

**T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖTELEME YÜZEYLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED ÇETİN

**HAZİRAN 2010
UŞAK**

**T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÖTELEME YÜZEYLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED ÇETİN

UŞAK 2010

Muhammed ÇETİN tarafından hazırlanan “**Öteleme Yüzeylerinin Diferensiyel Geometrisi**” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ

Uşak Üniversitesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

04 / 06 / 2010

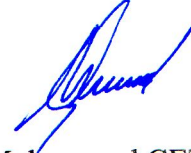
Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa YALÇIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Muhammed ÇETİN

ÖTELEME YÜZEYLERİNİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Muhammed ÇETİN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2010

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin diferensiyel geometrik özellikleri incelendi. Bu doğrultuda, yüzeyin üreteç eğrileri boyunca şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, yüzeyin üreteç eğrileri boyunca yüzey eğrilikleri, yüzeyin temel formları, asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri, asli eğrilikleri, umbilik noktaları, asimptotik çizgileri ve geodezikleri bulundu.

Üçüncü bölümde minimal öteleme yüzeyleri ve diferensiyel geometrik özellikleri incelendi.

Dördüncü bölümde ise sabit eğrilik ve burulmaya sahip üreteç eğrilerinin oluşturduğu öteleme yüzeylerine paralel olan yüzeylerin diferensiyel geometrik özellikleri incelendi.

Bilim Kodu : 53A05, 53A10

Anahtar Kelimeler : Öteleme yüzeyleri, minimal yüzeyler, paralel yüzeyler, Scherk yüzeyi

Sayfa Adedi : 69

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF TRANSLATION SURFACES

(M. Sc. Thesis)

Muhammed ÇETİN

UŞAK UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2010

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the basic definitions and theorems are given related to this subject.

In the second chapter, differential geometric properties of translation surfaces in 3-dimensional Euclidean space are given. Hence, shape operator matrix along generator curves of surface, Gaussian curvature, mean curvature, curvatures along generator curves of surface, fundamental forms of surface, principal lines and lines of principal curvature, umbilic points, asymptotic lines and geodesics are given.

In the third chapter, minimal translation surfaces and differential geometric properties are given.

In the fourth chapter, differential geometric properties of surfaces that are parallel to translation surfaces in 3-dimensional Euclidean space which are constructed by generator curves with constant curvatures and torsions are given.

Science Code : 53A05, 53A10

Key Words : Translation surfaces, minimal surfaces, parallel surfaces, Scherk Surface

Page Number : 69

Adviser : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu tezin hazırlanması esnasında büyük yardımlarını gördüğüm ve her an her konuda manevi desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER'e teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmamdaki eksiklerimi tamamlayan, yol gösteren Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN'a (Uşak Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren, destek olan, duydukları ve hissettirdikleri sonsuz güven için sevgili eşime, anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELERİN LİSTESİ	vi
1. BÖLÜM.....	1
GİRİŞ.....	1
1.1 Temel Tanım ve Teoremler	2
2. BÖLÜM.....	12
2. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİ.....	12
2.1. Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Şekil Operatörü Matrisi.....	12
2.2. Öteleme Yüzeylerinin Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği.....	15
2.2.1. Gauss eğriliği.....	15
2.2.2. Ortalama eğrilik.....	16
2.3. Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Yüzey Eğrilikleri.....	17
2.3.1. M öteleme yüzeyinin α eğrisi boyunca yüzey eğrilikleri.....	17
2.3.2. M öteleme yüzeyinin β eğrisi boyunca yüzey eğrilikleri.....	19
2.4. Öteleme Yüzeylerinin Temel Formları, Asli Doğrultuları ve Asli Eğrilik Çizgileri, Asli Eğrilikleri, Umbilik Noktaları, Asimptotik Çizgileri ve Geodezikleri	21
2.4.1. Öteleme yüzeylerinin temel formları.....	21
2.4.2. Öteleme yüzeylerinin asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri	22
2.4.3. Öteleme yüzeylerinin asli eğrilikleri	23
2.4.4. Öteleme yüzeylerinin umbilik noktaları.....	24

2.4.5. Öteleme yüzeylerinin asimptotik çizgileri.....	25
2.4.6. Öteleme yüzeylerinin geodezikleri.....	26
3. BÖLÜM.....	34
3. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MİNİMAL ÖTELEME YÜZEYLERİ.....	34
3.1. Minimal Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Şekil Operatörü Matrisi	35
3.2. Minimal Öteleme Yüzeylerinin Gauss Eğriliği.....	36
3.3. Minimal Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Yüzey Eğrilikleri...37	
3.4. Minimal Öteleme Yüzeylerinin Temel Formları, Asli Doğrultuları ve Asli Eğrilik Çizgileri, Asli Eğrilikleri, Asimptotik Çizgileri	37
3.4.1. Minimal öteleme yüzeylerinin temel formları.....	37
3.4.2. Minimal öteleme yüzeylerinin asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri	38
3.4.3. Minimal öteleme yüzeylerinin asli eğrilikleri	39
3.4.4. Minimal öteleme yüzeylerinin asimptotik çizgileri.....	40
4. BÖLÜM.....	53
4. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİNE PARALEL OLAN YÜZEYLER.....	53
4.1. Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Temel Formları	53
4.2. Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Şekil Operatörü Matrisi	65
4.3. Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği	66
4.3.1. Gauss eğriliği.....	66
4.3.2. Ortalama eğrilik.....	66
4.4. Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Asli Eğrilikleri	67
KAYNAKLAR.....	68
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELERİN LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\ , \ $	Norm
\wedge	Vektörel çarpım
\langle, \rangle	İç çarpım
M	Öteleme yüzeyi
z	Öteleme yüzeyinin birim normali
I	Öteleme yüzeyinin birinci temel formu
II	Öteleme yüzeyinin ikinci temel formu
E, F, G	Öteleme yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları
l, m, n	Öteleme yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları
S	Öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi
K	Öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği
H	Öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği
α, β	Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri
k_1, k_2	Öteleme yüzeyinin asli eğrilikleri
T_α	α eğrisinin teğet vektörü
N_α	α eğrisinin asli normal vektörü
B_α	α eğrisinin binormal vektörü
T_β	β eğrisinin teğet vektörü
N_β	β eğrisinin asli normal vektörü
B_β	β eğrisinin binormal vektörü
θ_α	α eğrisinin asli normali ile öteleme yüzeyinin birim normali arasındaki açı

θ_β	β eğrisinin asli normali ile öteleme yüzeyinin birim normali arasındaki açı
φ	α ve β eğrilerinin teğet vektörleri arasındaki açı
k_1^α	α eğrisinin eğriliği
k_2^α	α eğrisinin burulması
k_1^β	β eğrisinin eğriliği
k_2^β	β eğrisinin burulması
κ_g^α	Öteleme yüzeyinin α eğrisi boyunca geodesic eğriliği
τ_g^α	Öteleme yüzeyinin α eğrisi boyunca geodesic burulması
κ_n^α	Öteleme yüzeyinin α eğrisi boyunca normal eğriliği
κ_g^β	Öteleme yüzeyinin β eğrisi boyunca geodesic eğriliği
τ_g^β	Öteleme yüzeyinin β eğrisi boyunca geodesic burulması
κ_n^β	Öteleme yüzeyinin β eğrisi boyunca normal eğriliği
\bar{M}	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzey
\bar{z}	Öteleme yüzeyine olan paralel yüzeyin birim normali
\bar{I}	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin birinci temel formu
\bar{II}	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin ikinci temel formu
$\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin birinci temel formunun katsayıları
$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları
\bar{S}	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin şekil operatörü matrisi
\bar{K}	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin Gauss eğriliği
\bar{H}	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin ortalama eğriliği
\bar{k}_1, \bar{k}_2	Öteleme yüzeyine paralel olan yüzeyin asli eğrilikleri

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Öteleme yüzeleriyle ilgili bugüne kadar birtakım çalışmalar yapılmıştır. 1992 yılında L. Verstraelen, J. Walrave ve S. Yaprak n -boyutlu Öklid uzaylarında minimal öteleme yüzelerini inceledi. 1999 yılında H. Liu 3-boyutlu uzaylarda öteleme yüzelerinin Gauss eğriliğini ve ortalama eğriliğini inceledi. 2002 yılında D. W. Yoon “3-boyutlu Minkowski Uzayında Öteleme Yüzelerinin Gauss Dönüşümü Üzerine” adlı çalışmasında, Gauss dönüşümüne Laplasiyen operatörünü uygulayarak öteleme yüzelerinin diferensiyel geometrik özelliklerini inceledi. 2008 yılında M. I. Munteanu ve A. I. Nistor 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzelerinin ikinci temel formunu, ikinci Gauss eğriliğini ve ikinci ortalama eğriliğini inceledi. Bugüne kadar yapılan bu çalışmalar gözden geçirildiğinde, öteleme yüzelerinin düzlemsel eğrilerin toplamı şeklinde ifade edildiği görülür.

Bu çalışmada ise, uzaysal iki eğrinin toplamı şeklinde elde edilen 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeleri ele alındı. Buna göre, E^3 'te öteleme yüzelerinin iç ve dış geometri özellikleri incelendi. Bu doğrultuda, yüzeyin üreteç eğrileri boyunca şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, yüzeyin üreteç eğrileri boyunca yüzey eğrilikleri, temel formları, asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri, asli eğrilikleri, umbilik noktaları, asimptotik çizgileri ve geodezikleri bulundu. Ayrıca, minimal öteleme yüzeleri ve E^3 'te üreteç eğrileri boyunca teğet vektörleri arasında sabit açı bulunan, sabit eğrilik ve burulmaya sahip üreteç eğrilerinin oluşturduğu öteleme yüzelerine paralel olan yüzelerin diferensiyel geometrik özellikleri incelendi. Buna göre, öteleme yüzelerine paralel olan yüzelerin temel formları, şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve asli eğrilikleri hesaplandı.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 Boş olmayan bir cümle A ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f : A \times A \rightarrow V$ fonksiyonu varsa, A 'ya V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir.

$$(A1) : \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R).$$

(A2) : $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [1].

Tanım 1.1.2

$$d : E^n \times E^n \rightarrow IR$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \vec{xy} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında **uzaklık fonksiyonu** ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^n$ noktaları arasındaki **uzaklık** denir [1].

Tanım 1.1.3

$$d : E^n \times E^n \rightarrow IR$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \left\| \vec{xy} \right\|$$

biçiminde tanımlanan d fonksiyonuna E^n 'de **Öklid metriği** denir [1].

Tanım 1.1.4 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V 'de

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow IR$$
$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \left(\begin{array}{l} x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right)$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.5

$$\begin{aligned} \times: IR^3 \times IR^3 &\rightarrow IR^3 \\ (\alpha, \beta) &\rightarrow \alpha \times \beta = \psi(\alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı “ \times ” iç işlemine **vektörel çarpım işlemi** denir ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nin **vektörel çarpımı** denir [1].

Teorem 1.1.1 $\alpha, \beta \in IR^3$ olmak üzere $\alpha \wedge \beta = \sum_{i=1}^3 \det(e_i, \alpha, \beta) e_i$ şeklindedir [1].

Tanım 1.1.6 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan dönüşüme **iç çarpım** denir [3].

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow IR \text{ olmak üzere}$$

(i) Simetri aksiyomu

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$$

(ii) Bilineerlik aksiyomu

$$\langle cu, v \rangle = c \langle u, v \rangle = \langle u, cv \rangle \quad \forall c \in IR, \forall u, v \in V$$

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle \quad \forall u_1, u_2, v \in V$$

$$\langle u, v_1 + v_2 \rangle = \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$$

(iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu

$$\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \quad u = \vec{0}$$

Teorem 1.1.2 IR^2 reel vektör uzayı olmak üzere, $\langle \cdot, \cdot \rangle: IR^2 \times IR^2 \rightarrow IR$ dönüşümü, $\forall u, v \in IR^2$ için $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ şeklinde tanımlanırsa bu dönüşüme IR^2 de bir **iç çarpım** denir [3].

Tanım 1.1.7 V bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olsun. x vektörünün normu $\|x\|$ olmak üzere x vektörünün $\frac{1}{\|x\|}$ skaları ile çarpılmışına x 'in **normlanmıŝı** denir ve $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$ ile gösterilir [3].

Lemma 1.1.1 $v, w \in IR^3$ olmak üzere $v \wedge w$, v ve w 'ya ortogonal olup $\|v \wedge w\|^2 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$ şeklindedir [5].

Tanım 1.1.8 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\|: I &\rightarrow IR \\ t &\rightarrow \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna, M eğrisinin (I, α) koordinat komŝuluęuna göre **skalar hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M 'nin (I, α) koordinat komŝuluęuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir [1].

Tanım 1.1.9 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiŝ olsun. Eğer, $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi (I, α) 'ya göre **birim hızlı eğridir** denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir [1].

Tanım 1.1.10 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir [1].

Teorem 1.1.3 E^n 'de regüler her eğrinin, birim hızlı olacak şekilde bir koordinat komşuluğu vardır [1].

Tanım 1.1.11 $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}$, $k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin **Serret-Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in M$ için $\{V_1(m), \dots, V_r(m)\}$ ifadesine de $m \in M$

noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı** denir. Her bir V_i , $1 \leq i \leq r$ ye **Serret-Frenet vektörü** adı verilir [1].

Teorem 1.1.4 $M \in \mathbb{R}^3$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ keyfi parametre olmak üzere $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise,

$$\left\{ T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, B(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}, N(t) = B(t) \wedge T(t) \right\}$$

şeklindedir [1].

Teorem 1.1.5 $M \in \mathbb{R}^3$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise,

$$\left\{ T(t) = \alpha'(t), N(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}, B(t) = T(t) \wedge N(t) \right\}$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.1.12 $\alpha, \beta : I \rightarrow E^3$ tanımlı eğrileri arasında $\beta = F(\alpha)$ şeklinde bir izometri varsa, bu iki eğri birbirine kongrüenttir [5].

Tanım 1.1.13 M bir topolojik n -manifold olsun. M üzerinde C^k sınıftan bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıftan **diferensiyellenebilir manifold** denir [1].

Tanım 1.1.14 M bir diferensiyellenebilir manifold ve bir $P \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerin uzayı $T_M(P)$ olsun. $T_M(P)$ vektör uzayına, M 'nin P noktasındaki **tanjant uzayı** denir [2].

Tanım 1.1.15 E^n , n -boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ boyutlu yüzeye **hiperyüzey** adı verilir [2].

Tanım 1.1.16 E^n , n-boyutlu Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir **yönlendirme** denir [2].

Tanım 1.1.17 $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow IR^3$ 'e tanımlı iki uzay eğrisi olmak üzere α eğrisinin, β eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen $M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$ yüzeyine **öteleme yüzeyi** adı verilir. Burada α ve β eğrileri, M yüzeyinin üreteç eğrileridir [4].

Tanım 1.1.18 Ortalama eğriliği sıfır ($H = 0$) olan regüler yüzeylere **minimal yüzey** adı verilir [4].

Tanım 1.1.19 $x \subset IR^3$ regüler bir yüzey ve x 'e t (pozitif ya da negatif olabilir) uzaklıktaki **paralel yüzeyi** \bar{x} olmak üzere $\bar{x}(u, v) = x(u, v) + tU(u, v)$ şeklindedir.

Burada $U = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$ [4].

Tanım 1.1.20 E^n 'in bir hiperyüzeyi M ve M 'nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n 'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X N$ şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya M 'nin **Weingarten dönüşümü** denir [2].

Tanım 1.1.21 IR^3 te regüler bir yüzey M olsun. M yüzeyinin **Gauss eğriliği** K , **ortalama eğriliği** H ve $K, H : M \rightarrow IR$ olmak üzere sırasıyla $K(P) = \det(S(P))$ ve $H(P) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(P))$ şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 1.1.22 E^n 'in bir M hiperyüzeyi üzerinde q . **temel formu** $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [2].

Tanım 1.1.23 E^{n+1} 'de bir M hiperyüzeyi üzerindeki bir eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M 'ye ortogonal ise bu eğriye **geodezik** adı verilir. Başka bir ifadeyle $M \subset \mathbb{R}^3$ bir yüzey ve $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ bir eğri olsun. α'' ivme vektörünün teğetsel bileşeni yoksa α eğrisine **geodezik** denir [2,4].

Lemma 1.1.2 M üzerindeki bir α eğrisinin **geodezik** olması için gerek ve yeter şart α 'nın sabit hızlı ve geodezik eğriliğinin $\kappa_g^\alpha = 0$ olmasıdır [5].

Tanım 1.1.24 E^n 'de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın teğet vektör alanı T ve M 'nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisidir** denir [2]. Buna tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi $\lambda \neq 0$ bir skalar olmak üzere, $S(T) = \lambda T$ şeklindedir.

Tanım 1.1.25 E^n 'de bir hiperyüzey M ve M 'nin şekil operatörü S olsun. M 'nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik (eigen) değerlerine M 'nin bu noktadaki **asli eğrilikleri** denir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik (eigen) vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M 'nin bu P noktasındaki **asli eğrilik doğrultuları** denir [2].

Lemma 1.1.3 $x \subset \mathbb{R}^3$ regüler bir yüzey olsun. $v_p = v_1 x_u + v_2 x_v$ tanjant vektörünün **asli doğrultu** olması için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1v_2 & v_1^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{pmatrix} = 0$$

olmasıdır [4].

