Burada $\vec{x} = (x)$, $\vec{y} = (y)$ [2].

Örnek 1.1.2 2-Boyutlu Standart Öklid Uzayı.

Reel düzlem olarak şimdiye kadar duyulan düzlem ele alınsın. Bu düzlem, 2-boyutlu reel standart vektör uzayı ile birleştirilmiş IR^2 afin uzayıdır. Ayrıca bu vektör uzayında Öklid iç çarpımı da

$$\langle , \rangle : IR^2 \times IR^2 \to IR$$
$$(x, y) \to \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i$$

şeklinde tanımlandığından IR^2 afin uzayı 2-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^2 ile gösterilen bu uzaya ***Öklid düzlemi*** de denir. Burada $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ [2].

Örnek 1.1.3 3-Boyutlu Standart Öklid Uzayı.

3-boyutlu standart IR^3 ile birleştirilmiş IR^3 afin uzayı ele alınsın. Bu IR^3 vektör uzayında Öklid iç çarpımı

$$\langle , \rangle : IR^3 \times IR^3 \to IR$$
$$(x, y) \to \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Burada $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Böylece IR^3 afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve E^3 ile gösterilir. Bu uzay, şimdiye kadar duyduğunuz 3-boyutlu Öklid uzayının kendisidir [2].

Tanım 1.1.11

$$d : E^n \times E^n \to IR$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında ***uzaklık fonksiyonu*** ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki ***uzaklık*** denir [2].

Tanım 1.1.12

$$d : E^n \times E^n \to IR$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de ***Öklid metriği*** denir [2].

Tanım 1.1.13 E^n de sıralı bir $\{P_0 , P_1 , P_2 , \ldots , P_n\}$ nokta $n+1$- lisine IR^n de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1} , \overrightarrow{P_0P_2} , \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n-lisi, IR^n için bir ortonormal baz ise $\{P_0 , P_1 , P_2 , \ldots , P_n\}$ sistemine E^n uzayının bir ***dik çatısı*** veya ***Öklid çatısı*** denir [2].

Örnek 1.1.4 E^n de

$$E_0 = (0 , \ldots , 0),\ E_1 = (1 , 0 , \ldots , 0), \ldots , E_n = (0 , 0 , \ldots , 0 ,1)$$

noktaları bir dik çatı oluştururlar. Gerçekten,

$$\langle \overrightarrow{E_0E_i}, \overrightarrow{E_0E_j} \rangle = \delta_{ij} .$$

Dolayısıyla $\{\overrightarrow{E_0E_1} , \ldots , \overrightarrow{E_0E_n}\}$ sistemi IR^n vektör uzayı için bir ortonormal bazdır [2].

Tanım 1.1.14 E^n deki $\{E_0 , E_1 , \ldots , E_n\}$ çatısına ***standart Öklid çatısı*** denir [2].

Örnek 1.1.5 E^2 de

$$P_0 = (a_1, a_2),\ P_1 = (a_1 + \cos\theta, a_2 + \sin\theta),\ P_2 = (a_1 - \sin\theta, a_2 + \cos\theta)$$

noktaları, $\forall\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \theta \in IR$ için bir dik çatı meydana getirirler. Çünkü, $\langle \overrightarrow{P_0P_i}, \overrightarrow{P_0P_j} \rangle = \delta_{ij}$ ve dolayısıyla $\{\overrightarrow{P_0P_1}\ ,\ \overrightarrow{P_0P_2}\}$, vektör sistemi IR^2 vektör uzayı için bir ortonormal bazdır [2].

Tanım 1.1.15 E^n de bir X noktasının E^n deki Standard Öklid Çatısına göre ifadesi;

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0E_i}\ .$$

Buradaki

$$x_i : E^n \to IR\ ,\ 1 \le i \le n\ ,$$

fonksiyonlarına X noktasının ***Öklid koordinat fonksiyonları*** ve $\{x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots,\ x_n\}$ sıralı ve reel değerli fonksiyonlar n-lisine de E^n uzayının ***Öklid Koordinat Sistemi*** denir [2].

Tanım 1.1.16 X bir cümle olsun. X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. τ koleksiyonu aşağıdaki önermeleri doğrularsa X üzerinde bir ***topoloji*** adını alır.

(T1). $X\ ,\ \phi \in \tau\ ,$

(T2). $\forall A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau\ ,$

(T3). $A_i \in \tau\ ,\ i \in I\ ,\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau\ .$

Burada (T1) ve (T2) önermelerinin anlamları açıktır. (T3) önermesinde I bir indeks cümlesidir [2].

Örnek 1.1.6 $IR^n = IR \times IR \times \ldots \times IR = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_i \in IR,\ 1 \le i \le n\}$ afin uzayında $\forall\ x, y \in IR^n$ için $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$ olarak tanımlanan metrik, bir topolojidir. Gerçekten, bu halde $X = IR^n$. IR^n uzayının alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ ise (T1) ve (T2) aksiyomlarının doğrulandığı açıktır. Gerçekten τ koleksiyonu IR^n in

$$A_i = B_{\varepsilon_i}(x) = \{y \in IR^n \mid d(x, y) < \varepsilon_i\}$$

biçiminde tanımlanabilen açık alt cümlelerinin bir koleksiyonu olarak alınırsa $\phi \subset IR^n$, $IR^n \subset IR^n$ ve IR^n, $\phi \in \tau$ olur. Ayrıca iki açık alt cümlenin arakesiti de bir açık alt cümledir. (T3) aksiyomunun doğru olduğu "sonlu sayıda açık alt cümlelerin birleşimi de bir açık alt cümledir" gerçeğinden görülmektedir. IR^n uzayında d metriği tanımlandığı zaman (R^n, d) ikilisi E^n ile gösterilir. Demek oluyor ki E^n n-boyutlu Öklid uzayındaki metrik ile E^n de bir topoloji tanımlanmış olur [2].

Tanım 1.1.17 Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir ***topolojik uzay*** denir [2].

Örnek 1.1.7 E^n Öklid uzayı bir topolojik uzaydır. Çünkü üzerinde tanımlı olan metrik ile daima bir τ topolojisine sahiptir [2].

Tanım 1.1.18 X ve Y birer topolojik uzay olsunlar. Bir

$$f : X \to Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} tersi var ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir ***homeomorfizm (topolojik dönüşüm)*** denir. f bir homeomorfizm olduğu zaman X ile Y uzaylarına da topolojik olarak ***denktir***ler veya kısaca ***homeomorfiktir***ler denir [2].

Tanım 1.1.19 X bir topolojik uzay olsun. X in P ve Q gibi farklı noktaları için, X de, sırası ile, P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_Q \cap A_P = \phi$ olacak biçimde bulunabilirse X topolojik uzayına bir ***Haussdorff uzayı*** denir [2].

Örnek 1.1.8 E^n, n-boyutlu Öklid uzayı, bir Haussdorff uzayıdır. Gerçekten E^n de farklı iki P, Q noktaları için A_P ve A_Q gibi biri P noktasını diğeri de Q noktasını içinde bulunduran iki açık alt cümle bulmak mümkündür, öyle ki $A_Q \cap A_P = \phi$ olsun. $n = 1$, $n = 2$ ve $n = 3$ halleri için bu kolayca izlenebilir [2].

Tanım 1.1.20 M bir topolojik uzay olmak üzere M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu ***topolojik manifold***(veya kısaca topolojik n-manifold)dur denir;

(**M1**). M bir Haussdorff uzayıdır.

(**M2**). M uzayının her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n in bir açık alt cümlesine homeomorftur.

(**M3**). M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [2].

Tanım 1.1.21 E^n de bir açık alt cümle U olmak üzere bir

$$f : U \to IR$$

fonksiyonunun k-inci mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k ***sınıfından (k. sınıftan) diferensiyellenebilirdir*** denir. Özel olarak f sadece sürekli ise C^0 ***sınıfındandır*** denir. U üstünde tanımlı C^1 sınıfından fonksiyona U üstünde bir ***o-form*** adı verilir [2].

$$C^k(U,R) = \{f \mid f : U \to IR \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k \text{ sınıfından}\},$$

$$C^\infty(U,R) = \{f \mid f \in C^k(U,IR),\ k \in IN\}.$$

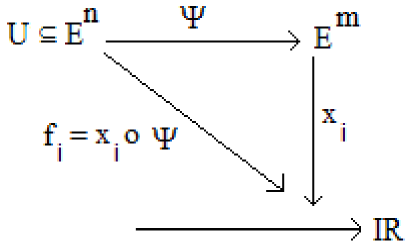
Tanım 1.1.22 E^n deki bir açık alt cümle U olduğuna göre bir

$$\begin{aligned} \psi : U &\to E^m \\ u &\to (f_1(u), f_2(u), \ldots, f_m(u)) \end{aligned}$$

fonksiyonu verildiğinde bütün f_i koordinat fonksiyonları için

$$f_i \in C^k(E^m, IR),\ 1 \le i \le m,$$

veya



Şekil 1.1.1

$$f_i = x_i \circ \psi \in C^k(U, IR)$$

ise

$$\psi \in C^k(U, E^m)$$

denir.

$$C^\infty(U,E^m) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U,E^m),\ k \in IN\}\ [2].$$

Tanım 1.1.23 U ve V, sırası ile E^m ve E^n de birer açık alt cümle olsunlar. Bir

$$\begin{aligned} \psi : U &\to V \\ x &\to \psi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \end{aligned}$$

fonksiyonu için bütün

$$f_i : U \to IR$$

koordinat fonksiyonları C^k sınıfından iseler

$$\psi \in C^k(U,V)$$

denir.

$$C^\infty(U,V) = \{\psi \mid \psi \in C^k(U,V),\ \forall\ k \in IN\}$$

f_i fonksiyonlarına ψ fonksiyonunun ***Öklid koordinat fonksiyonları*** denir [2].

Tanım 1.1.24 M bir n-boyutlu topolojik Manifold ve U da E^n in bir açık alt cümlesi olsun. O zaman "Tanım 1.1.18" gereğince U bir ψ homeomorfizmi ile M nin bir W açık alt cümlesine eşlenebilir.

$$\psi : U \subset E^n \to W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine M de bir ***koordinat komşuluğu*** veya ***harita*** denir. $u \in U$ için $\psi(u) \in M$ ve

$$\psi(u) = (x_1(u), ..., x_n(u)),\ x_i(u) \in IR,\ 1 \le i \le n.$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[d, "u_i"'] & W \subset M \arrow[l, shift left, "\Psi^{-1}"] \arrow[dl, "u_i \circ \Psi^{-1} = x_i"] \\
IR &
\end{tikzcd}$$

Şekil 1.1.2

Burada $x_i(u)$ reel sayısına $\psi(u) \in M$ noktasının i-***inci koordinatı*** ve

$$u_i : U \to IR$$

fonksiyonuna da u noktasının i-***inci Öklid koordinat fonksiyonu*** denir.

$$x_i = u_i \circ \psi^{-1} : W \to IR$$

fonksiyonuna W cümlesinin i-***inci Öklid koordinat fonksiyonu*** denir [2].

Tanım 1.1.25 V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun. $P \in A$ ve $\vec{v} \in V$ için $(P, \vec{v})$ sıralı ikilisine A afin uzayının P noktasındaki bir ***tanjant vektör***ü denir [2]. Afin aksiyomlar gereğince her bir $(P, \vec{v})$ tanjant vektörüne bir tek $Q \in A$ noktası karşılık gelir, öyle ki $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$. Buna göre, A afin uzayında iki nokta verildiğinde, bu noktaların birisi başlangıç noktası olmak üzere, bir tanjant vektör tek türlü belli olur. Fiziksel olarak kuvvet, tatbik noktası ile birlikte bir tanjant vektördür. Gerçekten, kuvvet olarak yerçekimi kuvveti $\vec{F}$ seçilirse yeryüzünde bir nokta P olduğuna göre $(P, \vec{F})$ ikilisi bir tanjant vektör olur.

A afin uzayının $P \in A$ noktasındaki tanjant vektörlerin cümlesi $T_A(P)$ ile gösterilir. O halde,

$$T_A(P) = \{(P,\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\} \text{ veya } T_A(P) = \{P\} \times V .$$

Buna göre $(P,\vec{v}) \in T_A(P)$ tanjant vektörü $\vec{v}_P$ ile gösterilir.

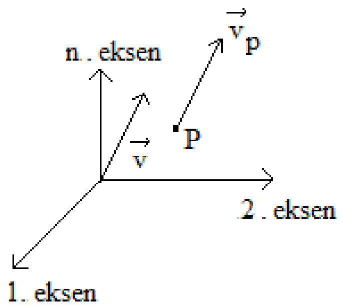
A afin uzayında bir afin çatı $\{P, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ olduğuna göre $\vec{v}_P \in T_A(P)$ için $\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ}$ ise

$$\vec{v}_P = \overrightarrow{PQ} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{PP_i}$$

olmak üzere, $\vec{v}_P$ vektörü $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sıralı n-lisine karşılık gelir. Bu sıralı n-liye $\vec{v}_P$ ***tanjant vektörünün koordinatları*** denir ve

$$\vec{v}_P = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)_P$$

şeklinde gösterilir [2].



Şekil 1.1.3

Tanım 1.1.26 M bir manifold ve M de bir komşuluk V olsun. Bir $P \in V$ noktasındaki tanjant uzay $T_V(P)$ olsun. V komşuluğunun bütün P noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P \in V} T_V(P)$ ile gösterilsin. Bir

$$\pi : \bigcup_{P \in V} T_V(P) \to V$$

dönüşümü $\forall\, t_P \in T_V(P)$ tanjant vektörü için $\pi(t_P) = P$ biçiminde tanımlansın. O zaman V komşuluğu üzerindeki bir vektör alanı tanımlanabilir. $V \subseteq M$ üzerindeki bir ***vektör alanı*** operatörü

$$X : V \to \bigcup_{P \in V} T_V(P)$$

biçiminde bir fonksiyondur, öyle ki

$$\pi \circ X = I : V \to V$$

dönüşümü bir özdeşlik fonksiyonudur [2].

Tanım 1.1.27

$$x : IR^3 \times IR^3 \to IR^3$$
$$(\alpha, \beta) \to \alpha \times \beta = \psi(\alpha \Lambda \beta)$$

şeklinde tanımlı x iç işlemine ***vektörel çarpım*** işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β eğrilerinin ***vektörel çarpımı*** denir [2].

Tanım 1.1.28 I , IR^n uzayının bir açık aralığı olmak üzere,

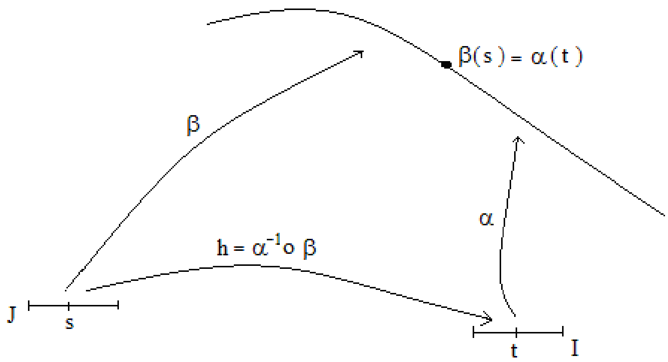
$$\alpha : I \to IR^n$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir α dönüşümüne, IR^n uzayı içinde bir ***eğri*** denir [5].

Tanım 1.1.29 E^n de bir M eğrisinin (I, α) ve (J, β) iki koordinat komşuluğu verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \to I$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna M eğrisinin bir ***parametre değişimi*** (daha doğrusu M eğrisinin I cümlesindeki ***parametresinin*** J ***deki parametre ile değişimi***) denir [2].
(Şekil 1.1.4)



Şekil 1.1.4

Tanım 1.1.30 E^n de M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuyla verilsin. $\alpha : I \to E^n$ fonksiyonunun Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ olmak üzere

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ \alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \left(\left.\frac{d\alpha_1}{dt}\right|_t, ..., \left.\frac{d\alpha_n}{dt}\right|_t \right).$$

$\left(\alpha(t),\alpha'(t)\right)\in T_{E^n}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne, M eğrisinin $t\in I$ parametre değerine karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasında (I,α) koordinat komşuluğuna göre ***hız vektörü*** denir [2].

Tanım 1.1.31 $M\subset E^n$ eğrisi verilsin. M eğrisinin $m\in M$ noktasındaki ***tanjant uzayı*** diye, $m\in M$ noktasında M eğrisinin hız vektörlerini içine alan $T_M(m)=V(m)$ vektör uzayına denir. $m\in M$ seçilmiş bir nokta olmak üzere, E^n uzayının $T_M(m)$ ile birleşen alt afin uzayına da, M eğrisinin $m\in M$ noktasındaki ***teğet doğrusu*** denir [2].

Tanım 1.1.32 $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned}\|\alpha'\| &: I\to IR\\ t &\to \|\alpha'\|(t)=\|\alpha'(t)\|\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre ***skalar hız fonksiyonu*** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki ***skalar hızı*** denir [2].

Tanım 1.1.33 M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilmiş olsun. Eğer $\forall\ s\in I$ için, $\|\alpha'(s)\|=1$ ise M eğrisi (I,α) ya göre ***birim hızlı eğri***dir denir. Bu durumda, eğrinin $s\in I$ parametresine ***yay-parametresi*** adı verilir [2].

Tanım 1.1.34 M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilmiş olsun. $a,b\in I$ olmak üzere, a dan b ye M eğrisinin ***yay uzunluğu*** diye, eğrinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\|\,dt\,,\ t\in I$$

reel sayısına denir. Kolayca görülebilir ki bu değer koordinat komşuluğundan bağımsızdır.

Tanım 1.1.35 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye ***regüler eğri*** denir [2].

Tanım 1.1.36 $M\subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğuyla verilsin. Bu durumda, $\psi=\{\alpha',\alpha'',...,\alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall\alpha^{(k)}$, $k>r$ için $\alpha^{(k)}\in S_p\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1,\ldots,V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin ***Serret-Frenet r-ayaklı alanı*** ve $m\in M$ için $\{V_1(m),\ldots,V_r(m)\}$ ye ise $m\in M$ noktasındaki ***Serret-Frenet r-ayaklısı*** denir. Her bir V_i, $1\le i\le r$ ye ***Serret-Frenet vektörü*** adı verilir

[2]. $n=3$ özel halinde, E^3 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet iki ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilir. Bu özel halde Frenet 3-ayaklısının teşkili, vektörel çarpım (dış çarpım) ile basitleştirilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay parametresi olmak üzere,

$$T=\alpha'$$

ve

$$N=\frac{1}{\|\alpha''\|}\alpha''$$

olsun. Bu durumda, $T(s)=V_1(s)$ ve $N(s)=V_2(s)$. Gerçekten, $s \in I$ yay parametresi olduğu için,

$$\|\alpha'(s)\|=1$$

$$\Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle = 1$$

$$\Rightarrow \langle \alpha'(s), \alpha''(s)\rangle = 0$$

$$\Rightarrow V_2(s) \in S_p\{\alpha''(s)\} = S_p\{N(s)\}.$$

Bu ise yukarıda $V_1(s)$ ve $V_2(s)$ için verilen eşitlikleri doğrular. Buna göre

$$B=T\times N$$

tanımlanırsa, $B(s)=V_3(s)$ olduğu görülür. Böylece,

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

sistemine, $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin ***Frenet-3 ayaklısı*** denir [2]. Burada $T(s)=V_1(s)$ eğrinin ***teğet vektör***ü, $N(s)=V_2(s)$ eğrinin ***asli normal vektör***ü, $B(s)=V_3(s)$ eğrinin ***binormal vektör***ü adını alır [2].

Tanım 1.1.37 $s \in I$ için, $\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki ***dokunum düzlemi*** veya ***oskülatör düzlem*** denir. $\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki ***doğrultma düzlemi*** veya ***rektifyen düzlem*** denir. $\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki ***dik düzlem*** veya ***normal düzlem*** denir. Frenet formüllerindeki katsayılar matrisi olan

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ters simetrik bir matristir [5].

Tanım 1.1.38 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğuyla verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı

$$\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}$$

olsun. Buna göre,

$$k_i : I \to IR,\ 1 \le i < r,$$
$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s)\rangle$$

biçiminde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin ***i-inci eğrilik fonksiyonu*** ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $\alpha(s)$ noktasında M eğrisinin ***i-inci eğriliği*** denir [2].

Tanım 1.1.39 $n = 3$ için E^3 de bir eğrinin iki tane eğriliğinden bahsedilebilir. Bunlar k_1 ve k_2 olmak üzere k_1 eğrinin ***eğriliği***, k_2 de eğrinin ***burulması***dır. k_1 eğriliği eğrinin teğetten ne kadar saptığının ölçüsüdür. k_2 eğriliği de eğrinin oskülatör düzlemden sapmasının ölçüsüdür [5].

Ayrıca $\{V_1(s), V_2(s), \ldots, V_r(s)\}$ Frenet-r ayaklısının $V_i(s)$ Frenet vektörlerinin eğri boyunca kovaryant türevleri ile ilgili eşitlikler

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ . \\ . \\ . \\ V_{r-2}' \\ V_{r-1}' \\ V_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & k_{r-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & -k_{r-2} & 0 & k_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & -k_{r-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_{r-2} \\ V_{r-1} \\ V_r \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

1) $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$

2) $V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s),\ 1 < i < r,$

3) $V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklere ***Frenet formülleri*** denir. $r = 3$ özel halinde yukarıdaki matris eşitliği

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklinde olur [2].

Teorem 1.1.1 Eğrilik fonksiyonları;

$$k_1(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$k_2(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} \text{ [3].}$$

Tanım 1.1.40 $\alpha : I \to IR^3$ ve $\gamma : J \to IR^n$ eğrileri verilsin. $\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$ oluyorsa, γ eğrisi, α eğrisine, $\alpha(t_0)$ noktasında ***sıfırıncı basamaktan değiyor*** denir.

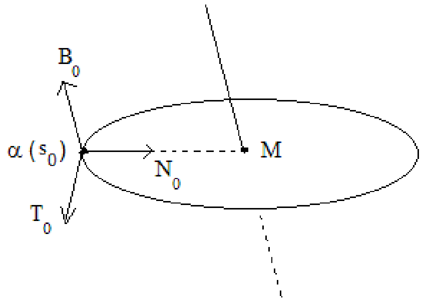
$\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$ ve $\alpha'(t_0) = \gamma'(t_0)$ oluyorsa, γ eğrisi, α eğrisine, $\alpha(t_0)$ noktasında ***birinci basamaktan değiyor*** denir. $\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$, $\alpha'(t_0) = \gamma'(t_0)$, $\alpha''(t_0) = \gamma''(t_0)$ oluyorsa, γ eğrisi, α eğrisine, $\alpha(t_0)$ noktasında ***ikinci basamaktan değiyor*** denir.

$$\alpha(t_0) = \gamma(t_0),\ \alpha'(t_0) = \gamma'(t_0),\ \ldots,\ \alpha^{(k)}(t_0) = \gamma^{(k)}(t_0)$$

oluyorsa γ eğrisi, α eğrisine, $\alpha(t_0)$ noktasında ***k-inci basamaktan değiyor*** denir [5].

Tanım 1.1.41 $\alpha : I \to IR^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere, $\dfrac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna eğrinin ***eğrilik yarıçapı fonksiyonu*** denir [5].

Tanım 1.1.42 $\alpha : I \to IR^3$ birim hızlı eğrisine $\alpha(t_0)$ noktasında ikinci basamaktan değen γ çemberine, α eğrisinin, $\alpha(t_0)$ noktasındaki ***eğrilik çemberi*** denir. Bu çemberin merkezine, $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin ***eğrilik merkezi*** denir. $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin eğrilik merkezinden geçen ve B_0 vektörüne paralel olan doğruya $\alpha(t_0)$ noktasına ilişkin ***eğrilik ekseni*** denir [5].



Şekil 1.1.5

Teorem 1.1.2 Birim hızlı olmayan bir

$$\alpha : I \to IR^3$$

eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik merkezi $\alpha(s_0) + p(s_0)N(s_0)$ noktasıdır [5].

Tanım 1.1.43 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall\ s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, bir U sabit vektörü ile sabit açı teşkil ediyorsa, M ye bir ***eğilim çizgisi*** ve $Sp\{U\}$ ya da M eğilim çizgisinin ***eğilim ekseni*** denir. Burada yalnız, $n = 3$ özel hali için eğilim çizgisi olma özelliği karakterize edilecektir [2].

Tanım 1.1.44 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall\ s \in I$ parametresine karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ noktasında M eğrisinin 1. ve 2. eğrilikleri $k_1(s)$ ve $k_2(s)$ ise

$$H : I \to IR$$
$$s \to H(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)}$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna, M eğrisinin s noktasındaki ***1-inci harmonik eğriliği*** denir [2]. Eğer $\dfrac{k_1}{k_2} = sabit$ ise $\alpha(s)$ eğrisi helistir [3].

Tanım 1.1.45

$$\alpha : I \subset IR \to E^3$$
$$t \to \alpha(t) = (\cos t, r\sin t, ht)$$

ile verilen bir α eğrisi için $r > 0$. α eğrisinde $h > 0$ ise ***sağ dairesel helis*** ve $h < 0$ ise ***sol dairesel helis*** denir. Dairesel sözü eğrinin (x, y) düzlemi üzerindeki dik izdüşümünün bir çember olmasından ileri gelmektedir [3].

Teorem 1.1.3 $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,

M bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\forall\ s \in I$ için $H(s)$ sabittir [2].

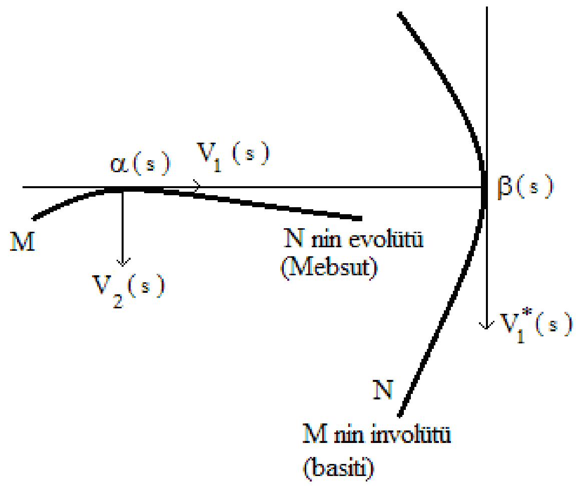
Tanım 1.1.46 $M, N \subset E^n$ iki eğri olsun. M ve N sırasıyla (I,α), (I,β) koordinat komşuluklarıyla verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N eğrilerinin Frenet r-ayaklıları, sırasıyla,

$$\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), \ldots, V_r^*(s)\}$$

olmak üzere,

$$\langle V_1(s), V_1^*(s)\rangle = 0$$

ise N ye M eğrisinin ***involütü***, M ye de N eğrisinin ***evolütü*** denir [2].