Tanım 1.1.26 E^n 'in bir hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasında M 'nin şekil operatörü S olmak üzere;

- 1) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için $S = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M 'nin bir **umbilik noktası** denir.
- 2) $S = 0$ şeklinde bir sıfır dönüşümü ise P noktasına M 'nin bir **düzlemsel (flat) noktasıdır** denir [2].

Tanım 1.1.27 E^n 'in bir hiperyüzeyi M ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer, $X_p, Y_p \in T_M(P)$ için $\langle S(X_p), Y_p \rangle = 0$ ise bu iki tanjant vektöre **eşleniktirler** denir. Bir $X_p \neq 0$ tanjant vektörü için, $\langle S(X_p), X_p \rangle = 0$ ise X_p doğrultusuna, M 'nin P noktasındaki bir **asimptotik doğrultusu** ve X_p 'yi, $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir **asimptotik çizgidir** denir (Şu halde M üzerindeki asimptotik çizgilerin diferensiyel denklemi, $\langle S(T), T \rangle = 0$ şeklindedir. Burada T aranan asimptotik çizginin teğet vektör alanıdır) [2].

Lemma 1.1.4 Bir yüzeyin **asimptotik çizgilerinin** diferensiyel denklemi

$$l du^2 + 2m dudv + n dv^2 = 0$$

şeklindedir [4].

Lemma 1.1.5 $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler yüzeyi üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın **asimptotik** olması için gerek ve yeter şart her noktasındaki ivmesinin M 'ye daima teğet olmasıdır. Buna göre, α'' , U 'ya (yüzeyin birim normaline) dik olur [4].

Teorem 1.1.6 $\alpha, M \subset \mathbb{R}^3$ regüler yüzeyi üzerinde bir eğri, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, $\kappa(\alpha)$ α 'nın eğriliği ve U, M yüzeyinin birim normali olsun. α 'nın **asimptotik çizgi** olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ yada $\langle N, U \rangle = 0$ olmasıdır [4].

Tanım 1.1.28 \mathbb{R}^3 'te regüler bir yüzey M ve M 'nin herhangi bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P)$ ve $k_2(P)$ olmak üzere $k_1(P) = k_2(P)$ ise, P 'ye M yüzeyinin bir **umbilik noktasıdır** denir [4].

Tanım 1.1.29 $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler yüzeyi üzerindeki herhangi bir P noktası için;

- * $K(P) > 0$ ise P noktası **eliptiktir**. (Bu durumda k_1 ve k_2 aynı işaretlidir.)
- * $K(P) < 0$ ise P noktası **hiperboliktir**. (Bu durumda k_1 ve k_2 ters işaretlidir.)
- * $K(P) = 0$ ama $S(P) \neq 0$ ise P noktası **paraboliktir**. (Bu durumda k_1 ve k_2 den biri sıfırdır.)
- * $K(P) = 0$ ve $S(P) = 0$ ise P noktası **düzlemseldir**. (Bu durumda $k_1 = 0$ ve $k_2 = 0$ dır.) [4].

Lemma 1.1.6 $M \subset \mathbb{R}^3$ regüler bir yüzey olsun. O zaman M 'nin birinci, ikinci ve üçüncü temel formları arasında $III - 2HII + KI = 0$ şeklinde bir ilişki vardır. Burada H ve K sırasıyla yüzeyin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliğidir [4].

Tanım 1.1.30 $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ile tanımlı β eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa(s) = \|\beta''(s)\|$ eşitliği ile verilen $\kappa : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ değerine β 'nin **eğriliği** adı verilir [4].

Tanım 1.1.31 $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 'e bir yüzey ve $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ 'e tanımlı olmak üzere, $E = \|x_u\|^2$, $F = \langle x_u, x_v \rangle$ ve $G = \|x_v\|^2$ dir. $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 'e x yüzeyinin **Riemann metriği** ya da **birinci temel formu** denir. Buradaki E, F, G birinci temel formun katsayılarıdır [4].

Lemma 1.1.7 x , E^3 'te bir yüzey, U yüzeyin birim normali olsun. Bu durumda, $l = \langle S(x_u), x_u \rangle = \langle U, x_{uu} \rangle$, $m = \langle S(x_u), x_v \rangle = \langle U, x_{uv} \rangle$ ve $n = \langle S(x_v), x_v \rangle = \langle U, x_{vv} \rangle$ şeklindedir [5].

Teorem 1.1.7 $\beta : (c, d) \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri ve M 'nin β eğrisinine göre Darboux çatısı $\{T, JT, U\}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ (JT)' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ JT \\ U \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Teorem 1.1.8 $M \subset IR^3$ regüler yüzeyinin, K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği ile asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında $K = k_1 k_2$ ve $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Sonuç olarak, $k^2 - 2Hk + K = 0$ olur. Buradan da $k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ ve $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ elde edilir [4].

Lemma 1.1.8 $M \subset IR^3$ regüler bir yüzey ve M yüzeyine λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyi \bar{M} olsun. M yüzeyinin şekil operatörü matrisi S ve \bar{M} yüzeyinin şekil operatörü matrisi \bar{S} , asli eğrilikleri \bar{k}_1 ve \bar{k}_2 , Gauss eğriliği \bar{K} ve ortalama eğriliği \bar{H} olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır [4].

i) $\bar{S} = S(I - \lambda S)^{-1}$

ii) $\bar{k}_i = \frac{k_i}{1 - \lambda k_i}$

iii) $\bar{K} = \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$

iv) $\bar{H} = \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$

Lemma 1.1.9 $(u, v) \rightarrow (u, v, M(u, v))$ şeklinde verilen bir Monge yüzeyinin minimal yüzey olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$(1 + M_u^2)M_{vv} - 2M_u M_v M_{uv} + (1 + M_v^2)M_{uu} = 0$$

olmasıdır [4].

2. BÖLÜM

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca şekil operatörü matrisi bulundu. Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplandı. Ayrıca, öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca yüzey eğrilikleri, yüzeyin temel formları, asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri, asli eğrilikleri, umbilik noktaları, asimptotik çizgileri ve geodezikleri incelendi.

2. 3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİ

2.1 Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Şekil Operatörü Matrisi

$\tilde{\alpha} : \tilde{I}_\alpha \rightarrow IR$ ve $\tilde{\beta} : \tilde{I}_\beta \rightarrow IR$ keyfi parametrelili regüler eğriler olsun. Teorem 1.1.3'e göre $\tilde{\alpha}$ ve $\tilde{\beta}$ eğrilerinin birim hızlı olduğu birer koordinat komşulukları vardır. Bu koordinat komşulukları sırasıyla (I_α^*, α^*) ve (I_β^*, β^*) olsun. α^* ve β^* eğrilerinin yay parametrelerini sırasıyla u ve v alalım. Bu iki eğriyi, kendilerine kongrüent olan ve orjinden geçen α ve β eğrilerine dönüştüren izomorfizmler bulunabilir. Bu tez çalışmasında öteleme yüzeylerini incelemek için orjinden geçen ve birim hızlı olan $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrileri kullanılacaktır. Buradaki, $\tilde{\alpha}(t)$ ve $\tilde{\beta}(s)$ eğrilerine $M(u, v)$ öteleme yüzeyinin **üreteç eğrileri** adı verilir.

α eğrisinin Frenet vektörleri $T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha$ ve eğrilikleri k_1^α, k_2^α , β eğrisinin Frenet vektörleri $T_\beta, N_\beta, B_\beta$ ve eğrilikleri de k_1^β, k_2^β ile gösterilsin.

α eğrisinin β eğrisi boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilen öteleme yüzeyi

$$M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \quad (2.1)$$

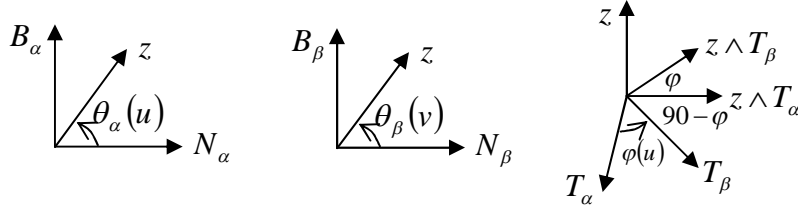
olur. Burada, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ olmak üzere

$$M(u, v) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

şeklinde olur. M öteleme yüzeyinin birim normali $z(u, v)$ alınırsa

$$z = \frac{M_u \wedge M_v}{\|M_u \wedge M_v\|} \quad (2.2)$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 2.1

Burada, θ_α ve θ_β sırasıyla z ile α ve β eğrilerinin asli normal vektörleri arasındaki açıdır. Ayrıca, T_α ve T_β vektörleri arasındaki açı da φ ile gösterilsin.

M öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi bulunabilir. (2.1) eşitliği ile verilen öteleme yüzeyinin u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$M_u = \frac{\partial M(u, v)}{\partial u} = \alpha' = T_\alpha$$

$$M_u = T_\alpha \quad (2.3)$$

$$M_v = \frac{\partial M(u, v)}{\partial v} = \beta' = T_\beta$$

$$M_v = T_\beta \quad (2.4)$$

$$M_{uu} = \frac{\partial^2 M(u, v)}{\partial u^2} = T_\alpha' = k_1^\alpha N_\alpha$$

$$M_{uu} = k_1^\alpha N_\alpha \quad (2.5)$$

$$M_{uv} = \frac{\partial^2 M(u, v)}{\partial u \partial v} = 0 \text{ ve } M_{vu} = \frac{\partial^2 M(u, v)}{\partial v \partial u} = 0 \quad (2.6)$$

$$M_{vv} = \frac{\partial^2 M(u, v)}{\partial v^2} = T_\beta' = k_1^\beta N_\beta$$

$$M_{vv} = k_1^\beta N_\beta \quad (2.7)$$

elde edilir. (2.2) eşitliğinde (2.3) ve (2.4) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$z = \frac{T_\alpha \wedge T_\beta}{\|T_\alpha \wedge T_\beta\|} \quad (2.8)$$

bulunur. M öteleme yüzeyinin I . temel formunun katsayıları olan E, F, G değerleri aşağıdaki gibidir.

$$E = \langle M_u, M_u \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1$$

$$E = 1 \quad (2.9)$$

$$F = \langle M_u, M_v \rangle = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \cos(\varphi)$$

$$F = \cos(\varphi) \quad (2.10)$$

$$G = \langle M_v, M_v \rangle = \langle T_\beta, T_\beta \rangle = 1$$

$$G = 1 \quad (2.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde, M öteleme yüzeyinin II . temel formunun katsayıları olan l, m, n değerleri aşağıdaki gibidir.

$$l = \langle z, M_{uu} \rangle = \langle z, k_1^\alpha N_\alpha \rangle = k_1^\alpha \langle z, N_\alpha \rangle = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)$$

$$l = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) \quad (2.12)$$

$$m = \langle z, M_{uv} \rangle = \langle z, 0 \rangle = 0$$

$$m = 0 \quad (2.13)$$

$$n = \langle z, M_{vv} \rangle = \langle z, k_1^\beta N_\beta \rangle = k_1^\beta \langle z, N_\beta \rangle$$

$$n = k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \quad (2.14)$$

bulunur. Ayrıca, lemma 1.1.1'e göre

$$\|T_\alpha \wedge T_\beta\|^2 = EG - F^2 = 1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi) \quad (2.15)$$

olur. Bir yüzeyin şekil operatörünün matrisi

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} Gl - Fm & Em - Fl \\ Gm - Fn & En - Fm \end{bmatrix}$$

olmak üzere, E^3 'te öteleme yüzeyleri için şekil operatörü matrisi, yukarıda bulunan eşitlikler yerlerine yazılırsa aşağıdaki gibi olur.

$$S = \frac{1}{1 - F^2} \begin{bmatrix} l & -Fl \\ -Fn & n \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$Gl - Fm = l = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)$$

$$Gl - Fm = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) \quad (2.17)$$

$$Em - Fl = -Fl = -\cos(\varphi)k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) = -k_1^\alpha \cos(\varphi)\cos(\theta_\alpha)$$

$$Em - Fl = -k_1^\alpha \cos(\varphi)\cos(\theta_\alpha) \quad (2.18)$$

$$Gm - Fn = -Fn = -\cos(\varphi)k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = -k_1^\beta \cos(\varphi)\cos(\theta_\beta)$$

$$Gm - Fn = -k_1^\beta \cos(\varphi)\cos(\theta_\beta) \quad (2.19)$$

$$En - Fm = En = n = k_1^\beta \cos(\theta_\beta)$$

$$En - Fm = k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \quad (2.20)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitlikler yüzeyin şekil operatörü matrisinde yerlerine yazılırsa

$$S = \begin{bmatrix} \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} & \frac{-k_1^\alpha \cos(\varphi)\cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} \\ -\frac{k_1^\beta \cos(\varphi)\cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} & \frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

elde edilir.

2.2 Öteleme Yüzeylerinin Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği

2.2.1 Gauss eğriliği

M öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği, tanım 1.1.21 ve (2.21) eşitliği kullanılarak

$$K = \frac{k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilir. O halde M öteleme yüzeyi için şu teorem verilebilir.

Teorem 2.1 E^3 'te, üreteç eğrileri doğru olmayan bir öteleme yüzeyinin, Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart bu eğrilerden en az birinin, yüzeyin asimptotik çizgisi olmasıdır.

İspat 2.1

(\Rightarrow) E^3 'te, üreteç eğrileri doğru olmayan bir öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği sıfır olsun. Bu durumda, (2.22) eşitliğine göre $k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta) = 0$ olmalıdır. Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri doğru olmadığından, $k_1^\alpha \neq 0$ ve $k_1^\beta \neq 0$ dir. Buna göre, $k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta) = 0$ ise $\cos(\theta_\alpha)$ veya $\cos(\theta_\beta)$ değerlerinden en az biri sıfırdır. $\cos(\theta_\alpha) = 0$ ise $\theta_\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) olur. Bu durumda, yüzeyin birim normali ile α eğrisinin binormali lineer bağımlı olur ki bu durumda α asimptotik çizgidir. Benzer şekilde, $\cos(\theta_\beta) = 0$ ise $\theta_\beta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) olur. Bu durumda, yüzeyin birim normali ile β eğrisinin binormali lineer bağımlı olur ki bu durumda β asimptotik çizgidir. Sonuç olarak α ve β eğrilerinden en az biri yüzeyin asimptotik çizgisidir.

(\Leftarrow) α veya β eğrilerinden en az biri öteleme yüzeyinin asimptotik çizgisi olsun. Eğer α , yüzeyin asimptotik çizgisi ise, α eğrisinin binormali ile yüzeyin birim normali lineer bağımlı olacağından, $\theta_\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve dolayısıyla $K = 0$ olur. Eğer β yüzeyin asimptotik çizgisi ise, β eğrisinin binormali ile yüzeyin birim normali lineer bağımlı olacağından, $\theta_\beta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve dolayısıyla $K = 0$ olur.

Sonuç 2.1 Bir öteleme yüzeyinde $K = 0$ ise yüzey ya bir regle yüzeydir ya da yüzeyin üreteç eğrilerinden en az biri yüzeyin asimptotik çizgisidir.

2.2.2 Ortalama eğrilik

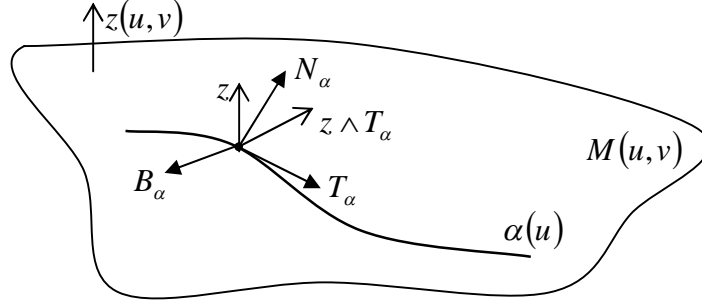
M öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği, tanım 1.1.21 ve (2.21) eşitliği kullanılarak

$$H = \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{2 \sin^2(\varphi)} \quad (2.23)$$

şeklinde elde edilir.

2.3 Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Yüzey Eğrilikleri

2.3.1 M öteleme yüzeyinin α eğrisi boyunca yüzey eğrilikleri



Şekil 2.2

$\langle z, T_\alpha \rangle = 0$. Dolayısıyla $z \in Sp\{N_\alpha, B_\alpha\}$ ve aynı zamanda $(z \wedge T_\alpha) \in Sp\{N_\alpha, B_\alpha\}$.

Şekil 2.1'e göre

$$z = \cos(\theta_\alpha)N_\alpha + \sin(\theta_\alpha)B_\alpha \quad (2.24)$$

yazılabilir.

(2.24) eşitliğinin u değişkenine göre kısmi türevi alınır

$$\begin{aligned} z' &= -\theta_\alpha' \sin(\theta_\alpha)N_\alpha + \cos(\theta_\alpha)(-k_1^\alpha T_\alpha + k_2^\alpha B_\alpha) + \theta_\alpha' \cos(\theta_\alpha)B_\alpha + \sin(\theta_\alpha)(-k_2^\alpha N_\alpha) \\ z' &= -k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)T_\alpha - \left(\theta_\alpha' \sin(\theta_\alpha) + k_2^\alpha \sin(\theta_\alpha) \right) N_\alpha \\ &\quad + \left(k_2^\alpha \cos(\theta_\alpha) + \theta_\alpha' \cos(\theta_\alpha) \right) B_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. (2.24) eşitliğinin her iki tarafı T_α ile vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} z \wedge T_\alpha &= (\cos(\theta_\alpha)N_\alpha + \sin(\theta_\alpha)B_\alpha) \wedge T_\alpha \\ z \wedge T_\alpha &= \cos(\theta_\alpha)(N_\alpha \wedge T_\alpha) + \sin(\theta_\alpha)(B_\alpha \wedge T_\alpha) \\ z \wedge T_\alpha &= -\cos(\theta_\alpha)B_\alpha + \sin(\theta_\alpha)N_\alpha \\ z \wedge T_\alpha &= \sin(\theta_\alpha)N_\alpha - \cos(\theta_\alpha)B_\alpha \end{aligned} \quad (2.25)$$

bulunur. Benzer şekilde (2.25) eşitliğinin u değişkenine göre kısmi türevi alınır

$$\begin{aligned} (z \wedge T_\alpha)' &= \theta_\alpha' \cos(\theta_\alpha)N_\alpha + \sin(\theta_\alpha)(-k_1^\alpha T_\alpha + k_2^\alpha B_\alpha) \\ &\quad + \theta_\alpha' \sin(\theta_\alpha)B_\alpha - \cos(\theta_\alpha)(-k_2^\alpha N_\alpha) \end{aligned}$$

$$(z \wedge T_\alpha)' = -k_1^\alpha \sin(\theta_\alpha) T_\alpha + \left(k_2^\alpha \cos(\theta_\alpha) + \theta_\alpha' \cos(\theta_\alpha) \right) N_\alpha \\ + \left(k_2^\alpha \sin(\theta_\alpha) + \theta_\alpha' \sin(\theta_\alpha) \right) B_\alpha$$

bulunur. Dolayısıyla M öteleme yüzeyinin α eğrisi boyunca **Darboux çatısı** $\{T_\alpha, (z \wedge T_\alpha), z\}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T_\alpha' \\ (z \wedge T_\alpha)' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g^\alpha & \kappa_n^\alpha \\ -\kappa_g^\alpha & 0 & \tau_g^\alpha \\ -\kappa_n^\alpha & -\tau_g^\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\alpha \\ z \wedge T_\alpha \\ z \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, κ_g^α , τ_g^α ve κ_n^α M yüzeyinin α eğrisi boyunca sırasıyla geodezik eğriliği, geodezik burulması ve normal eğriliğidir.

(2.26) eşitliğinden

$$T_\alpha' = \kappa_g^\alpha (z \wedge T_\alpha) + \kappa_n^\alpha z$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $z \wedge T_\alpha$ ile iç çarpılırsa

$$\kappa_g^\alpha = \langle T_\alpha', z \wedge T_\alpha \rangle$$

olup, buradan

$$\kappa_g^\alpha = k_1^\alpha \sin(\theta_\alpha) \quad (2.27)$$

elde edilir. Yine

$$T_\alpha' = \kappa_g^\alpha (z \wedge T_\alpha) + \kappa_n^\alpha z$$

eşitliğinin her iki tarafı z ile iç çarpılırsa

$$\kappa_n^\alpha = \langle T_\alpha', z \rangle$$

olup, buradan

$$\kappa_n^\alpha = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) \quad (2.28)$$

elde edilir. Son olarak, (2.26) eşitliğinden

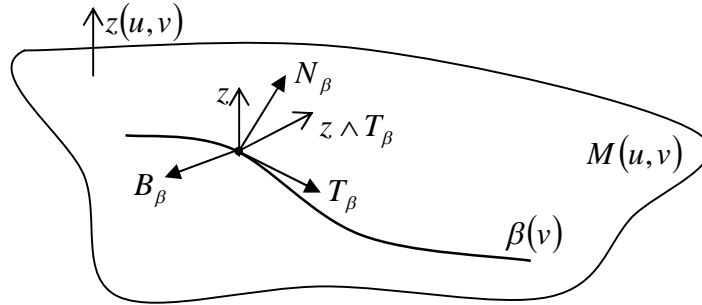
$$(z \wedge T_\alpha)' = -\kappa_g^\alpha T_\alpha + \tau_g^\alpha z$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki yanını z ile iç çarpılırsa

$$\tau_g^\alpha = k_2^\alpha + \theta_\alpha' \quad (2.29)$$

elde edilir.

2.3.2 M öteleme yüzeyinin β eğrisi boyunca yüzey eğrilikleri



Şekil 2.3

$\langle z, T_\beta \rangle = 0$. Dolayısıyla $z \in Sp\{N_\beta, B_\beta\}$ ve aynı zamanda $(z \wedge T_\beta) \in Sp\{N_\beta, B_\beta\}$.

Şekil 2.1'e göre

$$z = \cos(\theta_\beta)N_\beta + \sin(\theta_\beta)B_\beta \quad (2.30)$$

yazılabilir.

(2.30) eşitliğinin v değişkenine göre kısmi türevi alınır

$$\begin{aligned} z' &= -\theta_\beta' \sin(\theta_\beta)N_\beta + \cos(\theta_\beta)(-k_1^\beta T_\beta + k_2^\beta B_\beta) + \theta_\beta' \cos(\theta_\beta)B_\beta + \sin(\theta_\beta)(-k_2^\beta N_\beta) \\ z' &= -k_1^\beta \cos(\theta_\beta)T_\beta - (\theta_\beta' \sin(\theta_\beta) + k_2^\beta \sin(\theta_\beta))N_\beta \\ &\quad + (k_2^\beta \cos(\theta_\beta) + \theta_\beta' \cos(\theta_\beta))B_\beta \end{aligned}$$

elde edilir. (2.30) eşitliğinin her iki tarafı T_β ile vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} z \wedge T_\beta &= (\cos(\theta_\beta)N_\beta + \sin(\theta_\beta)B_\beta) \wedge T_\beta \\ z \wedge T_\beta &= \cos(\theta_\beta)(N_\beta \wedge T_\beta) + \sin(\theta_\beta)(B_\beta \wedge T_\beta) \\ z \wedge T_\beta &= -\cos(\theta_\beta)B_\beta + \sin(\theta_\beta)N_\beta \\ z \wedge T_\beta &= \sin(\theta_\beta)N_\beta - \cos(\theta_\beta)B_\beta \quad (2.31) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.31) eşitliğinin v değişkenine göre kısmi türevi alınır

$$\begin{aligned} (z \wedge T_\beta)' &= \theta_\beta' \cos(\theta_\beta)N_\beta + \sin(\theta_\beta)(-k_1^\beta T_\beta + k_2^\beta B_\beta) \\ &\quad + \theta_\beta' \sin(\theta_\beta)B_\beta - \cos(\theta_\beta)(-k_2^\beta N_\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z \wedge T_\beta)' &= -k_1^\beta \sin(\theta_\beta) T_\beta + \left(k_2^\beta \cos(\theta_\beta) + \theta_\beta' \cos(\theta_\beta) \right) N_\beta \\ &\quad + \left(k_2^\beta \sin(\theta_\beta) + \theta_\beta' \sin(\theta_\beta) \right) B_\beta \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla M öteleme yüzeyinin β eğrisi boyunca **Darboux çatısı** $\{T_\beta, (z \wedge T_\beta), z\}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T_\beta' \\ (z \wedge T_\beta)' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g^\beta & \kappa_n^\beta \\ -\kappa_g^\beta & 0 & \tau_g^\beta \\ -\kappa_n^\beta & -\tau_g^\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\beta \\ z \wedge T_\beta \\ z \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, κ_g^β , τ_g^β ve κ_n^β M yüzeyinin β eğrisi boyunca sırasıyla geodezik eğriliği, geodezik burulması ve normal eğriliğidir.

(2.32) eşitliğinden

$$T_\beta' = \kappa_g^\beta (z \wedge T_\beta) + \kappa_n^\beta z$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafı $z \wedge T_\beta$ ile iç çarpılırsa

$$\kappa_g^\beta = \langle T_\beta', z \wedge T_\beta \rangle$$

olup, buradan

$$\kappa_g^\beta = k_1^\beta \sin(\theta_\beta) \quad (2.33)$$

elde edilir. Yine

$$T_\beta' = \kappa_g^\beta (z \wedge T_\beta) + \kappa_n^\beta z$$

eşitliğinin her iki tarafı z ile iç çarpılırsa

$$\kappa_n^\beta = \langle T_\beta', z \rangle$$

olup, buradan

$$\kappa_n^\beta = k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \quad (2.34)$$

elde edilir. Son olarak, (2.32) eşitliğinden

$$(z \wedge T_\beta)' = -\kappa_g^\beta T_\beta + \tau_g^\beta z$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki yanı z ile iç çarpılırsa

$$\tau_g^\beta = k_2^\beta + \theta_\beta' \quad (2.35)$$

elde edilir.

2.4 Öteleme Yüzeylerinin Temel Formları, Asli Doğrultuları ve Asli Eğrilik Çizgileri, Asli Eğrilikleri, Umbilik Noktaları, Asimptotik Çizgileri ve Geodezikleri

2.4.1 Öteleme yüzeylerinin temel formları

I. temel formun diferensiyel denklemi $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ olmak üzere, öteleme yüzeyleri için, (2.9), (2.10) ve (2.11) eşitlikleriyle verilen E, F, G değerleri yerlerine yazılırsa

$$I = du^2 + 2 \cos(\varphi) dudv + dv^2 \quad (2.36)$$

elde edilir.

II. temel formun diferensiyel denklemi $II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$ olmak üzere, öteleme yüzeyleri için, (2.12), (2.13) ve (2.14) eşitlikleriyle verilen l, m, n değerleri yerlerine yazılırsa

$$II = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) du^2 + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) dv^2 \quad (2.37)$$

elde edilir.

(2.12) ve (2.28) eşitliklerinden

$$l = \kappa_n^\alpha \quad (2.38)$$

ve (2.14) ve (2.34) eşitliklerinden

$$n = \kappa_n^\beta \quad (2.39)$$

yazılabilir. (2.21) eşitliğinde, (2.28) ve (2.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$S = \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} \kappa_n^\alpha & -\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha \\ -\cos(\varphi)\kappa_n^\beta & \kappa_n^\beta \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

bulunur. (2.22), (2.28) ve (2.34) eşitliklerinden

$$K = \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \quad (2.41)$$

ve (2.23), (2.28) ve (2.34) eşitliklerinden

$$H = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \quad (2.42)$$

elde edilir. (2.37) eşitliğinde (2.28) ve (2.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$II = \kappa_n^\alpha du^2 + \kappa_n^\beta dv^2 \quad (2.43)$$

olur. Böylece şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2 M öteleme yüzeyinin şekil operatörü S , Gauss eğriliği K , ortalama eğriliği H , ikinci temel formu II , üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olmak üzere bunlar arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$1) S = \frac{1}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} \kappa_n^\alpha & -\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha \\ -\cos(\varphi)\kappa_n^\beta & \kappa_n^\beta \end{bmatrix}$$

$$2) K = \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}$$

$$3) H = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2\sin^2(\varphi)}$$

$$4) II = \kappa_n^\alpha du^2 + \kappa_n^\beta dv^2$$

2.4.2 Öteleme yüzeylerinin asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri

Bir yüzeyin asli doğrultularının diferensiyel denklemi

$$\det \begin{pmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{pmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

eşitliğiyle elde edilir. Buna göre

$$(Em - Fl)du^2 + (En - Gl)dudv + (Fn - Gm)dv^2 = 0 \quad (2.45)$$

olur. (2.45) eşitliğinde, öteleme yüzeyleri için bulunan E, F, G, l, m, n değerleri yerlerine yazılırsa, asli doğrultularının diferensiyel denklemi

$$\begin{aligned} & -\cos(\varphi)\kappa_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)du^2 + (\kappa_1^\beta \cos(\theta_\beta) - \kappa_1^\alpha \cos(\theta_\alpha))dudv \\ & + \cos(\varphi)\kappa_1^\beta \cos(\theta_\beta)dv^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

bulunur. (2.46) eşitliğinde, (2.28) ve (2.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha du^2 + (\kappa_n^\alpha - \kappa_n^\beta)dudv - \cos(\varphi)\kappa_n^\beta dv^2 = 0 \quad (2.47)$$

elde edilir.

Sonuç 2.3 Üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olan bir öteleme yüzeyinin asli doğrultularının diferensiyel denklemi

$$\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha du^2 + (\kappa_n^\alpha - \kappa_n^\beta)dudv - \cos(\varphi)\kappa_n^\beta dv^2 = 0$$

şeklindedir.

2.4.3 Öteleme yüzeylerinin asli eğrilikleri

M öteleme yüzeyinin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olsun. Teorem 1.1.8'e göre, bir yüzeyin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği ile asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında $K = k_1k_2$ ve $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$ şeklinde bir ilişki vardır. Buna göre, asli eğrilikleri veren ikinci dereceden denklem

$$k^2 - 2Hk + K = 0 \quad (2.48)$$

olur. Bu denklem çözümlerse

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad \text{ve} \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.49)$$

elde edilir. (2.49) eşitliğinde (2.22) ve (2.23) eşitlikleriyle verilen H ve K değerleri yerlerine yazılırsa, öteleme yüzeyinin asli eğrilikleri

$$k_1 = \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{2 \sin^2(\varphi)} + \sqrt{\left(\frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)}} \quad (2.50)$$

$$k_2 = \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{2 \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\left(\frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)}} \quad (2.51)$$

olur. (2.50) ve (2.51) eşitliklerinde (2.28) ile (2.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$k_1 = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}} \quad (2.52)$$

$$k_2 = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}} \quad (2.53)$$

elde edilir.

Sonuç 2.4 Üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olan bir öteleme yüzeyinin asli eğrilikleri aşağıdaki gibidir.

$$1) k_1 = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)}\right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}}$$

$$2) k_2 = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)}\right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}}$$

2.4.4 Öteleme yüzeylerinin umbilik noktaları

Umbilik noktalarda, yüzeyin şekil operatörü matrisi, birim matrisin bir katı şeklinde olmalıdır. Bunun için de esas köşegen üzerindeki elemanlar birbirine eşit, diğerleri sıfır olmalıdır. O halde

$$\begin{aligned} \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} &= \frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \\ k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) &= k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \end{aligned} \quad (2.54)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{-k_1^\alpha \cos(\varphi) \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} &= 0 \\ \cos(\varphi) k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{-k_1^\beta \cos(\varphi) \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} &= 0 \\ \cos(\varphi) k_1^\beta \cos(\theta_\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

olmalıdır.

(2.54), (2.55) ve (2.56) eşitliklerinde, (2.28) ve (2.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa, öteleme yüzeylerinin umbilik noktalarında, $\kappa_n^\alpha = \kappa_n^\beta$, $\cos(\varphi) \kappa_n^\alpha = 0$ ve $\cos(\varphi) \kappa_n^\beta = 0$ eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 2.5 Bir öteleme yüzeyinin tüm umbilik noktalarında aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1) $\kappa_n^\alpha = \kappa_n^\beta$

2) $\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha = 0$

3) $\cos(\varphi)\kappa_n^\beta = 0$

2.4.5 Öteleme yüzeylerinin asimptotik çizgileri

Bir yüzeyin asimptotik çizgilerinin diferensiyel denklemi

$$II = 0 \quad (2.57)$$

açık olarak

$$ldu^2 + 2mdudv + ndv^2 = 0 \quad (2.58)$$

şeklindedir. (2.12), (2.13) ve (2.14) eşitlikleriyle verilen l, m, n değerleri (2.58) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, öteleme yüzeyleri için asimptotik çizgileri veren diferensiyel denklem elde edilir. Buna göre

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) du^2 + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) dv^2 = 0 \quad (2.59)$$

olur. Buradan elde edilen eğriler, öteleme yüzeyinin asimptotik çizgileridir. Ayrıca lemma 1.1.5'e göre, öteleme yüzeyi üzerindeki α eğrisinin yüzeyin asimptotik çizgisi olması için z 'nin sırasıyla α ve β eğrilerinin yüzeyin B_α ve B_β doğrultularında olmaları gerektiği söylenebilir. Dolayısıyla (2.28) ve (2.34) eşitlikleri, (2.59) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, öteleme yüzeylerinin asimptotik çizgilerini veren diferensiyel denklem, eğrilerin eğrilikleri cinsinden

$$\kappa_n^\alpha du^2 + \kappa_n^\beta dv^2 = 0 \quad (2.60)$$

eşitliği ile verilebilir.

Sonuç 2.6 Üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olan bir öteleme yüzeyinin asimptotik çizgilerini veren diferensiyel denklem $\kappa_n^\alpha du^2 + \kappa_n^\beta dv^2 = 0$.

2.4.6 Öteleme yüzeylerinin geodezikleri

Lemma 1.1.2'e göre, α eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin sabit hızlı bir eğri ve geodezik eğriliğinin sıfır ($\kappa_g^\alpha = 0$) olmasıdır. Buna göre, (2.27) eşitliğinden $\kappa_g^\alpha = k_1^\alpha \sin(\theta_\alpha) = 0$ yazılır. Burada, $k_1^\alpha \sin(\theta_\alpha) = 0$ ise $k_1^\alpha = 0$ ya da $\sin(\theta_\alpha) = 0 \Rightarrow \theta_\alpha = 0 + k\pi \Rightarrow \langle z, B_\alpha \rangle = 0$ olur. Sonuç olarak, M üzerindeki α eğrisinin geodezik olması için

$$k_1^\alpha = 0 \text{ veya } \langle z, B_\alpha \rangle = 0 \quad (2.61)$$

olmalıdır.