Şekil 1.1.6

Tanım 1.1.47 $M, N \subset E^n$ eğrileri sırasıyla (I,α), (I,β) koordinat komşulukları ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında M ve N eğrilerinin

$$\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\},\ \{V_1^*(s), \ldots, V_r^*(s)\}$$

Frenet r-ayaklıları verildiğinde $\forall\ s \in I$ için

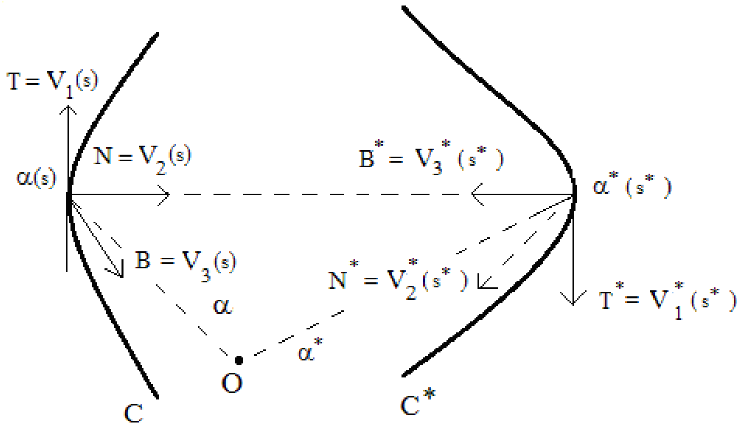
$$\{V_2(s), V_2^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise (M, N) eğri ikilisine bir ***Bertrand çifti*** denir [2].

Tanım 1.1.48 Bir vektörel çarpım "$\wedge$" ve bir iç çarpım $\langle , \rangle$ ile birlikte üç boyutlu Öklid uzay E^3 ile ifade edilsin. Γ, $\tilde{\Gamma} : I \to E^3$ en az dördüncü dereceden türeve sahip iki eğri olsun. Eğer Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, Γ eğrisinin asli normal doğrusu $\tilde{\Gamma}$

eğrisinin binormal doğrusuyla çakışık (lineer bağımlı) olacak şekilde bir bağlantı bulunabiliyorsa Γ eğrisine bir ***Mannheim eğri*** $\tilde{\Gamma}$ eğrisine de Γ eğrisinin ***ortak Mannheim eğrisi*** denir. $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ çiftine bir ***Mannheim çifti*** denir [4].

$(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ sırasıyla (I, α) ve (I, α^*) koordinat komşuluklarıyla verilen ve yay parametreleri yine sırasıyla s ve s^* olan Mannheim eğri çifti olsun. Γ eğrisi Mannheim eğrisi ve $\tilde{\Gamma}$ eğrisi de, Γ eğrisinin ortak Mannheim eğrisidir. Γ boyunca Frenet çatı alanı $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$. $\alpha(s)$ için $V_1(s)$ tanjant vektör alanı, $V_2(s)$ normal vektör alanı ve $V_3(s)$ binormal vektör alanıdır.



Şekil 1.1.7

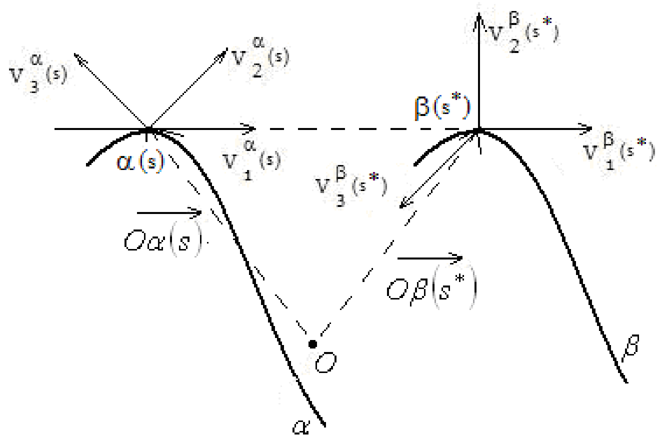
2. EĞRİ ÇİFTLERİNİN FRENET VEKTÖRLERİNİN LİNEER BAĞIMLILIĞI

Bu bölümde Γ ve $\tilde{\Gamma}$ iki eğri olsun, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ sırasıyla $\Gamma : (I,\alpha)$ ve $\tilde{\Gamma} : (J,\beta)$ koordinat komşuluklarıyla verilsin s ve s^* yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktalarında Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin Frenet-3 ayaklıları sırasıyla

$$\{V_1^\alpha(s), V_2^\alpha(s), V_3^\alpha(s)\} \text{ ve } \{V_1^\beta(s^*), V_2^\beta(s^*), V_3^\beta(s^*)\}$$

olmak üzere bu eğriler arasında $\{V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$, $\{V_1^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$, $\{V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$, $\{V_2^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$, $\{V_2^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$, $\{V_3^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ ikililerinin lineer bağımlı olma durumu incelenecektir.

2.1 $\{V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$ İkilisinin Lineer Bağımlı Olma Durumu



Şekil 2.1

Şekil 2.1' den

$$O\beta(s^*) = O\alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s)$$

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s) \tag{2.1.1}$$

olmak üzere $\{V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$ lineer bağımlı olduğundan $V_1^\alpha(s) = \varepsilon V_1^\beta(s^*)$ yazılabilir. Bu eğriler sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ ile gösterilmiş olsun. Burada

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \varepsilon = \pm 1 \tag{2.1.2}$$

ve s, s^* sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin yay parametreleridir.

Şekil 2.1'den yararlanılarak

$$\langle V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\rangle = \langle V_2^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\rangle = \langle V_1^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\rangle = \langle V_3^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\rangle = 0 \tag{2.1.3}$$

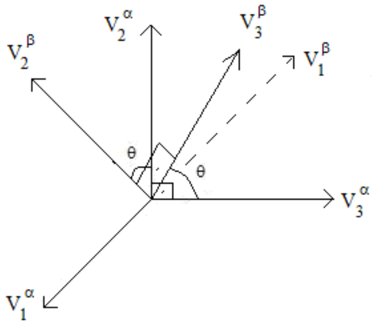
eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla $\theta = \theta(s)$ dönme açısı olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} V_2^{\beta} &= \cos\theta V_2^{\alpha} - \sin\theta V_3^{\alpha} \\ V_3^{\beta} &= \sin\theta V_2^{\alpha} + \cos\theta V_3^{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{2.1.4}$$

ve buradan da

$$\left.\begin{aligned} V_3^{\alpha} &= \cos\theta V_3^{\beta} + \sin\theta V_2^{\beta} \\ V_2^{\alpha} &= -\sin\theta V_3^{\beta} + \cos\theta V_2^{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{2.1.5}$$

dönme denklemleri oluşturulabilir.



Şekil 2.2

Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \|\beta(s^*) - \alpha(s)\| = \|\lambda V_1^{\alpha}(s)\| = \lambda \tag{2.1.6}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, "Eş. 2.1.1" in her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_1^{\alpha}(s) + \lambda V_1^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')V_1^{\alpha}(s) + \lambda k_1^{\alpha}(s) V_2^{\alpha}(s) \tag{2.1.7}$$

bulunur. "Eş. 2.1.7" in her iki tarafı $V_2^{\alpha}(s)$ ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^{\beta}(s^*), V_2^{\alpha}(s)\rangle\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')\langle V_1^{\alpha}(s), V_2^{\alpha}(s)\rangle + \lambda k_1^{\alpha}(s)\langle V_2^{\alpha}(s), V_2^{\alpha}(s)\rangle$$

"Eş. 2.1.3" in 2. eşitliği kullanılarak,

$$\lambda k_1^\alpha = 0$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur.

i) $\lambda = 0$, $k_1^\alpha \neq 0$ durumu: "Eş. 2.1.6" dan Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktalarda çakıştığı ve dolayısıyla bu iki eğrinin aynı gösterime sahip olduğu sonucuna varılır. $k_1^\alpha \neq 0$ olduğundan $\tilde{\Gamma}$ eğrisi de sıfırdan farklı eğriliğe sahiptir. "Eş. 2.1.7" den,

$$V_1^\beta (s^*) \frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha (s) \tag{2.1.8}$$

elde edilir ki bu da,

$$\frac{ds^*}{ds} = 1$$

olup Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin yay parametreleri arasında

$$s^* = s + c,\ c \in IR$$

şeklinde bir bağıntısının olacağı anlamına gelir. Karşılıklı noktalar arasındaki uzaklık sıfır olduğundan $\beta(s^*) = \alpha(s)$, dolayısıyla $c = 0$ bulunur. Bu ise (I,α) ile (I,β) koordinat komşuluklarının aynı olması anlamına gelir. Diğer taraftan "Eş. 2.1.4" ün 1. eşitliğinin türevi alınırsa,

$$V_2^{\beta\,\prime} = -\theta' \sin\theta V_2^\alpha + \cos\theta V_2^{\alpha\,\prime} - \theta' \cos\theta V_3^\alpha - \sin\theta V_3^{\alpha\,\prime}$$

$$-k_1^\beta V_1^\beta + k_2^\beta V_3^\beta = -k_1^\alpha \cos\theta V_1^\alpha + (k_2^\alpha - \theta') \sin\theta V_2^\alpha + (k_2^\alpha - \theta') \cos\theta V_3^\alpha \tag{2.1.9}$$

elde edilir "Eş. 2.1.8"den yararlanılarak,

$$k_2^\beta V_3^\beta = (k_1^\beta - k_1^\alpha \cos\theta) V_1^\alpha + (k_2^\alpha - \theta') \sin\theta V_2^\alpha + (k_2^\alpha - \theta') \cos\theta V_3^\alpha$$

$$V_3^\beta = \left(\frac{k_1^\beta - k_1^\alpha \cos\theta}{k_2^\beta}\right) V_1^\alpha + \left(\frac{k_2^\alpha - \theta'}{k_2^\beta}\right) \sin\theta V_2^\alpha + \left(\frac{k_2^\alpha - \theta'}{k_2^\beta}\right) \cos\theta V_3^\alpha$$

bulunur. Yine "Eş. 2.1.4" ün 2. eşitliğinden yararlanılarak,

$$\left(\frac{k_1^\beta - k_1^\alpha \cos\theta}{k_2^\beta}\right) = 0$$

$$\left(\frac{k_2^\alpha - \theta'}{k_2^\beta}\right) \sin\theta = \sin\theta \ , \quad \left(\frac{k_2^\alpha - \theta'}{k_2^\beta}\right) \cos\theta = \cos\theta$$

bulunur. Dolayısıyla

$$k_1^\beta = k_1^\alpha \cos\theta \ , \ k_2^\alpha - k_2^\beta = \theta' \tag{2.1.10}$$

elde edilir. "Eş. 2.1.4" ün 2. eşitliğinin türevi alınırsa,

$$-k_2^\beta V_2^\beta = -k_1^\alpha \sin\theta V_1^\alpha + (\theta' - k_2^\alpha)\cos\theta V_2^\alpha + (k_2^\alpha - \theta')\sin\theta V_3^\alpha$$

$$V_2^\beta = \frac{-k_1^\alpha \sin\theta}{-k_2^\beta} V_1^\alpha + \frac{(\theta' - k_2^\alpha)}{-k_2^\beta}\cos\theta V_2^\alpha + \frac{(k_2^\alpha - \theta')}{-k_2^\beta}\sin\theta V_3^\alpha \qquad (2.1.11)$$

"Eş. 2.1.4" eşitliklerinin 1. eşitliğinden yararlanılarak,

$$k_1^\alpha \sin\theta = 0$$

$$\frac{(k_2^\alpha - \theta')}{k_2^\beta}\cos\theta = \cos\theta \ , \ \frac{(\theta' - k_2^\alpha)}{k_2^\beta}\sin\theta = -\sin\theta$$

bulunur. Dolayısıyla da

$$k_1^\alpha \sin\theta = 0$$

$$\theta = k\pi \ , \ k \in Z \ , \ k_1^\beta = \pm k_1^\alpha \ , \ k_2^\alpha = 0 \qquad (2.1.12)$$

bulunur. Burada k_1^β, k_1^α lineer bağımlı olduğundan $k_2^\alpha = 0$ elde edilir. "Eş. 2.1.4", "Eş. 2.1.10" ve "Eş. 2.1.11" birlikte değerlendirildiğinde;

$$V_2^\beta = \pm V_2^\alpha \ , \ V_3^\beta = \pm V_3^\alpha$$

ilk eşitliğin türevi alınırsa "Eş. 2.1.9",

$$-k_1^\beta V_1^\beta + k_2^\beta V_3^\beta = -k_1^\alpha V_1^\alpha$$

halini alır. Buradan da $k_2^\beta = k_2^\alpha = 0$ elde edilir. Bu durumda şu teorem verilebilir;

Teorem 2.1.1 E^3 3-boyutlu Öklid uzayında $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ teğetleri lineer bağımlı eğri çifti olan Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklığın sıfır olması için gerek ve yeter şart Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin sıfırdan farklı aynı eğriliğe ve aynı koordinat komşuluğuna sahip düzlemsel eğriler olmasıdır.

ii) $\lambda \neq 0$, $k_1^\alpha = 0$ durumu: Bu durumda Γ bir doğru olup dolayısıyla $k_2^\alpha = 0$ yani Γ bir düzlemsel eğridir. "Eş. 2.1.1" her iki tarafının türevi alınırsa,

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')V_1^\alpha(s) \qquad (2.1.13)$$

elde edilir. Bu ifadede her iki taraf $V_1^\beta(s^*)$ ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\frac{ds^*}{ds} = \langle V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\rangle(1+\lambda')$$

$$\Rightarrow \frac{ds^*}{ds} = \varepsilon(1+\lambda')$$

$$\Rightarrow ds^* = \varepsilon(1+\lambda')ds$$

$$s^* = \varepsilon(s+\lambda) + c_1 \ , \ c_1 \in IR \tag{2.1.14}$$

“Eş. 2.1.9” den yararlanılarak

$$-k_1^\beta V_1^\beta + k_2^\beta V_3^\beta = -\theta' \sin\theta V_2^\alpha - \theta' \cos\theta V_3^\alpha$$

bulunur. “Eş. 2.1.13” den

$$k_2^\beta V_3^\beta = k_1^\beta (1+\lambda')\frac{ds}{ds^*} V_1^\alpha - \theta' \sin\theta V_2^\alpha - \theta' \cos\theta V_3^\alpha$$

elde edilir. Buradan V_3^β vektörünün V_1^α üzerinde bir bileşeni olmadığından

$$k_1^\beta (1+\lambda') = 0$$

olacaktır. Bu durumda;

a) $k_1^\beta = 0$ ve $1+\lambda' \neq 0$ ise: $\tilde{\Gamma}$ eğrisi de bir doğru olur. $\lambda \neq 0$ olduğundan Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrileri aynı düzlemde paralel iki doğru olur. Dolayısıyla iki eğrinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sıfırdan farklı bir sabit olacaktır.

b) $k_1^\beta \neq 0$ ve $1+\lambda' = 0$ ise: $\lambda = -s + c_2$, $c_2 \in IR$ olacaktır. “Eş. 2.1.14” den

$$s^* = \varepsilon\, c_2 + c_1 = sabit$$

elde edilir. Bu ise $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin tek bir noktadan ibaret olması demektir. Dolayısıyla “Eş. 2.1.1” yazılamaz. Böyle bir durumda Γ ile $\tilde{\Gamma}$ bir eğri çifti oluşturmaz.

Teorem 2.1.2 E^3 3-boyutlu Öklid uzayında $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ teğetleri lineer bağımlı eğri çifti verilsin. Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasında sıfırdan farklı bir uzaklığın olması için gerek ve yeter şart Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin paralel iki doğru olmasıdır.

Sonuç 2.1.1 Γ ile $\tilde{\Gamma}$ teğetleri, lineer bağımlı olan iki eğri çifti olsun. Bu durumda Mannheim teoremi bu eğriler için sağlanmaz.

İspat: $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ E^3 de bir Mannheim eğri çifti olmak üzere, $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktaları, $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ çiftinin karşılıklı iki noktası, M ve M^* bu noktalarda eğrilik merkezleri için olan oran

$$\frac{\|\beta(s^*)M\|}{\|\alpha(s)M\|} \div \frac{\|\beta(s^*)M^*\|}{\|\alpha(s)M^*\|}$$

sabittir. Buna göre

$$\begin{aligned} \alpha(s)M &= M - \alpha(s) \\ &= OM - O\alpha(s) \end{aligned}$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s)$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa

$$\left\| \alpha(s) M \right\| = \left\| \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha \right\| = \frac{1}{k_1^\alpha} \left\| V_2^\alpha \right\| = \frac{1}{k_1^\alpha} .$$

Yine,

$$\alpha(s) M^* = M^* - \alpha(s)$$

$$= OM^* - O\alpha(s)$$

$$= \beta(s) + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta(s) - O\alpha(s)$$

$$= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

$$= \alpha + \lambda V_1^\alpha - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

$$= \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa

$$\left\| \alpha(s) M^* \right\| = \sqrt{\langle \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta , \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \langle V_1^\alpha , V_2^\beta \rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \langle V_2^\beta , V_1^\alpha \rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta} \right)^2 \langle V_2^\beta , V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^\beta} \right)^2} .$$

Benzer şekilde,

$$\beta(s^*) M = OM - O\beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_1^\alpha$$

$$= \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha .$$

Norm alınırsa,

$$\left\|\beta(^{*})M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \lambda V_1^{\alpha}\right\|$$

$$= \sqrt{\langle \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \lambda V_1^{\alpha}, \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \lambda V_1^{\alpha} \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{{k_1^{\alpha}}^2} + \lambda^2}$$

$$\beta(^{*})M^{*} = OM^{*} - O\beta(^{*})$$

$$= \beta(^{*}) + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta} - \beta(^{*}) = \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}.$$

Son olarak,

$$\left\|\beta(^{*})M^{*}\right\| = \frac{1}{k_1^{\beta}}$$

olduğundan,

$$\frac{\left\|\beta(^{*})M\right\|}{\left\|\alpha()M\right\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{{k_1^{\alpha}}^2} + \lambda^2}}{\frac{1}{k_1^{\alpha}}} = \sqrt{1 + {k_1^{\alpha}}^2 \lambda^2}$$

$$\frac{\left\|\beta(^{*})M^{*}\right\|}{\left\|\alpha()M^{*}\right\|} = \frac{\frac{1}{k_1^{\beta}}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 {k_1^{\beta}}^2 + 1}}$$

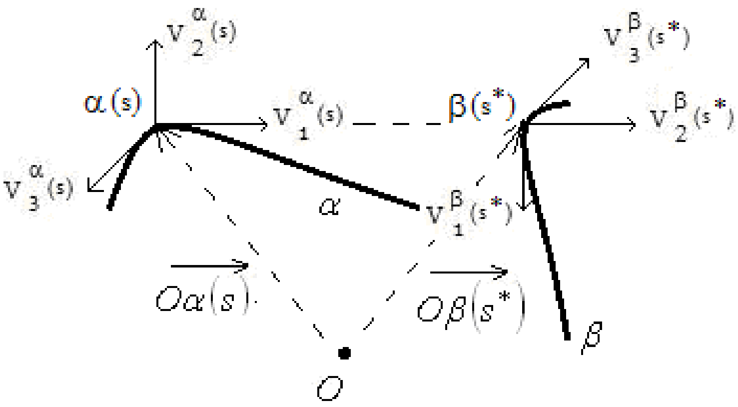
bulunur. Buradan

$$\frac{\left\|\beta(^{*})M\right\|}{\left\|\alpha()M\right\|} \div \frac{\left\|\beta(^{*})M^{*}\right\|}{\left\|\alpha()M^{*}\right\|} = \sqrt{\left(1 + {k_1^{\alpha}}^2 \lambda^2\right)\left(\lambda^2 {k_1^{\beta}}^2 + 1\right)}$$

$k_1^{\alpha} = k_2^{\alpha} = 0$ olması durumunda oranın sabit olmadığı görülür.

Sonuç 2.1.2 Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrileri düzlemseldir.

2.2 $\{V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\}$ İkilisinin Lineer Bağımlı Olma Durumu



Şekil 2.3

Şekil 2.3 yardımı ile,

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^{\alpha}(s) \tag{2.2.1}$$

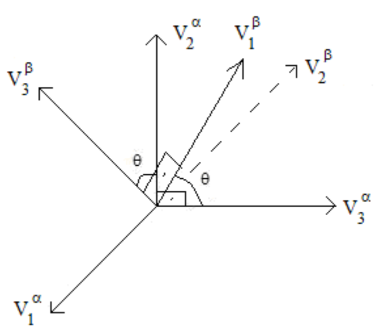
eşitliği yazılabilir. Ayrıca $\{V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\}$ lineer bağımlı olduğundan $V_1^{\alpha}(s) = \varepsilon V_2^{\beta}(s^*)$'dir. Bu eğriler sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ olarak verilsin. Burada

$$\langle V_1^{\alpha}, V_2^{\beta} \rangle = \varepsilon = \pm 1 \tag{2.2.2}$$

ve s, s^* sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin yay parametreleridir. Ayrıca $V_1^{\alpha}(s) \perp V_1^{\beta}(s^*)$ olduğundan α ve β eğrilerinin involüt-evolüt eğri çifti olma durumunu sağladığı söylenebilir. Şekil 2.3'den yararlanılarak,

$$\langle V_1^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*) \rangle = \langle V_2^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*) \rangle = \langle V_3^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*) \rangle = \langle V_1^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*) \rangle = 0 \tag{2.2.3}$$

eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla $\theta = \theta(s)$ dönme açısı olmak üzere



Şekil 2.4

$$\left.\begin{aligned} V_3^{\beta} &= \cos\theta V_2^{\alpha} - \sin\theta V_3^{\alpha} \\ V_1^{\beta} &= \sin\theta V_2^{\alpha} + \cos\theta V_3^{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

ve buradan da

$$\left.\begin{aligned} V_2^{\alpha} &= \cos\theta V_3^{\beta} + \sin\theta V_1^{\beta} \\ V_3^{\alpha} &= -\sin\theta V_3^{\beta} + \cos\theta V_1^{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.5}$$

dönme denklemleri oluşturulabilir. Diğer taraftan, “Eş. 2.2.1” in her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_1^{\alpha}(s) + \lambda V_1^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')V_1^{\alpha}(s) + \lambda k_1^{\alpha}(s)V_2^{\alpha}(s) \tag{2.2.6}$$

bulunur. “Eş. 2.2.6” nın her iki tarafı $V_1^{\alpha}(s)$ ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^{\beta}(s^*), V_1^{\alpha}(s)\rangle\frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')\langle V_1^{\alpha}(s), V_1^{\alpha}(s)\rangle + \lambda k_1^{\alpha}(s)\langle V_2^{\alpha}(s), V_1^{\alpha}(s)\rangle$$

“Eş. 2.2.3” in 1. eşitliği de kullanılarak

$$1+\lambda' = 0$$

$$\lambda' = -1$$

$$\lambda = c - s$$

bulunur. Buna göre Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \|\beta(s^*) - \alpha(s)\| = \|\lambda V_1^{\alpha}(s)\| = \lambda = |c-s| \tag{2.2.7}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 2.2.1 α ve β eğrileri arasındaki uzaklık sabit değildir.

Teorem 2.2.1 $\{V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\}$ ikilisi lineer bağımlı ise $\{V_2^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\}$ ve $\{V_3^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ ikilileri de lineer bağımlıdır.

İspat:

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c-s)V_1^{\alpha}(s)$$

$$\beta'(s^*) = V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + (-1)V_1^{\alpha} + V_1^{\alpha\,\prime}(c-s) = (c-s)k_1^{\alpha}V_2^{\alpha}$$

$$\beta'(s^*) = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds}$$

bulunur. Bu ifadelerden faydalanılarak

$$\left(-s\right)k_1 V_2^{\alpha}(s) = V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} \tag{2.2.8}$$

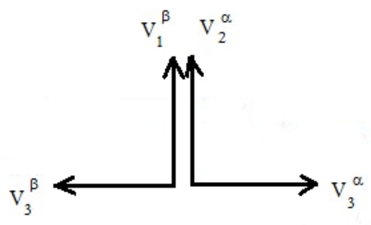
elde edilir. Bu eşitlikten $\{V_2^{\alpha}, V_1^{\beta}\}$ ikilisinin lineer bağımlı olduğu görülür, dolayısıyla $\{V_3^{\alpha}, V_3^{\beta}\}$ ikilisi çatı gereğince lineer bağımlı olur.

Sonuç 2.2.2 $\{V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\}$, $\{V_2^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\}$ ve $\{V_3^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ ikilileri lineer bağımlı ise $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ olur ve θ, $\sin\theta$, $\cos\theta$ değerleri sabit olur. Böyle bir durumda;

$$\cos\theta = 0 \text{ , } \sin\theta = \mu = \pm 1 \tag{2.2.9}$$

ifadesi yazılabilir ve $\theta' = 0$.

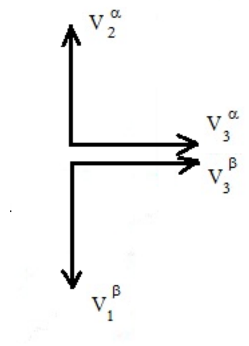
a) $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $\mu = +1$ olur buna göre;



Şekil 2.5

şekli çizilebilir.

b) $\theta = \frac{3\pi}{2}$ için $\mu = -1$ olur buna göre;



Şekil 2.6

şekli elde edilebilir.

Teorem 2.2.2 $\{V_1^{\alpha}, V_2^{\beta}\}$ ikilisi ortonormal ise α ve β eğrileri düzlemsel iki eğridir.