Benzer şekilde β eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart β eğrisinin sabit hızlı bir eğri ve geodezik eğriliğinin sıfır ($\kappa_g^\beta = 0$) olmasıdır. Buna göre, (2.33) eşitliğinden $\kappa_g^\beta = k_1^\beta \sin(\theta_\beta) = 0$ yazılır. Burada, $k_1^\beta \sin(\theta_\beta) = 0$ ise $k_1^\beta = 0$ ya da $\sin(\theta_\beta) = 0 \Rightarrow \theta_\beta = 0 + k\pi \Rightarrow \langle z, B_\beta \rangle = 0$ olur. Sonuç olarak, M üzerindeki β eğrisinin geodezik olması için

$$k_1^\beta = 0 \text{ veya } \langle z, B_\beta \rangle = 0 \quad (2.62)$$

olmalıdır. O halde, α ve β eğrilerinin geodesic olmaları için

$$z = \varepsilon_\alpha N_\alpha \quad (\varepsilon_\alpha = \mp 1) \text{ ve } z = \varepsilon_\beta N_\beta \quad (\varepsilon_\beta = \mp 1) \quad (2.63)$$

olmalıdır.

Örnek 2.1

Üreteç eğrileri

$$\tilde{\alpha}(t) = (\sin(t), \cos(t), \sqrt{3}t)$$

ve

$$\tilde{\beta}(s) = (\cos(s), \sin(s), 2\sqrt{2}s)$$

olan öteleme yüzeyini inceleyelim. $\|\tilde{\alpha}'(t)\| \neq 1$ ve $\|\tilde{\beta}'(s)\| \neq 1$ olduğundan, $\tilde{\alpha}(t)$ ve $\tilde{\beta}(s)$ eğrileri birim hızlı olmayan eğrilerdir. $\tilde{\alpha}(t)$ eğrisinin birim hızlı olan bir koordinat komşuluğu bulunabilir. Bu eğriye $\alpha^*(u)$ eğrisi denirse, $\tilde{\alpha}'(t) = (\cos(t), -\sin(t), \sqrt{3})$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|\tilde{\alpha}'(t)\| &= \sqrt{\langle \tilde{\alpha}'(t), \tilde{\alpha}'(t) \rangle} = \sqrt{\langle (\cos(t), -\sin(t), \sqrt{3}), (\cos(t), -\sin(t), \sqrt{3}) \rangle)} \\ &= \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + 3} = \sqrt{4} = 2 \\ \|\tilde{\alpha}'(t)\| &= 2\end{aligned}$$

elde edilir.

$u = \int_0^t \|\tilde{\alpha}'(t)\| dt$ olmak üzere, $u = \int_0^t 2 dt = 2t \Big|_0^t = 2t$ olur. Buradan

$$u = 2t \text{ ya da } t = \frac{u}{2}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\alpha^*(u) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right), \cos\left(\frac{u}{2}\right), \frac{\sqrt{3}u}{2} \right)$$

birim hızlı eğrisi elde edilir. $\alpha^*(u)$ eğrisine aşağıda verilen öteleme dönüşümü uygulanarak orjinden geçmesi sağlanabilir. Elde edilen yeni eğri $\alpha(u)$ eğrisi olsun.

$$\begin{aligned}\alpha_1(u) &= \alpha_1^*(u) \\ \alpha_2(u) &= \alpha_2^*(u) - 1 \\ \alpha_3(u) &= \alpha_3^*(u)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\alpha(u) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right), \cos\left(\frac{u}{2}\right) - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right)$$

elde edilir. $\alpha(u)$ eğrisi, $\tilde{\alpha}(t)$ eğrisine kongruent bir eğri olup, birim hızlıdır ve orjinden geçer. Buradan

$$\alpha'(u) = \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha''(u) = \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)$$

ve

$$\|\alpha''\| = \sqrt{\langle \alpha'', \alpha'' \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right), \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right) \right\rangle} = \frac{1}{4}$$

bulunur. Buna göre

$$T_\alpha = \alpha' = \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$N_\alpha = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)}{\frac{1}{4}} = \left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right), -\cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)$$

$$B_\alpha = T_\alpha \wedge N_\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{2} \right)$$

$$B_\alpha' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)$$

olur. Benzer şekilde; $\tilde{\beta}(s)$ eğrisinin birim hızlı bir koordinat komşuluğu bulunabilir. Bu eğriye $\beta^*(v)$ eğrisi denirse, $\tilde{\beta}'(s) = (-\sin(s), \cos(s), 2\sqrt{2})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\tilde{\beta}'(s)\| &= \sqrt{\langle \tilde{\beta}'(s), \tilde{\beta}'(s) \rangle} = \sqrt{\langle (-\sin(s), \cos(s), 2\sqrt{2}), (-\sin(s), \cos(s), 2\sqrt{2}) \rangle} \\ &= \sqrt{\sin^2(s) + \cos^2(s) + 8} = \sqrt{9} = 3 \\ \|\tilde{\beta}'(s)\| &= 3 \end{aligned}$$

elde edilir.

$v = \int_0^s \|\tilde{\beta}'(s)\| ds$ olmak üzere, $v = \int_0^s 3 ds = 3s \Big|_0^s = 3s$ olur. Buradan

$$v = 3s \text{ ya da } s = \frac{v}{3}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\beta^*(v) = \left(\cos\left(\frac{v}{3}\right), \sin\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right)$$

birim hızlı eğrisi elde edilir. $\beta^*(v)$ eğrisine aşağıda verilen öteleme dönüşümü uygulanarak orjinden geçmesi sağlanabilir. Elde edilen yeni eğri $\beta(v)$ eğrisi olsun.

$$\begin{aligned} \beta_1(v) &= \beta_1^*(v) - 1 \\ \beta_2(v) &= \beta_2^*(v) \\ \beta_3(v) &= \beta_3^*(v) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\beta(v) = \left(\cos\left(\frac{v}{3}\right) - 1, \sin\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right)$$

elde edilir. $\beta(v)$ eğrisi, $\tilde{\beta}(s)$ eğrisine kongruent bir eğri olup, birim hızlıdır ve orjinden geçer. Buradan

$$\begin{aligned} \beta'(v) &= \left(-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{v}{3}\right), \frac{1}{3}\cos\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ \beta''(v) &= \left(-\frac{1}{9}\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right) \end{aligned}$$

ve

$$\|\beta''\| = \sqrt{\langle \beta'', \beta'' \rangle} = \sqrt{\left(-\frac{1}{9}\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right)} = \frac{1}{9}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} T_\beta &= \beta' = \left(-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{v}{3}\right), \frac{1}{3}\cos\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \\ N_\beta &= \frac{\beta''}{\|\beta''\|} = \frac{\left(-\frac{1}{9}\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right)}{\frac{1}{9}} = \left(-\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right) \\ B_\beta &= T_\beta \wedge N_\beta = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\left(\frac{v}{3}\right), -\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(\frac{v}{3}\right), \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$B_{\beta}' = \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} \cos\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right)$$

olur. O halde, $M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$ öteleme yüzeyinin denklemi yazılabilir.

$$M(u, v) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right), \cos\left(\frac{u}{2}\right) - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right) + \left(\cos\left(\frac{v}{3}\right) - 1, \sin\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right)$$

$$M(u, v) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right) + \cos\left(\frac{v}{3}\right) - 1, \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \sin\left(\frac{v}{3}\right) - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right)$$

elde edilir. α eğrisinin eğriliği ve burulması aşağıdaki gibi bulunur. $T_{\alpha}' = k_1^{\alpha} N_{\alpha}$ olmak

üzere, $k_1^{\alpha} = \langle T_{\alpha}', N_{\alpha} \rangle = \langle \alpha'', N_{\alpha} \rangle$ yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} k_1^{\alpha} &= \left\langle \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right), \left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right), -\cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$k_1^{\alpha} = \frac{1}{4}$$

olur. $B_{\alpha}' = -k_2^{\alpha} N_{\alpha}$ olmak üzere, $k_2^{\alpha} = -\langle B_{\alpha}', N_{\alpha} \rangle$ yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} k_2^{\alpha} &= -\left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right), \left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right), -\cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right) \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$k_2^{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

olur. Benzer şekilde, β eğrisinin eğriliği ve burulması aşağıdaki gibi bulunur.

$T_{\beta}' = k_1^{\beta} N_{\beta}$ olmak üzere, $k_1^{\beta} = \langle T_{\beta}', N_{\beta} \rangle = \langle \beta'', N_{\beta} \rangle$ yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} k_1^{\beta} &= \left\langle \left(-\frac{1}{9} \cos\left(\frac{v}{3}\right), -\frac{1}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right), \left(-\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right) + \frac{1}{9} \sin^2\left(\frac{v}{3}\right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$k_1^\beta = \frac{1}{9}$$

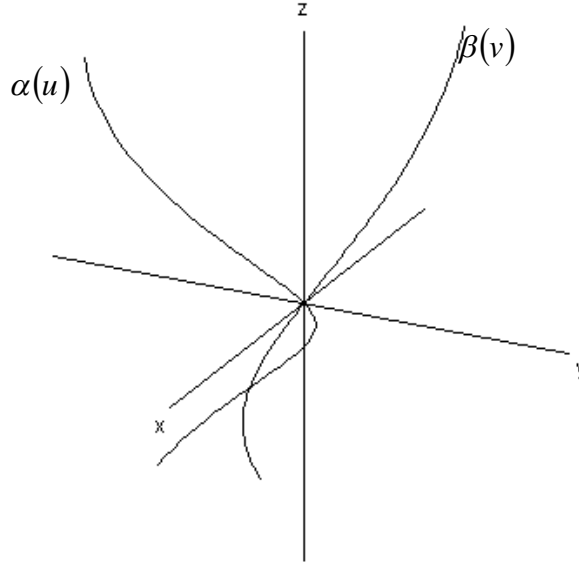
olur. $B_\beta' = -k_2^\beta N_\beta$ olmak üzere, $k_2^\beta = -\langle B_\beta', N_\beta \rangle$ yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} k_2^\beta &= -\left\langle \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} \cos\left(\frac{v}{3}\right), \frac{2\sqrt{2}}{9} \sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right), \left(-\cos\left(\frac{v}{3}\right), -\sin\left(\frac{v}{3}\right), 0 \right) \right\rangle \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{9} \cos^2\left(\frac{v}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{9} \sin^2\left(\frac{v}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{9} \end{aligned}$$

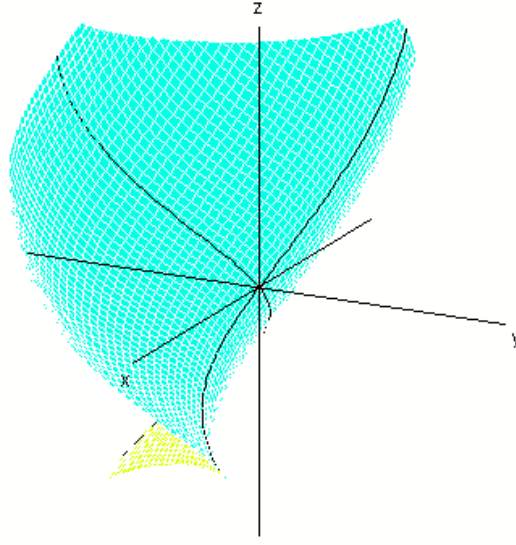
$$k_2^\beta = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

olur. $M(u, v) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right) + \cos\left(\frac{v}{3}\right) - 1, \cos\left(\frac{u}{2}\right) + \sin\left(\frac{v}{3}\right) - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right)$ ile verilen

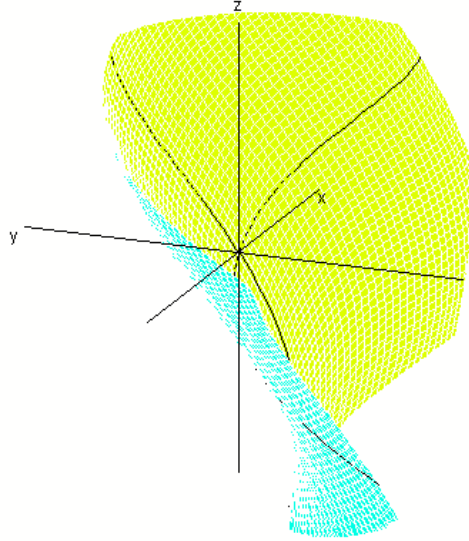
öteleme yüzeyinin grafiğinin farklı açılardan görünüşleri aşağıdaki gibidir.



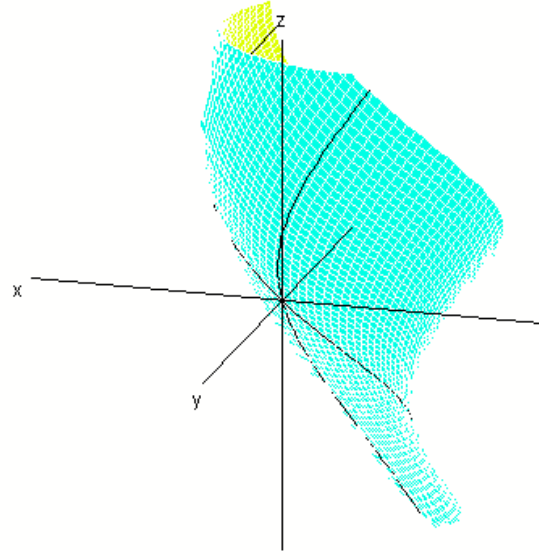
Şekil 2.4 M öteleme yüzeyinin α ve β üreteç eğrileri



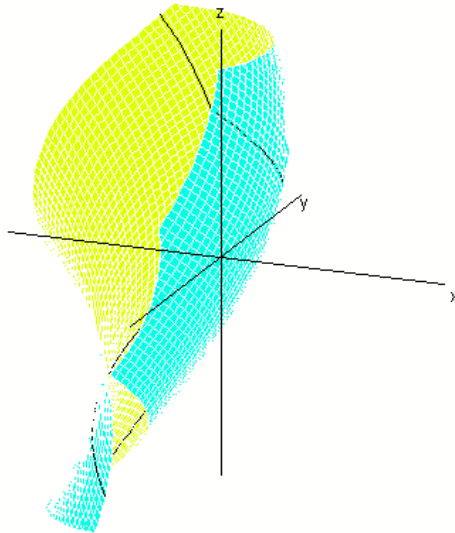
Şekil 2.5 M öteleme yüzeyinin $x > 0$ boyunca grafiği



Şekil 2.6 M öteleme yüzeyinin $x < 0$ boyunca grafiği



Şekil 2.7 M öteleme yüzeyinin $y > 0$ boyunca grafiği



Şekil 2.8 M öteleme yüzeyinin $y < 0$ boyunca grafiği

3. BÖLÜM

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında minimal öteleme yüzeyleri ve diferensiyel geometrik özellikleri verilmiştir. Buna göre, minimal öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca şekil operatörü matrisi bulundu. Gauss eğriliği hesaplandı. Ayrıca, öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca yüzey eğrilikleri, temel formları, asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri, asli eğrilikleri, umbilik noktaları ve asimptotik çizgileri incelendi.

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA MİNİMAL ÖTELEME YÜZEYLERİ

Sıfır ortalama eğrilikli yüzeylere minimal yüzey adı verilir [4]. O halde (2.23) eşitliğine göre, bir öteleme yüzeyinin minimal yüzey olabilmesi için

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = 0 \quad (3.1)$$

sağlanmalıdır. Bu ise

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) = -k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \text{ ya da } k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = -k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) \quad (3.2)$$

olmasını gerektirir. (3.1) eşitliğinde (2.28) ve (2.34) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1 E^3 'te bir öteleme yüzeyinin minimal yüzey olması için gerek ve yeter şart yüzeyin üreteç eğrileri boyunca normal eğriliklerinin toplamının sıfır olmasıdır.