İspat: Dönme denklemleri;

$$\left.\begin{aligned} V_3^{\beta} &= -\mu V_3^{\alpha} \\ V_1^{\beta} &= \mu V_2^{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.10}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliklerin ikincisi "Eş. 2.2.8" de yerine yazılırsa

$$(1 - s)k_1^{\alpha} = \mu \frac{ds^*}{ds}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{(1 - s)k_1^{\alpha}}{\mu} \tag{2.2.11}$$

ifadesi bulunur. Buradan dönme denklemleri ve "Eş. 2.2.9" kullanılarak "Eş. 2.2.4" in 1. sinde s ye göre türev uygulanırsa

$$V_3^{\beta\,\prime} = -\sin\theta\theta' V_2^{\alpha} + V_2^{\alpha\,\prime}\cos\theta - \cos\theta\theta' V_3^{\alpha} - V_3^{\alpha\,\prime}\sin\theta$$

$$-k_2^{\beta} V_2^{\beta} \frac{ds^*}{ds} = k_2^{\alpha} V_2^{\alpha} \mu$$

ifadesi bulunur. Bulunan bu ifadenin her iki tarafı V_2^{α} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$-k_2^{\beta} \langle V_2^{\beta}, V_2^{\alpha} \rangle \frac{ds^*}{ds} = k_2^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_2^{\alpha} \rangle \mu$$

$$k_2^{\alpha} = 0$$

ifadesi bulunur. Aynı ifadenin iki tarafı V_2^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$-k_2^{\beta} \langle V_2^{\beta}, V_2^{\beta} \rangle \frac{ds^*}{ds} = k_2^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta} \rangle \mu$$

$$k_2^{\beta} = 0$$

bulunur. $\{V_1^{\alpha}, V_2^{\beta}\}$ ortonormal iken $k_2^{\beta} = k_2^{\alpha} = 0$. Buna göre α ve β eğrileri düzlemsel iki eğri olur. Ayrıca $V_1^{\beta} = \mu V_2^{\alpha}$ ifadesinde türev uygulanırsa

$$V_1^{\beta} = \mu V_2^{\alpha}$$

$$V_1^{\beta\,\prime} = \mu V_2^{\alpha\,\prime}$$

$$k_1^{\beta} V_2^{\beta} \frac{ds^*}{ds} = (-k_1^{\alpha} V_1^{\alpha} + k_2^{\alpha} V_3^{\alpha})\mu$$

$k_2^{\alpha} = 0$ olduğundan

$$k_1^\beta V_2^\beta \frac{ds^*}{ds} = -k_1^\alpha V_1^\alpha \mu$$

iken $V_1^\alpha = \varepsilon V_2^\beta$ olduğundan

$$k_1^\beta V_2^\beta \frac{ds^*}{ds} = -k_1^\alpha \varepsilon V_2^\beta \mu$$

“Eş. 2.2.11” ifadesinden faydalanılarak

$$k_1^\beta V_2^\beta \frac{(c-s)k_1^\alpha}{\mu} = -k_1^\alpha \varepsilon V_2^\beta \mu$$

$$k_1^\beta = -\frac{\varepsilon\mu^2}{(c-s)} = -\frac{\varepsilon}{(c-s)}, \; c \neq s$$

Sonuç 2.2.3 Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrileri $\{V_1^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$ vektör çifti lineer bağımlı olan iki eğri çifti olsun. Bu durumda Mannheim teoremi bu eğriler için sağlanmaz.

İspat:

$$\begin{aligned}
\alpha(s)M &= M - \alpha(s) \\
&= OM - O\alpha(s) \\
&= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa

$$\|\alpha(s)M\| = \left\| \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha \right\| = \frac{1}{k_1^\alpha} \|V_2^\alpha\| = \frac{1}{k_1^\alpha}$$

Yine,

$$\begin{aligned}
\alpha(s)M^* &= M^* - \alpha(s) \\
&= OM^* - O\alpha(s) \\
&= \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta(s) - O\alpha(s) \\
&= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \\
&= \alpha + \lambda V_1^\alpha - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \\
&= \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa,

$$\left\|\alpha(s)M^*\right\| = \sqrt{\langle \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta, \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_1^\alpha, V_2^\beta\rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2 \langle V_2^\beta, V_2^\beta\rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\varepsilon + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\varepsilon + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{2\lambda\varepsilon}{k_1^\beta} + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}\,.$$

Benzer şekilde,

$$\beta(s^*)M = OM - O\beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_1^\alpha$$

$$= \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha\,.$$

Yine norm hesaplanırsa,

$$\left\|\beta(s^*)M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha\right\|$$

$$= \sqrt{\langle \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha, \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2}\,.$$

Son olarak,

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta - \beta(s^*) = \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|}=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{k_1^{\alpha\,2}}+\lambda^2}}{\dfrac{1}{k_1^{\alpha}}}=\sqrt{1+k_1^{\alpha\,2}\lambda^2}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|}=\frac{\dfrac{1}{k_1^{\beta}}}{\sqrt{\lambda^2+\dfrac{2\lambda\varepsilon}{k_1^{\beta}}+\left(\dfrac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2k_1^{\beta\,2}+2\lambda\varepsilon k_1^{\beta}+1}}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|}\div\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|}=\sqrt{\left(1+k_1^{\alpha\,2}\lambda^2\right)\left(\lambda^2k_1^{\beta\,2}+2\lambda\varepsilon k_1^{\beta}+1\right)}$$

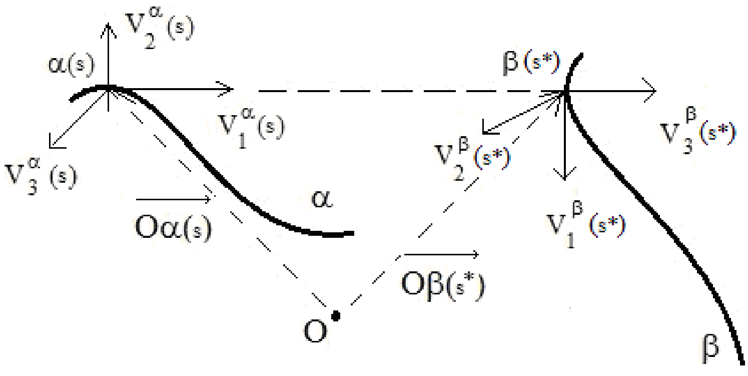
elde edilir ve bu ifadenin sabit olmadığı görülür.

Sonuç 2.2.4 Γ ile $\tilde{\Gamma}$ eğrileri düzlemseldir.

Sonuç 2.2.5 Γ ile $\tilde{\Gamma}$ düzlemsel eğrileri için Bertrand teoremi geçersizdir.

İspat: $\tilde{\Gamma}$, $\Gamma\subset E^3$ eğrileri (I,α), (I,β) koordinat komşuluklarıyla ile verilsin. Γ eğrisinin eğrilikleri k_1^{α}, k_2^{α} ise $(\tilde{\Gamma},\Gamma)$ Bertrand çiftidir $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\lambda,\mu\in IR$ için $\lambda k_1^{\alpha}+\mu k_2^{\alpha}=1$. Bu durumda $k_2^{\alpha}=0$, $k_1^{\alpha}=\dfrac{ds^*\mu}{ds(s^*-s)}$ olduğundan bu tip eğrilerde Bertrand teoremi sağlanmaz.

2.3 $V_1^{\alpha}(s)$, $V_3^{\beta}(s^*)$ İkilisinin Lineer Bağımlı Olma Durumu



Şekil 2.7

Şekil 2.7 yardımı ile,

$$O\beta(s^*) = O\alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s)$$

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s) \tag{2.3.1}$$

yazılabilir. Ayrıca $\{V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ lineer bağımlı olduğundan $V_3^\beta(s^*) = \varepsilon V_1^\alpha(s)$ dir. Bu eğriler sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ olarak verilsin. Burada

$$\langle V_1^\alpha, V_3^\beta \rangle = \varepsilon = \pm 1 \tag{2.3.2}$$

ve s, s^* sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin yay parametreleridir. Şekilden yararlanılarak,

$$\langle V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\rangle = \langle V_1^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\rangle = \langle V_2^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\rangle = \langle V_3^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\rangle = 0 \tag{2.3.3}$$

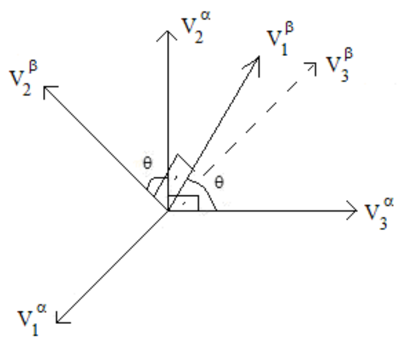
eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla $\theta = \theta(s)$ dönme açısı olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} V_2^\beta &= \cos\theta V_2^\alpha - \sin\theta V_3^\alpha \\ V_1^\beta &= \sin\theta V_2^\alpha + \cos\theta V_3^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2.3.4}$$

ve buradan

$$\left.\begin{aligned} V_2^\alpha &= \cos\theta V_2^\beta + \sin\theta V_1^\beta \\ V_3^\alpha &= -\sin\theta V_2^\beta + \cos\theta V_1^\beta \end{aligned}\right\} \tag{2.3.5}$$

dönme denklemleri oluşturulabilir.



Şekil 2.8

Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \|\beta(s^*) - \alpha(s)\| = \|\lambda V_1^\alpha(s)\| = \lambda \tag{2.3.6}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan, "Eş. 2.3.1" in her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_1^\alpha(s) + \lambda V_1^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')V_1^\alpha(s) + \lambda k_1^\alpha(s) V_2^\alpha(s) \tag{2.3.7}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $V_1^\alpha(s)$ ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^\beta(s^*), V_1^\alpha(s)\rangle \frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')\langle V_1^\alpha(s), V_1^\alpha(s)\rangle + \lambda k_1^\alpha(s)\langle V_2^\alpha(s), V_1^\alpha(s)\rangle$$

"Eş. 2.3.3" ün 1. eşitliği kullanılarak,

$$1+\lambda' = 0$$

$$\lambda' = -1$$

$$\lambda = -s + c$$

elde edilir. Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \|\beta(s^*) - \alpha(s)\| = \|\lambda V_1^\alpha(s)\| = \lambda = |c-s| \tag{2.3.8}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 2.3.1 α ve β eğrileri arasındaki uzaklık sabit değildir.

Teorem 2.3.1 $\{V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ ikilisi lineer bağımlı ise $\{V_2^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$ ve $\{V_3^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$ ikilileri de lineer bağımlıdır.

İspat:

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c-s)V_1^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds^*}\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + (-1)V_1^\alpha + V_1^{\alpha\prime}(c-s)$$

$$= (c-s)k_1^\alpha V_2^\alpha$$

bulunur. Bu ifadelerden faydalanılarak

$$(c-s)k_1^\alpha V_2^\alpha(s) = V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} \tag{2.3.9}$$

bulunur.

Sonuç 2.3.2 $\{V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$, $\{V_2^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$ ve $\{V_3^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$ ikilileri lineer bağımlı ise $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ olur ve θ, $\sin\theta$, $\cos\theta$ değerleri sabit olur. Böyle bir durumda

$$\cos\theta = 0\ ,\ \sin\theta = \mu = \pm 1 \tag{2.3.10}$$

bulunur ve $\theta' = 0$. Dönme denklemleri

$$\left.\begin{aligned} V_2^\beta &= -\mu V_3^\alpha \\ V_1^\beta &= \mu V_2^\alpha \end{aligned}\right\} \tag{2.3.11}$$

olarak oluşturulabilir. "Eş. 2.3.11" in 2. eşitliği "Eş. 2.3.9" de yerine yazılırsa

$$\left(1 - s\, k_1^{\alpha}\right) V_2^{\alpha} = \mu V_2^{\alpha} \frac{ds^*}{ds}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\left(1 - s\, k_1^{\alpha}\right)}{\mu} \tag{2.3.12}$$

eşitliği bulunur. Buna bağlı olarak “Eş. 2.3.11” in 1. eşitliğinde türev alınırsa $\theta = \theta(s)$ ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere;

$$V_2^{\beta} = -\mu V_3^{\alpha}$$

$$V_2^{\beta\,\prime} \frac{ds^*}{ds} = -\mu V_3^{\alpha\,\prime}$$

$$\left(-k_1^{\beta} V_1^{\beta} + k_2^{\beta} V_3^{\beta}\right) \frac{ds^*}{ds} = \mu k_2^{\alpha} V_2^{\alpha} \tag{2.3.13}$$

bulunur. $V_3^{\beta}(s^*) = \varepsilon V_1^{\alpha}(s)$ eşitliği ve “Eş. 2.3.3” in 1. eşitliği kullanılarak “Eş. 2.3.13” ifadesinin her iki tarafı V_1^{α} ile çarpılırsa

$$\left(-k_1^{\beta} \langle V_1^{\beta}, V_1^{\alpha} \rangle + k_2^{\beta} \langle V_3^{\beta}, V_1^{\alpha} \rangle\right) \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$k_2^{\beta} \varepsilon \frac{ds^*}{ds} = 0 \tag{2.3.14}$$

bulunur. Ayrıca “Eş. 2.3.11” in 2. eşitliğinde s ye göre türev alınırsa

$$V_1^{\beta} = \mu V_2^{\alpha}$$

$$V_1^{\beta\,\prime} \frac{ds^*}{ds} = \mu V_2^{\alpha\,\prime}$$

$$k_1^{\beta} V_2^{\beta} \frac{ds^*}{ds} = \mu\left(-k_1^{\alpha} V_1^{\alpha} + k_2^{\alpha} V_3^{\alpha}\right) \tag{2.3.15}$$

bulunur. “Eş. 2.3.15” ifadesinin her iki tarafı V_1^{α} ile iç çarpıma tâbi tutulursa, “Eş. 2.3.3” in 2. eşitliği kullanılarak

$$k_1^{\beta} \langle V_2^{\beta}, V_1^{\alpha} \rangle \frac{ds^*}{ds} = -\mu k_1^{\alpha}$$

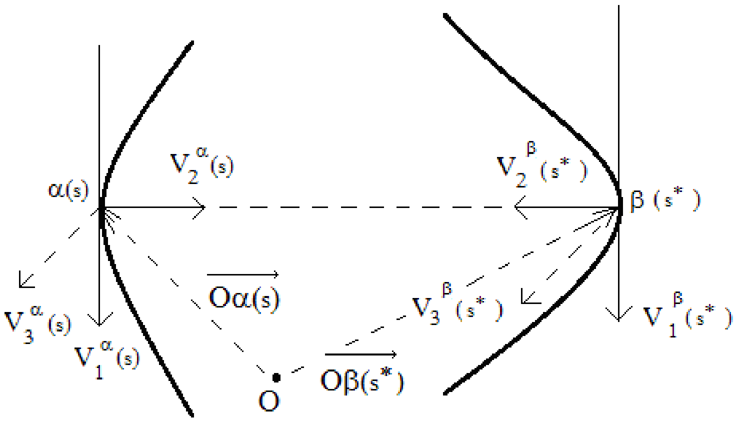
$$k_1^{\alpha} = 0 \tag{2.3.16}$$

bulunur. Bu da $k_2^\alpha = 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca $k_1^\alpha = 0$ olduğundan “Eş. 2.3.13” den yararlanılarak $-k_1^\beta V_1^\beta + k_2^\beta V_3^\beta \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurularak, $\dfrac{ds^*}{ds} = 0$ yazılabilir. Dolayısıyla s ve s^* birbirinden bağımsız parametrelerdir.

Sonuç 2.3.2 $\dfrac{ds^*}{ds} = 0$ ifadesini sağlayacak şekilde bir $\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s)$ ifadesi yazılamaz dolayısıyla böyle bir eğri çiftinden söz edilemez.

2.4 $\{V_2^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$ İkilisinin Lineer Bağımlı Olma Durumu

$\{V_2^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$ ikilisinin lineer bağımlı olması halinde Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrileri Bertrand eğri çifti oluşturur (Tanım 1.1.47). Buna göre, Şekil 2.9 yardımı ile,



Şekil 2.9

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_2^\alpha(s)$$

yazılabilir. Burada Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktalarında Frenet r-ayaklıları

$$\{V_1^\alpha(s), V_2^\alpha(s), V_3^\alpha(s)\} \text{ ve } \{V_1^\beta(s^*), V_2^\beta(s^*), V_3^\beta(s^*)\}$$

ile gösterilmiştir. Buna göre, Γ eğrisinin yay parametresi s ve $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin yay parametresi de s^* olmak üzere,

$$\alpha'(s) = V_1^\alpha(s)$$
$$\beta'(s^*) = V_1^\beta(s^*)$$

iken

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + \lambda V_2^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha(s) + \lambda'(s)V_2^\alpha(s) + \left(-k_1^\alpha(s)V_1^\alpha(s) + k_2^\alpha(s)V_3^\alpha(s)\right)\lambda(s)$$

$$\frac{ds^*}{ds}V_1^\beta(s^*) = \left[(1-\lambda(s)k_1^\alpha(s))V_1^\alpha(s) + \lambda'(s)V_2^\alpha(s) + \lambda(s)k_2^\alpha(s)V_3^\alpha(s)\right]$$

yazılabilir. $\{V_2^\beta(s^*), V_2^\alpha(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan $\widetilde{\Gamma}$ eğrisinin teğeti ile Γ eğrisinin asli normali dik olur;

$$\langle V_1^\beta(s^*), V_2^\alpha(s)\rangle = 0$$

$$\langle \left[(1-\lambda k_1^\alpha)V_1^\alpha + \lambda' V_2^\alpha + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha\right]\frac{ds}{ds^*}, V_2^\alpha\rangle = 0$$

$$(1-\lambda k_1^\alpha)\frac{ds}{ds^*}\langle V_1^\alpha, V_2^\alpha\rangle + \lambda'\frac{ds}{ds^*}\langle V_2^\alpha, V_2^\alpha\rangle + \lambda k_2^\alpha \frac{ds}{ds^*}\langle V_3^\alpha, V_2^\alpha\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(s) = sabit,\ \forall s \in I\,.$$

Halbuki, $V_2^\alpha(s)$ birim normal iken

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_2^\alpha(s)\right\| = |\lambda|,\ \forall\ s \in I$$

$$\Rightarrow d(\alpha(s), \beta(s^*)) = sabit,\ \forall\ s \in I$$

elde edilir.

Sonuç 2.4.1 $(\Gamma, \widetilde{\Gamma})$ Bertrand çifti verilsin. Γ ve $\widetilde{\Gamma}$ sırasıyla, (I,α), (I,β) koordinat komşuluklarıyla verildiğine göre, $\forall\ s \in I$ için $d(\alpha(s), \beta(s^*)) = sabit$.

Teorem 2.4.1 E^n deki eğrilerin cümlesi $Eğ(E^n)$ olsun.

$A \subset Eğ(E^n) \times Eğ(E^n)$, $(\Gamma, \widetilde{\Gamma}) \in A$ ve $(\Gamma, \widetilde{\Gamma})$ Bertrand çiftidir $\Leftrightarrow$ A bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $\Gamma, \widetilde{\Gamma}, \mathrm{T} \subset E^n$ eğrileri, sırasıyla, (I,α), (I,β), (I,γ) koordinat komşuluklarıyla verilsin. $\Gamma, \widetilde{\Gamma}, \mathrm{T}$ eğrilerinin ikinci Frenet vektörleri $V_2^\alpha(s)$, $V_2^\beta(s^*)$, $V_2^\gamma(s^{**})$ ile gösterilsin buna göre

1) A yansıyandır

$\{V_2^\alpha(s), V_2^\alpha(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan $(\Gamma, \Gamma) \in A$

2) A simetriktir

$(\Gamma, \widetilde{\Gamma}) \in A \Rightarrow \{V_2^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$ lineer bağımlı $\Rightarrow$ $\{V_2^\beta(s^*), V_2^\alpha(s)\}$ ikilisi lineer bağımlıdır.

$\Rightarrow (\tilde{\Gamma}, \Gamma) \in A.$

3) A geçişlidir.

$(\Gamma, \tilde{\Gamma}), (\tilde{\Gamma}, \mathrm{T}) \in A \Rightarrow \{V_2^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}, \{V_2^\beta(s^*), V_2^\gamma(s^{**})\}$ lineer bağımlıdır.

$\Rightarrow \{V_2^\alpha(s), V_2^\gamma(s^{**})\}$ lineer bağımlı olur.

$\Rightarrow (\Gamma, \mathrm{T}) \in A.$

Teorem 2.4.2 $\Gamma,\ \tilde{\Gamma} \subset E^3$ eğrileri $(I,\alpha),\ (I,\beta)$ koordinat komşuluklarıyla ile verilsin. Γ eğrisinin eğrilikleri k_1^α, k_2^α ise $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ Bertrand çiftidir $\Leftrightarrow\ \exists\, \lambda, \mu \in IR$ için

$$\lambda k_1^\alpha + \mu k_2^\alpha = 1.$$

İspat: $(\Rightarrow)\ \alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktalarında Frenet 3-ayaklıları, sırasıyla,

$$\{V_1^\alpha(s), V_2^\alpha(s), V_3^\alpha(s)\},\ \{V_1^\beta(s^*), V_2^\beta(s^*), V_3^\beta(s^*)\}$$

olsun. Buna göre, $V_1^\beta(s^*)$ ile $V_1^\alpha(s)$ arasındaki açı θ ve $V_2^\alpha(s)$ normal doğrusuyla $V_1^\beta(s^*)$ teğeti birbirine dik iken eğilim çizgilerinden;

$$V_1^\beta(s^*) = \cos\theta V_1^\alpha(s) + \sin\theta V_3^\alpha(s)$$

yazılabilir. Türev almak suretiyle bu eşitlikten,

$$\left(V_1^\beta(s^*)\right)' \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\cos\theta}{ds} V_1^\alpha(s) + \left(V_1^\alpha(s)\right)' \cos\theta + \frac{d\sin\theta}{ds} V_3^\alpha(s) + \left(V_3^\alpha(s)\right)' \sin\theta$$

$$k_1^\beta(s^*)\, V_2^\beta(s^*) \frac{ds^*}{ds} = k_1^\alpha(s)\, V_2^\alpha(s) \cos\theta - k_2^\alpha(s)\, V_2^\alpha(s) \sin\theta + \frac{d\cos\theta}{ds} V_1^\alpha(s) + \frac{d\sin\theta}{ds} V_3^\alpha(s)$$

$$= \left[k_1^\alpha(s) \cos\theta - k_2^\alpha(s) \sin\theta\right] V_2^\alpha(s) + \frac{d\cos\theta}{ds} V_1^\alpha(s) + \frac{d\sin\theta}{ds} V_3^\alpha(s)$$

elde edilir. $\{V_2^\beta(s^*), V_2^\alpha(s)\}$ lineer bağımlı olduğundan $\theta = sabit$ elde edilir. Buna göre,

$$\beta'(s^*) = V_1^\beta(s^*) = \cos\theta V_1^\alpha(s) + \sin\theta V_3^\alpha(s) \qquad (2.4.1)$$

ve

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_2^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = \frac{ds^*}{ds} V_1^\beta(s^*) = \left(1 - \lambda k_1^\alpha(s)\right) V_1^\alpha(s) + \lambda k_2^\alpha(s)\, V_3^\alpha(s) \qquad (2.4.2)$$

eşitliklerinden, “Eş. 2.4.1” ve “Eş. 2.4.2” arasında oran kurulursa;

$$\frac{\left(1 - \lambda k_1^\alpha(s)\right) \frac{ds}{ds^*}}{\cos\theta} = \frac{\lambda k_2^\alpha(s) \frac{ds}{ds^*}}{\sin\theta}$$

elde edilir. Bu ise

$$\lambda k_1^\alpha(s) + \lambda k_2^\alpha(s)\cot g\theta = 1$$

veya

$$\lambda \cot g\theta = \mu$$

yazılarak

$$\lambda k_1^\alpha(s) + \mu k_2^\alpha(s) = 1$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$ şartın yeterliği, gerek şartın ispatını tersine takip ederek elde edilir.

Örnek 2.4.1 E^3 de üçüncü sınıftan diferensiyellenebilen bir regüler eğri α ve α eğrisinin k_2^α eğriliği için $k_2^\alpha = 0$ olsun, α eğrisi bir dairesel helistir $\Leftrightarrow$ α eğrisi birden fazla Bertrand çiftine dahildir.

Çözüm: α dairesel bir helis ise

$$\alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s\ ,\ -\sin s\ ,\ s)$$

alınabilir. Buradan

$$\alpha'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s\ ,\ -\cos s\ ,\ 1)$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(s)\| = 1$$

olup α eğrisinin yay parametresi s ve dolayısıyla

$$\alpha''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 0)$$

$$\Rightarrow V_2^\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\cos^2 s + \sin^2 s}\right)} = (-\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 0).$$

Buna göre α eğrisinin Bertrand çifti olarak karşılığı $\lambda = \frac{2}{\sqrt{2}}$ için

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_2^\alpha(s)$$

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s\ ,\ -\sin s\ ,\ s) + \frac{2}{\sqrt{2}}(-\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 0)$$

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ s)$$

Diğer taraftan

$$\gamma(s)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 2s)$$

eğrisi için

$$\|\gamma'(s)\|=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{5}=st$$

ve dolayısıyla

$$\gamma''(s)=\frac{\sqrt{2}}{4}(-\cos s\ ,\ -\sin s\ ,\ 0)$$

$$\Rightarrow V_2^{\alpha}(s)=\frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}=(-\cos s\ ,\ -\sin s\ ,\ 0).$$

Buna göre

$$\beta(s^*)=\frac{\sqrt{2}}{4}(\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 2s)+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ 0)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos s\ ,\ \sin s\ ,\ s)$$

olup β eğrisi hem α hem de γ eğrisinin Bertrand çiftine dahildir.

Örnek 2.4.2. Karşılıklı noktalardaki teğetleri φ açısı yapan $(\alpha\ ,\ \beta)$ Bertrand eğri çifti için gösteriniz ki

a) $k_2^{\alpha}=0$ ise her eğrinin sonsuz sayıda Bertrand çifti vardır.

b) $k_2^{\alpha}\neq 0$ ve $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ise Bertrand eğri çiftlerinin eğrilikleri sabittir ve biri diğerlerinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir.

c) k_1^{α} ve k_2^{α} eğriliklerinin her ikisi de sabitse hepsi dairesel helisler olan sonsuz sayıda Bertrand eğri çifti mevcuttur.

Çözüm: $(\alpha\ ,\ \beta)$ Bertrand eğri çifti verilsin. β ve α eğrilerinin Frenet elemanları sırasıyla k_1^{α} , k_1^{β} , k_2^{α} , k_2^{β} , V_1^{β} , V_2^{β} , V_3^{β} , V_1^{α} , V_2^{α} , V_3^{α} olsun

$$\angle(V_1^{\beta},V_1^{\alpha})=\varphi=st$$

veriliyor. α eğrisinin s ve β fonksiyonunun s^* yay parametresi olsun;

a) $k_2^{\alpha}=0$ ise $(\alpha\ ,\ \beta)$ Bertrand eğri çifti olacak şekilde sonsuz çoklukta β eğrisinin mevcut olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\forall\ \lambda\in IR$ ye karşılık;

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_2^\alpha(s)$$

olmak üzere (α, β) çiftinin bir eğri çifti olduğunu göstermek yeterli olur;

$$\beta'(s^*) = V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + V_2^{\alpha\prime}\lambda$$

$$= V_1^\alpha(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + (k_1(s)V_1^\alpha(s) + k_2(s)V_3^\alpha(s))\lambda$$

burada λ sabit olduğundan $\lambda' = 0$. Buna göre;

$$\frac{ds^*}{ds}V_1^\beta(s^*) = (1-\lambda k_1^\alpha(s))V_1^\alpha(s)$$

$$\Rightarrow V_1^\beta(s^*) = \pm V_1^\alpha(s)$$

olup $k_2^\alpha = 0$ iken α düzlemsel olduğundan, β tanım gereğince, α eğrisinin oskülatör düzlemi olarak α eğrisinin yattığı düzlemde kalır ve böylece $k_2^\beta = 0$ dır. O halde α ve β nın Frenet 2-ayaklıları mevcuttur. Halbuki $V_1^\beta = \pm V_1^\alpha$ dir. O halde α ve β eğrilerinin 2-Frenet vektörleri lineer bağımlı olur. Buna göre (α, β) bir Bertrand eğri ikilisidir.

b)

$$k_2^\alpha \neq 0 \ , \ \varphi = \frac{\pi}{2} \ , \ \langle V_1^\beta, V_1^\alpha \rangle = \cos\varphi$$

$$\Rightarrow V_1^\beta = \cos 90 V_1^\alpha + \sin 90 V_3^\alpha$$

$$\Rightarrow V_1^\beta = V_3^\alpha$$

daha önceki teoremlerden

$$\frac{1-\lambda k_1^\alpha}{\cos\varphi} = \frac{\lambda k_2^\alpha}{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow 1-\lambda k_1^\alpha = \lambda k_2^\alpha \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda k_1^\alpha = 1$$

$$k_1^\alpha(s) = \frac{1}{\lambda} \ , \ \lambda \in IR$$

bulunur. λ sabit olduğundan $k_1^\alpha(s)$ sabittir.

$$V_1^\beta = \cos\theta V_1^\alpha + \sin\theta V_3^\alpha$$

$$\langle V_1^\beta, V_1^\alpha \rangle = \cos\theta$$

iken.

c) k_1^α ve k_2^α sabit olsunlar o zaman eğrilikleri sabit olan eğriler dik dairesel silindir helisleri olacaklarından, bu kısmın ilk örneği gereğince iddia açıktır.

Sonuç 2.4.2 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrileri Bertrand eğri çifti için Mannheim teoremi geçersizdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \alpha(s)M &= M - \alpha(s) \\ &= OM - O\alpha(s) \\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa

$$\left\| \alpha(s)M \right\| = \left\| \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha \right\| = \frac{1}{k_1^\alpha} \left\| V_2^\alpha \right\| = \frac{1}{k_1^\alpha}$$

Yine,

$$\begin{aligned} \alpha(s)M^* &= M^* - \alpha(s) \\ &= OM^* - O\alpha(s) \\ &= \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta(s^*) - O\alpha(s) \\ &= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \\ &= \alpha + \lambda V_2^\alpha - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \\ &= \lambda V_2^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(s)M^* \right\| &= \sqrt{\langle \lambda V_2^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta, \lambda V_2^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \langle V_2^\alpha, V_2^\beta \rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \langle V_2^\beta, V_2^\alpha \rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta} \right)^2 \langle V_2^\beta, V_2^\beta \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \varepsilon + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \varepsilon + \left(\frac{1}{k_1^\beta} \right)^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{2\lambda\varepsilon}{k_1^\beta} + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2} \, .$$

Benzer şekilde,

$$\beta(s^*)M = OM - O\beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_2^\alpha$$

$$= \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_2^\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right)V_2^\alpha \, .$$

Yine norm hesaplanırsa,

$$\left\|\beta(s^*)M\right\| = \left\|\left(\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right)V_2^\alpha\right\|$$

$$= \left|\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right| \left\|V_2^\alpha\right\|$$

$$= \left|\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right| .$$

Son olarak,

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta - \beta(s^*) = \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} = \frac{\left|\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right|}{\frac{1}{k_1^\alpha}} = k_1^\alpha \left|\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right|$$

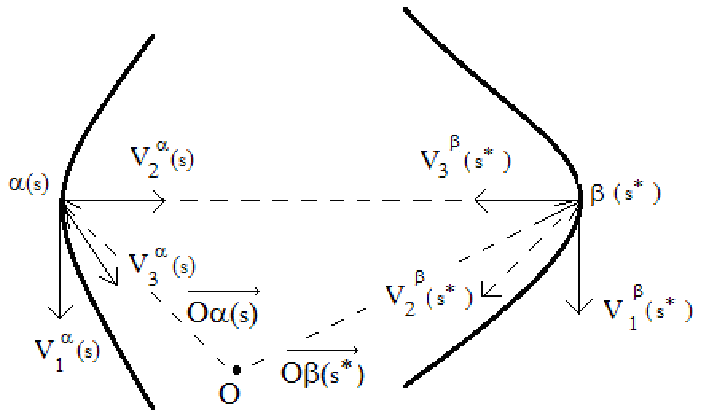
$$\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|}=\frac{\dfrac{1}{k_1^{\beta}}}{\sqrt{\lambda^2+\dfrac{2\lambda\varepsilon}{k_1^{\beta}}+\left(\dfrac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 k_1^{\beta 2}+2\lambda\varepsilon k_1^{\beta}+1}}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|}\div\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|}=k_1^{\alpha}\left|\frac{1}{k_1^{\alpha}}-\lambda\right|\sqrt{\lambda^2 k_1^{\beta 2}+2\lambda\varepsilon k_1^{\beta}+1}$$

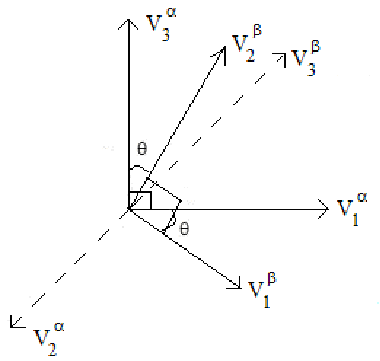
elde edilir ve bu ifadenin sabit olmadığı görülür.

2.5 $\{V_2^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ İkilisinin Lineer Bağımlı Olma Durumu

$\{V_2^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ ikilisinin lineer bağımlı olması halinde Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrileri Mannheim eğri çifti oluşturur (Tanım 1.1.48). Buna göre;



Şekil 2.10



Şekil 2.11

Teorem 2.5.1 E^3 deki Mannheim eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir.

İspat: Şekil 2.10'dan herhangi bir $\lambda(s^*)$ fonksiyonu için

$$\alpha(s) = \beta(s^*) + \lambda(s^*)V_3^\beta(s^*) \tag{2.5.1}$$

yazılabilir. Bu ifadenin türevi alınırsa;

$$\alpha'(s) = \beta'(s^*) + \lambda'(s^*)V_3^\beta(s^*) + V_3^{\beta'}(s^*)\lambda(s^*)$$

$$V_1^\alpha(s)\frac{ds}{ds^*} = V_1^\beta(s^*) + \lambda'(s^*)V_3^\beta(s^*) - k_2^\beta V_2^\beta \lambda(s^*)$$

$$V_1^\alpha(s)\frac{ds}{ds^*} = V_1^\beta(s^*) - \lambda k_2^\beta V_2^\beta(s^*) + \lambda' V_3^\beta(s^*) \tag{2.5.2}$$

elde edilir. V_2^α ve V_3^β lineer bağımlı olduğundan diklik oluşur ve

$$\langle V_1^\alpha, V_3^\beta \rangle = 0$$

$$\langle (V_1^\beta - \lambda k_2^\beta V_2^\beta + \lambda' V_3^\beta)\frac{ds^*}{ds}, V_3^\beta \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle V_1^\beta, V_3^\beta \rangle - \lambda k_2^\beta \langle V_2^\beta, V_3^\beta \rangle + \lambda' \langle V_3^\beta, V_3^\beta \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \lambda' = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = sabit$$

olur. Buradan anlaşılıyor ki λ sıfırdan farklı bir sabittir, diğer taraftan iki nokta arasındaki uzaklık

$$d(\beta(s^*), \alpha(s)) = \|\alpha(s) - \beta(s^*)\| = \|\lambda V_3^\beta\| = \lambda \|V_3^\beta\| = |\lambda|$$

bulunur. Öyle ki

$$d(\beta(s^*), \alpha(s)) = sabit$$

Teorem 2.5.2 E^3 deki bir Γ eğrisi için bir $\tilde{\Gamma}$ vardır öyle ki $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ çifti bir Mannheim eğri çiftidir.

İspat: V_2^α ve V_3^β lineer bağımlı olduğundan "Eş. 2.5.1" den

$$\beta(s^*) = \alpha(s) - \lambda(s)V_2^\alpha(s) \tag{2.5.3}$$

elde edilir. Madem ki λ sıfırdan farklı bir sabit λ sayısının bütün değerleri için bir $\tilde{\Gamma}$ eğrisi vardır.

Teorem 2.5.3 $(\Gamma,\tilde{\Gamma})$, E^3 de bir Mannheim eğri çifti olmak üzere $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin dönmesi

$$k_2^{\beta} = \frac{k_1^{\alpha}}{\lambda k_2^{\alpha}} .$$

İspat: “Eş. 2.5.2” de sıfırdan farklı sabit λ göz önünde tutulmasıyla

$$\lambda' = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$V_1^{\alpha} = \frac{ds^*}{ds} V_1^{\beta} - \lambda k_2^{\beta} \frac{ds^*}{ds} V_2^{\beta} \qquad (2.5.4)$$

elde edilir. Biliyoruz ki Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin eş noktalarında V_1^{α} ve V_1^{β} arasındaki açı θ dır (Şekil 2.11).

$$\left.\begin{aligned} V_1^{\alpha} &= \cos\theta V_1^{\beta} + \sin\theta V_2^{\beta} \\ V_3^{\alpha} &= -\sin\theta V_1^{\beta} + \cos\theta V_2^{\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.5)$$

dır. “Eş. 2.5.4” ve “Eş. 2.5.5” eşitliklerinin birincisi göz önüne alınırsa

$$\cos\theta = \frac{ds^*}{ds} \ , \ \sin\theta = -\lambda k_2^{\beta} \frac{ds^*}{ds} \qquad (2.5.6)$$

bulunur. Bunun dışında s ye göre “Eş. 2.5.3” ün türevinin alınmasıyla

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) - \lambda'(s) V_2^{\alpha}(s) - \lambda(s) V_2^{\alpha\prime}(s)$$

$$V_1^{\beta} = V_1^{\alpha}\frac{ds}{ds^*} - \lambda\left(-k_1^{\alpha}V_1^{\alpha} + k_2^{\alpha}V_3^{\alpha}\right)\frac{ds}{ds^*}$$

$$V_1^{\beta} = V_1^{\alpha}\frac{ds}{ds^*} + V_1^{\alpha}\frac{ds}{ds^*}\lambda k_1^{\alpha} - \lambda k_2^{\alpha}V_3^{\alpha}\frac{ds}{ds^*}$$

$$V_1^{\beta} = \left(1 + \lambda k_1^{\alpha}\right)\frac{ds}{ds^*} V_1^{\alpha} - \lambda k_2^{\alpha}\frac{ds}{ds^*} V_3^{\alpha} \qquad (2.5.7)$$

bulunur. “Eş. 2.5.5” e bağlı olarak

$$\left.\begin{aligned} V_1^{\beta} &= \cos\theta V_1^{\alpha} - \sin\theta V_3^{\alpha} \\ V_2^{\beta} &= \sin\theta V_1^{\alpha} + \cos\theta V_3^{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.8)$$

elde edilir. “Eş. 2.5.7” ve “Eş. 2.5.8” kullanılarak

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \left(1 + \lambda k_1^{\alpha}\right)\frac{ds}{ds^*}$$

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \cos\theta$$

$$\langle V_3^\alpha , V_1^\beta \rangle = -\lambda k_2^\alpha \frac{ds}{ds^*}$$

$$\langle V_3^\alpha , V_1^\beta \rangle = -\sin\theta$$

bulunur. Buradan

$$\cos\theta = \left(1+\lambda k_1^\alpha\right)\frac{ds}{ds^*} \;,\; \sin\theta = \lambda k_2^\alpha \frac{ds}{ds^*} \qquad (2.5.9)$$

elde edilir. "Eş. 2.5.6" ve "Eş. 2.5.9" kullanılarak karşılıklı çarpım yapıldığında

$$\cos^2\theta = \left(1+\lambda k_1^\alpha\right)\left(\frac{ds}{ds^*}\right)\left(\frac{ds^*}{ds}\right) \;,\; \sin^2\theta = -\lambda^2 k_2^\alpha k_2^\beta \frac{ds^*}{ds}\frac{ds}{ds^*}$$

$$\cos^2\theta = 1+\lambda k_1^\alpha \;,\; \sin^2\theta = -\lambda^2 k_2^\alpha k_2^\beta$$

bulunur. Buradan

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

temel denkleminden yararlanılarak

$$k_2^\beta = \frac{k_1^\alpha}{\lambda k_2^\alpha}$$

denklemine ulaşılır.

Sonuç 2.5.1 $\left(\Gamma, \tilde{\Gamma}\right)$ çifti E^3 de bir Mannheim çiftidir. Eşit Mannheim eğrilerinin eşit noktalarda k_2^α ve k_2^β burulmalarının çarpımı sabit değildir. Yani Schell teoremi Mannheim eğrileri için geçersizdir. (Schell teoremi gereğince; $\left(\Gamma, \tilde{\Gamma}\right)$ çifti E^3 de bir Mannheim eğri çifti olmak üzere, bu eğrilerin karşılıklı noktalarında $k_2^\alpha k_2^\beta$ eğrilikler çarpımı sabit olmalıdır.) Tekrardan Teorem 2.5.3' ün ispatında elde edilen

$$\sin^2\theta = -\lambda^2 k_2^\alpha k_2^\beta$$

denklemine bakılırsa kolaylıkla şu sonuç yazılabilir;

Sonuç 2.5.2 Eğer $\left(\Gamma, \tilde{\Gamma}\right)$ çifti E^3 de bir Mannheim çifti ise k_2^α ve k_2^β ters işaretlidir.

Teorem 2.5.4 $\left(\Gamma, \tilde{\Gamma}\right)$ çifti E^3 de bir Mannheim çifti olmak üzere Γ eğrisinin burulması ve eğrilik arasında

$$\mu k_2^\alpha - \lambda k_1^\alpha = 1$$

bağıntısı vardır. Burada λ ve μ sıfırdan farklı reel sayılardır.

İspat: "Eş. 2.5.9" dan

$$\frac{\cos\theta}{1+\lambda k_1^\alpha}=\frac{\sin\theta}{\lambda k_2^\alpha}$$

denklemi düzenlenirse

$$\lambda\cos\theta k_2^\alpha=\lambda k_1^\alpha\sin\theta+\sin\theta$$

$$\lambda\cos\theta k_2^\alpha-\lambda k_1^\alpha\sin\theta=\sin\theta$$

bulunur. Her iki taraf $\sin\theta$ ile bölünürse

$$\frac{\lambda\cos\theta}{\sin\theta}k_2^\alpha-\lambda k_1^\alpha=1$$

$$\frac{\lambda\cos\theta}{\sin\theta}=\mu$$

denilirse

$$\mu k_2^\alpha-\lambda k_1^\alpha=1$$

bulunur.

Sonuç 2.5.3 $(\Gamma,\tilde{\Gamma})$ çifti E^3 de bir mannheim çifti olmak üzere sabit katsayılı k_1^α ve k_2^α arasında bir lineer bağıntı kurulabilir. Yani Bertrand teoremi Mannheim eğrileri için geçerlidir.

Teorem 2.5.5 $(\Gamma,\tilde{\Gamma})$ çifti E^3 de bir Mannheim eğri çifti olmak üzere Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin dönmeleri ve eğrilikleri için aşağıdaki denklemler vardır;

i) $k_1^\beta=-\dfrac{d\theta}{ds^*}$

ii) $k_2^\beta=\sin\theta k_1^\alpha\dfrac{ds}{ds^*}-\cos\theta k_2^\alpha\dfrac{ds}{ds^*}$

iii) $k_1^\alpha=\sin\theta k_2^\beta\dfrac{ds^*}{ds}$

iv) $k_2^\alpha=-\cos\theta k_2^\beta\dfrac{ds^*}{ds}$

İspat: $\langle V_1^\alpha,V_1^\beta\rangle=\cos\theta$ denkleminin s^* a göre türevinin alınmasıyla

$$\langle V_1^\alpha,{V_1^\beta}'\rangle+\langle {V_1^\alpha}',V_1^\beta\rangle=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds^*}$$

$$\langle V_1^\alpha,k_1^\beta V_2^\beta\rangle+\langle k_1^\alpha V_2^\alpha\frac{ds}{ds^*},V_1^\beta\rangle=-\sin\theta\frac{d\theta}{ds^*}$$

$$\langle k_1^\beta V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle + \langle V_1^\beta, k_1^\alpha V_2^\alpha \frac{ds}{ds^*}\rangle = -\sin\theta \frac{d\theta}{ds^*}$$

bulunur. Ayrıca "Eş. 2.5.8" kullanılarak V_2^α ve V_3^β lineer bağımlı olması göz önünde bulundurulursa

$$V_2^\alpha = V_3^\beta$$

yazılabilir.

i) "Eş. 2.5.8" de

$$V_2^\beta = \sin\theta V_1^\alpha + \cos\theta V_3^\alpha$$

iken her iki taraf V_1^α ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle = \sin\theta\langle V_1^\alpha, V_1^\alpha\rangle + \cos\theta\langle V_3^\alpha, V_1^\alpha\rangle$$

$$\langle V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle = \sin\theta$$

bulunur. Yukarıdaki denklemden

$$k_1^\beta\langle V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle + k_1^\alpha \frac{ds}{ds^*}\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds^*}$$

$$k_1^\beta \sin\theta + k_1^\alpha \frac{ds}{ds^*}\langle V_1^\beta, V_3^\beta\rangle = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds^*}$$

$$k_1^\beta = -\frac{d\theta}{ds^*}$$

bulunur. $\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle = 0,\ \langle V_3^\alpha, V_3^\beta\rangle = 0,\ \langle V_1^\alpha, V_3^\beta\rangle = 0,\ \langle V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle = 0$ eşitliklerinin göz önüne alınmasıyla i) aksiyomunun ispat yöntemi ile ii), iii), iv) aksiyomlarının ispatı yapılabilir.

ii)

$$V_2^\beta = \sin\theta V_1^\alpha + \cos\theta V_3^\alpha$$

iken

$$\langle V_2^\beta, V_2^\alpha\rangle = 0$$

bulunur, türev alınırsa

$$\langle V_2^{\beta\,\prime}, V_2^\alpha\rangle + \langle V_2^\beta, V_2^{\alpha\,\prime}\rangle = 0$$

$$\langle \left(-k_1^\beta V_1^\beta + k_2^\beta V_3^\beta\right), V_2^\alpha\rangle + \langle V_2^\beta, \left(-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha\right)\frac{ds}{ds^*}\rangle = 0$$

$$-k_1^\beta\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle + k_2^\beta\langle V_3^\beta, V_2^\alpha\rangle - k_1^\alpha\frac{ds}{ds^*}\langle V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle + k_2^\alpha\frac{ds}{ds^*}\langle V_2^\beta, V_3^\alpha\rangle = 0$$

$$k_2^{\beta}\langle V_3^{\beta},V_2^{\alpha}\rangle - k_1^{\alpha}\frac{ds}{ds^*}\sin\theta + k_2^{\alpha}\frac{ds}{ds^*}\langle V_2^{\beta},V_3^{\alpha}\rangle = 0$$

bulunur. V_2^{β} , V_3^{α} ikilisi lineer bağımlı iken $\langle V_3^{\beta},V_2^{\alpha}\rangle = 1$ yazılabilir. “Eş. 2.5.8” in ikinci bağıntısından yararlanılarak iç çarpım uygulanırsa

$$\langle V_2^{\beta},V_3^{\alpha}\rangle = \sin\theta\langle V_1^{\alpha},V_3^{\alpha}\rangle + \cos\theta\langle V_3^{\alpha},V_3^{\alpha}\rangle$$

$$\langle V_2^{\beta},V_3^{\alpha}\rangle = \cos\theta$$

iken

$$k_2^{\beta} = \sin\theta k_1^{\alpha}\frac{ds}{ds^*} - \cos\theta k_2^{\alpha}\frac{ds}{ds^*}$$

bulunur.

iii)

$$V_1^{\alpha} = \cos\theta V_1^{\beta} + \sin\theta V_2^{\beta}$$

ifadesinin türevi alınırsa

$$V_1^{\alpha\prime} = \left(-\sin\theta\theta' V_1^{\beta} + k_1^{\beta}V_2^{\beta}\cos\theta + \cos\theta\theta' V_2^{\beta} + \left(-k_1^{\beta}V_1^{\beta} + k_2^{\beta}V_3^{\beta}\right)\sin\theta\right)\frac{ds^*}{ds}$$

$$k_1^{\alpha}V_2^{\alpha} = V_1^{\beta}\left(-k_1^{\beta} - \theta'\right)\sin\theta\frac{ds^*}{ds} + V_2^{\beta}\left(k_1^{\beta} + \theta'\right)\cos\theta\frac{ds^*}{ds} + V_3^{\beta}k_2^{\beta}\sin\theta\frac{ds^*}{ds}$$

olur her iki taraf V_2^{α} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$k_1^{\alpha}\langle V_2^{\alpha},V_2^{\alpha}\rangle = \langle V_1^{\beta},V_2^{\alpha}\rangle\left(-k_1^{\beta} - \theta'\right)\sin\theta\frac{ds^*}{ds} + \langle V_2^{\beta},V_2^{\alpha}\rangle\left(k_1^{\beta} + \theta'\right)\cos\theta\frac{ds^*}{ds}$$
$$+\langle V_3^{\beta},V_2^{\alpha}\rangle k_2^{\beta}\sin\theta\frac{ds^*}{ds}$$

V_3^{β}, V_2^{α} lineer bağımlı iken diğer bileşenler dik olur, buna göre

$$k_1^{\alpha} = \sin\theta k_2^{\beta}\frac{ds^*}{ds}$$

bulunur.

iv)

$$V_3^{\alpha} = -\sin\theta V_1^{\beta} + \cos\theta V_2^{\beta}$$

ifadesinde türev alınırsa;

$$V_3^{\alpha\prime} = \left(-\cos\theta\theta' V_1^{\beta} - k_1^{\beta}V_2^{\beta}\sin\theta - \sin\theta\theta' V_2^{\beta} + \left(-k_1^{\beta}V_1^{\beta} + k_2^{\beta}V_3^{\beta}\right)\cos\theta\right)\frac{ds^*}{ds}$$

$$-k_2 V_2^{\alpha} = V_1^{\beta}(\theta' - k_1^{\beta})\cos\theta \frac{ds^*}{ds} + V_2^{\beta}(k_1^{\beta} - \theta')\sin\theta \frac{ds^*}{ds} + k_2^{\beta} V_3^{\beta} \cos\theta \frac{ds^*}{ds}$$

olur. Her iki taraf V_2^{α} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$-k_2^{\alpha}\langle V_2^{\alpha}, V_2^{\alpha}\rangle = \langle V_1^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle(\theta' - k_1^{\beta})\cos\theta \frac{ds^*}{ds} + \langle V_2^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle(k_1^{\beta} - \theta')\sin\theta \frac{ds^*}{ds}$$
$$+\langle V_3^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle k_2^{\beta} \cos\theta \frac{ds^*}{ds}$$

V_3^{β}, V_2^{α} lineer bağımlı iken diğer bileşenler dik olur, buna göre

$$k_2^{\alpha} = -\cos\theta k_2^{\beta} \frac{ds^*}{ds}$$

bulunur.

Sonuç 2.5.4 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin eğrilik ve burulması k_1^{α} ve k_2^{α} olmak üzere eğrilik ve burulma arasında

$${k_1^{\alpha}}^2 + {k_2^{\alpha}}^2 = \frac{ds^*}{ds} {k_2^{\beta}}^2$$

bağıntısı vardır.

Teorem 2.5.6 $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ çifti E^3 de bir Mannheim eğri çifti olmak üzere, $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktaları $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ çiftinin iki karşılıklı noktaları ve M ve M^* bu noktalarda eğrilik merkezleri için olan oran

$$\frac{\|\beta(s^*)M\|}{\|\alpha(s)M\|} \div \frac{\|\beta(s^*)M^*\|}{\|\alpha(s)M^*\|}$$

sabittir.

İspat:

$$\begin{aligned} \alpha(s)M &= M - \alpha(s) \\ &= OM - O\alpha(s) \\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^{\alpha}} V_2^{\alpha} - \alpha(s) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin normu alınırsa,

$$\|\alpha(s)M\| = \frac{1}{k_1^{\alpha}}\|V_2^{\alpha}\| = \frac{1}{k_1^{\alpha}}.$$

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\alpha(s)M^{*} &= M^{*} - \alpha(s) \\
&= OM^{*} - O\alpha(s) \\
&= \beta(s) + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}(s) - O\alpha(s) \\
&= \alpha^{*} - \alpha + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}
\end{aligned}
$$

iken, yine norm alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\left\|\alpha(s)M^{*}\right\| &= \sqrt{\langle -\lambda V_2^{\alpha} + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}, -\lambda V_2^{\alpha} + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\rangle} \\
&= \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda}{k_1^{\beta}}\langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle - \frac{\lambda}{k_1^{\beta}}\langle V_2^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle + \left(\frac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2 \langle V_2^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle} \\
&= \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2}\ .
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan,

$$
\begin{aligned}
\beta(s^{*})M &= OM - O\beta(s^{*}) \\
&= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha}(s) - \beta(s^{*}) \\
&= \lambda V_2^{\alpha} + \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} \\
&= \left(\lambda + \frac{1}{k_1^{\alpha}}\right)V_2^{\alpha}\ .
\end{aligned}
$$

Yine,

$$
\left\|\beta(s^{*})M\right\| = \left|\lambda + \frac{1}{k_1^{\alpha}}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
\beta(s^{*})M^{*} &= OM^{*} - O\beta(s^{*}) \\
&= \beta(s^{*}) + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta} - \alpha^{*}(s^{*}) \\
&= \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}
\end{aligned}
$$

$$\|\beta(s^*)M^*\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

iken oran kurulursa,

$$\frac{\|\beta(s^*)M\|}{\|\alpha(s)M\|} = \frac{\left|\lambda + \frac{1}{k_1^\alpha}\right|}{\frac{1}{k_1^\alpha}} = \lambda k_1^\alpha + 1$$

$$\frac{\|\beta(s^*)M^*\|}{\|\alpha(s)M^*\|} = \frac{\frac{1}{k_1^\beta}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 k_1^{\beta 2} + 1}}$$

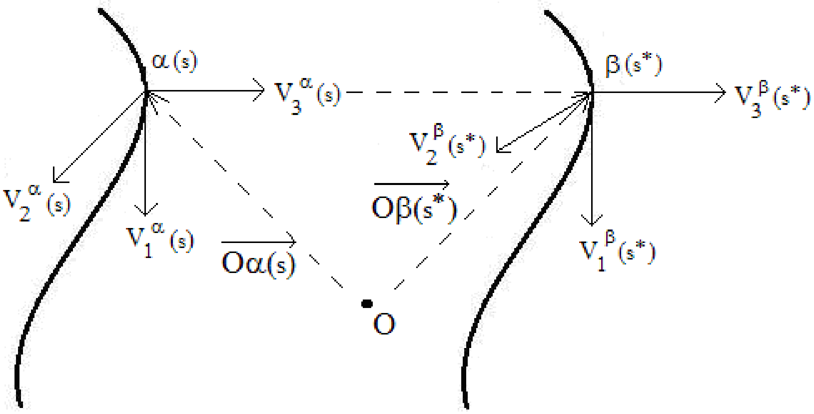
elde edilir, buradan

$$\frac{\|\beta(s^*)M\|}{\|\alpha(s)M\|} \div \frac{\|\beta(s^*)M^*\|}{\|\alpha(s)M^*\|}$$

ifadesinin sabit olmadığı görülür.