3.1 Minimal Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Şekil Operatörü Matrisi

Öteleme yüzeyleri için şekil operatörü matrisi (2.21) eşitliği ile verilmiştir. (2.21) eşitliğinde (3.2) ile verilen eşitlikler kullanılırsa, minimal öteleme yüzeyleri için şekil operatörü matrisi, üreteç eğrilerinin eğrilikleri cinsinden ifade edilebilir. Buna göre

$$S = \begin{bmatrix} \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} & \frac{-k_1^\alpha \cos(\varphi)\cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} \\ \frac{k_1^\alpha \cos(\varphi)\cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} & \frac{-k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} = \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -1 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

olur. Burada, (2.28) eşitliği yerine yazılırsa

$$S = \frac{\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$S = \begin{bmatrix} \frac{-k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} & \frac{k_1^\beta \cos(\varphi)\cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \\ \frac{-k_1^\beta \cos(\varphi)\cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} & \frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} = \frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} -1 & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} -1 & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

olur. Burada, (2.34) eşitliği yerine yazılırsa

$$S = \frac{\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} -1 & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Sonuç 3.1 Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olmak üzere minimal öteleme yüzeyinin şekil operatörü matrisi

$$S = \frac{\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -1 \end{bmatrix} \text{ veya } S = \frac{\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \begin{bmatrix} -1 & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

3.2 Minimal Öteleme Yüzeylerinin Gauss Eğriliği

Öteleme yüzeyleri için Gauss Eğriliği, (2.22) eşitliği ile verilmişti. (2.22) eşitliğinde, (3.2) ile verilen eşitlikler kullanılırsa, minimal öteleme yüzeyleri için Gauss eğriliği elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{-k_1^\alpha k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} \\
 &= \frac{-(k_1^\alpha)^2 \cos^2(\theta_\alpha)}{\sin^2(\varphi)} = -\left(\frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin(\varphi)}\right)^2 \\
 K &= -\left(\frac{k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)}{\sin(\varphi)}\right)^2 \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

olur. Burada, (2.28) eşitliği yerine yazılırsa

$$K = -\left(\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin(\varphi)}\right)^2 \tag{3.9}$$

elde edilir. Ya da

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{k_1^\alpha k_1^\beta \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} = \frac{-k_1^\beta k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \cos(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} \\
 &= \frac{-(k_1^\beta)^2 \cos^2(\theta_\beta)}{\sin^2(\varphi)} = -\left(\frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin(\varphi)}\right)^2 \\
 K &= -\left(\frac{k_1^\beta \cos(\theta_\beta)}{\sin(\varphi)}\right)^2 \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada, (2.34) eşitliği yerine yazılırsa

$$K = -\left(\frac{\kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)}\right)^2 \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.11) eşitlikleri incelendiğinde minimal öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca $K \leq 0$ olduğu açıktır. Buna göre, aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2 E^3 'te bir minimal öteleme yüzeyinin, üreteç eğrileri boyunca Gauss eğriliği $K \leq 0$.

Sonuç 3.2 Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olmak üzere minimal öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\left(\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin(\varphi)}\right)^2 \text{ veya } K = -\left(\frac{\kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)}\right)^2$$

şeklindedir.

3.3 Minimal Öteleme Yüzeylerinin Üreteç Eğrileri Boyunca Yüzey Eğrilikleri

Herhangi bir öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri boyunca yüzey eğrilikleri 2. bölümde bulunmuştur. (2.28) ve (2.34) ile verilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) \quad (3.12)$$

bulunur. (3.1) ve (3.12) eşitliklerinden

$$\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir.

3.4 Minimal Öteleme Yüzeylerinin Temel Formları, Asli Doğrultuları ve Asli Eğrilik Çizgileri, Asli Eğrilikleri, Asimptotik Çizgileri

3.4.1 Minimal öteleme yüzeylerinin temel formları

Öteleme yüzeylerinin temel formlarının diferensiyel denklemleri (2.36) ve (2.37) eşitlikleriyle verilmiştir. (2.37) eşitliğinde, (3.2) ile verilen eşitlikler kullanılırsa minimal öteleme yüzeyleri için II . temel formun diferensiyel denklemi

$$II = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) du^2 - k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) dv^2 \quad (3.14)$$

veya

$$II = -k_1^\beta \cos(\theta_\beta) du^2 + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) dv^2 \quad (3.15)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$II = k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) (du^2 - dv^2) \quad (3.16)$$

veya

$$II = k_1^\beta \cos(\theta_\beta) (dv^2 - du^2) \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinde (2.28) eşitliği ve (3.17) eşitliğinde (2.34) eşitliği yerine yazılırsa

$$II = \kappa_n^\alpha (du^2 - dv^2) \quad (3.18)$$

ve

$$II = \kappa_n^\beta (dv^2 - du^2) \quad (3.19)$$

bulunur.

Sonuç 3.3 Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olmak üzere, minimal öteleme yüzeyinin II . temel formu α eğrisi boyunca $II = \kappa_n^\alpha (du^2 - dv^2)$ ve β eğrisi boyunca $II = \kappa_n^\beta (dv^2 - du^2)$ şeklindedir.

3.4.2 Minimal öteleme yüzeylerinin asli doğrultuları ve asli eğrilik çizgileri

Öteleme yüzeylerinin asli doğrultularının diferensiyel denklemi (2.46) eşitliği ile verilmişti. (2.46) eşitliğinde, (3.2) ile verilen eşitlikler kullanılırsa minimal öteleme yüzeyleri için asli doğrultuların diferensiyel denklemi elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \cos(\varphi)k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)du^2 + 2k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)dudv + \cos(\varphi)k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)dv^2 &= 0 \\ k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)(\cos(\varphi)du^2 + 2dudv + \cos(\varphi)dv^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

ya da

$$k_1^\beta \cos(\theta_\beta)(\cos(\varphi)du^2 + 2dudv + \cos(\varphi)dv^2) = 0 \quad (3.21)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü, yüzeyin asli eğrilik çizgilerini verir. (3.20) eşitliğinde (2.28) eşitliği ve (3.21) eşitliğinde (2.34) eşitliği yerine yazılırsa

$$\kappa_n^\alpha (\cos(\varphi)du^2 + 2dudv + \cos(\varphi)dv^2) = 0 \quad (3.22)$$

ve

$$\kappa_n^\beta (\cos(\varphi)du^2 + 2dudv + \cos(\varphi)dv^2) = 0 \quad (3.23)$$

elde edilir.

Sonuç 3.4 Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olmak üzere, minimal öteleme yüzeyinin asli doğrultularının diferensiyel denklemi, α

eğrisi boyunca $\kappa_n^\alpha (\cos(\varphi)du^2 + 2dudv + \cos(\varphi)dv^2) = 0$ veya β eğrisi boyunca $\kappa_n^\beta (\cos(\varphi)du^2 + 2dudv + \cos(\varphi)dv^2) = 0$ şeklindedir.

3.4.3 Minimal öteleme yüzeylerinin asli eğrilikleri

(2.49) eşitliğinde $H = 0$ alınırsa

$$k_1 = \sqrt{-K} \text{ ve } k_2 = -\sqrt{-K} \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinde (3.9) veya (3.11) eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$k_1 = \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin(\varphi)}\right)^2} = \left|\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin(\varphi)}\right| \text{ veya } k_1 = \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)}\right)^2} = \left|\frac{\kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)}\right| \quad (3.25)$$

$$k_2 = -\sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin(\varphi)}\right)^2} = -\left|\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin(\varphi)}\right| \text{ veya } k_2 = -\sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)}\right)^2} = -\left|\frac{\kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)}\right| \quad (3.26)$$

bulunur.

Teorem 3.2 ve tanım 1.1.29'a göre, minimal öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca her noktası ya flat ya da hiperboliktir. Eliptik noktalarda $K > 0$ ve umbilik noktalarda şekil operatörü matrisi birim matrisin bir katı olmalıdır. Oysaki (3.5) eşitliği ya da (3.7) eşitliği incelendiğinde bu mümkün değildir.

Sonuç 3.5

- 1) Minimal öteleme yüzeylerinin asli eğriliklerinin üreteç eğrileri boyunca toplamı sıfırdır.
- 2) Minimal öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca her noktası ya flat ya da hiperboliktir.
- 3) Minimal öteleme yüzeylerinin üreteç eğrileri boyunca hiçbir noktası umbilik değildir.

Sonuç 3.6

Minimal öteleme yüzeyleri şu şekilde sınıflandırılabilir:

- 1) $k_1^\alpha \neq 0$, $k_1^\beta \neq 0$, $\cos(\theta_\alpha) = \cos(\theta_\beta) = 0$
- 2) $k_1^\alpha = 0$, $k_1^\beta = 0$

$$3) k_1^\alpha = 0, k_1^\beta \neq 0, \cos(\theta_\beta) = 0$$

$$4) k_1^\alpha \neq 0, k_1^\beta = 0, \cos(\theta_\alpha) = 0$$

$$5) k_1^\alpha = k_1^\beta \neq 0, \cos(\theta_\alpha) = -\cos(\theta_\beta) \neq 0$$

$$6) k_1^\alpha \neq 0, k_1^\beta \neq 0 (k_1^\alpha \neq k_1^\beta) \text{ ve } \cos(\theta_\alpha) \neq 0, \cos(\theta_\beta) \neq 0 (\cos(\theta_\alpha) \neq \cos(\theta_\beta))$$

3.4.4 Minimal öteleme yüzeylerinin asimptotik çizgileri

Öteleme yüzeylerinin asimptotik çizgilerinin diferensiyel denklemi (2.59) eşitliğiyle verilmişti. (2.59) eşitliğinde (3.2) ile verilen eşitlikler kullanılırsa minimal öteleme yüzeylerinin α eğrisi boyunca ya da β eğrisi boyunca asimptotik çizgilerini veren diferensiyel denklem bulunur. Buna göre

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha)(du^2 - dv^2) = 0 \quad (3.27)$$

veya

$$k_1^\beta \cos(\theta_\beta)(du^2 - dv^2) = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. (3.27) eşitliğinde (2.28) yerine yazılırsa

$$\kappa_n^\alpha (du^2 - dv^2) = 0 \quad (3.29)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.28) eşitliğinde (2.34) eşitliği yerine yazılırsa

$$\kappa_n^\beta (du^2 - dv^2) = 0 \quad (3.30)$$

elde edilir.

Sonuç 3.7 Öteleme yüzeyinin üreteç eğrileri boyunca normal eğrilikleri κ_n^α ve κ_n^β olmak üzere, minimal öteleme yüzeyinin asimptotik çizgilerinin diferensiyel denklemi $\kappa_n^\alpha (du^2 - dv^2) = 0$ veya $\kappa_n^\beta (du^2 - dv^2) = 0$ şeklindedir.

Örnek 3.1 (Scherk Yüzeyi)

$M(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right) \right)$ denklemiyle verilen Scherk yüzeyinin minimal bir yüzey olduğunu ($k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = 0$ bağıntısını gerçeklediğini) gösterelim. Bunun için üreteç eğrilerinin eğriliklerinin ve $\cos(\theta_\alpha)$, $\cos(\theta_\beta)$ değerlerinin hesaplanması gerekir. Scherk yüzeyi

$$M(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right) \right) = \left(u, 0, -\frac{1}{a} \log(\cos(au)) \right) + \left(0, v, \frac{1}{a} \log(\cos(av)) \right)$$

şeklinde yazılırsa yüzeyin üreteç eğrileri

$$\alpha(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{a} \log(\cos(au)) \right)$$

ve

$$\beta(v) = \left(0, v, \frac{1}{a} \log(\cos(av)) \right)$$

olur.

$$\alpha(u) = \left(u, 0, -\frac{1}{a} \log(\cos(au)) \right)$$

olmak üzere

$$\alpha'(u) = \left(1, 0, \frac{\tan(au)}{\ln 10} \right)$$

$$\alpha''(u) = \left(0, 0, \frac{a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10} \right)$$

olur. Buradan

$$\|\alpha'\| = \sqrt{1 + \frac{\tan^2(au)}{\ln^2 10}} = \frac{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}}{\ln 10}$$

ve

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\tan(au)}{\ln 10} \\ 0 & 0 & \frac{a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10} \end{vmatrix} = \left(0, \frac{-a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10}, 0 \right)$$

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = \frac{a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10}$$

elde edilir. O halde α eğrisinin eğriliği

$$k_1^\alpha = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\frac{a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10}}{\frac{(\ln^2 10 + \tan^2(au))^{\frac{3}{2}}}{\ln^3 10}} = \frac{a(1 + \tan^2(au)) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2(au))^{\frac{3}{2}}}$$

olur. α eğrisinin asli normal vektörünü bulalım.

$$T_\alpha = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} \left(1, 0, \frac{\tan(au)}{\ln 10} \right)$$

$$T_\alpha = \left(\frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}}, 0, \frac{\tan(au)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} \right)$$

$$B_\alpha = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} = \frac{\ln 10}{a(1 + \tan^2(au))} \left(0, \frac{-a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10}, 0 \right)$$

$$B_\alpha = (0, -1, 0)$$

$$N_\alpha = B_\alpha \wedge T_\alpha = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} & 0 & \frac{\tan(au)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} \end{vmatrix}$$

$$N_\alpha = \left(\frac{-\tan(au)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}}, 0, \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} (-\tan(au), 0, \ln 10)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\beta(v) = \left(0, v, \frac{1}{a} \log(\cos(av)) \right)$$

olmak üzere

$$\beta'(v) = \left(0, 1, \frac{-\tan(av)}{\ln 10} \right)$$

$$\beta''(v) = \left(0, 0, \frac{-a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10} \right)$$

olur. Buradan

$$\|\beta'\| = \sqrt{1 + \frac{\tan^2(av)}{\ln^2 10}} = \frac{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}}{\ln 10}$$

ve

$$\beta' \wedge \beta'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & \frac{-\tan(av)}{\ln 10} \\ 0 & 0 & \frac{-a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10} \end{vmatrix} = \left(\frac{-a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10}, 0, 0 \right)$$

$$\|\beta' \wedge \beta''\| = \frac{a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10}$$

elde edilir. O halde β eğrisinin eğriliği

$$k_1^\beta = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{\frac{a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10}}{\frac{(\ln^2 10 + \tan^2(av))^{\frac{3}{2}}}{\ln^3 10}} = \frac{a(1 + \tan^2(av)) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2(av))^{\frac{3}{2}}}$$

olur. β eğrisinin asli normal vektörünü bulalım.

$$T_\beta = \frac{\beta'}{\|\beta'\|} = \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} \left(0, 1, \frac{-\tan(av)}{\ln 10} \right)$$

$$T_\beta = \left(0, \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}}, \frac{-\tan(av)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} \right)$$

$$B_\beta = \frac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|} = \frac{\ln 10}{a(1 + \tan^2(av))} \left(\frac{-a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10}, 0, 0 \right)$$

$$B_\beta = (-1, 0, 0)$$

$$N_\beta = B_\beta \wedge T_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} & \frac{-\tan(av)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} \end{vmatrix}$$

$$N_\beta = \left(0, \frac{-\tan(av)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}}, \frac{-\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} (0, -\tan(av), -\ln 10)$$

bulunur. Yüzeyin birim normali

$$z = \frac{\alpha' \wedge \beta'}{\|\alpha' \wedge \beta'\|}$$

olmak üzere

$$\alpha' \wedge \beta' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\tan(au)}{\ln 10} \\ 0 & 1 & \frac{-\tan(av)}{\ln 10} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\tan(au)}{\ln 10}, \frac{\tan(av)}{\ln 10}, 1 \right)$$

$$\|\alpha' \wedge \beta'\| = \sqrt{\frac{\tan^2(au)}{\ln^2 10} + \frac{\tan^2(av)}{\ln^2 10} + 1} = \sqrt{\frac{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10}{\ln^2 10}}$$

$$z = \frac{\ln 10}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10}} \left(-\frac{\tan(au)}{\ln 10}, \frac{\tan(av)}{\ln 10}, 1 \right)$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10}} (-\tan(au), \tan(av), \ln 10)$$

bulunur. Buna göre $\cos(\theta_\alpha)$, $\cos(\theta_\beta)$ değerleri hesaplanırsa

$$\cos(\theta_\alpha) = \langle z, N_\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10} \sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} (\tan^2(au) + \ln^2 10)$$

$$\cos(\theta_\beta) = \langle z, N_\beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10} \sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} (-\tan^2(av) - \ln^2 10)$$

elde edilir. Buradan da

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = \frac{a(1 + \tan^2(au)) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2(au))^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10} \sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(au)}} (\tan^2(au) + \ln^2 10) \\ + \frac{a(1 + \tan^2(av)) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2(av))^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10} \sqrt{\ln^2 10 + \tan^2(av)}} (-\tan^2(av) - \ln^2 10)$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = \frac{a \ln^2 10}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10}} \left(\frac{(1 + \tan^2(au))(\tan^2(au) + \ln^2 10)}{(\ln^2 10 + \tan^2(au))^2} - \frac{(1 + \tan^2(av))(\tan^2(av) + \ln^2 10)}{(\ln^2 10 + \tan^2(av))^2} \right)$$

elde edilir. Lemma 1.1.9'a göre minimal yüzeyler için

$$(1 + M_u^2)M_{vv} - 2M_u M_v M_{uv} + (1 + M_v^2)M_{uu} = 0$$

eşitliği sağlanır. Buna göre

$$M(u, v) = \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos(av)}{\cos(au)} \right) = \frac{1}{a} \log(\cos(av)) - \frac{1}{a} \log(\cos(au))$$

yüzeyinin u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$M_u = \frac{\tan(au)}{\ln 10}$$

$$M_{uu} = \frac{a(1 + \tan^2(au))}{\ln 10}$$

$$M_v = \frac{-\tan(av)}{\ln 10}$$

$$M_{vv} = \frac{-a(1 + \tan^2(av))}{\ln 10}$$

$$M_{uv} = M_{vu} = 0$$

olur. M_{uv} değeri

$$(1 + M_u^2)M_{vv} - 2M_u M_v M_{uv} + (1 + M_v^2)M_{uu} = 0$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{1 + M_u^2}{M_{uu}} = -\frac{1 + M_v^2}{M_{vv}}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1 + \frac{\tan^2(au)}{\ln^2 10}}{a(1 + \tan^2(au)) \ln 10} = -\frac{1 + \frac{\tan^2(av)}{\ln^2 10}}{-a(1 + \tan^2(av)) \ln 10}$$

$$\frac{\ln^2 10 + \tan^2(au)}{1 + \tan^2(au)} = \frac{\ln^2 10 + \tan^2(av)}{1 + \tan^2(av)}$$

$$(\ln^2 10 + \tan^2(au))(1 + \tan^2(av)) = (\ln^2 10 + \tan^2(av))(1 + \tan^2(au))$$

$$\ln^2 10 + \ln^2 10 \tan^2(av) + \tan^2(au) + \tan^2(au) \tan^2(av) = \ln^2 10 + \ln^2 10 \tan^2(au) + \tan^2(av) + \tan^2(av) \tan^2(au)$$

$$\begin{aligned}\ln^2 10 \tan^2(av) + \tan^2(au) &= \ln^2 10 \tan^2(au) + \tan^2(av) \\ \tan^2(av)(\ln^2 10 - 1) &= \tan^2(au)(\ln^2 10 - 1) \\ \tan^2(av) &= \tan^2(au)\end{aligned}$$