Sonuç 2.5.5. Mannheim teoremleri Mannheim eğrileri için geçersizdir.

2.6 $\{V_3^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ İkilisinin Lineer Bağımlı Olma Durumu



Şekil 2.12

Şekil 2.12 yardımı ile,

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_3^\alpha(s) \tag{2.6.1}$$

yazılabilir. Ayrıca $\{V_3^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ lineer bağımlı olduğundan $V_3^\alpha(s) = \varepsilon V_3^\beta(s^*)$ yazılabilir. Bu eğriler sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ ile gösterilsin. Burada

$$\langle V_3^{\alpha}, V_3^{\beta}\rangle = \varepsilon = \pm 1 \tag{2.6.2}$$

ve s, s^* sırasıyla Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin yay parametreleridir.
Şekil 2.12'den yararlanılarak

$$\langle V_1^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\rangle = \langle V_2^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\rangle = \langle V_3^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\rangle = \langle V_3^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\rangle = 0 \tag{2.6.3}$$

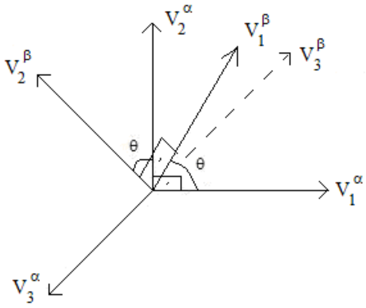
eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla $\theta = \theta(s)$ dönme açısı olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} V_2^{\beta} &= \cos\theta V_2^{\alpha} - \sin\theta V_1^{\alpha} \\ V_1^{\beta} &= \sin\theta V_2^{\alpha} + \cos\theta V_1^{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{2.6.4}$$

ve buradan

$$\left.\begin{aligned} V_2^{\alpha} &= \cos\theta V_2^{\beta} + \sin\theta V_1^{\beta} \\ V_1^{\alpha} &= -\sin\theta V_2^{\beta} + \cos\theta V_1^{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{2.6.5}$$

dönme denklemleri oluşturulabilir.



Şekil 2.13

diğer taraftan, "Eş. 2.6.1" eşitliğinin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_3^{\alpha}(s) + \lambda V_3^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\alpha}(s) + \lambda' V_3^{\alpha}(s) - \lambda k_2^{\alpha}(s) V_2^{\alpha}(s) \tag{2.6.6}$$

bulunur. "Eş. 2.6.6" eşitliğinin her iki tarafı $V_3^{\alpha}(s)$ ile iç çarpıma tâbi tutulursa, "Eş. 2.6.3" eşitliklerinin 4. eşitliği de kullanılarak

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda = c = sabit$$

Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s),\beta(s^*)) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_3^\alpha(s)\right\| = \lambda = sabit \tag{2.6.7}$$

şeklinde elde edilir. Buradan uzaklığın sabit olduğu görülür. Ayrıca “Eş. 2.6.6” eşitliğinden faydalanılarak $\lambda' = 0$ ve $\langle V_1^\beta(s^*), V_1^\beta(s^*)\rangle = 1$ iken

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha(s) + \lambda' V_3^\alpha(s) - \lambda k_2^\alpha(s) V_2^\alpha(s)$$

$$V_1^\beta(s^*) = \left(V_1^\alpha(s) - \lambda k_2^\alpha(s) V_2^\alpha(s)\right)\frac{ds}{ds^*}$$

ifadesi kendiyle iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^\beta(s^*), V_1^\beta(s^*)\rangle = \left(1 + \lambda^2 k_2^{\alpha\,2}\right)\left(\frac{ds}{ds^*}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{ds^*}{ds}\right)^2 = \left(1 + \lambda^2 k_2^{\alpha\,2}\right)$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{1 + \lambda^2 k_2^{\alpha\,2}} \tag{2.6.8}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca “Eş. 2.6.4” ün 2. bağıntısından

$$V_1^\beta = \sin\theta V_2^\alpha + \cos\theta V_1^\alpha$$

iken s ye göre türev alınırsa

$$V_1^{\beta\,\prime}\frac{ds^*}{ds} = \cos\theta\theta' V_2^\alpha + V_2^{\alpha\,\prime}\sin\theta - \sin\theta\theta' V_1^\alpha + V_1^{\alpha\,\prime}\cos\theta$$

$$k_1^\beta V_2^\beta\frac{ds^*}{ds} = k_1^\alpha V_2^\alpha\cos\theta + \left(-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha\right)\sin\theta - \sin\theta\theta' V_1^\alpha + \cos\theta\theta' V_2^\alpha$$

$$k_1^\beta V_2^\beta\frac{ds^*}{ds} = -\left(\theta' - k_1^\alpha\right)\sin\theta V_1^\alpha + \left(\theta' + k_1^\alpha\right)\cos\theta V_2^\alpha + k_2^\alpha\sin\theta V_3^\alpha \tag{2.6.9}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı V_3^α ile iç çarpıma tâbi tutulursa “Eş. 2.6.3” eşitliklerinin üçüncü ifadesi kullanılarak

$$k_1^\beta\langle V_2^\beta, V_3^\alpha\rangle\frac{ds^*}{ds} = -\left(\theta' - k_1^\alpha\right)\sin\theta\langle V_1^\alpha, V_3^\alpha\rangle + \left(\theta' + k_1^\alpha\right)\cos\theta\langle V_2^\alpha, V_3^\alpha\rangle + k_2^\alpha\sin\theta\langle V_3^\alpha, V_3^\alpha\rangle$$

$$k_2^\alpha\sin\theta = 0 \tag{2.6.10}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca “Eş. 2.6.6” dan yararlanılarak

$$V_1^\beta(s^*) = \left(V_1^\alpha(s) + \lambda' V_3^\alpha(s) - \lambda k_2^\alpha(s) V_2^\alpha(s)\right)\frac{ds}{ds^*}$$

ifadesi V_1^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa, “Eş. 2.6.3” eşitliklerinin dördüncüsünden de yararlanılarak $\lambda' = 0$ olmak üzere,

$$\langle V_1^{\beta}, V_1^{\beta} \rangle = \left(\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle - \lambda k_2^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle \right) \frac{ds}{ds^*}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \left(\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle - \lambda k_2^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle \right) \qquad (2.6.11)$$

elde edilir. “Eş. 2.6.5” in 2. ve 1. eşitliğinden yararlanılarak

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle = -\sin\theta \langle V_2^{\beta}, V_1^{\beta} \rangle + \cos\theta \langle V_1^{\beta}, V_1^{\beta} \rangle$$

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle = \cos\theta \qquad (2.6.12)$$

ifadesi bulunur.

$$\langle V_2^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle = \cos\theta \langle V_2^{\beta}, V_1^{\beta} \rangle + \sin\theta \langle V_1^{\beta}, V_1^{\beta} \rangle$$

$$\langle V_2^{\alpha}, V_1^{\beta} \rangle = \sin\theta \qquad (2.6.13)$$

ifadesi elde edilir. “Eş. 2.6.12” ve “Eş. 2.6.13”, “Eş. 2.6.11” de yerlerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \left(\cos\theta - \lambda k_2^{\alpha} \sin\theta \right)$$

elde edilir. “Eş. 2.6.10” dan yararlanılarak

$$\frac{ds^*}{ds} = \cos\theta \qquad (2.6.14)$$

ifadesi bulunur. Ayrıca “Eş. 2.6.8” ifadesiyle “Eş. 2.6.14” ifadesi arasında eşitlik kurulursa

$$\frac{ds^*}{ds} = \cos\theta = \sqrt{1 + \lambda^2 k_2^{\alpha\,2}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 + \lambda^2 k_2^{\alpha\,2}}$$

$$1 + \lambda^2 k_2^{\alpha\,2} = \cos^2\theta$$

$$\lambda^2 k_2^{\alpha\,2} = \cos^2\theta - 1 = -\left(1 - \cos^2\theta\right) = -\sin^2\theta$$

$$\lambda^2 = -\frac{\sin^2\theta}{k_2^{\alpha\,2}}$$

elde edilir. Buradan λ değerinin kompleks olduğu görülür. Dolayısıyla $\tilde{\Gamma}$ eğrisi reel değildir.

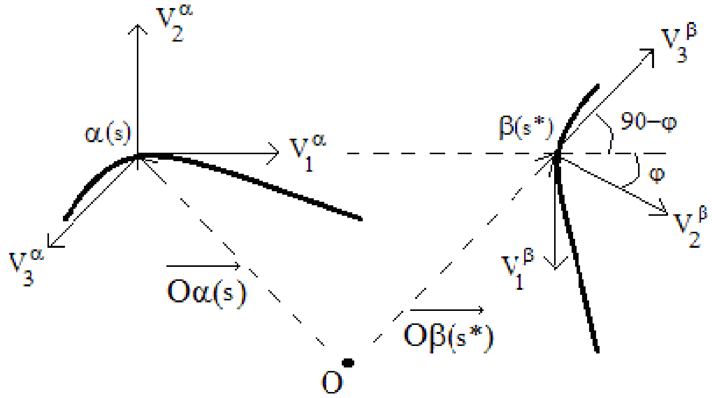
3. EĞRİ ÇİFTLERİNİN FRENET VEKTÖRLERİNİN ORTOGONALLİĞİ

Bu bölümde Γ ve $\tilde{\Gamma}$ iki eğri olmak üzere, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ sırasıyla $\Gamma:(I,\alpha)$ ve $\tilde{\Gamma}:(\tilde{I},\beta)$ koordinat komşuluklarıyla verilsin s ve s^* yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ ve $\beta(s^*)$ noktalarında Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin Frenet-3 ayaklıları sırasıyla

$$\{V_1^\alpha(s), V_2^\alpha(s), V_3^\alpha(s)\} \text{ ve } \{V_1^\beta(s^*), V_2^\beta(s^*), V_3^\beta(s^*)\}$$

iken bu eğriler arasında $\{V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$, $\{V_1^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$, $\{V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$, $\{V_2^\alpha(s), V_2^\beta(s^*)\}$, $\{V_2^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$, $\{V_3^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ ikilileri oluşturulup bu ikililerin birbirine dik olma durumu incelenecektir.

3.1 $\{V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$ İkilisinin Birbirine Dik Olma Durumu



Şekil 3.1

$\{V_1^\alpha(s), V_1^\beta(s^*)\}$ ikilisinin birbirine dik olması durumunda

$$V_1^\alpha(s) \in Sp\{V_2^\beta(s^*), V_3^\beta(s^*)\}$$

olur. Böyle bir durumda

$$V_1^\alpha(s) = \lambda_1 V_2^\beta(s^*) + \lambda_2 V_3^\beta(s^*) \qquad (3.1.1)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$V_1^{\alpha}(s) = \cos\varphi V_2^{\beta}(s^*) + \sin\varphi V_3^{\beta}(s^*) \tag{3.1.2}$$

elde edilir. Burada Şekil 3.1'den yararlanılarak

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^{\alpha}(s) \tag{3.1.3}$$

bağıntısı yazılabilir. Bu bağıntının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_1^{\alpha}(s) + \lambda V_1^{\alpha\,'}(s)$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\alpha}(s)(1+\lambda') + \lambda k_1^{\alpha} V_2^{\alpha}(s) \tag{3.1.4}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı V_1^{α} ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^{\beta}, V_1^{\alpha}\rangle \frac{ds^*}{ds} = \langle V_1^{\alpha}, V_1^{\alpha}\rangle (1+\lambda') + \lambda k_1^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_1^{\alpha}\rangle$$

olur. Burada $\{V_1^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\}$ ikilisi birbirine dik olduğundan

$$\langle V_1^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\rangle = 0 \tag{3.1.5}$$

olur. Buna göre

$$1+\lambda' = 0$$

$$\lambda' = -1$$

$$\lambda = c - s \tag{3.1.6}$$

ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.1.1 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit değildir.

İspat: Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \left\| \beta(s^*) - \alpha(s) \right\| = \left\| \lambda V_1^{\alpha}(s) \right\| = \lambda = |c - s| \tag{3.1.7}$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.1.3" ifadesinde "Eş. 3.1.6" ifadesi yerine yazılıp türev alınırsa

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + (c - s) V_1^{\alpha}(s)$$

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) - V_1^{\alpha} + V_1^{\alpha\,'}(c - s)$$

$$\beta'(s^*) = k_1^{\alpha}(c - s) V_2^{\alpha} \frac{ds}{ds^*} \tag{3.1.8}$$

$$V_1^{\beta} = k_1^{\alpha}(c - s) V_2^{\alpha} \frac{ds}{ds^*} \tag{3.1.9}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda şu sonuç elde edilir;

Sonuç 3.1.2 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin teğetleri karşılıklı noktalarda dik ise Γ eğrisinin asli normali ile $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin teğeti lineer bağımlıdır.

Bu durumda $\langle V_1^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle = \varepsilon = \pm 1$ olmak üzere s^*, β fonksiyonunun yay parametresi olduğundan $\left\| \beta'(s^*) \right\| = 1$ yazılabilir. Bu ifadeden faydalanılarak "Eş. 3.1.8" ifadesinin her iki tarafının normu alınırsa

$$\left\| \beta'(s^*) \right\| = \left\| k_1^{\alpha}(c - s) V_2^{\alpha} \frac{ds}{ds^*} \right\|$$

$$\langle \beta'(s^*), \beta'(s^*) \rangle = k_1^{\alpha 2}(c - s)^2 \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2$$

$$k_1^{\alpha 2}(c - s)^2 \left(\frac{ds}{ds^*} \right)^2 = 1$$

ifadesi bulunur. Buradan k_1^{α} pozitif olmak üzere

$$\frac{ds^*}{ds} = k_1^{\alpha} |c - s| \tag{3.1.10}$$

bulunur. Ayrıca

$$V_1^{\alpha}(s) = \cos\varphi V_2^{\beta}(s^*) + \sin\varphi V_3^{\beta}(s^*)$$

$$V_1^{\alpha'} \frac{ds}{ds^*} = -\sin\varphi \varphi' V_2^{\beta} + V_2^{\beta'} \cos\varphi + \cos\varphi \varphi' V_3^{\beta} + V_3^{\beta'} \sin\varphi$$

$$k_1^{\alpha} V_2^{\alpha} \frac{ds}{ds^*} = -\sin\varphi \varphi' V_2^{\beta} + (-k_1^{\beta} V_1^{\beta} + k_2^{\beta} V_3^{\beta})\cos\varphi + \cos\varphi \varphi' V_3^{\beta} - k_2^{\beta} V_2^{\beta} \sin\varphi$$

$$k_1^{\alpha} V_2^{\alpha} \frac{ds}{ds^*} = (-k_1^{\beta} \cos\varphi) V_1^{\beta} + (-\varphi' - k_2^{\beta}) \sin\varphi V_2^{\beta} + (k_2^{\beta} + \varphi') \cos\varphi V_3^{\beta} \tag{3.1.11}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlikte "Eş. 3.1.10" ifadesi düzenlenip yerine yazılırsa

$$V_2^{\alpha} = ((-k_1^{\beta} \cos\varphi) V_1^{\beta} + (-\varphi' - k_2^{\beta}) \sin\varphi V_2^{\beta} + (k_2^{\beta} + \varphi') \cos\varphi V_3^{\beta})(c - s| \tag{3.1.12}$$

elde edilir. Ayrıca $(V_1^{\beta}, V_2^{\alpha})$ ikilisi lineer bağımlı olduğundan $\langle V_1^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle = \varepsilon = \pm 1$ iken şekilden de faydalanılarak V_2^{α} vektörünün $V_2^{\beta}(s^*)$ ve $V_3^{\beta}(s^*)$ vektörleri üzerinde bir bileşeni olmadığı görülür. Buna bağlı olarak

$$\langle V_2^{\alpha}, V_3^{\beta}\rangle = \langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle = 0 \tag{3.1.13}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan "Eş. 3.1.12" ifadesinin her iki tarafı V_3^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_2^{\alpha}, V_3^{\beta}\rangle = \left(-k_1^{\beta}\cos\varphi\right)\left|c-s\right|\langle V_1^{\beta}, V_3^{\beta}\rangle + \left(-\varphi' - k_2^{\beta}\right)\sin\varphi\left|c-s\right|\langle V_2^{\beta}, V_3^{\beta}\rangle$$
$$+\left(k_2^{\beta} + \varphi'\right)\cos\varphi\left|c-s\right|\langle V_3^{\beta}, V_3^{\beta}\rangle$$
$$\left(k_2^{\beta} + \varphi'\right)\cos\varphi\left|c-s\right| = 0$$
$$\left(k_2^{\beta} + \varphi'\right) = 0 \qquad (3.1.14)$$
$$\cos\varphi\left|c-s\right| = 0 \qquad (3.1.15)$$

elde edilir. “Eş. 3.1.12” ifadesinin her iki tarafı V_2^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle = \left(-k_1^{\beta}\cos\varphi\right)\left|c-s\right|\langle V_1^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle + \left(-\varphi' - k_2^{\beta}\right)\sin\varphi\left|c-s\right|\langle V_2^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle$$
$$+\left(k_2^{\beta} + \varphi'\right)\cos\varphi\left|c-s\right|\langle V_3^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle$$
$$\left(\varphi' + k_2^{\beta}\right)\sin\varphi\left|c-s\right| = 0$$
$$\left(\varphi' + k_2^{\beta}\right) = 0 \qquad (3.1.16)$$
$$\sin\varphi\left|c-s\right| = 0 \qquad (3.1.17)$$

olmalıdır. Buradan

$$\left(\varphi' + k_2^{\beta}\right) = 0$$
$$k_2^{\beta} = -\varphi'$$
$$\varphi' = -k_2^{\beta} \qquad (3.1.18)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.3 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin teğetleri karşılıklı noktalarda dik ise Γ eğrisinin teğeti ile $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin asli normali arasındaki açı sabit değildir.

Ayrıca “Eş. 3.1.12” ifadesinin her iki tarafı V_1^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa $\langle V_1^{\beta}, V_2^{\alpha}\rangle = \varepsilon = \pm 1$ iken

$$\langle V_2^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \left(-k_1^{\beta}\cos\varphi\right)\left|c-s\right|\langle V_1^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle + \left(-\varphi' - k_2^{\beta}\right)\sin\varphi\left|c-s\right|\langle V_2^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle$$
$$+\left(k_2^{\beta} + \varphi'\right)\cos\varphi\left|c-s\right|\langle V_3^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle$$
$$\left(-k_1^{\beta}\cos\varphi\right)\left|c-s\right| = \varepsilon$$
$$k_1^{\beta} = -\frac{\varepsilon}{\cos\varphi\left|c-s\right|} \qquad (3.1.19)$$

$\cos\varphi \neq 0$ olan eğriler için elde edilir.

Teorem 3.1.1 Γ eğrisinin bir helis olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat: $\{V_1^\beta, V_2^\alpha\}$ ikilisi lineer bağımlı olduğundan $\langle V_1^\beta, V_2^\alpha \rangle = \varepsilon = \mp 1$ iken $V_1^\beta = \varepsilon V_2^\alpha$ yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa;

$$V_1^{\beta\prime} \frac{ds^*}{ds} = \varepsilon V_2^{\alpha\prime}$$

$$k_1^\beta V_2^\beta \frac{ds^*}{ds} = \varepsilon \left(-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha \right)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede “Eş. 3.1.10” ifadesi yerine yazılırsa

$$k_1^\beta k_1^\alpha |c-s| V_2^\beta = \varepsilon \left(-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha \right)$$

$$k_1^\beta V_2^\beta = \varepsilon \left(\frac{-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha}{k_1^\alpha |c-s|} \right)$$

$$k_1^\beta V_2^\beta = -\frac{\varepsilon}{|c-s|} V_1^\alpha + \frac{\varepsilon k_2^\alpha}{k_1^\alpha |c-s|} V_3^\alpha$$

$$\left\| k_1^\beta V_2^\beta \right\| = \left\| -\frac{\varepsilon}{|c-s|} V_1^\alpha + \frac{\varepsilon k_2^\alpha}{k_1^\alpha |c-s|} V_3^\alpha \right\|$$

$$k_1^{\beta 2} = \frac{\varepsilon^2}{(c-s)^2} + \frac{\varepsilon^2 k_2^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2} (c-s)^2}$$

$$k_1^{\beta 2} = \frac{k_1^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2} (c-s)^2} + \frac{k_2^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2} (c-s)^2}$$

$$k_1^{\beta 2} = \frac{k_1^{\alpha 2} + k_2^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2} (c-s)^2} \tag{3.1.20}$$

ifadesi elde edilir. “Eş. 3.1.19” eşitliğinin karesi alınıp “Eş. 3.1.20” ifadesiyle eşitlenirse

$$k_1^{\beta 2} = \frac{\varepsilon^2}{\cos^2 \varphi (c-s)^2} = \frac{k_1^{\alpha 2} + k_2^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2} (c-s)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi (c-s)^2} = \frac{k_1^{\alpha 2} + k_2^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2} (c-s)^2}$$

$$1 + \frac{k_2^{\alpha 2}}{k_1^{\alpha 2}} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

$$\frac{{k_2^{\alpha}}^2}{{k_1^{\alpha}}^2}=\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\tan^2\varphi$$

$$\frac{{k_2^{\alpha}}^2}{{k_1^{\alpha}}^2}=\tan^2\varphi$$

$$\frac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}=\pm\tan\varphi \tag{3.1.21}$$

elde edilir. Kabul edelim ki Γ eğrisi bir helis olsun; bu durumda $\dfrac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}=sabit$ olur. Dolayısıyla $\varphi=sabit$ olur. $k_2^{\beta}+\varphi'=0 \Rightarrow k_2^{\beta}=0$ olduğundan $\tilde{\Gamma}$ eğrisi düzlemsel olur. Tersine $\tilde{\Gamma}$ eğrisi düzlemsel olsun $k_2^{\beta}=0$ ve $k_2^{\beta}+\varphi'=0$ olduğundan $\varphi'=0$ dolayısıyla $\varphi=sabit$ olur. $\dfrac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}=\pm\tan\varphi$ olduğundan $\dfrac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}=sabit$ olur. Yani Γ eğrisi helistir.

Sonuç 3.1.4 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ sırasıyla $\Gamma:(I,\alpha)$ ve $\tilde{\Gamma}:(I,\beta)$ koordinat komşuluklarıyla verilsin s ve s^* yay parametresi olmak üzere Γ, $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla k_1^{α}, k_2^{α} ve k_1^{β}, k_2^{β} olsun. Bu durumda $\{V_1^{\alpha}(s), V_1^{\beta}(s^*)\}$ ikilisi birbirine dik ise

$$k_2^{\beta}=\mp\frac{{k_2^{\alpha}}'k_1^{\alpha}-{k_1^{\alpha}}'k_2^{\alpha}}{{k_1^{\alpha}}^2+{k_2^{\alpha}}^2}.$$

İspat:

$$\frac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}=\pm\tan\varphi$$

$$\arctan\left(\pm\frac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}\right)=\varphi$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\arctan\left(\pm\frac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}\right)=\varphi$$

$$\varphi'=\frac{\left(\pm\dfrac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}\right)'}{1+\left(\pm\dfrac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}\right)^2}$$

$$\varphi' = \frac{\pm\left(\dfrac{k_2^{\alpha\,'} k_1^{\alpha} - k_1^{\alpha\,'} k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha\,2}}\right)}{\dfrac{k_1^{\alpha\,2} + k_2^{\alpha\,2}}{k_1^{\alpha\,2}}}$$

$$\varphi' = \pm \frac{k_2^{\alpha\,'} k_1^{\alpha} - k_1^{\alpha\,'} k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha\,2} + k_2^{\alpha\,2}}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede $k_2^{\beta} = -\varphi'$ ifadesi yerine yazılırsa

$$k_2^{\beta} = \mp \frac{k_2^{\alpha\,'} k_1^{\alpha} - k_1^{\alpha\,'} k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha\,2} + k_2^{\alpha\,2}}$$

$$k_2^{\beta} = \mp \frac{k_1^{\alpha\,2}\left(\dfrac{k_2^{\alpha}}{k_1^{\alpha}}\right)'}{k_1^{\alpha\,2} + k_2^{\alpha\,2}} \tag{3.1.22}$$

ifadesi bulunur.

Sonuç 3.1.5 Teğetleri dik olan eğrilerde Schell teoremi sağlanmaz.

Sonuç 3.1.6 Mannheim teoremi teğetleri dik olan eğriler için geçerli değildir.

İspat:

$$\begin{aligned}\alpha(s)M &= M - \alpha(s)\\ &= OM - O\alpha(s)\\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^{\alpha}} V_2^{\alpha} - \alpha(s).\end{aligned}$$

Norm alınırsa,

$$\left\|\alpha(s)M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^{\alpha}} V_2^{\alpha}\right\| = \frac{1}{k_1^{\alpha}}\left\|V_2^{\alpha}\right\| = \frac{1}{k_1^{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}\alpha(s)M^{*} &= M^{*} - \alpha(s)\\ &= OM^{*} - O\alpha(s)\\ &= \beta(s) + \frac{1}{k_1^{\beta}} V_2^{\beta}(s) - \overrightarrow{O\alpha(s)}\\ &= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^{\beta}} V_2^{\beta}\end{aligned}$$

$$= \alpha + \lambda V_1^\alpha - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

$$= \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta .$$

Yine,

$$\left\| \alpha(s) M^* \right\| = \sqrt{\langle \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta , \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \langle V_1^\alpha , V_2^\beta \rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta} \langle V_2^\beta , V_1^\alpha \rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta} \right)^2 \langle V_2^\beta , V_2^\beta \rangle}$$

iken, “Eş. 3.1.2” nin her iki tarafı V_2^β ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_1^\alpha , V_2^\beta \rangle = \cos\varphi \langle V_2^\beta , V_2^\beta \rangle + \sin\varphi \langle V_3^\beta , V_2^\beta \rangle$$

$$\langle V_1^\alpha , V_2^\beta \rangle = \cos\varphi$$

elde edilir. Bu ifade köklü ifadede yerine yazılırsa

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{2\lambda \cos\varphi}{k_1^\beta} + \left(\frac{1}{k_1^\beta} \right)^2}$$

elde edilir.

$$\beta(s^*) M = OM - O\beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_1^\alpha$$

$$= \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha$$

bulunur. Buradan

$$\left\| \beta(s^*) M \right\| = \left\| \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha \right\|$$

$$= \sqrt{\langle \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha , \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2}$$

elde edilir. Son olarak

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \left\|\beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta - \beta(s^*)\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta\right\|$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler oranlanırsa

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2}}{\dfrac{1}{k_1^\alpha}} = \sqrt{1 + {k_1^\alpha}^2\lambda^2}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \frac{\dfrac{1}{k_1^\beta}}{\sqrt{\lambda^2 + \dfrac{2\lambda\cos\varphi}{k_1^\beta} + \left(\dfrac{1}{k_1^\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 2\lambda k_1^\beta\cos\varphi + 1}}$$

buradan

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} \div \frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \sqrt{\left(1 + {k_1^\alpha}^2\lambda^2\right)\left(\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 2\lambda k_1^\beta\cos\varphi + 1\right)}$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.7 Teğetleri dik olan eğrilerde Bertrand teoremi sağlanmaz.

İspat: Γ , $\tilde{\Gamma} \subset E^3$ eğrileri sırasıyla (I,α), (I,β) koordinat komşuluklarıyla ile verilsin. Γ eğrisinin eğrilikleri k_1^α , k_2^α ise bu durumda

$$k_1^\alpha = \frac{ds^*}{ds|c-s|}$$

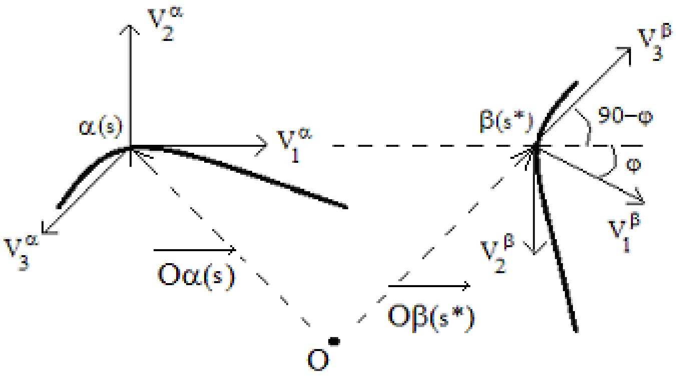
$$\frac{k_2^\alpha}{k_1^\alpha} = \pm\tan\varphi$$

$$k_2^\alpha = \frac{ds^*(\pm\tan\varphi)}{ds|c-s|}$$

bulunur. k_1^α , k_2^α arasında bir lineer bağıntı olmadığı açıktır dolayısıyla Bertrand teoremi sağlanmaz.

Sonuç 3.1.8 Teğetleri dik olan eğriler involüt-evolüt çifti olma özeliği gösterirler.

3.2 $\{V_1^\alpha(s),\ V_2^\beta(s^*)\}$ İkilisinin Birbirine Dik Olma Durumu



Şekil 3.2

$\{V_1^\alpha(s),\ V_2^\beta(s^*)\}$ ikilisinin birbirine dik olması durumunda

$$V_1^\alpha(s) \in Sp\{V_1^\beta(s^*),\ V_3^\beta(s^*)\}$$

olur. Böyle bir durumda

$$V_1^\alpha(s) = \lambda_1 V_1^\beta(s^*) + \lambda_2 V_3^\beta(s^*) \tag{3.2.1}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$V_1^\alpha(s) = \cos\varphi V_1^\beta(s^*) + \sin\varphi V_3^\beta(s^*) \tag{3.2.2}$$

elde edilir. Burada Şekil 3.2'den yararlanılarak

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s) \tag{3.2.3}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan

$$d(\alpha(s),\beta(s^*)) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_1^\alpha(s)\right\| = \lambda$$

elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.2.3" bağıntısının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_1^\alpha(s) + \lambda {V_1^\alpha}'(s)$$

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha(s)(1+\lambda') + \lambda k_1^\alpha(s) V_2^\alpha(s) \tag{3.2.4}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı V_1^α ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^\beta, V_1^\alpha\rangle \frac{ds^*}{ds} = \langle V_1^\alpha, V_1^\alpha\rangle(1+\lambda') + \lambda k_1^\alpha \langle V_2^\alpha, V_1^\alpha\rangle$$

$$\langle V_1^{\beta}, V_1^{\alpha}\rangle \frac{ds^*}{ds} = 1+\lambda' \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.2.2" bağıntısı V_1^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \cos\varphi \langle V_1^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle + \sin\varphi \langle V_3^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle$$

$$\langle V_1^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \cos\varphi \tag{3.2.6}$$

elde edilir. Bu ifade "Eş. 3.2.5" ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1+\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1+\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\lambda' = \frac{ds^*}{ds}\cos\varphi - 1 \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.2.4" eşitliğinin her iki tarafı V_2^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle \frac{ds^*}{ds} = \langle V_1^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle (1+\lambda') + \lambda k_1^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle$$

olur. Burada $\{V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\}$ ikilisi birbirine dik olduğundan $\langle V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\rangle = 0$ olur. Buna göre

$$\lambda k_1^{\alpha} \langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle = 0 \tag{3.2.8}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan "Eş. 3.2.4" ifadesinden faydalanılarak

$$V_1^{\beta}(s^*) = \beta'(s^*) = (1+\lambda')\frac{ds}{ds^*} V_1^{\alpha} + \lambda k_1^{\alpha} \frac{ds}{ds^*} V_2^{\alpha}$$

yazılabilir. Bu ifadeden faydalanılarak

$$V_1^{\beta}(s^*) \in Sp\{V_1^{\alpha}(s), V_2^{\alpha}(s)\} \Leftrightarrow \langle V_1^{\beta}(s^*), V_3^{\alpha}(s)\rangle = 0 \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle V_1^{\alpha}(s), V_2^{\beta}(s^*)\rangle = 0$ olduğundan $\{V_1^{\alpha}, V_1^{\beta}\}$, $\{V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\}$, $\{V_3^{\alpha}, V_3^{\beta}\}$ ikilileri lineer bağımlı olur. Dolayısıyla $\varphi = k\pi$, $(k \in Z)$ olur. "Eş. 3.2.2" eşitliğinden yararlanılarak $V_1^{\alpha} = \varepsilon V_1^{\beta}$, $\varepsilon = \pm 1$ yazılır. "Eş. 3.2.5" ifadesi

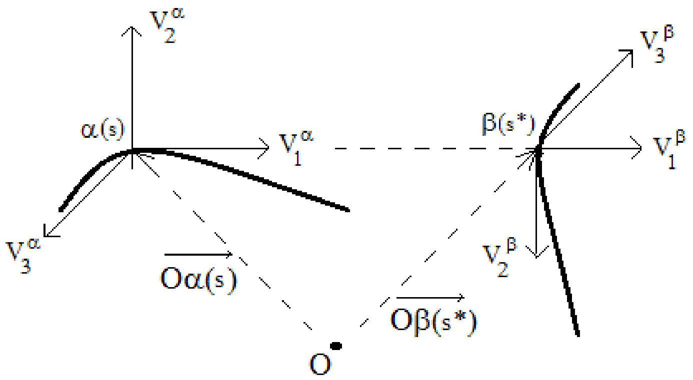
$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{(1+\lambda')}{\varepsilon} \tag{3.2.10}$$

olur.

Sonuç 3.2.1 Γ eğrisi bir doğrudur.

İspat: Burada farklı iki eğriden söz edilebilmesi için $\lambda \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

“Eş. 3.2.8” ifadesinden yararlanılarak $k_1^\alpha \langle V_2^\alpha, V_2^\beta \rangle = 0$ olur. Ayrıca $\langle V_1^\alpha, V_2^\beta \rangle = 0$ ifadesinin yazılabilmesi için $\langle V_2^\alpha, V_2^\beta \rangle \neq 0$ olması gerekir. Bu durumda $k_1^\alpha \langle V_2^\alpha, V_2^\beta \rangle = 0$ iken $\langle V_2^\alpha, V_2^\beta \rangle \neq 0$ olduğundan $k_1^\alpha = 0$ olur. $k_1^\alpha = 0 \Rightarrow k_2^\alpha = 0$.



Şekil 3.3

Diğer taraftan “Eş. 3.2.3” ifadesinde türev alınırsa $\dfrac{ds^*}{ds} = \dfrac{(1+\lambda')}{\varepsilon}$ ve $k_1^\alpha = 0$ iken

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = (1+\lambda')\frac{\varepsilon}{(1+\lambda')} V_1^\alpha$$

$$\beta'(s^*) = \varepsilon V_1^\alpha$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \varepsilon k_1^\alpha V_2^\alpha = 0$$

$$\beta''(s^*) = 0$$

$$\Rightarrow k_1^\beta = 0 \Rightarrow k_2^\beta = 0.$$

Sonuç 3.2.2 Γ eğrisi ve $\tilde{\Gamma}$ eğrisi aynı düzlemde iki doğrudur. Dolayısıyla karşılıklı noktalar arasındaki uzaklık sabittir.

Sonuç 3.2.3 Mannheim teoremi $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ eğri çifti için geçerlidir.

$$\begin{aligned} \alpha(s)M &= M - \alpha(s) \\ &= OM - O\alpha(s) \\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s). \end{aligned}$$

Norm alınırsa,

$$\left\|\alpha(s)M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha}\right\| = \frac{1}{k_1^{\alpha}}\left\|V_2^{\alpha}\right\| = \frac{1}{k_1^{\alpha}}$$

$$\begin{aligned}\alpha(s)M^* &= M^* - \alpha(s)\\ &= OM^* - O\alpha(s)\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\alpha(s)M^* &= \beta(s) + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}(s) - O\alpha(s)\\ &= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\\ &= \alpha + \lambda V_1^{\alpha} - \alpha + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\\ &= \lambda V_1^{\alpha} + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}.\end{aligned}$$

Yine norm alınırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\alpha(s)M^*\right\| &= \sqrt{\langle \lambda V_1^{\alpha} + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}, \lambda V_1^{\alpha} + \frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\rangle}\\ &= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^{\beta}}\langle V_1^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle + \frac{\lambda}{k_1^{\beta}}\langle V_2^{\beta}, V_1^{\alpha}\rangle + \left(\frac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2\langle V_2^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle}\\ &= \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2}.\end{aligned}$$

$$\beta(s^*)M = OM - O\beta(s^*)$$

$$\begin{aligned}\beta(s^*)M &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \beta(s^*)\\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \alpha(s) - \lambda V_1^{\alpha}\\ &= \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \lambda V_1^{\alpha}.\end{aligned}$$

Yine, norm alınırsa,

$$\left\|\beta(s^*)M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \lambda V_1^{\alpha}\right\|$$

$$= \sqrt{\langle \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha , \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2} \ .$$

Son olarak,

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta - \beta(s^*) = \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler oranlanırsa

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2}}{\frac{1}{k_1^\alpha}} = \sqrt{1 + {k_1^\alpha}^2 \lambda^2}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \frac{\frac{1}{k_1^\beta}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 1}}$$

buradan

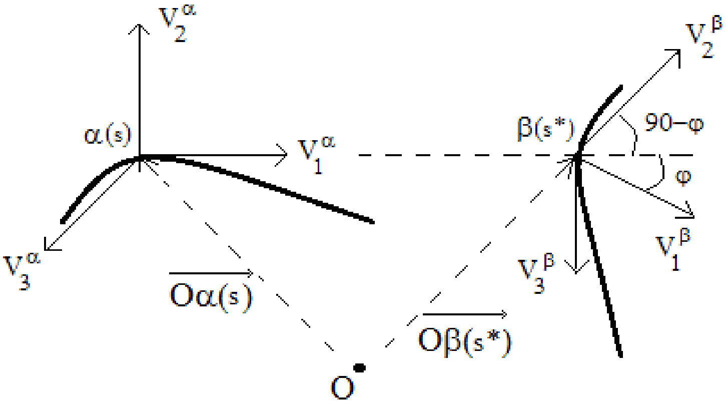
$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} \div \frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \sqrt{(1 + {k_1^\alpha}^2 \lambda^2)(\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 1)}$$

bulunur. $k_1^\alpha = k_1^\beta = 0$ olduğundan

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} \div \frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = 1$$

elde edilir. Bu da Mannheim teoreminin sağlandığını gösterir.

3.3 $\left(V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\right)$ İkilisinin Birbirine Dik Olması Durumu



Şekil 3.4

$\left(V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\right)$ ikilisinin birbirine dik olması durumunda

$$V_1^\alpha(s) \in Sp\left\{V_1^\beta(s^*), V_2^\beta(s^*)\right\}$$

olur. Böyle bir durumda

$$V_1^\alpha(s) = \lambda_1 V_1^\beta(s^*) + \lambda_2 V_2^\beta(s^*) \qquad (3.3.1)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$V_1^\alpha(s) = \cos\varphi V_1^\beta(s^*) + \sin\varphi V_2^\beta(s^*) \qquad (3.3.2)$$

elde edilir. Burada Şekil 3.4'ten yararlanılarak

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_1^\alpha(s) \qquad (3.3.3)$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan

$$d\left(\alpha(s), \beta(s^*)\right) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_1^\alpha(s)\right\| = \lambda$$

elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.3.3" bağıntısının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_1^\alpha(s) + \lambda V_1^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')V_1^\alpha(s) + \lambda k_1^\alpha(s) V_2^\alpha(s) \qquad (3.3.4)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı V_1^α ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^\beta, V_1^\alpha\rangle \frac{ds^*}{ds} = (1 + \lambda')\langle V_1^\alpha, V_1^\alpha\rangle + \lambda k_1^\alpha \langle V_2^\alpha, V_1^\alpha\rangle$$

$$\langle V_1^\beta, V_1^\alpha\rangle \frac{ds^*}{ds} = 1+\lambda' \tag{3.3.5}$$

elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.3.2" bağıntısı V_1^β ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^\alpha, V_1^\beta\rangle = \cos\varphi\langle V_1^\beta, V_1^\beta\rangle + \sin\varphi\langle V_2^\beta, V_1^\beta\rangle$$

$$\langle V_1^\alpha, V_1^\beta\rangle = \cos\varphi \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Bu ifade "Eş. 3.3.5" ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1+\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1+\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\lambda' = \frac{ds^*}{ds}\cos\varphi - 1 \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Ayrıca "Eş. 3.3.4" eşitliğinin her iki tarafı V_3^β ile iç çarpıma tâbi tutulursa,

$$\langle V_1^\beta, V_3^\beta\rangle \frac{ds^*}{ds} = (1+\lambda')\langle V_1^\alpha, V_3^\beta\rangle + \lambda k_1^\alpha\langle V_2^\alpha, V_3^\beta\rangle$$

olur. Burada $\{V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\}$ ikilisi birbirine dik olduğundan $\langle V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\rangle = 0$ olur. Buna göre

$$\lambda k_1^\alpha\langle V_2^\alpha, V_3^\beta\rangle = 0 \tag{3.3.8}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan "Eş. 3.3.4" ifadesinden faydalanılarak

$$V_1^\beta(s^*) = \beta'(s^*) = (1+\lambda')\frac{ds}{ds^*}V_1^\alpha + \lambda k_1^\alpha \frac{ds}{ds^*}V_2^\alpha$$

yazılabilir. Bu ifadeden faydalanılarak

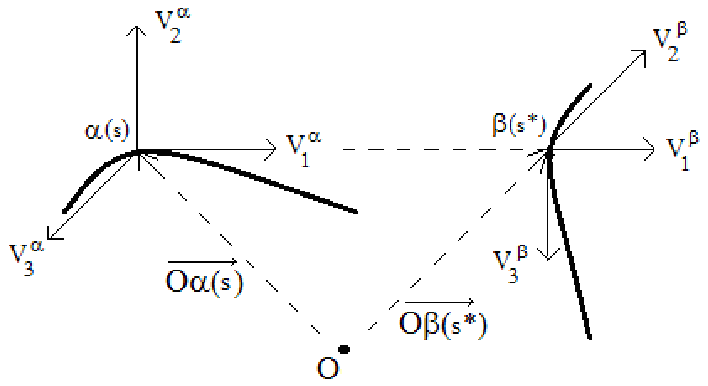
$$V_1^\beta(s^*) \in Sp\{V_1^\alpha(s), V_2^\alpha(s)\} \Leftrightarrow \langle V_1^\beta(s^*), V_3^\alpha(s)\rangle = 0 \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Ayrıca $\langle V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\rangle = 0$ olduğundan $\{V_1^\alpha, V_1^\beta\}$, $\{V_2^\alpha, V_2^\beta\}$, $\{V_3^\alpha, V_3^\beta\}$ ikilileri lineer bağımlı olur. Dolayısıyla $\varphi = k\pi$, $(k \in Z)$ olur. "Eş. 3.3.2" eşitliğinden yararlanılarak $V_1^\alpha = \varepsilon V_1^\beta$, $\varepsilon = \pm 1$ yazılır. "Eş. 3.3.5" ifadesi

$$\frac{ds^*}{ds} = \varepsilon(1+\lambda') \tag{3.3.10}$$

olur.

Sonuç 3.3.1 $\{V_1^\alpha, V_1^\beta\}, \{V_2^\alpha, V_2^\beta\}, \{V_3^\alpha, V_3^\beta\}$ ikilileri lineer bağımlı ise bu iki eğri için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir;



Şekil 3.5

$$\langle V_1^\alpha, V_3^\beta\rangle = \langle V_1^\alpha, V_2^\beta\rangle = \langle V_2^\alpha, V_1^\beta\rangle = \langle V_2^\alpha, V_3^\beta\rangle = \langle V_3^\alpha, V_1^\beta\rangle = \langle V_3^\alpha, V_2^\beta\rangle = 0$$

olur. Bu eşitliklerden faydalanılarak $\langle V_1^\alpha, V_1^\beta\rangle = \varepsilon$, $\langle V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle = \mu$, $\langle V_3^\alpha, V_3^\beta\rangle = \sigma$ olmak üzere

$$\langle V_1^\alpha, V_2^\beta\rangle' = 0$$

$$\langle V_1^{\alpha\,\prime}, V_2^\beta\rangle + \langle V_1^\alpha, V_2^{\beta\,\prime}\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$\langle k_1^\alpha V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle + \langle V_1^\alpha, (-k_1^\beta V_1^\beta + k_2^\beta V_3^\beta)\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$k_1^\alpha \langle V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle - k_1^\beta \langle V_1^\alpha, V_1^\beta\rangle \frac{ds^*}{ds} + k_2^\beta \langle V_1^\alpha, V_3^\beta\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$k_1^\alpha \mu - k_1^\beta \varepsilon \frac{ds^*}{ds} = 0$$

elde edilir. "Eş. 3.3.10" eşitliğinden faydalanılarak

$$k_1^\alpha \mu - k_1^\beta \varepsilon^2 (1 + \lambda') = 0$$

$$k_1^\alpha = \frac{k_1^\beta (1 + \lambda')}{\mu} \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\langle V_2^\alpha, V_3^\beta\rangle' = 0$$

$$\langle {V_2^{\alpha}}', V_3^{\beta}\rangle + \langle V_2^{\alpha}, {V_3^{\beta}}'\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$\langle (-k_1^{\alpha}V_1^{\alpha} + k_2^{\alpha}V_3^{\alpha}), V_3^{\beta}\rangle + \langle V_2^{\alpha}, (-k_2^{\beta}V_2^{\beta})\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$-k_1^{\alpha}\langle V_1^{\alpha}, V_3^{\beta}\rangle + k_2^{\alpha}\langle V_3^{\alpha}, V_3^{\beta}\rangle - k_2^{\beta}\langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$k_2^{\alpha}\sigma - k_2^{\beta}\mu\varepsilon(1+\lambda') = 0$$

$$k_2^{\beta} = \frac{k_2^{\alpha}\sigma}{\mu\varepsilon(1+\lambda')} \tag{3.3.12}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\langle V_3^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle' = 0$$

$$\langle {V_3^{\alpha}}', V_2^{\beta}\rangle + \langle V_3^{\alpha}, {V_2^{\beta}}'\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$\langle (-k_2^{\alpha}V_2^{\alpha}), V_2^{\beta}\rangle + \langle V_3^{\alpha}, (-k_1^{\beta}V_1^{\beta} + k_2^{\beta}V_3^{\beta})\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

$$-k_2^{\alpha}\langle V_2^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle - k_1^{\beta}\langle V_3^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle \frac{ds^*}{ds} + k_2^{\beta}\langle V_3^{\alpha}, V_3^{\beta}\rangle \frac{ds^*}{ds} = 0$$

elde edilir. “Eş. 3.3.10” eşitliğinden faydalanılarak

$$-k_2^{\alpha}\mu + k_2^{\beta}\sigma\varepsilon(1+\lambda') = 0$$

$$k_2^{\alpha} = \frac{k_2^{\beta}\sigma\varepsilon(1+\lambda')}{\mu} \tag{3.3.13}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrileri birbirine benzer iki eğridir.

Sonuç 3.3.3 Mannheim teoremi $(\Gamma, \tilde{\Gamma})$ eğri çifti için geçersizdir.

İspat:

$$\begin{aligned} \alpha(s)M &= M - \alpha(s) \\ &= OM - O\alpha(s) \\ &= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha} - \alpha(s). \end{aligned}$$

Norm alınırsa,

$$\left\|\alpha(s)M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha\right\| = \frac{1}{k_1^\alpha}\left\|V_2^\alpha\right\| = \frac{1}{k_1^\alpha}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\alpha(s)M^* &= M^* - \alpha(s) \\
&= OM^* - O\alpha(s) \\
&= \beta(s) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta(s) - O\alpha(s) \\
&= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta \\
&= \alpha + \lambda V_1^\alpha - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta \\
&= \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine norm alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha(s)M^*\right\| &= \sqrt{\langle \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta, \lambda V_1^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta \rangle} \\
&= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_1^\alpha, V_2^\beta\rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_2^\beta, V_1^\alpha\rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2 \langle V_2^\beta, V_2^\beta\rangle} \\
&= \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\beta(s^*)M &= OM - O\beta(s^*) \\
&= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \beta(s^*) \\
&= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_1^\alpha \\
&= \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha .
\end{aligned}$$

Yine,

$$\left\|\beta(s^*)M\right\| = \left\|\frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha\right\|$$

$$= \sqrt{\langle \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha , \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_1^\alpha \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2}$$

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\beta(s^*)M^* = \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta - \beta(s^*) = \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler oranlanırsa

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{{k_1^\alpha}^2} + \lambda^2}}{\frac{1}{k_1^\alpha}} = \sqrt{1 + {k_1^\alpha}^2\lambda^2}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \frac{\frac{1}{k_1^\beta}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 1}}$$

buradan

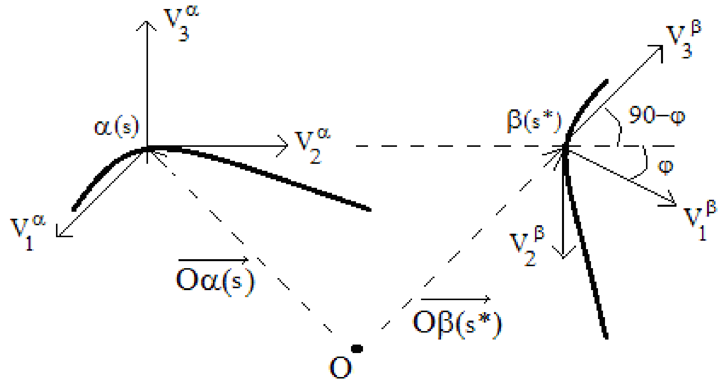
$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} \div \frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \sqrt{\left(1 + {k_1^\alpha}^2\lambda^2\right)\left(\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 1\right)}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.4 $\left(V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\right)$ vektör ikilisi birbirine dik olan Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğri çifti için Bertrand teoremi geçersizdir.

Sonuç 3.3.5 $\left(V_1^\alpha(s), V_3^\beta(s^*)\right)$ vektör ikilisi birbirine dik olan Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğri çifti için Schell teoremi geçersizdir.

3.4 $V_2^{\alpha}(s)$, $V_2^{\beta}(s^*)$ İkilisinin Birbirine Dik Olma Durumu



Şekil 3.6

$V_2^{\alpha}(s)$, $V_2^{\beta}(s^*)$ ikilisinin birbirine dik olması durumunda

$$V_2^{\alpha}(s) \in Sp\{V_1^{\beta}(s^*), V_3^{\beta}(s^*)\}$$

olur. Böyle bir durumda

$$V_2^{\alpha}(s) = \lambda_1 V_1^{\beta}(s^*) + \lambda_2 V_3^{\beta}(s^*) \qquad (3.4.1)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$V_2^{\alpha}(s) = \cos\varphi V_1^{\beta}(s^*) + \sin\varphi V_3^{\beta}(s^*) \qquad (3.4.2)$$

elde edilir. Burada Şekil 3.6'dan yararlanılarak

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_2^{\alpha}(s) \qquad (3.4.3)$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_2^{\alpha}(s)\right\| = \lambda$$

bulunur. Diğer taraftan "Eş. 3.4.3" bağıntısının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_2^{\alpha}(s) + \lambda V_2^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\alpha}(s) + \lambda' V_2^{\alpha}(s) + \lambda\left(-k_1^{\alpha}(s)V_1^{\alpha}(s) + k_2^{\alpha}(s)V_3^{\alpha}(s)\right)$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1^{\alpha})V_1^{\alpha}(s) + \lambda' V_2^{\alpha}(s) + \lambda k_2^{\alpha} V_3^{\alpha}(s) \qquad (3.4.4)$$

bulunur.