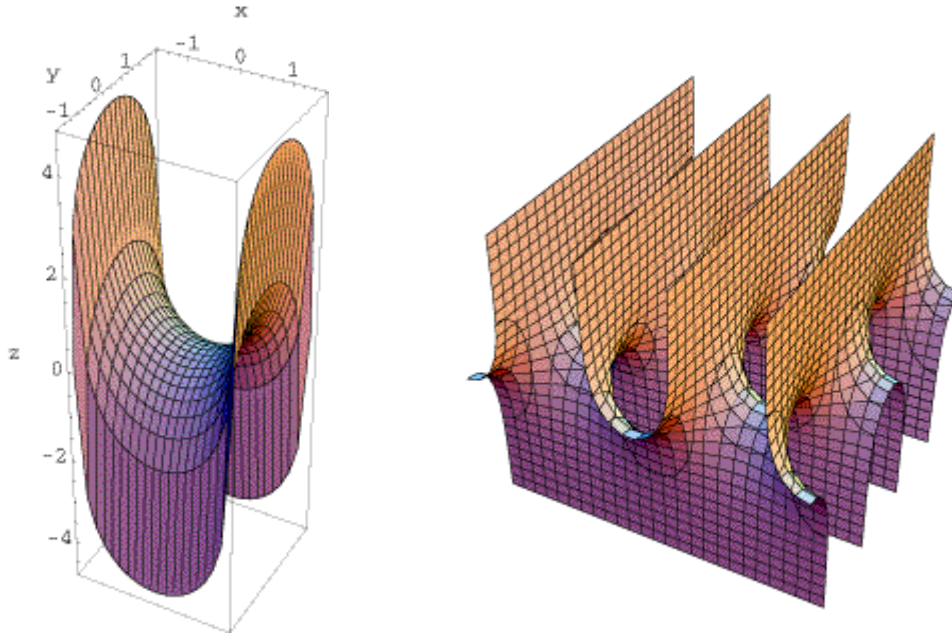
bulunur. u ve v lineer bağımsız değişkenler olduğundan $\tan^2(av) = \tan^2(au)$ alınabilir.

Bulunan bu eşitlik

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = \frac{a \ln^2 10}{\sqrt{\tan^2(au) + \tan^2(av) + \ln^2 10}} \left(\frac{(1 + \tan^2(au))(\tan^2(au) + \ln^2 10)}{(\ln^2 10 + \tan^2(au))^2} - \frac{(1 + \tan^2(av))(\tan^2(av) + \ln^2 10)}{(\ln^2 10 + \tan^2(av))^2} \right)$$

ifadesinde yerine yazılırsa $k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = 0$ edilir. O halde, Scherk yüzeyi bir minimal yüzeydir. Buna göre aşağıdaki şu sonuca ulaşılabilir.

Sonuç 3.8 Üreteç eğrileri α ve β olan bir Scherk yüzeyinde $k_1^\alpha = k_1^\beta$ ve $\cos(\theta_\alpha) = -\cos(\theta_\beta)$ eşitlikleri sağlanır.



Şekil 3.1 Scherk yüzeyi

Örnek 3.2

Üreteç eğrileri

$$\alpha(u) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right), \cos\left(\frac{u}{2}\right) - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right)$$

ve

$$\beta(v) = \left(-\sin\left(\frac{v}{2}\right), -\cos\left(\frac{v}{2}\right) + 1, \frac{\sqrt{3}v}{2} \right)$$

olan öteleme yüzeyinin minimal yüzey olduğunu gösterelim.

$$\alpha(u) = \left(\sin\left(\frac{u}{2}\right), \cos\left(\frac{u}{2}\right) - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right)$$

olmak üzere

$$\alpha'(u) = \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\alpha''(u) = \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)$$

bulunur. Buradan

$$\|\alpha'\| = \sqrt{\langle \alpha', \alpha' \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle} = 1$$

olur. $\|\alpha'\| = 1$ olduğundan α eğrisi yay parametrelili bir eğridir. Aynı zamanda α eğrisi orjinden geçer.

$$\|\alpha''\| = \sqrt{\langle \alpha'', \alpha'' \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right), \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right) \right\rangle} = \frac{1}{4}$$

olup

$$N_\alpha = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \frac{\left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)}{\frac{1}{4}} = \left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right), -\cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right)$$

bulunur.

$$k_1^\alpha = \langle T_\alpha', N_\alpha \rangle = \langle \alpha'', N_\alpha \rangle$$

olmak üzere

$$k_1^\alpha = \left\langle \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right), -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right), \left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right), -\cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right) \right\rangle = \frac{1}{4}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\beta(v) = \left(-\sin\left(\frac{v}{2}\right), -\cos\left(\frac{v}{2}\right) + 1, \frac{\sqrt{3}v}{2} \right)$$

olmak üzere

$$\beta'(v) = \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\beta''(v) = \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right)$$

bulunur. Buradan

$$\|\beta'\| = \sqrt{\langle \beta', \beta' \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle} = 1$$

olur. $\|\beta'\| = 1$ olduğundan β eğrisi yay parametrelili bir eğridir. Aynı zamanda β eğrisi orjinden geçer.

$$\|\beta''\| = \sqrt{\langle \beta'', \beta'' \rangle} = \sqrt{\left\langle \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right), \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right) \right\rangle} = \frac{1}{4}$$

olup

$$N_\beta = \frac{\beta''}{\|\beta''\|} = \frac{\left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right)}{\frac{1}{4}} = \left(\sin\left(\frac{v}{2}\right), \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right)$$

bulunur.

$$k_1^\beta = \langle T_\beta', N_\beta \rangle = \langle \beta'', N_\beta \rangle$$

olmak üzere

$$k_1^\beta = \left\langle \left(\frac{1}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right), \left(\sin\left(\frac{v}{2}\right), \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right) \right\rangle = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Sonuç olarak $k_1^\alpha = k_1^\beta$ elde edilir.

$$\alpha' \wedge \beta' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right) & -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{v}{2}\right) & \frac{1}{2} \sin\left(\frac{v}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\alpha' \wedge \beta' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \sin\left(\frac{v-u}{2}\right) \right)$$

bulunur.

$$\|\alpha' \wedge \beta'\| = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{16} \sin^2\left(\frac{u-v}{2}\right)} = \frac{1}{\rho}$$

alalım.

$$z = \frac{\alpha' \wedge \beta'}{\|\alpha' \wedge \beta'\|}$$

olmak üzere

$$z = \rho \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \sin\left(\frac{v-u}{2}\right) \right)$$

olur.

$$\cos(\theta_\alpha) = \langle z, N_\alpha \rangle$$

olmak üzere

$$\cos(\theta_\alpha) = \rho \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \sin\left(\frac{v-u}{2}\right) \right), \left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right), -\cos\left(\frac{u}{2}\right), 0 \right) \right\rangle$$

$$\cos(\theta_\alpha) = \rho \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \right)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\cos(\theta_\beta) = \langle z, N_\beta \rangle$$

olmak üzere

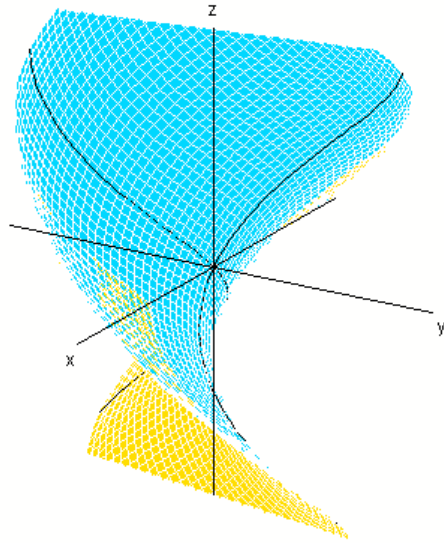
$$\cos(\theta_\beta) = \rho \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin\left(\frac{v}{2}\right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{v}{2}\right), \frac{1}{4} \sin\left(\frac{v-u}{2}\right) \right), \left(\sin\left(\frac{v}{2}\right), \cos\left(\frac{v}{2}\right), 0 \right) \right\rangle$$

$$\cos(\theta_\beta) = -\rho \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \right)$$

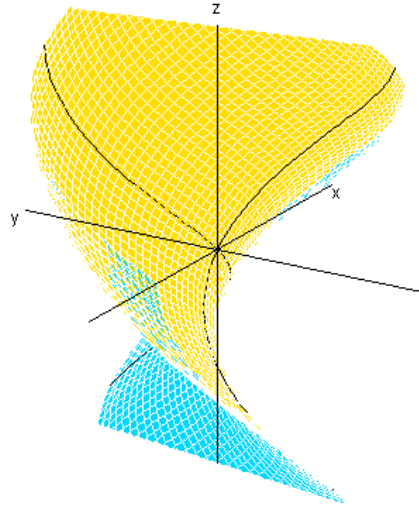
bulunur. O halde

$$k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + k_1^\beta \cos(\theta_\beta) = \frac{1}{4} \rho \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \right) - \frac{1}{4} \rho \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \right) = 0$$

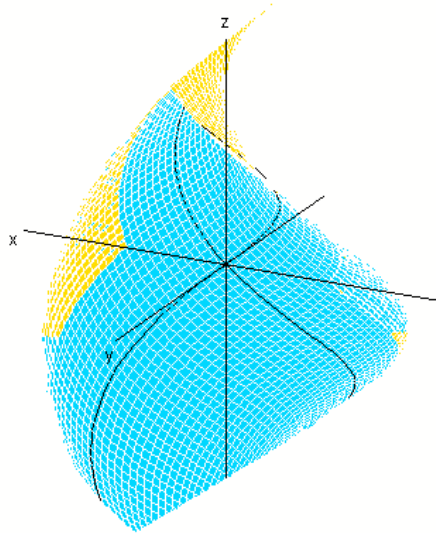
olur. Sonuç olarak yüzeyin minimal olduğu gösterilmiş olur. Minimal öteleme yüzeyinin grafiğinin farklı açılardan görünüşleri aşağıdaki gibidir.



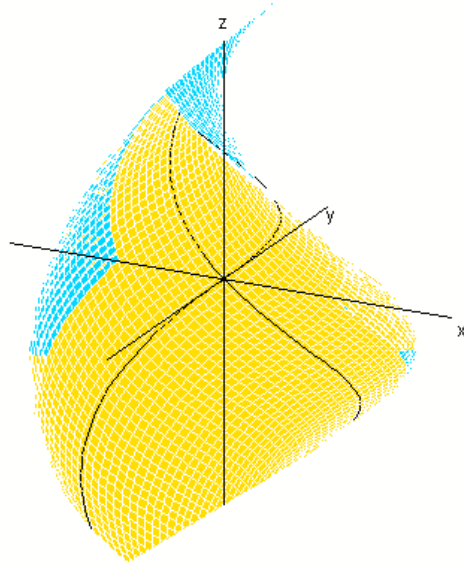
Şekil 3.2 Minimal yüzeyinin $x > 0$ boyunca grafiği



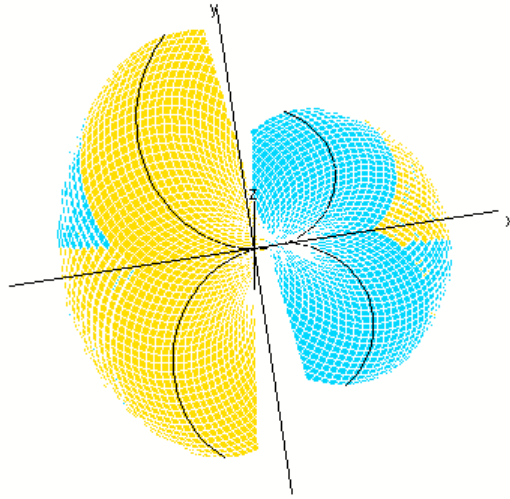
Şekil 3.3 Minimal yüzeyinin $x < 0$ boyunca grafiği



Şekil 3.4 Minimal yüzeyinin $y > 0$ boyunca grafiği



Şekil 3.5 Minimal yüzeyinin $y < 0$ boyunca grafiği



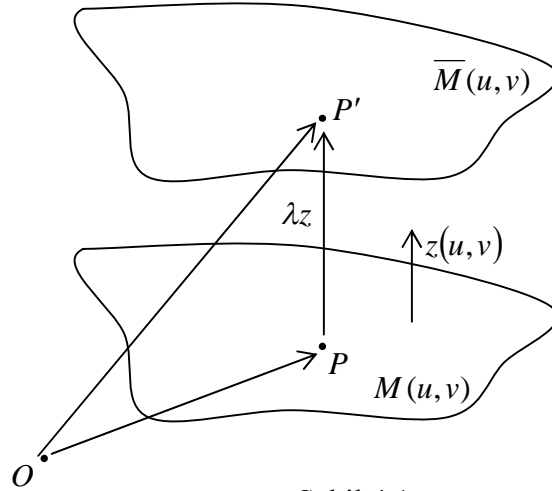
Şekil 3.6 Minimal yüzeyinin $z > 0$ boyunca grafiği

4. BÖLÜM

Bu bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında üreteç eğrileri boyunca teğet vektörleri arasında sabit açı bulunan, sabit eğrilik ve burulmaya sahip üreteç eğrilerinin oluşturduğu öteleme yüzeylerine paralel olan yüzeylerin diferensiyel geometrik özellikleri incelendi. Buna göre, öteleme yüzeylerine paralel olan yüzeylerin temel formları, şekil operatörü matrisi, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve asli eğrilikleri hesaplandı.

3-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA ÖTELEME YÜZEYLERİNE PARALEL OLAN YÜZEYLER

4.1 Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Temel Formları



Şekil 4.1

M öteleme yüzeyinin birim normali $z = \frac{T_\alpha \wedge T_\beta}{\sin(\varphi)}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere M öteleme

yüzeyine paralel olan \bar{M} yüzeyinin denklemi

$$\overline{M}(u, v) = M(u, v) + \lambda z(u, v) \quad (4.1)$$

şeklindedir. M yüzeyinin z birim normalinin u değişkenine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} z_u &= \frac{1}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta)' \\ z_u &= \frac{1}{\sin(\varphi)} \left((T_\alpha \wedge 0) + \left((k_1^\alpha N_\alpha) \wedge T_\beta \right) \right) \\ z_u &= \frac{k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge T_\beta) \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} z_{uu} &= \frac{k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge T_\beta)' \\ z_{uu} &= \frac{k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \left((N_\alpha \wedge 0) + \left((-k_1^\alpha T_\alpha + k_2^\alpha B_\alpha) \wedge T_\beta \right) \right) \\ z_{uu} &= \frac{-(k_1^\alpha)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{k_1^\alpha k_2^\alpha}{\sin(\varphi)} (B_\alpha \wedge T_\beta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

bulunur. z birim normalinin v değişkenine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} z_v &= \frac{1}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta)' \\ z_v &= \frac{1}{\sin(\varphi)} \left((T_\alpha \wedge (k_1^\beta N_\beta)) + (0 \wedge T_\beta) \right) \\ z_v &= \frac{k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta) \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} z_{vv} &= \frac{k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta)' \\ z_{vv} &= \frac{k_1^\beta}{\sin(\varphi)} \left((T_\alpha \wedge (-k_1^\beta T_\beta + k_2^\beta B_\beta)) + (0 \wedge N_\beta) \right) \\ z_{vv} &= \frac{-(k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{k_1^\beta k_2^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge B_\beta) \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur. Ayrıca $z_u = \frac{k_1^\alpha}{\sin(\varphi)}(N_\alpha \wedge T_\beta)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z_{uv} &= \frac{k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \left((N_\alpha \wedge (k_1^\beta N_\beta)) + (0 \wedge T_\beta) \right) \\ z_{uv} &= \frac{k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge N_\beta) \end{aligned} \quad (4.6)$$

bulunur. Benzer şekilde $z_v = \frac{k_1^\beta}{\sin(\varphi)}(T_\alpha \wedge N_\beta)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z_{vu} &= \frac{k_1^\beta}{\sin(\varphi)} \left((T_\alpha \wedge 0) + ((k_1^\alpha N_\alpha) \wedge N_\beta) \right) \\ z_{vu} &= \frac{k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge N_\beta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. $\overline{M}(u, v) = M(u, v) + \lambda z(u, v)$ yüzeyinin u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri alınır, $\overline{M}_u = M_u + \lambda z_u$ olmak üzere

$$\overline{M}_u = T_\alpha + \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge T_\beta) \quad (4.8)$$