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda k_1^{\alpha})V_1^{\alpha}(s) + \lambda' V_2^{\alpha}(s) + \lambda k_2^{\alpha} V_3^{\alpha}(s) \qquad (3.4.5)$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı V_2^α ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle \frac{ds^*}{ds} = (-\lambda k_1^\alpha)\langle V_1^\alpha, V_2^\alpha\rangle + \lambda'\langle V_2^\alpha, V_2^\alpha\rangle + \lambda k_2^\alpha\langle V_3^\alpha, V_2^\alpha\rangle$$

$$\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle \frac{ds^*}{ds} = \lambda'$$

$$\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle = \lambda' \frac{ds}{ds^*} \tag{3.4.6}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca “Eş. 3.4.2” ifadesinin her iki tarafı V_1^β ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_2^\alpha, V_1^\beta\rangle = \cos\varphi\langle V_1^\beta, V_1^\beta\rangle + \sin\varphi\langle V_3^\beta, V_1^\beta\rangle$$

$$\langle V_2^\alpha, V_1^\beta\rangle = \cos\varphi \tag{3.4.7}$$

ifadesi bulunur. Bu ifade “Eş. 3.4.6” ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda'}{\cos\varphi} \tag{3.4.8}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $\varphi = \varphi(s^*)$, $\lambda = \lambda(s)$ olmak üzere

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\cos\varphi ds^* = \lambda' ds$$

$$\lambda(s) = \int \cos\varphi(s^*) ds^* + c \tag{3.4.9}$$

elde edilir. Buradan λ değerinin sabit olmadığı görülür.

Sonuç 3.4.1 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit değildir.

Bu iki eğrinin eğrilikleri için “Eş. 3.4.5” ten yararlanılarak

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (-\lambda k_1^\alpha) V_1^\alpha(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha(s)$$

iken, “Eş. 3.4.8” bu ifadede yerine yazılırsa

$$\beta'(s^*)\frac{\lambda'}{\cos\varphi} = (-\lambda k_1^\alpha) V_1^\alpha(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = (-\lambda k_1^\alpha)\frac{\cos\varphi}{\lambda'} V_1^\alpha(s) + \lambda'\frac{\cos\varphi}{\lambda'} V_2^\alpha(s) + \frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'} V_3^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = (-\lambda k_1^\alpha)\frac{\cos\varphi}{\lambda'} V_1^\alpha(s) + \cos\varphi V_2^\alpha(s) + \frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'} V_3^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*)=\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}-\frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_1^\alpha(s)+\cos\varphi V_2^\alpha(s)+\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}V_3^\alpha(s) \tag{3.4.10}$$

elde edilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds}=\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}-\frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)'V_1^\alpha+V_1^{\alpha\prime}\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}-\frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)+(\cos\varphi)'V_2^\alpha$$

$$+V_2^{\alpha\prime}\cos\varphi+\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)'V_3^\alpha+V_3^{\alpha\prime}\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds}=\frac{(-\sin\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos\varphi)}{(\lambda')^2}V_1^\alpha+k_1^\alpha V_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}-\frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)$$

$$+\frac{\left\{\left(-\sin\varphi\varphi'(\lambda k_2^\alpha)+(\lambda k_2^\alpha)'\cos\varphi\right)\lambda'-\lambda''\cos\varphi\lambda k_2^\alpha\right\}}{(\lambda')^2}V_3^\alpha$$

$$-\frac{\left\{\left((\lambda k_1^\alpha)'\cos\varphi-\sin\varphi\varphi'\lambda k_1^\alpha\right)\lambda'-\lambda''\lambda k_1^\alpha\cos\varphi\right\}}{(\lambda')^2}V_1^\alpha$$

$$-k_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)V_2^\alpha-\sin\varphi\varphi' V_2^\alpha+(-k_1^\alpha V_1^\alpha+k_2^\alpha V_3^\alpha)\cos\varphi$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds}=\left(\frac{-\sin\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos\varphi-(\lambda')^2k_1^\alpha\cos\varphi-k_1^{\alpha\prime}\lambda'\lambda\cos\varphi}{(\lambda')^2}\right)V_1^\alpha$$

$$+\left(\frac{\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda'k_1^\alpha+\lambda''\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{(\lambda')^2}\right)V_1^\alpha+k_1^\alpha V_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi-\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)$$

$$+\left(\frac{-\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda'k_2^\alpha+(\lambda')^2k_2^\alpha\cos\varphi+k_2^{\alpha\prime}\lambda'\lambda\cos\varphi-\lambda''\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{(\lambda')^2}\right)V_3^\alpha$$

$$+(-k_1^\alpha V_1^\alpha+k_2^\alpha V_3^\alpha)\cos\varphi-k_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)V_2^\alpha-\sin\varphi\varphi' V_2^\alpha$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds}=\left(\frac{k_1^\alpha\cos\varphi-\lambda k_1^{\alpha\,2}\cos\varphi-\cos\varphi\lambda k_2^{\alpha\,2}}{\lambda'}-\sin\varphi\varphi'\right)V_2^\alpha$$

$$
+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\sin\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^\alpha\cos\varphi-k_1^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos\varphi \\ +\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^\alpha+\lambda''\lambda k_1^\alpha\cos\varphi \end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_1^\alpha
$$

$$
+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^\alpha+(\lambda')^2 k_2^\alpha\cos\varphi \\ +k_2^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos\varphi-\lambda''\cos\varphi\lambda k_2^\alpha \end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_3^\alpha
$$

$$
+k_2^\alpha\cos\varphi V_3^\alpha-k_1^\alpha\cos\varphi V_1^\alpha
$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede “Eş. 3.4.8” ifadesi yerine yazılırsa

$$
\beta''(s^*)=\left(\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^\alpha+\lambda''\lambda k_1^\alpha\cos^2\varphi-(\lambda')^2 k_1^\alpha\cos^2\varphi}{(\lambda')^3}\right)V_1^\alpha
$$

$$
+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos^2\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^\alpha\cos^2\varphi-k_1^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi \end{array}\right\}}{(\lambda')^3}V_1^\alpha
$$

$$
+\frac{\left\{\begin{array}{l} k_1^\alpha\cos^2\varphi-\lambda k_1^{\alpha\,2}\cos^2\varphi \\ -\cos^2\varphi\lambda k_2^{\alpha\,2}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda' \end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_2^\alpha
$$

$$
+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^\alpha+(\lambda')^2 k_2^\alpha\cos^2\varphi \\ +k_2^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi-\lambda''\cos^2\varphi\lambda k_2^\alpha \\ +k_2^\alpha\cos^2\varphi(\lambda')^2 \end{array}\right\}}{(\lambda')^3}V_3^\alpha
$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$
P=\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos^2\varphi-(\lambda')^2 k_1^\alpha\cos^2\varphi-k_1^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi}{(\lambda')^3}\right)
$$

$$+\left(\frac{\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^\alpha + \lambda''\lambda k_1^\alpha \cos^2\varphi - (\lambda')^2 k_1^\alpha \cos^2\varphi}{(\lambda')^3}\right)$$

$$Q=\left(\frac{k_1^\alpha \cos^2\varphi - \lambda k_1^{\alpha^2}\cos^2\varphi - \cos^2\varphi\lambda k_2^{\alpha^2} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'}{(\lambda')^2}\right)$$

$$R=\frac{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^\alpha + (\lambda')^2 k_2^\alpha \cos^2\varphi \\ + k_2^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi - \lambda''\cos^2\varphi\lambda k_2^\alpha \\ + k_2^\alpha\cos^2\varphi(\lambda')^2 \end{array}\right\}}{(\lambda')^3}$$

değerleri alınırsa

$$\beta''(s^*) = PV_1^\alpha + QV_2^\alpha + RV_3^\alpha \tag{3.4.11}$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa "Eş. 3.4.8" ifadesinden de yararlanılarak

$$\beta'''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = P'V_1^\alpha + V_1^{\alpha\,\prime}P + Q'V_2^\alpha + V_2^{\alpha\,\prime}Q + R'V_3^\alpha + V_3^{\alpha\,\prime}R$$

$$\beta'''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = P'V_1^\alpha + k_1^\alpha V_2^\alpha P + Q'V_2^\alpha + (-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha)Q + R'V_3^\alpha - k_2^\alpha V_2^\alpha R$$

$$\beta'''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (P' - k_1^\alpha Q)V_1^\alpha + (k_1^\alpha P + Q' - k_2^\alpha R)V_2^\alpha + (k_2^\alpha Q + R')V_3^\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta'''(s^*) = (P' - k_1^\alpha Q)\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_1^\alpha + (k_1^\alpha P + Q' - k_2^\alpha R)\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_2^\alpha \\ \quad + (k_2^\alpha Q + R')\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_3^\alpha \end{array}\right\} \tag{3.4.12}$$

ifadesi elde edilir. s^* yay parametresi olduğundan $\|\beta'(s^*)\| = 1$ olmak üzere $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin eğrilik ve burulması;

$$\beta''(s^*) = PV_1^\alpha + QV_2^\alpha + RV_3^\alpha$$

$$\beta'(s^*) = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_1^\alpha(s) + \cos\varphi V_2^\alpha(s) + \frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}V_3^\alpha(s)$$

$$\beta' \wedge \beta'' = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) Q V_3^\alpha - \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) R V_2^\alpha$$

$$- \cos\varphi P V_3^\alpha + \cos\varphi R V_1^\alpha$$

$$+ \frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} P V_2^\alpha - \frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} Q V_1^\alpha$$

$$\beta' \wedge \beta'' = \left(\cos\varphi R - \frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} Q\right) V_1^\alpha + \left(\frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} P - \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) R\right) V_2^\alpha$$

$$+ \left(\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) Q - \cos\varphi P\right) V_3^\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} \beta' \wedge \beta'' &= \cos\varphi\left[\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right) V_1^\alpha + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right) V_2^\alpha\right] \\ &+ \cos\varphi\left(\frac{(1 - \lambda k_1^\alpha) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right) V_3^\alpha \end{aligned}\right\} \quad (3.4.13)$$

$$\|\beta' \wedge \beta''\| = |\cos\varphi| \sqrt{\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{(1 - \lambda k_1^\alpha) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right)^2}$$

$$\|\beta' \wedge \beta''\|^2 = \cos^2\varphi \left[\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right)^2 V_1^\alpha + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right)^2 V_2^\alpha + \left(\frac{(1 - \lambda k_1^\alpha) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right)^2 V_3^\alpha\right]$$

bulunur. Diğer taraftan, $\det(\beta', \beta'', \beta''') = \langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle$ eşitliği kullanılırsa;

$$\det(\beta', \beta'', \beta''') = \left\langle \cos\varphi \begin{bmatrix} \left(R - \dfrac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right) V_1^\alpha \\ + \left(\dfrac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right) V_2^\alpha \\ + \left(\dfrac{(1 - \lambda k_1^\alpha) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right) V_3^\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (P' - k_1^\alpha Q) \dfrac{\cos\varphi}{\lambda'} V_1^\alpha \\ + (k_1^\alpha P + Q' - k_2^\alpha R) \dfrac{\cos\varphi}{\lambda'} V_2^\alpha \\ + (k_2^\alpha Q + R') \dfrac{\cos\varphi}{\lambda'} V_3^\alpha \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{\cos^2\varphi}{(\lambda')^2} \left[(R\lambda' - \lambda k_2^\alpha Q)(P' - k_1^\alpha Q) + (\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R)(k_1^\alpha P + Q' - k_2^\alpha R) \right.$$

$$\left. + \left((1 - \lambda k_1^\alpha) Q - \lambda' P\right)(k_2^\alpha Q + R') \right]$$

ifadesi elde edilir. Buna göre

$$k_1^\beta = |\cos\varphi| \sqrt{\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{(1 - \lambda k_1^\alpha) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right)^2} \quad (3.4.14)$$

bulunur. Ayrıca

$$k_2^{\beta}=\frac{\left(R\lambda'-\lambda k_2^{\alpha}Q\right)\left(P'-k_1^{\alpha}Q\right)+\left(\lambda k_2^{\alpha}P+\lambda k_1^{\alpha}R-R\right)\left(k_1^{\alpha}P+Q'-k_2^{\alpha}R\right)}{\left(R\lambda'-\lambda k_2^{\alpha}Q\right)^2V_1^{\alpha}+\left(\lambda k_2^{\alpha}P+\lambda k_1^{\alpha}R-R\right)^2V_2^{\alpha}+\left(\left(-\lambda k_1^{\alpha}\right)Q-\lambda'P\right)^2V_3^{\alpha}}$$

$$+\frac{\left(\left(-\lambda k_1^{\alpha}\right)Q-\lambda'P\right)\left(k_2^{\alpha}Q+R'\right)}{\left(R\lambda'-\lambda k_2^{\alpha}Q\right)^2V_1^{\alpha}+\left(\lambda k_2^{\alpha}P+\lambda k_1^{\alpha}R-R\right)^2V_2^{\alpha}+\left(\left(-\lambda k_1^{\alpha}\right)Q-\lambda'P\right)^2V_3^{\alpha}}$$

bulunur.

Sonuç 3.4.2 $\left\{V_2^{\alpha}(s),\ V_2^{\beta}(s^*)\right\}$ vektör ikilisi birbirine dik olan, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrileri için Schell teoremi geçersizdir.

Sonuç 3.4.3 $\left\{V_2^{\alpha}(s),\ V_2^{\beta}(s^*)\right\}$ vektör ikilisi birbirine dik olan, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrileri için Mannheim teoremi geçersizdir.

İspat:

$$\begin{aligned}\alpha(s)M&=M-\alpha(s)\\&=OM-O\alpha(s)\\&=\alpha(s)+\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha}-\alpha(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa

$$\left\|\alpha(s)M\right\|=\left\|\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha}\right\|=\frac{1}{k_1^{\alpha}}\left\|V_2^{\alpha}\right\|=\frac{1}{k_1^{\alpha}}$$

Yine,

$$\begin{aligned}\alpha(s)M^*&=M^*-\alpha(s)\\&=OM^*-O\alpha(s)\\&=\beta(s^*)+\frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}(s^*)-O\alpha(s)\\&=\beta-\alpha+\frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\\&=\alpha+\lambda V_2^{\alpha}-\alpha+\frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\\&=\lambda V_2^{\alpha}+\frac{1}{k_1^{\beta}}V_2^{\beta}\end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa,

$$\left\|\alpha(s)M^*\right\| = \sqrt{\langle \lambda V_2^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta, \lambda V_2^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_2^\beta, V_2^\alpha\rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2 \langle V_2^\beta, V_2^\beta\rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}\ .$$

Benzer şekilde,

$$\beta(s^*)M = OM - O\beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_2^\alpha$$

$$= \frac{1}{k_1^\alpha}V_2^\alpha - \lambda V_2^\alpha$$

$$= \left(\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right)V_2^\alpha .$$

Yine norm hesaplanırsa,

$$\left\|\beta(s^*)M\right\| = \left\|\left(\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right)V_2^\alpha\right\|$$

$$= \left|\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right| \left\|V_2^\alpha\right\|$$

$$= \left|\frac{1}{k_1^\alpha} - \lambda\right| .$$

Son olarak,

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta - \beta(s^*) = \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

bulunur. Buradan

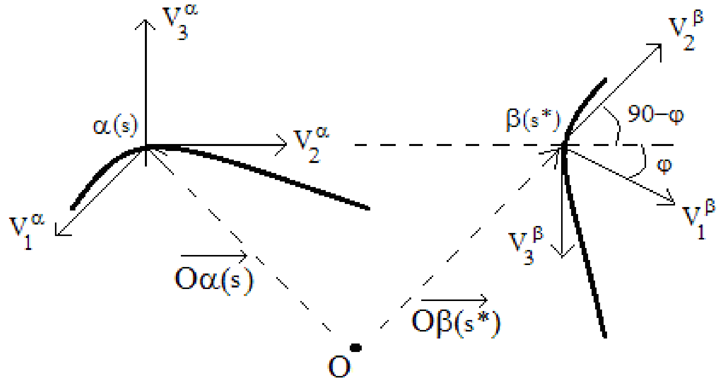
$$\frac{\|\beta(s^*)M\|}{\|\alpha(s)M\|}=\frac{\left|\frac{1}{k_1^{\alpha}}-\lambda\right|}{\frac{1}{k_1^{\alpha}}}=k_1^{\alpha}\left|\frac{1}{k_1^{\alpha}}-\lambda\right|$$

$$\frac{\|\beta(s^*)M^*\|}{\|\alpha(s)M^*\|}=\frac{\frac{1}{k_1^{\beta}}}{\sqrt{\lambda^2+\left(\frac{1}{k_1^{\beta}}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2 k_1^{\beta 2}+1}}$$

$$\frac{\|\beta(s^*)M\|}{\|\alpha(s)M\|}\div\frac{\|\beta(s^*)M^*\|}{\|\alpha(s)M^*\|}=k_1^{\alpha}\left|\frac{1}{k_1^{\alpha}}-\lambda\right|\sqrt{\lambda^2 k_1^{\beta 2}+1}$$

elde edilir ve bu ifadenin sabit olmadığı görülür.

3.5 $\{V_2^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ İkilisinin Birbirine Dik Olma Durumu



Şekil 3.7

$\{V_2^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ ikilisinin birbirine dik olması durumunda

$$V_2^{\alpha}(s)\in Sp\{V_1^{\beta}(s^*), V_2^{\beta}(s^*)\}$$

olur. Böyle bir durumda

$$V_2^{\alpha}(s)=\lambda_1 V_1^{\beta}(s^*)+\lambda_2 V_2^{\beta}(s^*) \tag{3.5.1}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$V_2^{\alpha}(s)=\cos\varphi V_1^{\beta}(s^*)+\sin\varphi V_2^{\beta}(s^*) \tag{3.5.2}$$

elde edilir. Burada Şekil 3.7'den yararlanılarak

$$\beta(s^*)=\alpha(s)+\lambda V_2^{\alpha}(s) \tag{3.5.3}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan

$$d(\alpha(s),\beta(s^*)) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_2^\alpha(s)\right\| = \lambda \tag{3.5.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan “Eş. 3.5.3” bağıntısının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + \lambda V_2^{\alpha\,\prime}(s)$$

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha + \lambda' V_2^\alpha + \lambda(k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha)$$

$$V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (-\lambda k_1^\alpha)V_1^\alpha + \lambda' V_2^\alpha + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha \tag{3.5.5}$$

bulunur.

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\beta(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (-\lambda k_1^\alpha)V_1^\alpha + \lambda' V_2^\alpha + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha \tag{3.5.6}$$

elde edilir. Ayrıca “Eş. 3.5.2” eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla V_1^β ve V_2^β ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_2^\alpha, V_1^\beta\rangle = \cos\varphi\langle V_1^\beta, V_1^\beta\rangle + \sin\varphi\langle V_2^\beta, V_1^\beta\rangle$$

$$\langle V_2^\alpha, V_1^\beta\rangle = \cos\varphi \tag{3.5.7}$$

$$\langle V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle = \cos\varphi\langle V_1^\beta, V_2^\beta\rangle + \sin\varphi\langle V_2^\beta, V_2^\beta\rangle$$

$$\langle V_2^\alpha, V_2^\beta\rangle = \sin\varphi \tag{3.5.8}$$

ifadeleri elde edilir. “Eş. 3.5.6” ifadesinin her iki tarafı V_2^α ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_1^\beta, V_2^\alpha\rangle\frac{ds^*}{ds} = \lambda'$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede “Eş. 3.5.7” ifadesi yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda'}{\cos\varphi} \tag{3.5.9}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\varphi = \varphi(s^*)$, $\lambda = \lambda(s)$ olmak üzere

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\cos\varphi\, ds^* = \lambda' ds$$

$$\lambda(s) = \int \cos\varphi(s^*)\, ds^* + c \tag{3.5.10}$$

elde edilir. Buradan λ değerinin sabit olmadığı görülür.

Sonuç 3.5.1 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit değildir. Bu iki eğrinin eğrilikleri için “Eş. 3.5.6” dan faydalanılarak,

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = (1-\lambda k_1^\alpha)V_1^\alpha(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha(s) \tag{3.5.11}$$

iken “Eş. 3.5.9” ifadesi bu ifadede yerine yazılırsa

$$\beta'(s^*)\frac{\lambda'}{\cos\varphi} = (1-\lambda k_1^\alpha)V_1^\alpha(s) + \lambda' V_2^\alpha(s) + \lambda k_2^\alpha V_3^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = (1-\lambda k_1^\alpha)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^\alpha(s) + \lambda'\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_2^\alpha(s) + \frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}V_3^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = (1-\lambda k_1^\alpha)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^\alpha(s) + \cos\varphi V_2^\alpha(s) + \frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}V_3^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_1^\alpha(s) + \cos\varphi V_2^\alpha(s) + \frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}V_3^\alpha(s) \tag{3.5.12}$$

elde edilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)' V_1^\alpha + V_1^{\alpha\prime}\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)$$

$$+ (\cos\varphi)' V_2^\alpha + V_2^{\alpha\prime}\cos\varphi + \left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)' V_3^\alpha + V_3^{\alpha\prime}\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = +\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(-\sin\varphi\varphi'(\lambda k_2^\alpha) + (\lambda k_2^\alpha)'\cos\varphi\right)\lambda' \\ -\lambda''\cos\varphi\lambda k_2^\alpha\end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_3^\alpha$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}-\sin\varphi\varphi'\lambda' - \lambda''\cos\varphi \\ -\left((\lambda k_1^\alpha)'\cos\varphi - \sin\varphi\varphi'\lambda k_1^\alpha\right)\lambda' \\ +\lambda''\lambda k_1^\alpha\cos\varphi\end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_1^\alpha$$

$$+ k_1^\alpha V_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right) - \sin\varphi\varphi' V_2^\alpha$$

$$+ (-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha)\cos\varphi - k_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)V_2^\alpha$$

$$\beta''(s^*)\left(\frac{ds^*}{ds}\right) = k_1^\alpha V_2^\alpha \left(\frac{\cos\varphi - \lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) - \sin\varphi\varphi' V_2^\alpha$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\sin\varphi\varphi'\lambda' - \lambda''\cos\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^\alpha \cos\varphi - {k_1^\alpha}'\lambda'\lambda\cos\varphi \\ +\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^\alpha + \lambda''\lambda k_1^\alpha \cos\varphi \end{array}\right\}}{(\lambda')^2} V_1^\alpha$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^\alpha + (\lambda')^2 k_2^\alpha \cos\varphi \\ +{k_2^\alpha}'\lambda'\lambda\cos\varphi - \lambda''\cos\varphi\lambda k_2^\alpha \end{array}\right\}}{(\lambda')^2} V_3^\alpha$$

$$-k_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi\lambda k_2^\alpha}{\lambda'}\right)V_2^\alpha + \left(-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha\right)\cos\varphi$$

$$\beta''(s^*)\left(\frac{ds^*}{ds}\right) = \frac{\left\{\begin{array}{l} k_1^\alpha\cos\varphi - \lambda {k_1^\alpha}^2\cos\varphi \\ -\cos\varphi\lambda {k_2^\alpha}^2 - \lambda'\sin\varphi\varphi' \end{array}\right\}}{\lambda'} V_2^\alpha$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\sin\varphi\varphi'\lambda' - \lambda''\cos\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^\alpha \cos\varphi - {k_1^\alpha}'\lambda'\lambda\cos\varphi \\ +\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^\alpha + \lambda''\lambda k_1^\alpha \cos\varphi \end{array}\right\}}{(\lambda')^2} V_1^\alpha$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} -\sin\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^\alpha + (\lambda')^2 k_2^\alpha \cos\varphi \\ +{k_2^\alpha}'\lambda'\lambda\cos\varphi - \lambda''\cos\varphi\lambda k_2^\alpha \end{array}\right\}}{(\lambda')^2} V_3^\alpha$$

$$+k_2^\alpha\cos\varphi V_3^\alpha - k_1^\alpha\cos\varphi V_1^\alpha$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede “Eş. 3.5.9” ifadesi yerine yazılırsa

$$\beta''(s^*) = \frac{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda' - \lambda''\cos^2\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^\alpha\cos^2\varphi - {k_1^\alpha}'\lambda'\lambda\cos^2\varphi \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^\alpha + \lambda''\lambda k_1^\alpha\cos^2\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^\alpha\cos^2\varphi \end{array}\right\}}{(\lambda')^3} V_1^\alpha$$

$$+\frac{\begin{Bmatrix} k_1^{\alpha}\cos^2\varphi-\lambda k_1^{\alpha^2}\cos^2\varphi \\ -\cos^2\varphi\lambda k_2^{\alpha^2}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda' \end{Bmatrix}}{(\lambda')^2}V_2^{\alpha}+\frac{\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^{\alpha}+(\lambda')^2 k_2^{\alpha}\cos^2\varphi \\ +k_2^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi-\lambda''\cos^2\varphi\lambda k_2^{\alpha} \\ +k_2^{\alpha}\cos^2\varphi(\lambda')^2 \end{Bmatrix}}{(\lambda')^3}V_3^{\alpha}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$P=\frac{\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos^2\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^{\alpha}\cos^2\varphi-k_1^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi \end{Bmatrix}}{(\lambda')^3}+\frac{\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_1^{\alpha}+\lambda''\lambda k_1^{\alpha}\cos^2\varphi \\ -(\lambda')^2 k_1^{\alpha}\cos^2\varphi \end{Bmatrix}}{(\lambda')^3}$$

$$Q=\left(\frac{k_1^{\alpha}\cos^2\varphi-\lambda k_1^{\alpha^2}\cos^2\varphi-\cos^2\varphi\lambda k_2^{\alpha^2}-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'}{(\lambda')^2}\right)$$

$$R=\frac{\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda\lambda' k_2^{\alpha}+(\lambda')^2 k_2^{\alpha}\cos^2\varphi \\ +k_2^{\alpha\,\prime}\lambda'\lambda\cos^2\varphi-\lambda''\cos^2\varphi\lambda k_2^{\alpha}+k_2^{\alpha}\cos^2\varphi(\lambda')^2 \end{Bmatrix}}{(\lambda')^3}$$

değerleri alınırsa

$$\beta''(s^*)=PV_1^{\alpha}+QV_2^{\alpha}+RV_3^{\alpha} \tag{3.5.13}$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa “Eş. 3.5.8” ifadesinden de yararlanılarak, “Eş. 3.4.12” ile aynı ifade olan,

$$\left.\begin{aligned} \beta'''(s^*)=&\left(P'-k_1^{\alpha}Q\right)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^{\alpha}+\left(k_1^{\alpha}P+Q'-k_2^{\alpha}R\right)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_2^{\alpha} \\ &+\left(k_2^{\alpha}Q+R'\right)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_3^{\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{3.5.14}$$

ifadesi elde edilir. s^* yay parametresi olduğundan $\left\|\beta'(s^*)\right\|=1$ olmak üzere $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin eğrilik ve burulması;

$$\beta''(s^*)=PV_1^{\alpha}+QV_2^{\alpha}+RV_3^{\alpha}$$

$$\beta'(s^*)=\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}-\frac{\lambda k_1^{\alpha}\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_1^{\alpha}(s)+\cos\varphi V_2^{\alpha}(s)+\frac{\cos\varphi\lambda k_2^{\alpha}}{\lambda'}V_3^{\alpha}(s)$$

$$\beta' \wedge \beta'' = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) Q V_3^\alpha - \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) R V_2^\alpha - \cos\varphi P V_3^\alpha$$

$$+\cos\varphi R V_1^\alpha + \frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} P V_2^\alpha - \frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} Q V_1^\alpha$$

$$\beta' \wedge \beta'' = \left(\cos\varphi R - \frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} Q\right) V_1^\alpha + \left(\frac{\cos\varphi \lambda k_2^\alpha}{\lambda'} P - \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) R\right) V_2^\alpha$$

$$+\left(\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'} - \frac{\lambda k_1^\alpha \cos\varphi}{\lambda'}\right) Q - \cos\varphi P\right) V_3^\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} &\beta' \wedge \beta'' = \cos\varphi \left(\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right) V_1^\alpha + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right) V_2^\alpha \right. \\ &\left. + \left(\frac{\left(1 - \lambda k_1^\alpha\right) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right) V_3^\alpha \right) \end{aligned}\right\} \qquad (3.5.15)$$

$$\left\|\beta' \wedge \beta''\right\| = \left|\cos\varphi\right| \sqrt{\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{\left(1 - \lambda k_1^\alpha\right) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right)^2}$$

$$\left\|\beta' \wedge \beta''\right\|^2 = \cos^2\varphi \left[\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right)^2 V_1^\alpha + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right)^2 V_2^\alpha + \left(\frac{\left(1 - \lambda k_1^\alpha\right) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right)^2 V_3^\alpha\right]$$

Diğer taraftan, $\det\left(\beta', \beta'', \beta'''\right) = \langle \beta' \wedge \beta'', \beta''' \rangle$ eşitliği kullanılırsa;

$$\det\left(\beta', \beta'', \beta'''\right) = \left\langle \cos\varphi \begin{bmatrix} \left(R - \dfrac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right) V_1^\alpha \\ + \left(\dfrac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right) V_2^\alpha \\ + \left(\dfrac{\left(1 - \lambda k_1^\alpha\right) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right) V_3^\alpha \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \left(P' - k_1^\alpha Q\right) \dfrac{\cos\varphi}{\lambda'} V_1^\alpha \\ + \left(k_1^\alpha P + Q' - k_2^\alpha R\right) \dfrac{\cos\varphi}{\lambda'} V_2^\alpha \\ + \left(k_2^\alpha Q + R'\right) \dfrac{\cos\varphi}{\lambda'} V_3^\alpha \rangle \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{\cos^2\varphi}{\left(\lambda'\right)^2} \left[\left(R\lambda' - \lambda k_2^\alpha Q\right)\left(P' - k_1^\alpha Q\right) + \left(\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R\right)\left(k_1^\alpha P + Q' - k_2^\alpha R\right)\right.$$

$$\left. + \left(\left(1 - \lambda k_1^\alpha\right) Q - \lambda' P\right)\left(k_2^\alpha Q + R'\right)\right]$$

ifadesi elde edilir. Buna göre,

$$k_1^\beta = \left|\cos\varphi\right| \sqrt{\left(R - \frac{\lambda k_2^\alpha Q}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{\lambda k_2^\alpha P + \lambda k_1^\alpha R - R}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{\left(1 - \lambda k_1^\alpha\right) Q - \lambda' P}{\lambda'}\right)^2} \qquad (3.5.16)$$

bulunur. Ayrıca

$$k_2^{\beta} = \frac{\left(R\lambda' - \lambda k_2^{\alpha} Q\right)\left(P' - k_1^{\alpha} Q\right) + \left(\lambda k_2^{\alpha} P + \lambda k_1^{\alpha} R - R\right)\left(k_1^{\alpha} P + Q' - k_2^{\alpha} R\right)}{\left(R\lambda' - \lambda k_2^{\alpha} Q\right)^2 V_1^{\alpha} + \left(\lambda k_2^{\alpha} P + \lambda k_1^{\alpha} R - R\right)^2 V_2^{\alpha} + \left(\left(1 - \lambda k_1^{\alpha}\right) Q - \lambda' P\right)^2 V_3^{\alpha}}$$

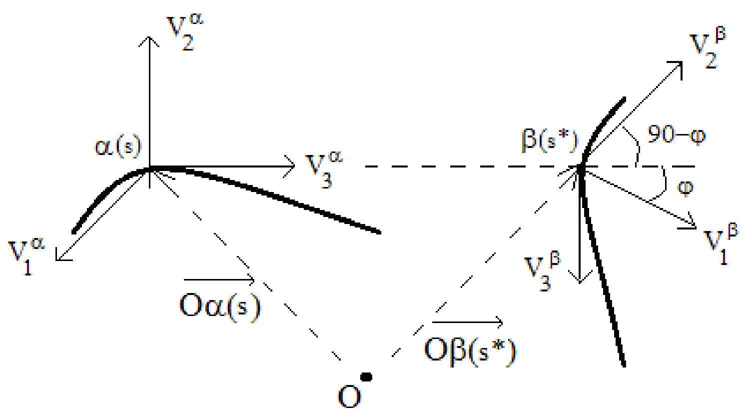
$$+ \frac{\left(\left(1 - \lambda k_1^{\alpha}\right) Q - \lambda' P\right)\left(k_2^{\alpha} Q + R'\right)}{\left(R\lambda' - \lambda k_2^{\alpha} Q\right)^2 V_1^{\alpha} + \left(\lambda k_2^{\alpha} P + \lambda k_1^{\alpha} R - R\right)^2 V_2^{\alpha} + \left(\left(1 - \lambda k_1^{\alpha}\right) Q - \lambda' P\right)^2 V_3^{\alpha}}$$

bulunur.

Sonuç 3.5.2 $\{V_2^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ Frenet vektör çifti birbirine dik olan, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğri çifti için Mannheim teoremi geçerli değildir.

İspat: Bu ifadenin ispatı Sonuç 3.4.3 ile aynıdır.

3.6 $\{V_3^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ İkilisinin Birbirine Dik Olma Durumu



Şekil 3.8

$\{V_3^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\}$ ikilisinin birbirine dik olması durumunda

$$V_3^{\alpha}(s) \in Sp\{V_1^{\beta}(s^*), V_2^{\beta}(s^*)\}$$

olur. Böyle bir durumda

$$V_3^{\alpha}(s) = \lambda_1 V_1^{\beta}(s^*) + \lambda_2 V_2^{\beta}(s^*) \tag{3.6.1}$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$V_3^{\alpha}(s) = \cos\varphi V_1^{\beta}(s^*) + \sin\varphi V_2^{\beta}(s^*) \tag{3.6.2}$$

elde edilir. Burada şekilden yararlanılarak

$$\beta(s^*) = \alpha(s) + \lambda V_3^{\alpha}(s) \tag{3.6.3}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan

$$d(\alpha(s), \beta(s^*)) = \left\|\beta(s^*) - \alpha(s)\right\| = \left\|\lambda V_3^{\alpha}(s)\right\| = \lambda \tag{3.6.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan “Eş. 3.6.3” bağıntısının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_3^{\alpha}(s) + \lambda(V_3^{\alpha}(s))'$$

$$V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\alpha} - \lambda k_2^{\alpha} V_2^{\alpha} + \lambda' V_3^{\alpha} \tag{3.6.5}$$

bulunur.

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\beta}(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^{\alpha} - \lambda k_2^{\alpha} V_2^{\alpha} + \lambda' V_3^{\alpha} \tag{3.6.6}$$

elde edilir. Ayrıca “Eş. 3.6.2” eşitliğinin her iki tarafı sırasıyla V_1^{β} ve V_2^{β} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_3^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \cos\varphi \langle V_1^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle + \sin\varphi \langle V_2^{\beta}, V_1^{\beta}\rangle$$

$$\langle V_3^{\alpha}, V_1^{\beta}\rangle = \cos\varphi \tag{3.6.7}$$

$$\langle V_3^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle = \cos\varphi \langle V_1^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle + \sin\varphi \langle V_2^{\beta}, V_2^{\beta}\rangle$$

$$\langle V_3^{\alpha}, V_2^{\beta}\rangle = \sin\varphi \tag{3.6.8}$$

ifadeleri elde edilir. “Eş. 3.6.6” ifadesinin her iki tarafı V_3^{α} ile iç çarpıma tâbi tutulursa

$$\langle V_1^{\beta}, V_3^{\alpha}\rangle \frac{ds^*}{ds} = \lambda'$$

ifadesi bulunur. Bu ifadede “Eş. 3.6.7” ifadesi yerine yazılırsa

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda'}{\cos\varphi} \tag{3.6.9}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\varphi = \varphi(s^*)$, $\lambda = \lambda(s)$ olmak üzere

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{\lambda'}{\cos\varphi}$$

$$\cos\varphi\, ds^* = \lambda' ds$$

$$\lambda(s) = \int \cos\varphi(s^*)\, ds^* + c \tag{3.6.10}$$

elde edilir. Buradan λ değerinin sabit olmadığı görülür.

Sonuç 3.6.1 Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabit değildir.

Bu iki eğrinin eğrilikleri için “Eş. 3.6.3” bağıntısının her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa;

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \alpha'(s) + \lambda' V_3^\alpha(s) + V_3^{\alpha\,\prime}(s)\lambda$$

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha(s) + \lambda' V_3^\alpha(s) - \lambda k_2^\alpha(s) V_2^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*)\frac{ds^*}{ds} = V_1^\alpha(s) + \lambda' V_3^\alpha(s) - \lambda k_2^\alpha(s) V_2^\alpha(s) \tag{3.6.11}$$

iken “Eş. 3.6.9” ifadesi bu ifadede yerine yazılırsa

$$\beta'(s^*)\left(\frac{\lambda'}{\cos\varphi}\right) = V_1^\alpha(s) + \lambda' V_3^\alpha(s) - \lambda k_2^\alpha(s) V_2^\alpha(s)$$

$$\beta'(s^*) = \frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^\alpha + \lambda'\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_3^\alpha - \lambda k_2^\alpha\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_2^\alpha$$

$$\beta'(s^*) = \frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^\alpha(s) - \frac{\lambda k_2^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}V_2^\alpha(s) + \cos\varphi V_3^\alpha(s) \tag{3.6.12}$$

elde edilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)' V_1^\alpha + V_1^{\alpha\,\prime}\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right) - \left(\frac{\lambda k_2^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)' V_2^\alpha - V_2^{\alpha\,\prime}\left(\frac{\lambda k_2^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)$$

$$+ (\cos\varphi)' V_3^\alpha + V_3^{\alpha\,\prime}\cos\varphi$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \left(\frac{-\sin\varphi\varphi'\lambda' - \lambda''\cos\varphi}{(\lambda')^2}\right)V_1^\alpha + k_1^\alpha V_2^\alpha\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)$$

$$-(-k_1^\alpha V_1^\alpha + k_2^\alpha V_3^\alpha)\left(\frac{\lambda k_2^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right) - \sin\varphi\varphi' V_3^\alpha - k_2^\alpha V_2^\alpha\cos\varphi$$

$$-\frac{\left\{\begin{array}{l}\left((\lambda k_2^\alpha)'\cos\varphi - \sin\varphi\varphi'\lambda k_2^\alpha\right)\lambda' \\ -\lambda''\lambda k_2^\alpha\cos\varphi\end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_2^\alpha$$

$$\beta''(s^*)\frac{ds^*}{ds} = \left(\frac{-\sin\varphi\varphi'\lambda' - \lambda''\cos\varphi}{(\lambda')^2} + \frac{\lambda k_1^\alpha k_2^\alpha\cos\varphi}{\lambda'}\right)V_1^\alpha$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}\lambda' k_1^\alpha\cos\varphi - \left((\lambda k_2^\alpha)'\cos\varphi - \sin\varphi\varphi'\lambda k_2^\alpha\right)\lambda' \\ +\lambda''\lambda k_2^\alpha\cos\varphi + (\lambda')^2 k_2^\alpha\cos\varphi\end{array}\right\}}{(\lambda')^2}V_2^\alpha$$

$$+\left(-\frac{\lambda k_2^{\alpha\,2}\cos\varphi}{\lambda'}-\sin\varphi\varphi'\right)V_3^{\alpha}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede “Eş. 3.6.9” ifadesi yerine yazılırsa

$$\beta''(s^*)=\left(\frac{-\sin\varphi\cos\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos^2\varphi}{(\lambda')^3}+\frac{\lambda k_1^{\alpha}k_2^{\alpha}\cos^2\varphi}{(\lambda')^2}\right)V_1^{\alpha}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}\lambda' k_1^{\alpha}\cos^2\varphi-\left((\lambda k_2^{\alpha})'\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\varphi'\lambda k_2^{\alpha}\right)\lambda' \\ +\lambda''\lambda k_2^{\alpha}\cos^2\varphi-(\lambda')^2 k_2^{\alpha}\cos^2\varphi\end{array}\right\}}{(\lambda')^3}V_2^{\alpha}$$

$$+\left(-\frac{\lambda k_2^{\alpha\,2}\cos^2\varphi}{(\lambda')^2}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi\varphi'}{\lambda'}\right)V_3^{\alpha}$$

$$\beta''(s^*)=\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos^2\varphi+\lambda\lambda' k_1^{\alpha}k_2^{\alpha}\cos^2\varphi}{(\lambda')^3}\right)V_1^{\alpha}$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l}\lambda' k_1^{\alpha}\cos^2\varphi-\left((\lambda k_2^{\alpha})'\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda k_2^{\alpha}\right)\lambda' \\ +\lambda''\lambda k_2^{\alpha}\cos^2\varphi-k_2^{\alpha}(\lambda')^2\cos^2\varphi\end{array}\right\}}{(\lambda')^3}V_2^{\alpha}$$

$$+\left(-\frac{\lambda k_2^{\alpha\,2}\cos^2\varphi-\lambda'\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'}{(\lambda')^2}\right)V_3^{\alpha}$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$P=\left(\frac{-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda'-\lambda''\cos^2\varphi+\lambda\lambda' k_1^{\alpha}k_2^{\alpha}\cos^2\varphi}{(\lambda')^3}\right)$$

$$Q=\frac{\left\{\begin{array}{l}\lambda' k_1^{\alpha}\cos^2\varphi-\left((\lambda k_2^{\alpha})'\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'\lambda k_2^{\alpha}\right)\lambda' \\ +\lambda''\lambda k_2^{\alpha}\cos^2\varphi-k_2^{\alpha}(\lambda')^2\cos^2\varphi\end{array}\right\}}{(\lambda')^3}$$

$$R=\left(-\frac{\lambda {k_2^{\alpha}}^2\cos^2\varphi-\lambda'\frac{1}{2}\sin 2\varphi\varphi'}{(\lambda')^2}\right)$$

değerleri alınırsa

$$\beta''(s^*)=PV_1^{\alpha}+QV_2^{\alpha}+RV_3^{\alpha} \tag{3.6.13}$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa, “Eş. 3.6.9” ifadesinden de yararlanılarak, “Eş. 3.5.14” ile aynı ifade olan,

$$\left.\begin{aligned}\beta'''(s^*)&=(P'-k_1^{\alpha}Q)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^{\alpha}+(k_1^{\alpha}P+Q'-k_2^{\alpha}R)\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_2^{\alpha}\\&+(k_2^{\alpha}Q+R')\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_3^{\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{3.6.14}$$

ifadesi elde edilir. s^* yay parametresi olduğundan $\left\|\beta'(s^*)\right\|=1$ olmak üzere $\tilde{\Gamma}$ eğrisinin eğrilik ve burulması;

$$\beta''(s^*)=PV_1^{\alpha}+QV_2^{\alpha}+RV_3^{\alpha}$$

$$\beta'(s^*)=\frac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^{\alpha}(s)-\frac{\lambda k_2^{\alpha}\cos\varphi}{\lambda'}V_2^{\alpha}(s)+\cos\varphi V_3^{\alpha}(s)$$

$$\beta'\wedge\beta''=\frac{\cos\varphi}{\lambda'}QV_3^{\alpha}-\frac{\cos\varphi}{\lambda'}RV_2^{\alpha}-\left(-\frac{\lambda k_2^{\alpha}\cos\varphi}{\lambda'}\right)PV_3^{\alpha}$$

$$+\left(-\frac{\lambda k_2^{\alpha}\cos\varphi}{\lambda'}\right)RV_1^{\alpha}+\cos\varphi PV_2^{\alpha}-\cos\varphi QV_1^{\alpha}$$

$$\beta'\wedge\beta''=\left(-\frac{\lambda k_2^{\alpha}\cos\varphi R}{\lambda'}-\cos\varphi Q\right)V_1^{\alpha}+\left(\cos\varphi P-\frac{\cos\varphi R}{\lambda'}\right)V_2^{\alpha}$$

$$+\left(\frac{\cos\varphi Q}{\lambda'}+\frac{\lambda k_2^{\alpha}\cos\varphi P}{\lambda'}\right)V_3^{\alpha}$$

$$\beta'\wedge\beta''=\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\left[(-\lambda k_2^{\alpha}R-\lambda'Q)V_1^{\alpha}+(P\lambda'-R)V_2^{\alpha}+(Q+\lambda k_2^{\alpha}P)V_3^{\alpha}\right] \tag{3.6.15}$$

$$\left\|\beta'\wedge\beta''\right\|=\left|\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right|\sqrt{(\lambda k_2^{\alpha}R+\lambda'Q)^2+(P\lambda'-R)^2+(Q+\lambda k_2^{\alpha}P)^2}$$

$$\left\|\beta'\wedge\beta''\right\|^2=\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)^2\left[(\lambda k_2^{\alpha}R+\lambda'Q)^2+(P\lambda'-R)^2+(Q+\lambda k_2^{\alpha}P)^2\right].$$

Diğer taraftan, $\det(\beta',\beta'',\beta''')=\langle\beta'\wedge\beta'',\beta'''\rangle$ eşitliği kullanılırsa;

$$\det\left(\beta',\beta'',\beta'''\right)=\left\langle \frac{\cos\varphi}{\lambda'}\begin{Bmatrix}\left(-\lambda k_2^{\alpha}R-\lambda' Q\right)V_1^{\alpha}\\ +\left(P\lambda'-R\right)V_2^{\alpha}\\ +\left(Q+\lambda k_2^{\alpha}P\right)V_3^{\alpha}\end{Bmatrix},\begin{Bmatrix}\left(P'-k_1^{\alpha}Q\right)\dfrac{\cos\varphi}{\lambda'}V_1^{\alpha}\\ +\left(k_1^{\alpha}P+Q'-k_2^{\alpha}R\right)\dfrac{\cos\varphi}{\lambda'}V_2^{\alpha}\\ +\left(k_2^{\alpha}Q+R'\right)\dfrac{\cos\varphi}{\lambda'}V_3^{\alpha}\end{Bmatrix}\right\rangle$$

$$=\left(\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right)^2\begin{Bmatrix}\left(-\lambda k_2^{\alpha}R-\lambda' Q\right)\left(P'-k_1^{\alpha}Q\right)\\ +\left(P\lambda'-R\right)\left(k_1^{\alpha}P+Q'-k_2^{\alpha}R\right)\\ +\left(Q+\lambda k_2^{\alpha}P\right)\left(k_2^{\alpha}Q+R'\right)\end{Bmatrix}$$

ifadesi elde edilir. Buna göre

$$k_1^{\beta}=\left\|\beta'\wedge\beta''\right\|=\left|\frac{\cos\varphi}{\lambda'}\right|\sqrt{\left(\lambda k_2^{\alpha}R+\lambda' Q\right)^2+\left(P\lambda'-R\right)^2+\left(Q+\lambda k_2^{\alpha}P\right)^2}$$

bulunur. Ayrıca

$$k_2^{\beta}=\frac{\left(-\lambda k_2^{\alpha}R-\lambda' Q\right)\left(P'-k_1^{\alpha}Q\right)+\left(P\lambda'-R\right)\left(k_1^{\alpha}P+Q'-k_2^{\alpha}R\right)}{\left(\lambda k_2^{\alpha}R+\lambda' Q\right)^2+\left(P\lambda'-R\right)^2+\left(Q+\lambda k_2^{\alpha}P\right)^2}$$
$$+\frac{\left(Q+\lambda k_2^{\alpha}P\right)\left(k_2^{\alpha}Q+R'\right)}{\left(\lambda k_2^{\alpha}R+\lambda' Q\right)^2+\left(P\lambda'-R\right)^2+\left(Q+\lambda k_2^{\alpha}P\right)^2}$$

bulunur.

Sonuç 3.6.2 $\left(V_3^{\alpha}(s), V_3^{\beta}(s^*)\right)$ Frenet vektör çifti birbirine dik olan, Γ ve $\tilde{\Gamma}$ eğri çifti için Mannheim teoremi geçerli değildir.

İspat:

$$\begin{aligned}\alpha(s)M&=M-\alpha(s)\\&=OM-O\alpha(s)\\&=\alpha(s)+\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha}-\alpha(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa

$$\left\|\alpha(s)M\right\|=\left\|\frac{1}{k_1^{\alpha}}V_2^{\alpha}\right\|=\frac{1}{k_1^{\alpha}}\left\|V_2^{\alpha}\right\|=\frac{1}{k_1^{\alpha}}$$

Yine,

$$\begin{aligned}\alpha(s)M^*&=M^*-\alpha(s)\\&=OM^*-O\alpha(s)\end{aligned}$$

$$= \beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta(s) - O\alpha(s)$$

$$= \beta - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

$$= \alpha + \lambda V_3^\alpha - \alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

$$= \lambda V_3^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta$$

elde edilir. Norm hesaplanırsa,

$$\left\| \alpha(s)M^* \right\| = \sqrt{\langle \lambda V_3^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta, \lambda V_3^\alpha + \frac{1}{k_1^\beta} V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_3^\alpha, V_2^\beta \rangle + \frac{\lambda}{k_1^\beta}\langle V_2^\beta, V_3^\alpha \rangle + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2 \langle V_2^\beta, V_2^\beta \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \frac{2\lambda \sin\varphi}{k_1^\beta} + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2} \ .$$

Benzer şekilde,

$$\beta(s^*)M = OM - O\beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \beta(s^*)$$

$$= \alpha(s) + \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \alpha(s) - \lambda V_3^\alpha$$

$$= \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_3^\alpha \ .$$

Yine norm hesaplanırsa,

$$\left\| \beta(s^*)M \right\| = \left\| \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_3^\alpha \right\|$$

$$= \sqrt{\langle \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_3^\alpha, \frac{1}{k_1^\alpha} V_2^\alpha - \lambda V_3^\alpha \rangle}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{k_1^\alpha}\right)^2 + \lambda^2} \ .$$

Son olarak,

$$\beta(s^*)M^* = OM^* - O\beta(s^*)$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \left\|\beta(s^*) + \frac{1}{k_1^\beta}V_2^\beta - \beta(s^*)\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}\left\|V_2^\beta\right\|$$

$$\left\|\beta(s^*)M^*\right\| = \frac{1}{k_1^\beta}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{k_1^\alpha}\right)^2 + \lambda^2}}{\frac{1}{k_1^\alpha}}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = \frac{\frac{1}{k_1^\beta}}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{2\lambda\sin\varphi}{k_1^\beta} + \left(\frac{1}{k_1^\beta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 2\lambda k_1^\beta \sin\varphi + 1}}$$

$$\frac{\left\|\beta(s^*)M\right\|}{\left\|\alpha(s)M\right\|} \div \frac{\left\|\beta(s^*)M^*\right\|}{\left\|\alpha(s)M^*\right\|} = k_1^\alpha \sqrt{\lambda^2 {k_1^\beta}^2 + 2\lambda k_1^\beta \sin\varphi + 1}\sqrt{\left(\frac{1}{k_1^\alpha}\right)^2 + \lambda^2}$$

elde edilir ve bu ifadenin sabit olmadığı görülür.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H.H., 1975-1982, “Lineer Cebir, Cilt 1”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Beşevler- Ankara,* 147-211.

[2] Hacısalihoğlu, H.H., Kasım 1982, “Diferensiyel Geometri, Cilt 1”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Beşevler- Ankara,* 139-259.

[3] Hacısalihoğlu, H.H., Özdamar E., Murathan C., İyigün E., Mart 1995, “Diferensiyel Geometri Problemleri”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi,* 256-258.

[4] Orbay K., Kasap E., May 2009, “On Mannheim partner curves in E^3”, *International Journal of Physical Sciences,* 261-264.

[5] Sabuncuoğlu, A., Haziran 2001, “Diferensiyel Geometri, 1.Basım”, *Nobel yayınları*.

[6] Özyılmaz E., Yılmaz S., June 2009, “Involute-Evolute Curve Couples in the Euclidean 4-Space”, *Int. J. Open Problems Compt. Math.*

[7] Azak A. Z., Akyiğit M., Ersoy S., March 2010, “Involute-Evolute Curves in Galilean Space G_3”.

[8] Öztekin Balgetir H., 2009, “WEAKENED BERTRAND CURVES IN THE GALILEAN SPACE G_3”, *J. Adv. Math. Studies,* 69-76.

[9] Özkaldı S., İlarslan K., Yaylı Y., 2009, “ON MANNHEİM PARTNER CURVE IN DUAL SPACE”, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 131-142*.

[10] Turgut M., Yılmaz S., 2008, “On The Frenet Frame and A Characterization of space-like Involute-Evolute Curve Couple in Minkowski Space-time”, *Int.Math. Forum,* 793-801.

[11] Nutbourne A.W., Martin R. R., 1988,”Differential Geometry Applied to the Design of Curves and Surfaces, *UK*.

[12] Schief, W. K., 2003, “On the integrability of Bertrand curves and Razzaboni surfaces”, *Journal of Geometry and Physics,* 130-150.

[13] Liu, H., Wang, F., 2008, “Mannheim partner curves in 3-space”, *J. Geom.,* 120-126.

[14] Boyer, C., 1968, “A History of Mathematics”, *New York: Wiley*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ERTÜRK, Nimet
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 08.11.1980 Antakya
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (276) 224 14 99 – 0 (505) 310 83 65
e-mail	: nimerturk@windowslive.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Süleyman Demirel Üniversitesi/Matematik Bölümü	2002
Lise	Antakya Kurtuluş Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2002-2008	Özel Dershane	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Kitap, Müzik, Spor