olur. $\overline{M}_{uu} = M_{uu} + \lambda z_{uu}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overline{M}_{uu} &= k_1^\alpha N_\alpha + \lambda \left(\frac{-(k_1^\alpha)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{k_1^\alpha k_2^\alpha}{\sin(\varphi)} (B_\alpha \wedge T_\beta) \right) \\ \overline{M}_{uu} &= k_1^\alpha N_\alpha - \frac{\lambda (k_1^\alpha)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{\lambda k_1^\alpha k_2^\alpha}{\sin(\varphi)} (B_\alpha \wedge T_\beta) \end{aligned} \quad (4.9)$$

olur. $\overline{M}_v = M_v + \lambda z_v$ olmak üzere

$$\overline{M}_v = T_\beta + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta) \quad (4.10)$$

olur. $\overline{M}_{vv} = M_{vv} + \lambda z_{vv}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overline{M}_{vv} &= k_1^\beta N_\beta + \lambda \left(\frac{-(k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{k_1^\beta k_2^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge B_\beta) \right) \\ \overline{M}_{vv} &= k_1^\beta N_\beta - \frac{\lambda (k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{\lambda k_1^\beta k_2^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge B_\beta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

olur. $\overline{M}_{uv} = M_{uv} + \lambda z_{uv}$ olmak üzere

$$\overline{M}_{uv} = \frac{\lambda k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge N_\beta) \quad (4.12)$$

olur. $\overline{M}_{vu} = M_{vu} + \lambda z_{vu}$ olmak üzere

$$\overline{M}_{vu} = \frac{\lambda k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge N_\beta) \quad (4.13)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha, T_\beta \rangle &= A_1, \quad \langle T_\alpha, N_\beta \rangle = A_2, \quad \langle T_\alpha, B_\beta \rangle = A_3 \\ \langle N_\alpha, T_\beta \rangle &= A_4, \quad \langle N_\alpha, N_\beta \rangle = A_5, \quad \langle N_\alpha, B_\beta \rangle = A_6 \\ \langle B_\alpha, T_\beta \rangle &= A_7, \quad \langle B_\alpha, N_\beta \rangle = A_8, \quad \langle B_\alpha, B_\beta \rangle = A_9 \end{aligned} \quad (4.14)$$

olsun. Ayrıca, Şekil 2.1'e göre

$$z = \cos(\theta_\alpha) N_\alpha + \sin(\theta_\alpha) B_\alpha \quad (4.15)$$

$$z = \cos(\theta_\beta) N_\beta + \sin(\theta_\beta) B_\beta \quad (4.16)$$

eşitlikleri yazılabilir. (4.16) eşitliğinin her iki tarafı T_α ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha, z \rangle &= \cos(\theta_\beta) \langle T_\alpha, N_\beta \rangle + \sin(\theta_\beta) \langle T_\alpha, B_\beta \rangle = 0 \\ \cos(\theta_\beta) A_2 + \sin(\theta_\beta) A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.15) eşitliğinin her iki tarafı T_β ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle z, T_\beta \rangle &= \cos(\theta_\alpha) \langle N_\alpha, T_\beta \rangle + \sin(\theta_\alpha) \langle B_\alpha, T_\beta \rangle = 0 \\ \cos(\theta_\alpha) A_4 + \sin(\theta_\alpha) A_7 &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

elde edilir. (4.16) eşitliğinin her iki tarafı T_β ile vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} z \wedge T_\beta &= \cos(\theta_\beta) (N_\beta \wedge T_\beta) + \sin(\theta_\beta) (B_\beta \wedge T_\beta) \\ z \wedge T_\beta &= -\cos(\theta_\beta) B_\beta + \sin(\theta_\beta) N_\beta \\ z \wedge T_\beta &= \sin(\theta_\beta) N_\beta - \cos(\theta_\beta) B_\beta \end{aligned} \quad (4.19)$$

olur. (4.15) ve (4.19) eşitlikleri ile verilen vektörler iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle z, z \wedge T_\beta \rangle &= \langle \cos(\theta_\alpha) N_\alpha + \sin(\theta_\alpha) B_\alpha, \sin(\theta_\beta) N_\beta - \cos(\theta_\beta) B_\beta \rangle \\ &= \cos(\theta_\alpha) \sin(\theta_\beta) \langle N_\alpha, N_\beta \rangle - \cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta) \langle N_\alpha, B_\beta \rangle \\ &\quad + \sin(\theta_\alpha) \sin(\theta_\beta) \langle B_\alpha, N_\beta \rangle - \sin(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta) \langle B_\alpha, B_\beta \rangle = 0 \end{aligned}$$

olur. Burada (4.14) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_5 - \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_6 \\ & + \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_8 - \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_9 = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. (4.15) eşitliğinin her iki tarafı T_α ile vektörel çarpılırsa

$$\begin{aligned} z \wedge T_\alpha &= \cos(\theta_\alpha)(N_\alpha \wedge T_\alpha) + \sin(\theta_\alpha)(B_\alpha \wedge T_\alpha) \\ z \wedge T_\alpha &= -\cos(\theta_\alpha)B_\alpha + \sin(\theta_\alpha)N_\alpha \\ z \wedge T_\alpha &= \sin(\theta_\alpha)N_\alpha - \cos(\theta_\alpha)B_\alpha \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur. (4.16) ve (4.21) eşitlikleri ile verilen vektörler iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle z \wedge T_\alpha, z \rangle &= \langle \sin(\theta_\alpha)N_\alpha - \cos(\theta_\alpha)B_\alpha, \cos(\theta_\beta)N_\beta + \sin(\theta_\beta)B_\beta \rangle \\ &= \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\langle N_\alpha, N_\beta \rangle + \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\langle N_\alpha, B_\beta \rangle \\ &\quad - \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\langle B_\alpha, N_\beta \rangle - \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\langle B_\alpha, B_\beta \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.14) ile verilen eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_5 + \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_6 \\ & - \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_8 - \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_9 = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. z birim normali z ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle &= \langle \cos(\theta_\alpha)N_\alpha + \sin(\theta_\alpha)B_\alpha, \cos(\theta_\beta)N_\beta + \sin(\theta_\beta)B_\beta \rangle \\ &= \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\langle N_\alpha, N_\beta \rangle + \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\langle N_\alpha, B_\beta \rangle \\ &\quad + \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\langle B_\alpha, N_\beta \rangle + \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\langle B_\alpha, B_\beta \rangle = 1 \\ & \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_5 + \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_6 \\ & + \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_8 + \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_9 = 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

olur. (4.19) eşitliğinin her iki tarafı T_α ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha, z \wedge T_\beta \rangle &= \sin(\theta_\beta)\langle T_\alpha, N_\beta \rangle - \cos(\theta_\beta)\langle T_\alpha, B_\beta \rangle = -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta_\beta)A_2 - \cos(\theta_\beta)A_3 &= -\sin(\varphi) \end{aligned} \quad (4.24)$$

bulunur. (4.21) eşitliğinin her iki tarafı T_β ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned} \langle z \wedge T_\alpha, T_\beta \rangle &= \sin(\theta_\alpha)\langle N_\alpha, T_\beta \rangle - \cos(\theta_\alpha)\langle B_\alpha, T_\beta \rangle = \sin \varphi \\ \sin(\theta_\alpha)A_4 - \cos(\theta_\alpha)A_7 &= \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur. (4.19) ve (4.21) eşitlikleri ile verilen vektörler iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\langle z \wedge T_\alpha, z \wedge T_\beta \rangle &= \langle \sin(\theta_\alpha)N_\alpha - \cos(\theta_\alpha)B_\alpha, \sin(\theta_\beta)N_\beta - \cos(\theta_\beta)B_\beta \rangle \\
&= \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\langle N_\alpha, N_\beta \rangle - \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\langle N_\alpha, B_\beta \rangle \\
&= -\cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\langle B_\alpha, N_\beta \rangle + \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\langle B_\alpha, B_\beta \rangle = \cos(\varphi) \\
\sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_5 - \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_6 \\
- \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)A_8 + \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)A_9 &= \cos(\varphi)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olur. Ayrıca, $\langle T_\alpha, T_\beta \rangle = \cos(\varphi)$ ve dolayısıyla

$$A_1 = \cos(\varphi) \tag{4.27}$$

olur. (4.17), (4.18), (4.20), (4.22), (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitlikleriyle verilen denklem sistemi çözümlerse

$$\left. \begin{aligned}
A_1 &= \cos(\varphi) \\
A_2 &= -\sin(\theta_\beta)\sin(\varphi) \\
A_3 &= \cos(\theta_\beta)\sin(\varphi) \\
A_4 &= \sin(\theta_\alpha)\sin(\varphi) \\
A_5 &= \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta) + \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\cos(\varphi) \\
A_6 &= \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta) - \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\cos(\varphi) \\
A_7 &= -\cos(\theta_\alpha)\sin(\varphi) \\
A_8 &= \sin(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta) - \cos(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta)\cos(\varphi) \\
A_9 &= \sin(\theta_\alpha)\sin(\theta_\beta) + \cos(\theta_\alpha)\cos(\theta_\beta)\cos(\varphi)
\end{aligned} \right\} \tag{4.28}$$

elde edilir. \bar{M} yüzeyinin birinci temel formu \bar{I} ve birinci temel formunun katsayıları $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ olsun.

$$\bar{E} = \langle \bar{M}_u, \bar{M}_u \rangle = \left\langle T_\alpha + \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)}(N_\alpha \wedge T_\beta), T_\alpha + \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)}(N_\alpha \wedge T_\beta) \right\rangle$$

olmak üzere

$$\bar{E} = 1 + \frac{2\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)}\langle B_\alpha, T_\beta \rangle + \frac{\lambda^2 (k_1^\alpha)^2}{\sin^2(\varphi)}(1 - \langle N_\alpha, T_\beta \rangle^2) \tag{4.29}$$

olur. Buradan

$$\bar{E} = 1 + \frac{2\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)}A_7 + \frac{\lambda^2 (k_1^\alpha)^2}{\sin^2(\varphi)}(1 - (A_4)^2) \tag{4.30}$$

elde edilir. Buradaki, $1 - (A_4)^2$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
1 - (A_4)^2 &= \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) - \sin^2(\theta_\alpha) \sin^2(\varphi) \\
1 - (A_4)^2 &= \sin^2(\varphi)(1 - \sin^2(\theta_\alpha)) + \cos^2(\varphi) \\
1 - (A_4)^2 &= \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta_\alpha) + \cos^2(\varphi)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

bulunur. $1 - (A_4)^2$ ve A_7 değerleri (4.30) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= 1 + \frac{2\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (-\cos(\theta_\alpha) \sin(\varphi)) + \frac{\lambda^2 (k_1^\alpha)^2}{\sin^2(\varphi)} (\sin^2(\varphi) \cos^2(\theta_\alpha) + \cos^2(\varphi)) \\
\bar{E} &= 1 - 2\lambda k_1^\alpha \cos(\theta_\alpha) + \lambda^2 (k_1^\alpha)^2 \cos^2(\theta_\alpha) + \lambda^2 (k_1^\alpha)^2 \cot^2(\varphi)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. Burada, (2.28) ve (2.34) ile verilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\bar{E} = 1 - 2\lambda \kappa_n^\alpha + \lambda^2 (\kappa_n^\alpha)^2 + \lambda^2 (k_1^\alpha)^2 \cot^2(\varphi) \tag{4.33}$$

bulunur.

$$\bar{F} = \langle \overline{M_u}, \overline{M_v} \rangle = \left\langle T_\alpha + \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge T_\beta), T_\beta + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta) \right\rangle$$

olmak üzere

$$\bar{F} = \langle T_\alpha, T_\beta \rangle - \frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin^2(\varphi)} \langle T_\alpha, T_\beta \rangle \langle N_\alpha, N_\beta \rangle \tag{4.34}$$

olur. Buradan

$$\bar{F} = A_1 - \frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin^2(\varphi)} A_1 A_5 \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada A_1 ve A_5 değerleri yerlerine yazılırsa

$$\bar{F} = \cos(\varphi) - \frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin^2(\varphi)} \cos(\varphi) (\cos(\theta_\alpha) \cos(\theta_\beta) + \sin(\theta_\alpha) \sin(\theta_\beta) \cos(\varphi)) \tag{4.36}$$

elde edilir. Burada (2.27), (2.28), (2.33) ve (2.34) ile verilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\bar{F} = \cos(\varphi) - \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta \cot^2(\varphi) \tag{4.37}$$

bulunur.

$$\bar{G} = \langle \overline{M_v}, \overline{M_v} \rangle = \left\langle T_\beta + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta), T_\beta + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta) \right\rangle$$

olmak üzere

$$\bar{G} = 1 - \frac{2\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} \langle T_\alpha, B_\beta \rangle + \frac{\lambda^2 (k_1^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} \left(1 - \langle T_\alpha, N_\beta \rangle^2 \right) \quad (4.38)$$

olur. Buradan

$$\bar{G} = 1 - \frac{2\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} A_3 + \frac{\lambda^2 (k_1^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} \left(1 - (A_2)^2 \right) \quad (4.39)$$

elde edilir. Buradaki, $1 - (A_2)^2$ değeri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} 1 - (A_2)^2 &= \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) - \sin^2(\theta_\beta) \sin^2(\varphi) \\ 1 - (A_2)^2 &= \sin^2(\varphi) (1 - \sin^2(\theta_\beta)) + \cos^2(\varphi) \\ 1 - (A_2)^2 &= \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta_\beta) + \cos^2(\varphi) \end{aligned} \quad (4.40)$$

bulunur. $1 - (A_2)^2$ ve A_3 değerleri (4.39) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{G} &= 1 - \frac{2\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} \cos(\theta_\beta) \sin(\varphi) + \frac{\lambda^2 (k_1^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} \left(\sin^2(\varphi) \cos^2(\theta_\beta) + \cos^2(\varphi) \right) \\ \bar{G} &= 1 - 2\lambda k_1^\beta \cos(\theta_\beta) + \lambda^2 (k_1^\beta)^2 \cos^2(\theta_\beta) + \lambda^2 (k_1^\beta)^2 \cot^2(\varphi) \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Burada (2.27), (2.28), (2.33) ve (2.34) ile verilen eşitlikler yerlerine yazılırsa

$$\bar{G} = 1 - 2\lambda \kappa_n^\beta + \lambda^2 (\kappa_n^\beta)^2 + \lambda^2 (k_1^\beta)^2 \cot^2(\varphi) \quad (4.42)$$

bulunur. O halde \bar{M} yüzeyinin birinci temel formu

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \left(1 - 2\lambda \kappa_n^\alpha + \lambda^2 (\kappa_n^\alpha)^2 + \lambda^2 (k_1^\alpha)^2 \cot^2(\varphi) \right) du^2 \\ &+ 2 \left(\cos(\varphi) - \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta \cot^2(\varphi) \right) dudv \\ &+ \left(1 - 2\lambda \kappa_n^\beta + \lambda^2 (\kappa_n^\beta)^2 + \lambda^2 (k_1^\beta)^2 \cot^2(\varphi) \right) dv^2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

olur. \bar{M} yüzeyinin birim normali \bar{z} olsun. Buna göre

$$\bar{z} = \frac{\bar{M}_u \wedge \bar{M}_v}{\|\bar{M}_u \wedge \bar{M}_v\|}$$

olur.

$$\bar{M}_u \wedge \bar{M}_v = \left(T_\alpha + \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge T_\beta) \right) \wedge \left(T_\beta + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge N_\beta) \right)$$

$$\begin{aligned}\overline{M_u} \wedge \overline{M_v} &= (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge (T_\alpha \wedge N_\beta)) \\ &+ \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} ((N_\alpha \wedge T_\beta) \wedge T_\beta) + \frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin^2(\varphi)} ((N_\alpha \wedge T_\beta) \wedge (T_\alpha \wedge N_\beta))\end{aligned}$$

olup, buradaki $T_\alpha \wedge (T_\alpha \wedge N_\beta)$, $(N_\alpha \wedge T_\beta) \wedge T_\beta$ ve $(N_\alpha \wedge T_\beta) \wedge (T_\alpha \wedge N_\beta)$ değerleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned}T_\alpha \wedge (T_\alpha \wedge N_\beta) &= -(T_\alpha \wedge N_\beta) \wedge T_\alpha = -\langle T_\alpha, T_\alpha \rangle N_\beta + \langle N_\beta, T_\alpha \rangle T_\alpha = -N_\beta + A_2 T_\alpha \\ (N_\alpha \wedge T_\beta) \wedge T_\beta &= \langle N_\alpha, T_\beta \rangle T_\beta - \langle T_\beta, T_\beta \rangle N_\alpha = A_4 T_\beta - N_\alpha \\ (N_\alpha \wedge T_\beta) \wedge (T_\alpha \wedge N_\beta) &= \langle N_\alpha, T_\alpha \wedge N_\beta \rangle T_\beta - \langle T_\beta, T_\alpha \wedge N_\beta \rangle N_\alpha \\ &= -\langle B_\alpha, N_\beta \rangle T_\beta + \langle T_\alpha, B_\beta \rangle N_\alpha = -A_8 T_\beta + A_3 N_\alpha\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre bulunan bu değerler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{M_u} \wedge \overline{M_v} &= (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (-N_\beta + A_2 T_\alpha) \\ &+ \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} (A_4 T_\beta - N_\alpha) + \frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin^2(\varphi)} (-A_8 T_\beta + A_3 N_\alpha) \\ \overline{M_u} \wedge \overline{M_v} &= \frac{\lambda k_1^\beta A_2}{\sin(\varphi)} T_\alpha + \left(\frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta A_3}{\sin^2(\varphi)} - \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \right) N_\alpha \\ &+ \left(\frac{\lambda k_1^\alpha A_4}{\sin(\varphi)} - \frac{\lambda^2 k_1^\alpha k_1^\beta A_8}{\sin^2(\varphi)} \right) T_\beta - \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} N_\beta + (T_\alpha \wedge T_\beta)\end{aligned}$$

olur. (4.28) eşitliği ile verilen değerler yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{M_u} \wedge \overline{M_v} &= -\lambda \kappa_g^\beta T_\alpha + \left(\frac{\lambda^2 k_1^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} - \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \right) N_\alpha \\ &+ \left(\lambda \kappa_g^\alpha - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) T_\beta \\ &- \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} N_\beta + (T_\alpha \wedge T_\beta)\end{aligned} \tag{4.44}$$

bulunur. $\|\overline{M_u} \wedge \overline{M_v}\| = \sqrt{\langle \overline{M_u} \wedge \overline{M_v}, \overline{M_u} \wedge \overline{M_v} \rangle} = \frac{1}{\mu}$ kabul edilirse

$$\frac{1}{\mu} = \left(\begin{aligned} & -2\lambda\kappa_n^\alpha - 2\lambda\kappa_n^\beta - \lambda^2(\kappa_g^\alpha)^2 - \lambda^2(\kappa_g^\beta)^2 - 2\lambda^2\kappa_g^\alpha\kappa_g^\beta \cos(\varphi) \\ & - 2\lambda^3\kappa_n^\alpha(\kappa_g^\beta)^2 \cot^2(\varphi) + 2\lambda^3(\kappa_g^\alpha)^2\kappa_n^\beta + 2\lambda^2\kappa_n^\alpha\kappa_n^\beta + \sin^2(\varphi) \\ & + \frac{\lambda^4(\kappa_g^\alpha)^2(\kappa_n^\beta)^2}{\sin^4(\varphi)} - \frac{2\lambda^4\kappa_n^\alpha\kappa_g^\alpha\kappa_n^\beta\kappa_g^\beta \cot^3(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^4(k_1^\alpha)^2(\kappa_n^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} \\ & - \frac{2\lambda^3(k_1^\alpha)^2\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2(k_1^\alpha)^2}{\sin^2(\varphi)} - \frac{2\lambda^4(\kappa_g^\alpha)^2(\kappa_n^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} - \frac{2\lambda^3\kappa_n^\alpha(\kappa_n^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} \\ & + \frac{2\lambda^2\kappa_n^\alpha\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^4(\kappa_n^\alpha)^2(\kappa_g^\beta)^2 \cot^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2(k_1^\beta)^2}{\sin^2(\varphi)} \\ & + \frac{2\lambda^2\kappa_g^\alpha\kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.45)$$

elde edilir. O halde

$$\bar{z} = \frac{\overline{M_u} \wedge \overline{M_v}}{\|\overline{M_u} \wedge \overline{M_v}\|} = \mu \left(\begin{aligned} & -\lambda\kappa_g^\beta T_\alpha + \left(\frac{\lambda^2 k_1^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} - \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \right) N_\alpha \\ & + \left(\lambda\kappa_g^\alpha - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) T_\beta \\ & - \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} N_\beta + (T_\alpha \wedge T_\beta) \end{aligned} \right) \quad (4.46)$$

yazılır. \overline{M} yüzeyinin ikinci temel formu \overline{II} ve ikinci temel formunun katsayıları $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ olsun.

$$\bar{l} = \langle \bar{z}, \overline{M_{uu}} \rangle = \mu \left(\begin{aligned} & -\lambda\kappa_g^\beta T_\alpha + \left(\frac{\lambda^2 k_1^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} - \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \right) N_\alpha \\ & + \left(\lambda\kappa_g^\alpha - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) T_\beta \\ & - \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} N_\beta + (T_\alpha \wedge T_\beta) \end{aligned} \right),$$

$$\left(\begin{aligned} & k_1^\alpha N_\alpha - \frac{\lambda(k_1^\alpha)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{\lambda k_1^\alpha k_2^\alpha}{\sin(\varphi)} (B_\alpha \wedge T_\beta) \end{aligned} \right)$$

olmak üzere

$$l = \mu \left(\begin{array}{l} \frac{\lambda^2 k_2^\alpha \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta}{\sin^2(\varphi)} - \frac{\lambda \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta (\lambda^2 (k_1^\alpha)^2 + \lambda k_2^\alpha \cot(\varphi) + 1)}{\sin(\varphi)} \\ + \frac{\lambda (k_1^\alpha)^2 (\lambda \kappa_n^\alpha + 2\lambda \kappa_n^\beta - 1)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^2 (k_1^\alpha)^2 k_2^\alpha \cot(\varphi) (\lambda \kappa_n^\beta - 1)}{\sin(\varphi)} \\ - \frac{\lambda^2 (\kappa_g^\alpha)^2 \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} + \lambda (\kappa_g^\alpha)^2 \sin(\varphi) + \lambda \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta (\lambda \kappa_n^\alpha \cot(\varphi) + \lambda k_2^\alpha - \cot(\varphi)) \\ + \kappa_n^\alpha \sin(\varphi) - \lambda (k_1^\alpha)^2 \sin(\varphi) + \lambda k_2^\alpha \kappa_n^\alpha \cos(\varphi) \end{array} \right) \quad (4.47)$$

bulunur.

$$\bar{m} = \langle \bar{z}, \bar{M}_{uv} \rangle = \mu \left(\begin{array}{l} -\lambda \kappa_g^\beta T_\alpha + \left(\frac{\lambda^2 k_1^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} - \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \right) N_\alpha \\ + \left(\lambda \kappa_g^\alpha - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) T_\beta \\ - \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} N_\beta + (T_\alpha \wedge T_\beta) \end{array} \right), \frac{\lambda k_1^\alpha k_1^\beta}{\sin(\varphi)} (N_\alpha \wedge N_\beta)$$

olmak üzere

$$\bar{m} = \mu \left(\begin{array}{l} \frac{\lambda^3 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta \kappa_g^\beta}{\sin^3(\varphi)} - \frac{\lambda^3 \cot(\varphi) ((\kappa_g^\alpha)^2 (\kappa_n^\beta)^2 + (\kappa_n^\alpha)^2 (\kappa_g^\beta)^2)}{\sin^2(\varphi)} \\ - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta (\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^3 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta \kappa_g^\beta \cot^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} \\ + \lambda^2 \kappa_n^\alpha (\kappa_g^\beta)^2 \cot(\varphi) + \lambda^2 (\kappa_g^\alpha)^2 \kappa_n^\beta \cot(\varphi) + \lambda \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta \sin(\varphi) \end{array} \right) \quad (4.48)$$

bulunur. Son olarak

$$\bar{n} = \langle \bar{z}, \bar{M}_{vv} \rangle = \mu \left(\begin{array}{l} -\lambda \kappa_g^\beta T_\alpha + \left(\frac{\lambda^2 k_1^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} - \frac{\lambda k_1^\alpha}{\sin(\varphi)} \right) N_\alpha \\ + \left(\lambda \kappa_g^\alpha - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} \right) T_\beta \\ - \frac{\lambda k_1^\beta}{\sin(\varphi)} N_\beta + (T_\alpha \wedge T_\beta) \\ \left(k_1^\beta N_\beta - \frac{\lambda (k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge T_\beta) + \frac{\lambda k_1^\beta k_2^\beta}{\sin(\varphi)} (T_\alpha \wedge B_\beta) \right) \end{array} \right)$$

olmak üzere

$$\bar{n} = \mu \left(\begin{aligned} & \lambda(\kappa_g^\beta)^2 \sin(\varphi) + (\lambda\kappa_n^\beta - 1) \left(\frac{\lambda\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} + \lambda\kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi) \right) \\ & + (1 - \lambda\kappa_n^\beta) \left(\frac{\lambda^2 k_2^\beta \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 k_2^\beta \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha (k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} \right) \\ & + \lambda^2 k_2^\beta \kappa_g^\beta \left(\frac{\lambda\kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} - \frac{\lambda\kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \kappa_g^\alpha \right) \\ & + \frac{\lambda(k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} (-1 + \kappa_n^\beta + k_2^\beta \cot(\varphi)) + \kappa_n^\beta \sin(\varphi) \\ & - \lambda(k_1^\beta)^2 \sin(\varphi) - \lambda k_2^\beta \kappa_n^\beta \cos(\varphi) \end{aligned} \right) \quad (4.49)$$

bulunur. O halde \bar{M} yüzeyinin ikinci temel formu

$$\begin{aligned} \bar{II} = \mu & \left(\begin{aligned} & - \frac{\lambda^2 k_2^\alpha \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta}{\sin^2(\varphi)} - \frac{\lambda\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta (\lambda^2 (k_1^\alpha)^2 + \lambda k_2^\alpha \cot(\varphi) + 1)}{\sin(\varphi)} \\ & + \frac{\lambda(k_1^\alpha)^2 (\lambda\kappa_n^\alpha + 2\lambda\kappa_n^\beta - 1)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^2 (k_1^\alpha)^2 k_2^\alpha \cot(\varphi) (\lambda\kappa_n^\beta - 1)}{\sin(\varphi)} \\ & - \frac{\lambda^2 (\kappa_g^\alpha)^2 \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} + \lambda(\kappa_g^\alpha)^2 \sin(\varphi) + \lambda\kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta (\lambda\kappa_n^\alpha \cot(\varphi) + \lambda k_2^\alpha - \cot(\varphi)) \\ & + \kappa_n^\alpha \sin(\varphi) - \lambda(k_1^\alpha)^2 \sin(\varphi) + \lambda k_2^\alpha \kappa_n^\alpha \cos(\varphi) \end{aligned} \right) du^2 \\ + 2\mu & \left(\begin{aligned} & - \frac{\lambda^3 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta \kappa_g^\beta}{\sin^3(\varphi)} - \frac{\lambda^3 \cot(\varphi) ((\kappa_g^\alpha)^2 (\kappa_n^\beta)^2 + (\kappa_n^\alpha)^2 (\kappa_g^\beta)^2)}{\sin^2(\varphi)} \\ & - \frac{\lambda^2 \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta (\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^3 \kappa_n^\alpha \kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta \kappa_g^\beta \cot^2(\varphi)}{\sin(\varphi)} \\ & + \lambda^2 \kappa_n^\alpha (\kappa_g^\beta)^2 \cot(\varphi) + \lambda^2 (\kappa_g^\alpha)^2 \kappa_n^\beta \cot(\varphi) + \lambda\kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta \sin(\varphi) \end{aligned} \right) dudv \\ + \mu & \left(\begin{aligned} & \lambda(\kappa_g^\beta)^2 \sin(\varphi) + (\lambda\kappa_n^\beta - 1) \left(\frac{\lambda\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin(\varphi)} + \lambda\kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi) \right) \\ & + (1 - \lambda\kappa_n^\beta) \left(\frac{\lambda^2 k_2^\beta \kappa_g^\alpha \kappa_g^\beta}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2 k_2^\beta \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} + \frac{\lambda^2 \kappa_n^\alpha (k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} \right) \\ & + \lambda^2 k_2^\beta \kappa_g^\beta \left(\frac{\lambda\kappa_g^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} - \frac{\lambda\kappa_n^\alpha \kappa_g^\beta \cot(\varphi)}{\sin(\varphi)} - \kappa_g^\alpha \right) \\ & + \frac{\lambda(k_1^\beta)^2}{\sin(\varphi)} (-1 + \kappa_n^\beta + k_2^\beta \cot(\varphi)) + \kappa_n^\beta \sin(\varphi) \\ & - \lambda(k_1^\beta)^2 \sin(\varphi) - \lambda k_2^\beta \kappa_n^\beta \cos(\varphi) \end{aligned} \right) dv^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir.

4.2 Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Şekil Operatörü Matrisi

\overline{M} yüzeyinin şekil operatörü matrisi, lemma 1.1.8 ve sonuç 2.2 kullanılarak bulunabilir. Buna göre

$$\begin{aligned}\overline{S} &= S \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} & \frac{-\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \\ \frac{-\cos(\varphi)\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & \frac{\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \overline{S} &= S \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\lambda\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} & \frac{-\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \\ \frac{-\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & \frac{\lambda\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ \overline{S} &= S \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} & \frac{\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \\ \frac{\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & 1 - \frac{\lambda\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\rho &= \left(1 - \frac{\lambda\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \right) \left(1 - \frac{\lambda\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \right) - \frac{\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \frac{\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \\ &= 1 - \frac{\lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta)}{\sin^2(\varphi)} + \frac{\lambda^2\kappa_n^\alpha\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} \\ &= \frac{\sin^2(\varphi) - \lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta) + \lambda^2\kappa_n^\alpha\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}\end{aligned}$$

olmak üzere, buradan

$$\overline{S} = S \left(\frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & -\frac{\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \\ -\frac{\lambda\cos(\varphi)\kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & 1 - \frac{\lambda\kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= S \left(\frac{\sin^2(\varphi)}{\sin^2(\varphi) - \lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta) + \lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta} \begin{bmatrix} 1 - \frac{\lambda \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & -\frac{\lambda \cos(\varphi) \kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \\ -\frac{\lambda \cos(\varphi) \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)} & 1 - \frac{\lambda \kappa_n^\alpha}{\sin^2(\varphi)} \end{bmatrix} \right) \\
\bar{S} &= S \left(\frac{1}{\sin^2(\varphi) - \lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta) + \lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta} \begin{bmatrix} \sin^2(\varphi) - \lambda \kappa_n^\beta & -\lambda \cos(\varphi) \kappa_n^\alpha \\ -\lambda \cos(\varphi) \kappa_n^\beta & \sin^2(\varphi) - \lambda \kappa_n^\alpha \end{bmatrix} \right) \\
\bar{S} &= \frac{1}{\sin^2(\varphi) - \lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta) + \lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta} \begin{bmatrix} \kappa_n^\alpha - \lambda \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta & -\kappa_n^\alpha \cos(\varphi) \\ -\kappa_n^\beta \cos(\varphi) & \kappa_n^\beta - \lambda \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta \end{bmatrix} \quad (4.51)
\end{aligned}$$

bulunur.

4.3 Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Gauss Eğriliği ve Ortalama Eğriliği

4.3.1 Gauss eğriliği

\bar{M} yüzeyinin Gauss eğriliği, lemma 1.1.8 ve sonuç 2.2 kullanılarak

$$\bar{K} = \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi) - \lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta) + \lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta} \quad (4.52)$$

şeklinde elde edilir.

4.3.2 Ortalama eğrilik

\bar{M} yüzeyinin ortalama eğriliği, lemma 1.1.8 ve sonuç 2.2 kullanılarak

$$\bar{H} = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta - 2\lambda \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{2\sin^2(\varphi) - 2\lambda(\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta) + 2\lambda^2 \kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta} \quad (4.53)$$

şeklinde elde edilir.

4.4 Öteleme Yüzeylerine Paralel Olan Yüzeylerin Asli Eğrilikleri

\overline{M} yüzeyinin asli eğrilikleri, lemma 1.1.8 ve sonuç 2.4 kullanılarak

$$\overline{k}_1 = \frac{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}} \right)}{1 - \lambda \left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}} \right)} \quad (4.54)$$

ve

$$\overline{k}_2 = \frac{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}} \right)}{1 - \lambda \left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2(\varphi)} \right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2(\varphi)}} \right)} \quad (4.55)$$

şeklinde elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihoğlu, H. H., “Diferensiyel Geometri I. Cilt”, *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 1-167 (2000).
- [2] Hacısalihoğlu, H. H., “Diferensiyel Geometri II. Cilt”, *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 1-143 (2000).
- [3] Hacısalihoğlu, H. H., “Lineer Cebir I. Cilt”, *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 147-165 (2000).
- [4] Gray, A., “Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica 2nd ed.”, *CRC Press*, Washington, 183-780 (1998).
- [5] O’Neill, B., “Elementary Differential Geometry”, *Academic Press*, New York and London, 47-330 (1967).
- [6] Kühnel, W., “Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds 2nd ed.”, Translated by Bruce Hunt, *American Mathematical Society*, United States of America, 73-176 (2006).
- [7] Liu, H. L., “Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces”, *Journal of Geometry*, 64:141-149 (1999).
- [8] Aksoy, Ö., “Öteleme yüzeyleri üzerine”, Yüksek lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 1-69 (2005).
- [9] Verstraelen, L., Walrave, J. and Yaprak, S., “The minimal translation surfaces in Euclidean space”, *Soochow Journal of Mathematics*, 20: 77-82 (1994).
- [10] Yoon, D. W., “On the Gauss map of translation surfaces in minkowski 3-space”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3): 389-398 (2002).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÇETİN, Muhammed
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 13.11.1981 Uşak
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (505) 701 44 17
e-mail : mat.mcetin@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği	2004
Lise	Uşak Anadolu Öğretmen Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2007-2010	Uşak Ulubey Öz Bilgi Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Uşak Üniversitesi Sivaslı M.Y.O.	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri