

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

SÜREKSİZ LİFLERE SAHİP KOMPOZİT MALZEMELERİN BOYUNA
ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİYLE
HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖRKEM KÖSE

HAZİRAN 2011
UŞAK

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

SÜREKSİZ LİFLERE SAHİP KOMPOZİT MALZEMELERİN BOYUNA
ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİYLE
HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÖRKEM KÖSE

UŞAK 2011

Görkem KÖSE tarafından hazırlanan Süreksiz Liflere Sahip Kompozit Malzemelerin Boyuna Elastisite Modüllerinin Sınır Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Halit GÜN

.....

Tez Danışmanı, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ

.....

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Halit GÜN

.....

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yusuf CUNEDİOĞLU

.....

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Niğde Üniversitesi

Tarih: 01/06/2011

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Görkem KÖSE

**SÜREKSİZ LİFLERE SAHİP KOMPOZİT MALZEMELERİN BOYUNA
ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİYLE
HESAPLANMASI**

Görkem KÖSE

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2011

ÖZET

Şimdiye kadar, süreksiz lifli kompozit malzemelerin boyuna elastisite modüllerinin hesaplanması için literatürde analitik, deneysel ile sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler yaygın olarak kullanılmıştır. Bu çalışmada, süreksiz lifli kompozitlerin boyuna elastisite modüllerinin hesaplanması için kuadratik sınır elemanlar yöntemi sunulmuştur.

Sunulan sınır elemanlar formülasyonu süreksiz lifli boron/epoxy kompozit malzemesine uygulanmıştır. Sonuçlar, analitik deneysel ile sonlu elemanlar yöntemi sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sunulan formülasyonun kompozit malzemelerin boyuna elastisite modüllerinin hesaplanmasında etkin olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 625.03.00

Anahtar Kelimeler : Süreksiz lifli kompozit, Boyuna elastisite modülü, Sınır elemanlar yöntemi.

Sayfa Adedi : 33

Tez Yöneticisi :Halit GÜN

**PREDICTION OF LONGITUDINAL ELASTICITY MODULUS OF
DISCONTINUOUS FIBER-REINFORCED COMPOZITS USING BOUNDARY
ELEMENT METHOD**

(M.Sc. Thesis)

Görkem KÖSE

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

August 2011

ABSTRACT

Until now, analitical, experimental and numerical methods such as finite element method are widely used for prediction of longitudinal elasticity modulus of discontinuous fiber-reinforced compozit materials in the literature. In this work, a quatratric boundary element formulation is presented to predict of longitudinal elasticity modulus of aligned discontinuous fiber-reinforced compozits.

The present boundary element formulation is applied to the aligned discontinuous fiber-reinforced boron/epoxy compozit. Results are compaired with analytical, experimental and finite element solutions. It is shown that the present formulation can be effectively used for prediction of longitudinal elasticity modulus of aligned discontinuous-fiber reinforced compozit materials.

Science Code : 625.03.00

Key Words : Aligned discontinuous-fiber compozit, Longitudal elasticity modulus, Boundary Element

Page Number : 33

Adviser : Halit GÜN

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Doç. Dr. Halit GÜN' e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ailem ve niőanlıma, göstermiş olduğu anlayıőtan dolayı müdürüm Robin KAMKE' ye sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. ÇALIŞMANIN KAPSAMI	1
2. SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ	3
2.1 Analitik Formülasyonu	3
2.2 Navier Denklemleri	3
2.3 Temel Çözüm	7
2.4 Sınır İntegral Denklemi	11
2.5 Sayısal İntegrasyon	12
2.5.1 Çözüm bölgesi sınırının elemanlara bölünmesi	13
2.5.2 Sınır integrallerin sayısal integrasyonu	15
2.6 Sınır Koşullarının Göz Önüne Alınması	20
2.7 Sınır Düğüm Noktalarında Gerilmelerin Hesaplanması	21
2.8 Çözüm Bölgesi İçinde Değişkenlerin Hesaplanması	23
2.9 Temas Problemleri İçin Sınır Elemanları Yöntemi Algoritması	23
3. SÜREKSİZ LİFLERE SAHİP KOMPOZİT MALZEMELERİN BOYUNA ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİYLE HESAPLANMASI	26

3.1 Süreksiz Liflere Sahip Kompozit Malzemelerin Boyuna Elastisite Modüllerinin Hesaplanması.....	26
3.2 Elastisite Modülünün Sınır Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması.....	27
4. SONUÇLAR.....	31
KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	33

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1 Lineer denklem takımının oluşturulması.....	14
Şekil 2.2 Yüzey gerileme vektörünün yerel ve global koordinatlardaki bileşenleri.....	22
Şekil 3.1 Karakteristik hacim elemanı.....	29
Şekil 3.2 Sınır elemanlar analiz modelin sınır ve yük koşulları	29
Şekil 3.3 Boron/epoxy için boyuna elastisite modülü.....	30
Şekil 3.4 Lif ve matrix ara yüzeyindeki kayma gerilmelerinin lif boyunca olan dağılımı.....	30

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
D_{kij}	Yer değiştirmeler için üçüncü dereceden tansörel fonksiyonlar
d	Lif çapı
E	Elastisite modülü
E_{f2}	Lifin enine elastisite modülü
E_m	Matris malzemesinin elastisite modülü
E_2	Kompozit malzemenin enine elastisite modülü
f_i	Yük vektörü
G_i	Galarkin vektörü
J	Jacobian
m	Yüzey birim teğet vektörü
n	Yüzey birim normal vektörü
p	Yük noktası
Q	Alan noktası

S_{kij}	Yüzey gerilmeleri için Üçüncü dereceden tansörel fonksiyonlar
s	Kompozitin karakteristik hacim elemanının boyutu
T_{ij}	Yüzey gerilmeleri için tansörel fonksiyonlar
t	Yüzey gerilmesi (gerilme vektörü)
U_{ij}	Yer değiştirmeler için tansörel fonksiyonlar
u_i	Yer değiştirme bileşenleri
ν	Poisson oranı
ν_f	Lifin kompozit içerisindeki hacimsel oranı
ν_m	Matrisin kompozit içerisindeki hacimsel oranı
w_g	Gauss ağırlıklı fonksiyonu
∇^2	Laplace operatörü
δ_{ij}	Kronecker delta
η_{gi}	Gauss koordinatları
η_2	Matris malzeme ile lif deki ortalama gerilme
Γ	İki boyutlu çözüm bölgelerinin sınırları
α	Birim yüzey normal bileşenlerinin tanımladığı açı
ϵ_{ij}	şekil değiştirme bileşenleri

μ	Kayma modülü
ξ	Yerel koordinat değişkeni
π	Pi sayısı
σ_{ij}	Gerilme bileşenleri

Kısaltmalar

Açıklama

SE

Sınır elemanlar

SİE

Sınır integral eşitliği

1. ÇALIŞMANIN KAPSAMI

Günümüzde, bilgisayar bağımlı olan sayısal çözüm yöntemleri olmadan, mühendislik tasarım problemlerinin analizi mümkün olamayacağı iyi bilinmektedir. Katı cisim mekaniğinde kullanılan sayısal yöntemleri, son yıllarda gelişmekte olan ağsız yöntemler dışında, katı cisim üzerinde küçük bir diferansiyel elemanın davranışını oldukça sağlıklı bir şekilde ifade eden matematiksel ifadeler ve denklemler türetmenin mümkün olması ilkesine dayalıdır. Böylesi diferansiyel elemanlar üzerinden çözüm bölgesinin tamamında değişkenlerin (örneğin gerilme analizinde gerilmeler, yer değiştirmeler) değerlerini iyi bir hassasiyetle elde etmek mümkündür. Ancak bu diferansiyel elemanın boyutları küçüldükçe çözümün genelde iyileşmesi beklense de; bu elemanların ne kadar küçük olması gerektiği sorusunun yanıtı yoktur.

Sayısal çözüm yöntemlerinden biri sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntem endüstride oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Dahası mühendisler, bu yöntemin kendilerine sunduğu analiz ve analiz sonuçlarının değişik sunuş seçeneklerinden oldukça mutlu oldukları gözlenmektedir. Ancak son yıllarda, özellikle çözüm bölgesinde değişkenlerin oldukça keskin şekillerde değiştiği mühendislik uygulamalarında (örneğin temas ve kırılma mekaniği problemleri) etkin çözümler üreten Sınır Elemanlar (SE) veya Sınır İntegral Eşitliği (SİE) yöntemi olarak ta bilinen yöntem alternatif bir tasarım aracı olarak belirmektedir. Dahası daha etkin çözümler üretmek için bu iki yöntemin karma formülasyonu yoluna gidilmektedir. Bu yöntemin gerekli gördüğü veri kütüklerinin hazırlanması için gerekli olan zaman ve çaba sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırıldığında oldukça daha azdır.

Elastostatik problemlerin sınır elemanlar formülasyonunu açıklandıktan sonra bu formülasyonun sayısal integrasyon aşamaları tanıtılacaktır. Verilen bir problem için sınır koşullarının tanıtılması ve çözüm matrislerinin elde edilmesi ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Üçüncü bölümde ise Coulumb sürtünme kanununu kullanan sınır elemanlar temas mekaniği formülasyonu kısaca tanıtılacaktır. Farklı malzemelerden oluşan ancak tek bir parça davranışı sergilemesi beklenen elemanların analizi, sürtünme katsayısının sonsuz olması fiziksel kabulüyle mümkün olacaktır. Sınır elemanlar temas formülasyonunu kullanarak çalışmada amaçlanan süreksiz liflere sahip kompozitlerin boyuna elastisite

modülleri hesaplanması yöntemi ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Elde edilen sonuçlar literatür de verilen analitik ve deneye dayalı verilen çözümlerle karşılaştırılacaktır.

2. SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1 Analitik Formülasyonu

Bu çalışmada, sınır elemanlar yönteminin dolaylı ya da yarı-dolaylı formülasyonları mümkün olsa da gerçek fiziksel büyüklüklerin kullanıldığı doğrudan formülasyonu kullanılacaktır.

Sınır elemanlar formülasyonuna, iki boyutlu problemlerde kullanılan yaklaşımlar ifade ederek başlanacaktır. Bilindiği gibi iki boyutlu çözümler, üç boyutlu çözümlerin yaklaşımlarıdır. Formülasyonda sadece xy düzlemini göz önünde tutulacaktır. z - yönünde kalınlık hakkında iki kabul yapılır:

1. Düzlem Gerilme: Kalınlık boyunca gerilmenin ihmal edildiği ince geometrilerde kullanılmaktadır.

$$(\sigma_{zz} = 0)$$

2. Düzlem Şekil Değiştirme: Kalınlık boyunca şekil değiştirmenin ihmal edildiği fakat gerilmenin sıfır olmadığı kalınlığın sonsuz kabul edildiği geometriler için kullanılmaktadır.

$$(\varepsilon_{zz} = 0 \text{ fakat } \sigma_{zz} = \text{sabit})$$

2.2 Navier Denklemleri

Diferansiyel denklemin yer değiştirmeler cinsinden ifade edilmesi için aşağıda belirtilen üç matematiksel ifadeler kullanılmaktadır.

1. Diferansiyel Denge Denklemi
2. Hook Kanunu (Gerilme-Şekil Değiştirme Denklemleri)
3. Şekil Değiştirme-Yer Değiştirme Denklemleri

Gerilmelerle yüklenen bir yapı elemanında ∂x ve ∂y boyutlarında bir küçük diferansiyel alan göz önüne alarak, bu diferansiyel eleman için denge denklemi gerilmeler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedir[1].

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (2.1)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.2)$$

f_x ve f_y kütle kuvvet vektörünün x ve y bileşenleridir.

Şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntısı aşağıdaki ifadelerle verilmektedir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Gerilme-şekil değiştirme bağıntısı (Hook Kanunu) düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme için aşağıdaki ifadelerle verilmektedir[1]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \quad (2.5)$$

Doğrusal homojen izotrop malzemeler için μ kayma modülü, elastisite modülü ve poisson oranı cinsinde aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.6)$$

Denklem 2.5'te düzlem- gerilme koşulu ($\sigma_{zz} = 0$) göz önüne alınırsa Denklem 2.5 aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{1}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \left(\frac{-\nu}{E}\right)\sigma_{xx} + \left(\frac{1}{E}\right)\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{xy} \quad (2.7)$$

Her iki düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme kabullerinin kapsaması için malzeme özellikleri içeren E^* , ν^* ve μ^* ifadelerini kullanarak Denklem 2.5'teki Hook kanunu aşağıdaki ifadeler şeklinde düzenlenebilmektedir[1].

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{1 - (\nu^*)^2}{E^*}\right)\sigma_{xx} + \left[\frac{-\nu^*(1 + \nu^*)}{E^*}\right]\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \left[\frac{-\nu^*(1 + \nu^*)}{E^*}\right]\sigma_{xx} + \left(\frac{1 - (\nu^*)^2}{E^*}\right)\sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu^*} \quad (2.8)$$

$$E^* = E; \quad \nu^* = \nu; \quad \mu^* = \mu \quad (\text{Düzlem şekil değiştirme}) \quad (2.9)$$

$$E^* = \frac{E(1 + 2\nu)}{(1 + \nu)^2}; \quad \nu^* = \frac{\nu}{1 + \nu}; \quad \mu^* = \mu \quad (\text{Düzlem gerilme}) \quad (2.10)$$

Eşitlik 2.8'deki denklemlerde gerilmeler sol tarafa alınarak yeniden düzenlenirse aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir[1]:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \quad (2.11)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.12)$$

Burada δ_{ij} , Kronecker deltasıdır.

Denklem 2.3, Denklem 2.11 de yerine konursa aşağıdaki gerilme-yer değiştirme bağıntısı elde edilmektedir[1]:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

Son olarak yer değiştirmelere ait diferansiyel denklemlere ulaşmak için yukarıdaki denklemleri Eşitlik 2.1 deki denge denklemlerinde yerine koyarsak aşağıdaki matematiksel ifadelere ulaşılmaktadır[1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{-f_x}{\mu} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) &= \frac{-f_y}{\mu}\end{aligned}\quad (2.15)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-f_i}{\mu}\quad (2.16)$$

Yukarıdaki denklemlere Navier denklemleri denir. Bir tamamlayıcı fonksiyon ve bir kısmı integralle özölebilmektedir.

2.3 Temel özüm

Navier denklemleri biharmonik diferansiyel denklemlere dönüştörebilmesi için aşağıda, yer değiştirmeler için tansörel gösterilimle verilen ifade kullanılmaktadır[1].

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_j}{\partial x_i \partial x_j}\quad (2.17)$$

Buradaki G Galarkin vektörüdür. Bu ifade Navier denklemine taşınırsa analitik çözümüm çok daha kolay aranabildiği aşağıdaki biharmonik denklem elde edilmektedir.

$$\nabla^4 G_i = \nabla^2 (\nabla^2 G_i) = \frac{-f_i}{\mu}\quad (2.18)$$

Burada ∇^2 laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

Galarkin vektörü, biharmonik denklemin çözümleri olup aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir[1].

$$G_x = G_y = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (2.20)$$

Bu ifadede $r(p, Q)$ yük noktası p , ile alan noktası, Q , arasındaki uzaklığı ifade eder ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$r(p, Q) = \sqrt{(X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2} \quad (2.21)$$

G_x ve G_y ait ifadeler Denklem 2.17 ye taşınırsa, yer değiştirmelere ait matematiksel ifade tansörel gösterilme ile aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (2.22)$$

Yer değiştirme vektör bileşenlerini aşağıdaki gibi tansörel fonksiyonlarına ayrıştırılabilmektedir:

$$u_i = U_{ij}(p, Q) \quad (2.23)$$

Bu matematiksel ifadede $U_{ij}(p, Q)$ fonksiyonları aşağıdaki matematiksel ifadelerle verilmektedir[1]:

$$U_{xx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$U_{xy}(p, Q) = U_{yx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$U_{yy}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \right] \quad (2.24)$$

Tansörel gösterilim ile:

$$U_{ij}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left[\frac{1}{r(p, Q)}\right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (2.25)$$

Yukarıdaki fonksiyonlara yer değiştirmelerin ana terimleri denir.

Temel çözümde ortaya çıkan yüzey gerilmesi vektörü, yer değiştirme vektörünün diferansiyeli alınıp ve Denklem 2.5 deki Hook kanununda yerine taşınarak, Temel çözümde ortaya çıkan yüzey gerilmesi vektörü aşağıdaki matematiksel ifadesi ile elde edilmektedir[1]:

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] + \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (2.26)$$

Yüzey gerilmesi vektörünün bileşenlerini tansörel gösterilimle aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$t_i = T_{ij}(p, Q)e_j \quad (2.27)$$

$T_{ij}(p, Q)$ fonksiyonlarına yüzey gerilmesi ana terimleri denir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır[1]:

$$T_{xx}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$T_{xy}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right) \right]$$

$$T_{yx}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_y - \frac{\partial r}{\partial x} n_x \right) \right]$$

$$T_{yy}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

Tansörel gösterilim ile

$$T_{ij}(p, Q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] - \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (2.29)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki normal türevi $\frac{\partial r}{\partial n}$ aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (2.30)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki dış normal cinsinden x ve y koordinatlarının türevlerine bağlı olarak x ve y doğrultularındaki birim dış normal bileşenleri n_x ve n_y aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}; \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (2.31)$$

$r(p, Q)$ uzaklığının türevleri aşağıdaki matematiksel ifade ile tanımlanmaktadır:

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p, Q)}$$

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p, Q)} \quad (2.32)$$

2.4 Sınır İntegral Denklemi

Betti etkileşim teoremini kullanarak yer değiştirmeler için sınır entegral eşitliği aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir [1-3]. Bu ifade de kütle kuvvetleri göz önüne alınmamaktadır.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{xx}(p, Q) & T_{xy}(p, Q) \\ T_{yx}(p, Q) & T_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{xx}(p, Q) & u_{xy}(p, Q) \\ u_{yx}(p, Q) & u_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tansörel gösterim ile yukarıdaki sınır integral eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir[1-3]:

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q)t_j(Q)d\Gamma(Q) \quad (2.34)$$

Eşitlik 2.32 sınır integral denklemi iki farklı problem arasında bağlantı kurar: Birincisi bir nokta kuvvetine (U_{ij} ve T_{ij} ana terimleri) ait temel çözümdür ve ikincisi ise çözmeye çalıştığımız problemdir (bilinmeyen değişkenler u_j ve t_j).

p 'deki yer değiştirmelere ait sınır integral denkleminin diferansiyelini alıp ve Eşitlik 2.5 deki Hook Kanunu denkleminde yerine taşınırsa, bir p noktasındaki gerilmeler için benzer sınır integral denklemi aşağıdaki matematiksel ifade ile edilmektedir[1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(p) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial T_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right] \right\} u_k(Q) d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} \right. \\ \left. + \mu \left[\frac{\partial U_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right] \right\} t_k(Q) d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Yukarıdaki denklem, üçüncü mertebeden yeni ana terimler S_{kij} ve D_{kij} cinsinden aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir.

$$\sigma_{ij}(p) + \int_{\Gamma} S_{kij}(p, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} D_{kij}(p, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.36)$$

Üçüncü mertebeden tansörel büyüklükler S_{kij} ve D_{kij} aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır[1-3]:

$$D_{kij}(p, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r}\right) \left[(1-2\nu) \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (2.37)$$

$$S_{kij}(p, Q) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right) n_i \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu) \delta_{jk} \right] + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right) n_j \left[2\nu \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2\nu) \delta_{ik} \right] + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right) n_k \left[2(1-2\nu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - (1-4\nu) \delta_{ij} \right] + \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial n}\right) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + \nu \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \quad (2.38)$$

2.5 Sayısal İntegrasyon

Sınır integral eşitliğini sayısal integrasyon için, çözüm bölgesinin sınırları sınır elemanlarına bölünür ve her bir eleman düğüm noktaları ile tanımlanır. Çözüm bölgesinin sınırları üzerinde N adet düğüm noktası olduğu kabul edilsin. Her bir düğümde dört adet değişken u_x, u_y, t_x, t_y olacağından çözüm bölgesinde toplam $4N$ adet değişken olacaktır. Herhangi bir problemin bir tek çözümü olması için her bir düğüm noktası üzerinde değişkenlerin yarısı verilmiş olmalıdır. Örneğin bir düğüm noktasında hiçbir değer verilmemişse o düğüm noktasındaki her iki yüzeyin gerilmesiz olduğu kabul edilecektir.

$2N$ adet bilinmeyen varsa problemi çözebilmek için $2N$ adet denkleme ihtiyaç duyulacaktır. Bir kuvvet (ya da yüzey gerilmesi) birinci düğüm olduğu kabul edilirse, temel çözümü kullanarak birinci düğüm noktasından N inci düğüm noktasına kadar her bir düğümdeki yer değiştirmeleri ve yüzey gerilmelerini hesaplanabilecektir. Bu bize lineer denklemlerin birinci takımını verir (çözüm matrisin 1. ve 2. satırları). Lineer denklemlerin 2. takımını oluşturmak için (matrisin 3. ve 4. satırları) kuvveti ikinci düğüm noktasında olduğunu kabul ederek ve tekrar temel çözümün kullanarak ederek düğüm noktalarındaki bütün değişkenleri hesaplanır. Bu işlem, kuvvet N inci düğüm noktasına yerleştirilene kadar yani son denklem takımını verene kadar tekrar edilir. Bu da tek çözüm veren $2N$ bilinmeyenli $2N$ boyutlarındaki çözüm matrislerini getirecektir. Çözüm aşamasına ulaşmak için yukarıda özetlenen işlem örnek olarak Şekil 2.1 gösterilmiştir.

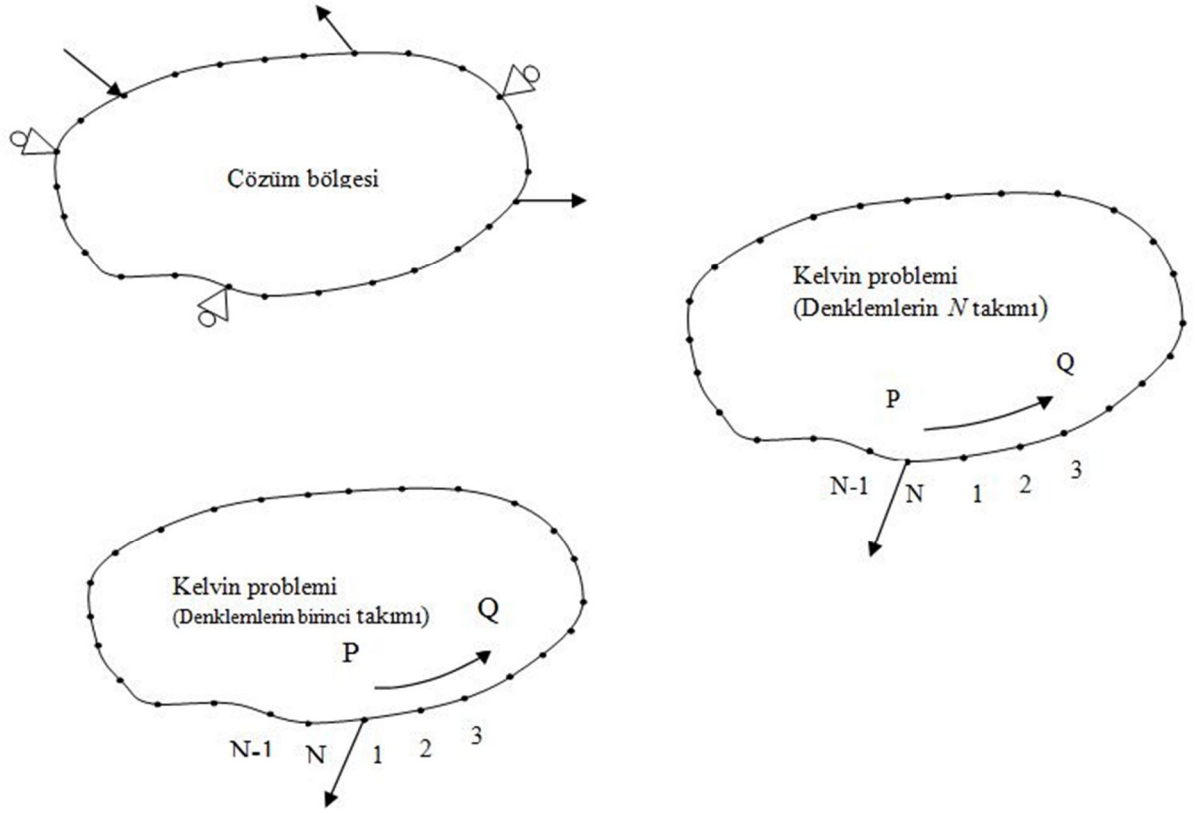
2.5.1 Çözüm Bölgesi Sınırının Elemanlara Bölünmesi

Çözüm bölgesinin sınırı birbirleri ile bağlanacak şekilde elemanlara bölünmelidir. Her bir eleman üzerinden geometrinin değişimi ve değişkenler (yer değiştirmeler ve yüzey gerilmeleri) tanımlanmalıdır. Bu değişimler sabit, lineer, kuadratik, kübik ya da yüksek mertebeden olabilmektedir. Ayrıca geometrinin değişimi değişkenlerin değişiminden farklı olabilmektedir. İzoparametrik elemanlar, hem geometri ve hem de bilinmeyen değişkenler için aynı mertebeyi kullanan elemanlardır.

Kuadratik elemanlar, orta noktasıyla her iki ucunda düğüm noktaları olan elemanlardır. Yerel değişken ξ , merkezi orta nokta düğümünde olan ve son düğüm noktalarında -1 ve $+1$ değerlerini alır. Buna göre, bir elemanın geometrisi üç düğüm noktalarının koordinatları üzerinden aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir:

$$x(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)x_c = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3$$

$$y(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)y_c = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 + N_3(\xi)y_3 \quad (2.39)$$



Şekil 2.1 Lineer denklem takımının oluşturulması

Elemanlar izoparametrik olduğundan, aynı şekil fonksiyonları çözüm değişkenleri için kullanılabilir:

$$u_i(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(u_i)_c = N_1(\xi)(u_i)_1 + N_2(\xi)(u_i)_2 + N_3(\xi)(u_i)_3$$

$$t_i(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(t_i)_c = N_1(\xi)(t_i)_1 + N_2(\xi)(t_i)_2 + N_3(\xi)(t_i)_3 \quad (2.40)$$

2.5.2 Sınır İntegrallerin Sayısal İntegrasyonu

Çözüm bölgesi sınır elemanlarla tanımlandıktan sonra, yerel koordinatlar ξ kullanarak her bir sınır eleman üzerinden integrasyon gerçekleştirilmektedir. Bunun için gerekli olan ve aşağıda matematiksel ifade ile verilen Jacobian hesaplanmalıdır.

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (2.41)$$

Birim dış normalin bileşenlerinin hesaplanması için gerekli olan birim teğetsel vektör m aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir:

$$m = \frac{m_x}{|m|} e_x + \frac{m_y}{|m|} e_y \quad (2.42)$$

m vektörünün sayısal değeri aşağıdaki matematiksel ifade üzerinden hesaplanmaktadır.

$$|m| = \sqrt{(m_x)^2 + (m_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (2.43)$$

Buna göre birim teğetsel vektörün bileşenleri ise aşağıdaki matematiksel ifadelerle verilmektedir.

$$m_x = \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]$$
$$m_y = \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \quad (2.44)$$

z -yönünde birim vektör göz önüne alınırsa, e_z (xy -düzlemine dik). Birim normal vektör, n , m ve e_z vektörlerinin vektörel çarpımına eşit olacaktır:

$$\begin{aligned}
n = m \times e_z &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] & \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] e_x - \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] e_y
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Buna göre, birim uzunluk için birim dış normalinin bileşenleri aşağıdaki matematiksel ifadelerle verilmektedir.

$$\begin{aligned}
n_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \\
n_y &= -\frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

ξ cinsinden $x(\xi)$ ve $y(\xi)$ koordinatlarının diferansiyelleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} x_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} x_3 \\
\frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} y_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} y_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} y_3
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Buna göre Denklem 2.33 ile verilen sınır integral denklemi yerel koordinat ξ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir[1-3]:

$$\begin{aligned}
C_{ij}(P)u_i(P) + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 u_j(Q) \int_{-1}^{+1} T_{ij}(P, Q) N_c(\xi) J(\xi) d\xi \\
= \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 t_j(Q) \int_{-1}^{+1} U_{ij}(P, Q) N_c(\xi) J(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Bu ifadelerde M elemanların toplam sayısıdır. Yukarıdaki denklemlerdeki integraller, $[A]$ ve $[B]$ gibi yeni fonksiyonlarla ifade edilirse sınır integral eşitliği aşağıda gibi ifade edilebilecektir[1]:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} \\
& + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\
& = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Sırası ile her bir düğüm noktasını göz önüne alarak integrasyon gerçekleştirirse aşağıdaki gibi lineer denklem takımı elde edilmektedir.

$$[A][U] = [B][t] \tag{2.50}$$

$[A]$ ve $[B]$ matrisleri sırasıyla T_{ij} ve U_{ij} ana terimlerinin integrallerini içermektedir. $[A]$ ve $[B]$ matrisleri aşağıdaki gibi daha açık şekilde ifadelerle verilecektir[1].

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & [A_{13}] & [A_{14}] & \dots \\ [A_{21}] & [A_{22}] & [A_{23}] & [A_{24}] & \dots \\ [A_{31}] & [A_{32}] & [A_{33}] & [A_{34}] & \dots \\ [A_{41}] & [A_{42}] & [A_{43}] & [A_{44}] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \\ [u_4] \\ \dots \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & [B_{13}] & [B_{14}] & \dots \\ [B_{21}] & [B_{22}] & [B_{23}] & [B_{24}] & \dots \\ [B_{31}] & [B_{32}] & [B_{33}] & [B_{34}] & \dots \\ [B_{41}] & [B_{42}] & [B_{43}] & [B_{44}] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t_1] \\ [t_2] \\ [t_3] \\ [t_4] \\ \dots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Bu ifadelerdeki $[A]$ ve $[B]$ alt -matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$[A]_{ij} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}; \quad [B]_{ij} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Bu ifadelerde $[u]$ ve $[t]$ vektörleri x ve y yönlerindeki sırası ile yer değiştirmeleri ve yüzey gerilmelerini (tractions) ifade etmektedir.

$$[u]_i = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_i ; \quad [t]_i = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}_i \quad (2.53)$$

Daha önce bahsedildiği gibi temel çözüm tekildir. Bu tekilliğin anlamı $\eta \rightarrow 0$ iken sınır integral eşitliğindeki matematiksel ifadelerin $\ln(1/\eta)$ ya da $1/\eta$ mertebesinden terimler içermesidir. Matematiksel terimler P ve Q arasındaki mesafeye bağlı olduğundan, P ve Q 'nun çözüm bölgesindeki konumlarına göre karşılaşılacak üç integrasyon durumu incelenecektir:

i) P ve Q farklı elemanlarda ise: Standart Gauss integrasyon yöntemi u_{ij} ve T_{ij} ana terimlerine kolaylıkla uygulanabilir çünkü ana terimler bu durumda tekil değildirler. Gauss integrasyon yöntemi aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) w_g \quad (2.54)$$

G , Gauss integrasyon noktalarının toplam sayısıdır (genellikle dört) ve ξ_g , ise ağırlıklı fonksiyon w_g ile ifade edilen Gauss koordinatıdır.

ii) P ve Q aynı elemanda fakat ($P = Q$) ise: Bu durumda ana terimlerin tekilliğinden dolayı standart Gauss integrasyon yöntemi kullanılamaz. Öncelikle u_{ij} ana terimini göz önüne alındığında Denklem 2.23 de P ve Q 'nun çakıştığı görülür. Bu integral formu özel logaritmik Gauss integrasyon yöntemi kullanılarak doğru hesaplanabilmektedir. Bunun için aşağıda matematiksel ifade ile verilen logaritmik Gauss integrasyon yöntemi uygulanabilmektedir[1].

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{gi=1}^{G_i} f(\eta_{gi}) w_{gi} \quad (2.55)$$

Bu matematiksel ifadede G_i , logaritmik Gauss integrasyon noktalarının (genellikle dört) toplam sayısıdır ve η_{gi} , ise ağırlıklı fonksiyon w_{gi} ile ifade edilen Gauss koordinatıdır. İntegrasyon işleminin 0'dan 1'e kadar olan integrasyon sınırlarında gerçekleşmesi için bir lineer dönüşümle aşağıdaki gibi yapılabilmektedir[1]:

- 1) Eğer P elemanın birinci düğümü ise, $\eta = 0.5(1 + \xi)$
- 2) Eğer P elemanın ikinci düğümü ise eleman iki alt elemana bölünür:
 $\eta = -\xi$ ($-1 < \xi < 0$ için) ve $\eta = \xi$ ($0 < \xi < 1$ için)
- 3) Eğer P elemanın üçüncü düğümü ise, $\eta = 0.5(1 - \xi)$

P , Q 'ya yaklaşırken U_{ij} ana terimi yakından incelendiğinde iki ayrı parçaya ayrılabilceği görülecektir. Bir logaritmik parça ve bir logaritmik olmayan parça olarak ayrıştırılabilmektedir. Bundan dolayı sadece logaritmik parça Denklem 2.56'daki integrasyon yöntemi ile integre edilebilmektedir. Logaritmik olmayan parça ise standart Gauss integrasyon yöntemi ile kullanılarak integre edilebilmektedir. Ana terimin tekil ve tekil olmayan parçalara bölerek integrasyonun gerçekleştirilmesi biraz daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir.

T_{ij} ana terimini ele aldığımızda, $\eta \rightarrow 0$ iken $1/\eta$ mertebesinden terimler olduğu görülür. Çok sayıda integrasyon noktası kullanılsa da artık sağlıklı integrasyon gerçekleşmeyecektir. T_{ij} ana terimini katı cisim hareketi yaklaşımı integrasyon sorunu aşılabilir[1]. Bu ise bize yer değiştirmeler sabit olduğundan yer değiştirmelerin türevleri olan T_{ij} ilgili terimlerini sıfır yapar ve aşağıda verilen matematiksel ifadeyi getirecektir[1].

$$[A][u_c] = [B][0] = 0 \quad (2.56)$$

Burada u_c , herhangi bir yönde keyfi sabit yer değiştirmedir. Bu ifadeye göre $[A]$ 'nın herhangi bir satırındaki bütün katsayıların toplamı sıfır olmalıdır. Bundan dolayı $[A]$ 'nın diyagonal terimleri, diyagonal olmayan terimlerin toplamı olacak şekilde hesaplanmış olur.

Bu ise:

$$[A]_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [A]_{ij} ; \quad i = 1,2,3, \dots, N \text{ için} \quad (2.57)$$

Şeklindeki matematiksel ifadeyle verilecektir[1]. Bu ifade de i ve j sırasıyla satır ve sütun ifade etmektedir. N ise düğümlerin toplam sayısıdır.

2.6 Sınır Koşullarının Göz Önüne Alınması

Şimdiye kadar $[A]$ ve $[B]$ matrislerinin bütün katsayılarını hesaplanmıştır. Fakat sınır koşulları tanımlanmadığından çözümü aranan bir problem yok demektir. Tipik bir elastostatik problemde üç tip sınır koşulu mümkündür:

- 1) Sınır üzerinde tanımlanmış yer değiştirmeler
- 2) Sınır üzerinde tanımlanmış yüzey gerilmesi (ya da gerilme)
- 3) Yüzey gerilmesi ve yer değiştirme arasındaki lineer ilişki (örneğin çözüm bölgesine bağlanmış bir yay)

Lineer denklemleri çözebilmek için, $[A]$ ve $[B]$ matrisleri, bütün bilinen değişkenler sağ tarafa ve bütün bilinmeyen değişkenler sol tarafta olacak şekilde düzenlenmesi gerekecektir. Düzenlenirse aşağıdaki lineer denklemler sistemine ulaşılabilecektir:

$$[A^*][x] = [B^*][y] \quad (2.58)$$

$[x]$ bütün bilinmeyen değişkenleri, $[y]$ 'de bütün bilinen değişkenleri içerir. $[A^*]$ ve $[B^*]$ matrisleri sırasıyla $[A]$ ve $[B]$ 'nin sınır koşullarına göre düzenlenmiş formlarıdır. $[y]$ bilinenleri içeren vektör olduğundan lineer denklemler çözüm aşaması olan aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir:

$$[A^*][x] = [C] \quad (2.59)$$

Çözüm matrisi $[A^*]$, üçüncü aşamadan sonra simetrik değildir ve sıfır olmayan katsayılar içerir. Gauss eliminasyon yöntemiyle çözüme gidilecektir.

2.7 Sınır Dügüm Noktalarında Gerilmelerin Hesaplanması

Sınır gerilmelerinin hesaplanmasında iki ayrı yolla hesaplanabilmektedir. Birincisi gerilmeler için verilen sınır integral eşitliği olan Denklem 2.35; ikincisi ise sınır elemanlar üzerinden şekil fonksiyonlarını kullanarak hesaplanan yer değıştirmeler ve yüzey gerilmeler üzerinden gerilmeler hesaplanır. Denklem 2.43 de, x ve y doğrultularında m_x ve m_y bileşenleri olan birim teğetsel vektör tanımlanmıştı. Teğetsel ve normal yerel doğrultular 1 ve 2 olarak etiketlenirse, yerel teğetsel yer değıştirme vektörü u_1 kartezyen yer değıştirmeler cinsinden aşağıdaki matematiksel ifade ile verilebilecektir:

$$u_1(\xi) = u_x(\xi)m_x + u_y(\xi)m_y \quad (2.60)$$

2.40 denklemindeki şekil fonksiyonları kullanıldığında yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir:

$$u_1(\xi) = \left[\sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(u_x)_c \right] m_x + \left[\sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(u_y)_c \right] m_y \quad (2.61)$$

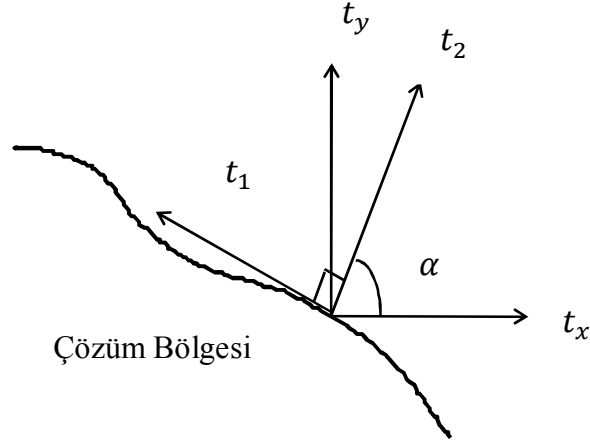
Teğetsel doğrultudaki şekil değıştirme ε_{11} 'i elde etmek için yukarıda ifadenin teğetsel doğrultuda türevi alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir:

$$\varepsilon_{11}(\xi) = \frac{1}{J(\xi)} \left\{ \left[\sum_{c=1}^3 \frac{\partial N_c(\xi)}{\partial \xi} (u_x)_c \right] m_x + \left[\sum_{c=1}^3 \frac{\partial N_c(\xi)}{\partial \xi} (u_y)_c \right] m_y \right\} \quad (2.62)$$

Yüzey gerilmesi vektörünün yerel bileşenleri t_1 ve t_2 , t_2 Şekil 2.2'de gösterildiği gibi normal ve teğetsel bileşenlerle ifade edilebilecektir. Eğer α , yüzey normali ile global yüzey gerilmeleri arasındaki açı ise, lokal yüzey gerilmeleri kartezyen global yüzey gerilmeleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilecektir:

$$t_1 = -t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha$$

$$t_2 = t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \quad (2.63)$$



Şekil 2.2 Yüzey gerileme vektörünün yerel ve global koordinatlardaki bileşenleri

1 ve 2 yerel yönlerindeki gerilmeleri elde etmek için, Eşitlik 2.5'deki Hook Kanunu denklemi aşağıdaki gibi kullanılabilir[1]:

$$\sigma_{11} = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \varepsilon_{11} + \left(\frac{\nu}{1-\nu^2} \right) t_2$$

$$\sigma_{22} = t_2$$

$$\sigma_{12} = t_1 \quad (2.64)$$

Yukarıdaki gerilme ifadelerinde düzlem şekil değiştirme koşulları kullanılmıştır. Yerel gerilmeleri global gerilmelere dönüştürmek için aşağıdaki dönüşüm matrisi kullanılmaktadır:

$$\begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Teğetsel doğrultunun, 1. kosinüs doğrultmanları= $(-sin\alpha); (cosa)$

Normal doğrultunun, 2. kosinüs doğrultmanları = $(cosa); (sin\alpha)$ (2.66)

Buna göre Global gerilmeler Denklem 2.66 kullanarak aşağıdaki ifade ile hesaplanabilecektir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

α açısı, n_x ve n_y birim normal bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{n_y}{n_x}\right) \quad (2.68)$$

2.8 Çözüm Bölgesi İçinde Değişkenlerin Hesaplanması

Şimdiye kadar sözü edilen çözüm aşamaları gerçekleşirse çözüm bölgesinin sınır düğüm noktalarında yer değiştirmeler, yüzey gerilmeleri, şekil değiştirmeler ve gerilmeler hesaplanmış olacaktır. Çözüm bölgesi içinde istenilen herhangi bir noktada gerilemeler ise gerilemeler için verilen sınır integral eşitliği sorunsuz bir şekilde kullanılabilir. Çünkü çözüm bölgesinde integrasyon gerçekleşirken yük P ve alan Q noktaları birbirleri ile hiç karşılaşmayacaktır.

2.9 Temas Problemleri İçin Sınır Elemanları Yöntemi Algoritması

Temasın olmadığı mühendislik uygulamaları yok gibidir. Bu nedenle de temas problemleri mühendislik uygulamalarında önemli bir yer tutar. Genellikle temas alanının önceden bilinmemesi ve sürtünme olası durumunda davranışın uygulanan yüke bağlı olmasından dolayı temas problemlerinin sayısal analizi özel bir ilgiyi gerektirir. Bu tür problemlerin doğru çözümü iterasyona dayalı sayısal algoritmaları gerektirmektedir. Aşağıda belirtilen nedenlerden dolayı temas problemlerinin analizi için Sınır Elemanlar yöntemi Sonlu Elemanlar yönteminden çok daha uygun bir tasarlama aracı olarak karşımıza çıkmaktadır.

- i) Çözüm matrisleri çözüm bölgesinin sınırları üzerinden elde edildiğinden temas gerilmeleri daha hassas elde edilebilmektedir.
- ii) Temas basıncının hesaplanmasında gerekli olan yüzey gerilmeleri, yer değıştirmelerle aynı hassaslıkta hesaplanabilmektedir.
- iii) Sonlu Elemanlar yönteminin aksine temas koşulları ana değışkenler üzerinden doğrudan çözüm matrisine aktarılmaktadır.
- iv) Temas alanının önceden bilinmediğı problemler için ilk analiz ağının bir kaç kez gözden geçirilmesini gerekecektir; ancak analiz ağının yenilenmesi Sınır Elemanlar yönteminde sonlu elemanlarla karşılaştırıldığında çok daha kolaydır.

Temasın uygulanan yüke bağılı olarak temas alanı doğrusal olarak değışmediğinden temas da olan cisimler doğrusal malzeme davranışı gösterse de temas problemleri doğrusal olmayan problemlerdir. Uyumsuz geometriye sahip cisimlerin temasında veya sürtünme olması durumunda davranışın uygulanan yükü bağılı olmasından dolayı temas alanı önceden bilinemez, sadece tahmin edilir. Bu nedenle, temas problemlerinin doğru çözümü iterasyona dayalı sayısal algoritmaları gerektirmektedir. Doğru temas alanının hesaplanması için kullanılan sınır elemanlar algoritması iterasyon süresince aşağıda verilen kontrolleri yapmaktadır[1].

Temas bitiminde deformasyonunun uygun olup olmadığı kontrol edilir. Örneğin cismin diğeri cismin içine geçmesi sağlıksız bir deformasyon şeklidir. Böyle bir deformasyon, verilen yük için seçilen temas alanının küçük seçildiğini anlatır. Bu nedenle de bir sonraki iterasyona geçilirken bu sağlıksız deformasyonun görüldüğü elemanlar temasa sokulur.

İterasyon sürecinde, temasta olan elemanlarda çekme gerilmesinin ortaya çıkıp çıkmadığı kontrol edilir. Çekme gerilmesinin varlığı ise seçilen temas alanının büyük seçildiğini anlatır. Bu nedenle de çekme gerilmesinin görüldüğü elemanlar temastan çıkartılarak bir sonraki iterasyona geçilir.

Sürtünme varsa, teğetsel yüzey gerilmeleri ile normal yüzey gerilmeleri arasındaki oranın statik sürtünme katsayısını aşp aşmadığına bakılır. Eğer aşyorsa, ilgili elemanların teğetsel yüzey gerilmelerine Coulomb'un sürtünmeli kayma koşulu uygulanarak

kaymalarına izin verilerek bir sonraki iterasyona geçilir. Kayma yönünün belirlenmesi için kaymalarına izin veren iterasyonun bir önceki adımında bu elemanların yapışma konumlarında oldukları düşünülür.

Doğru temas alanı elde edilinceye kadar bu iterasyonlar yülütülür. Kuşkusuz bilgisayar programı, yukarıda belirtilen iterasyonları sağlıklı bir şekilde yürütebilmesi için tahmin edilen temas alanı önemlidir. Bu da bir mühendislik birikimi gerektirir. Ancak uygulamada karşılaşılan karmaşık geometriye sahip cisimlerin temas problemlerinin analizinde birkaç analiz ağının hazırlanmasını gerektirecektir.

Farklı malzemelerden oluşan ancak tek bir parça davranışı göstermesi beklenen elemanların sayısal yöntem analizi için, sürtünme katsayısının sonsuz olması fiziksel kabulüyle mümkün olacaktır.

3. KESİK LİFLERE SAHİP KOMPOZİT MALZEMELERİN BOYUNA ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN HESAPLANMASI

3.1 Süreksiz Liflere Sahip Kompozit Malzemelerin Boyuna Elastisite Modüllerinin Hesaplanması

Kompozit malzemelerde, Lif ve matrix malzemelerin kompozit içinde hacımsal yüzdeleri tanımlanırken ilgili kompozitin birim hacmi kullanılmaktadır. Kompozitin bu birim hacmine karakteristik hacim elemanı adı verilmektedir. Süreksiz liflere sahip Kompozitlerin mekanik davranışları incelemesinde şekil 2.1 de görüldüğü gibi iki karakteristik hacim elemanları kullanılmıştır.

Lif de oluşan gerilmelerle matrix ile lif yüzeyleri arasında oluşan kayma gerilmelerinin hesaplanmasında iki yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlar, şekil de görüldüğü gibi, matrix malzemesinin rijit plastik davrandığının kabul edildiği Kelly ile Tyson[4] ve Matrix malzemesinin doğrusal elastik davrandığının kabul edildiği Cox[5] yaklaşımlarıdır. Her iki yaklaşımda liflerin doğrusal elastik davrandığını ve liflerin uç kısmında matrix malzemesinin olmadığı kompozit karakteristik hacim elemanını kullanılmaktadır. Kelly-Tyson modeli Cox[5] modelinde daha basit bir modeldir, çünkü lif ile matrix ara yüzeyleri arasındaki kayma gerilmesi her noktada aynı olup matrix malzemesinin akma kayma gerilmesine eşit olduğu kabul edilmektedir.

Kelly-Tyson, Cox ve geliştirilmiş Cox[6] modelleriyle süreksiz liflere sahip kompozit malzemelerin boyuna elastisite modülü hesaplanabilmektedir. Cox modelinde, lifteki eksensel yük değişim hızının lif eksenine üzerindeki konumunun doğrusal bir fonksiyonunu olduğunu ve lif ile matrix malzemelerinin ara yüzeylerindeki kayma gerilmesinin ise her noktada matrix ve lifin eksensel deformasyonlarının farkıyla orantılı olduğunu kabul etmektedir. Bu modeller, yük transferi, efektif lif boyu ve elastisite modüllerinin hesaplanmasında iyi bir yaklaşım getirmelerine rağmen, bu modellerdeki gerilme dağılımları istenilen hassasiyette hesaplanamamaktadır. Örneğin, sonlu elemanlar analizi[7,8] ve deneysel fotoelastisite sonuçları[6,9,10] göstermiştir ki; Lif ve matrix malzemelerinin ara yüzeylerindeki kayma gerilmeleri değerleriyle lifin uç noktalarındaki kayma gerilmeleri değerleri Kelly-Tyson modelleriyle elde edilen kayma gerilmeleri değerlerine göre çok daha yüksek değerlerdedir.

Hwang ile Gibson[11] Cox model de kullanılan RVE' nin matrix malzemesiyle sonlandırılması durumundaki etkileri, geliştirilmiş Cox model ile sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Geliştirilmiş Cox modülü aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir[11]

$$\frac{1}{E_1} = \frac{L/(L+e)}{E_{C1}} + \frac{E/(L+e)}{E_m} \quad (3.1)$$

Bu ifadede E_1 geliştirilmiş Cox boyuna modülü, E_m matrix malzemesinin elastisite modülü, E_{C1} lif malzemesinin elastisite modülü L Cox modelinin boyu e geliştirilmiş Cox modeldeki lif den sonraki matrix malzemesi uzunluğudur.

3.2. Elastisite modülünün sınır elemanlar yöntemiyle hesaplanması

Süreksiz liflere sahip kompozit malzemesinin karakteristik hacim elemanı şekil 3.1. de gösterilmiştir. Düzlem şekil değiştirme kabulü altındaki sınır elemanlar analiz modelinin sınır ve yük koşulları ise şekil 3.2. de verilmiştir. 90 ile 100 arasında değişen eleman sayılarında değişik sınır elemanlar analiz modelleri seçilerek eleman sayılarının sonuçlar üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Bu eleman sayılarındaki analiz modellerinin ürettiği sonuçlar arasında önemli bir etkisi olmadığı gözlenmiştir. Şekil 3.2 de görüleceği gibi analiz modelinde yüklemenin x doğrultusunda yer değiştirmeler cinsinden \bar{u} yapılmaktadır. Yüzeylerdeki yükleme doğrultusundaki gerilmeler σ_m sınır elemanlar yönteminin verdiği analiz kütüğünden alınarak, bu yüzeye ait ortalama gerilme değeri;

$$\bar{\sigma}_m = \frac{1}{b} \int_0^b \sigma_m dy \quad (3.2)$$

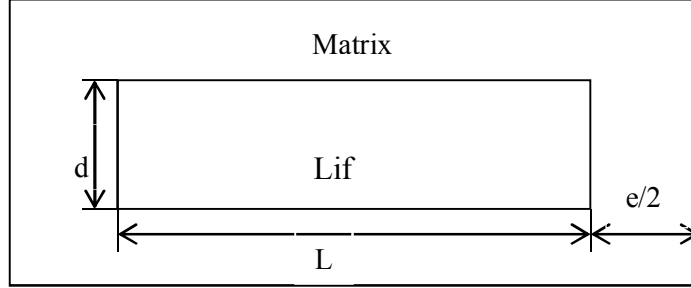
ifadesi üzerinden hesaplandıktan sonra kompozit malzemenin boyuna elastisite modülü

$$E_1 = \frac{\bar{\sigma}_m}{\varepsilon_x} = \frac{\bar{\sigma}_m}{\bar{u}/a} \quad (3.3)$$

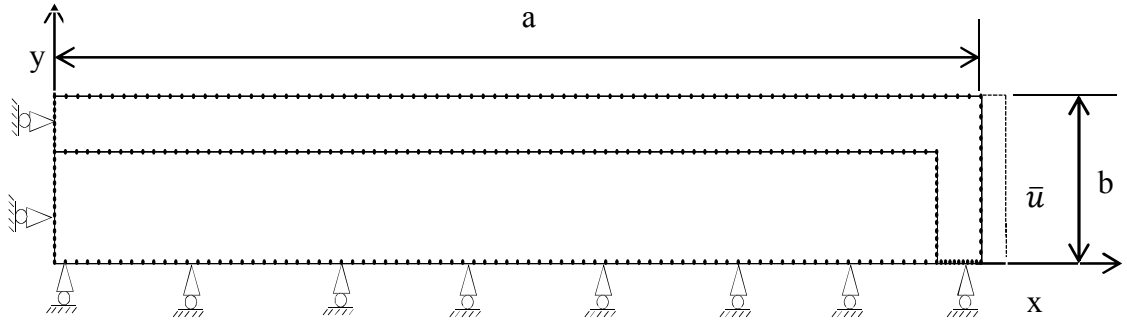
İfadesi üzerinden hesaplanabilecektir.

Kompozit malzemelerin boyuna elastisite modüllerinin hesaplanmasında karışımlar kuralı iyi bir yaklaşım olsa da kompozit malzemelerin enine elastisite modülünün hesaplanmasında karışımlar kuralı yaklaşımını kullanan ve ters karışımlar kuralı olarak bilinen yaklaşım iyi çözüm vermemektedir[7]. Bu nedenle, mukavemet modelleri olarakta bilinen bu yaklaşımların yanında elastisite modelleriyle deneye dayalı modeller geliştirilmiştir.

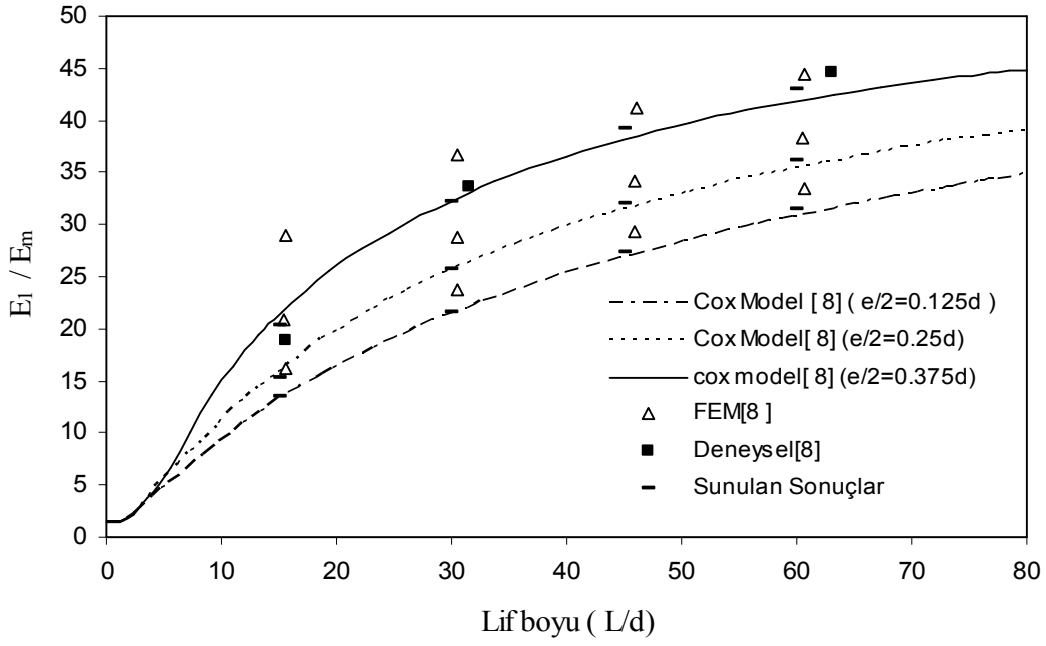
Bu çalışmada, sayısal, deneysel ve analitik sonuçları literatürde verilen süreksiz liflere sahip boron/epoxy kompozit malzemesinin boyuna elastisite modülü hesaplanmıştır. Kompozit malzemenin doğrusal elastik izotrop malzeme davranışları sergiledikleri kabulüyle; boronun elastisite modülü $E_L=400000 \text{ N/mm}^2$, $E_m=3450 \text{ N/mm}^2$ ile lif çapı $d=0.14224 \text{ mm}$ olarak seçilmiştir[12]. Gözden geçirilmiş Cox modeli, deneysel ve sonlu elemanlar yöntemiyle verilen sonuçlarla sınır elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar grafik üzerinde Şekil 3.3.' de verilmiştir. Şekil 3.3. de görüleceği gibi, sınır elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlardan daha çok deneysel ve Cox modeliyle elde edilen sonuçlar la iyi bir uyum içindedir. Şekil 3.4.' deki grafik ise, lif ve matrix malzemelerinin ara yüzeylerindeki kayma gerilmelerinin lif boyunca, Kelly-Tyson modelleriyle elde edilen değerlerden daha çok, sonlu elemanlar analizi ile fotoelastisite sonuçlarına[12] uygun bir değişimi vermektedir.



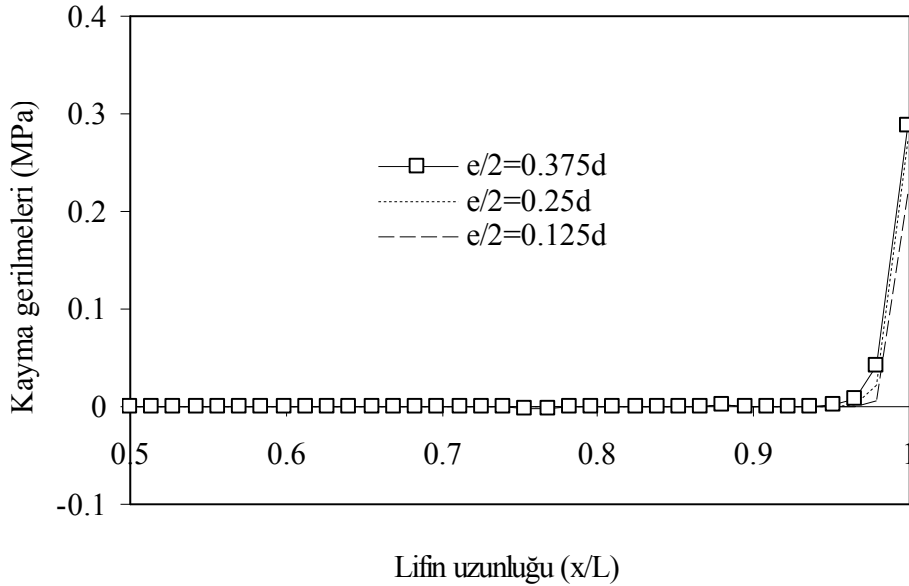
Şekil 3.1 Karakteristik hacim elemanı [9].



Şekil 3.2 Sınır elemanlar analiz modeli



Şekil 3.3 Boron/epoxy için boyuna elastisite modülü



Şekil 3.4 Lif ve matrix ara yüzeyindeki kayma gerilmelerinin lif boyunca olan dağılımı

4. SONUCLAR

Sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan sonlu elemanlar yöntemi endüstride oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Dahası mühendisler, bu yöntemin kendilerine sunduğu analiz ve analiz sonuçlarının değişik sunuş seçeneklerinden oldukça mutlu oldukları gözlenmektedir. Ancak son yıllarda, özellikle çözüm bölgesinde değişkenlerin oldukça keskin şekillerde değiştiği mühendislik uygulamalarında (örneğin temas ve kırılma mekaniği problemleri) etkin çözümler üreten Sınır Elemanlar (SE) veya Sınır İntegral Eşitliği (SİE) yöntemi olarak ta bilinen yöntem alternatif bir tasarım aracı olarak belirmektedir. Dahası daha etkin çözümler üretmek için bu iki yöntemin karma formülasyonu yoluna gidilebilmektedir. Bu yöntemin gerekli gördüğü veri kütüklerinin hazırlanması için gerekli olan zaman ve çaba sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırıldığında oldukça daha azdır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde elastostatik problemlerin sınır elemanlar formülasyonu verilmiştir. Kuadratik şekil fonksiyonlarını kullanan formülasyonun sayısal integrasyon aşamaları adım adım tanıtılmıştır. Verilen bir problem için sınır koşullarının tanıtılması ve çözüm matrislerinin elde edilmesi ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Üçüncü bölümde ise, temas mekaniği problemleri için Coulumb sürtünme kanununu kullanan sınır elemanlar formülasyonu kısaca açıklanmıştır. Farklı malzemelerden oluşan ancak tek bir parça davranışı gösteren elemanların sayısal yöntemle analizi, sürtünme katsayısının sonsuz olması fiziksel kabulüyle mümkün olacaktır. Bu temas koşulu altında sınır elemanlar temas formülasyonunu kullanarak çalışmada amaçlanan süreksiz liflere sahip kompozit malzemelerin boyuna elastisite modüllerinin sayısal hesaplanması aşamaları açıklanmıştır.

Bu çalışmada sunulan süreksiz liflere sahip kompozitlerin boyuna elastisite modüllerinin sınır elemanlar yöntemini kullanarak hesaplanması sayısal yöntemi, analitik ve deneye dayalı çözümleri literatürde verilen boron/epoxy kompozit malzemesine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik ve deneye dayalı sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve bu çalışmada sunulan sınır elemanlar formülasyonuna dayalı yöntemle etkin çözümler elde edilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Becker, A. A., 1992, "The Boundary Element Method in Engineering", *McGrawHillPen*, New York.
2. Gao, X. W., 2002, "Boundary Element Programming in Mechanics", *Cambridge University Press*, Cambridge.
3. Beer, G., Smith, I., Dauenser, C., 2008, "The Boundary Element Method with programming", *Springer-Verlag*, Wien.
4. Kelly, A. ve Tyson, W.R. 1965. Tensile properties of fiber reinforced metals: copper/tungsten and cooper/molybdenum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, 329-350.
5. Cox, H.L. 1952. The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British Journal of Applied Physics*, 3, 72-79.
6. Kelly, A. 1973. *Strong Solids*, 2d ed. Clearendon Press, Oxford, U.K.
7. Hwang, S.J. 1985. Finite element modeling of damping in discontinuous fiber composites. M.S. Thesis, University of Idaho, Moscow, ID.
8. Sun, C.T. and Wu, J.K. 1984. Stress distribution of aligned short fiber composites under axial load. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 3, 130-144.
9. Tyson, W.R. and Davies, G.J. 1965. A photoelastic study of shear stress associated with the transfer of stress during fiber reinforcement. *British Journal of Applied Physics*, 16, 199-205.
10. MacLaughlin, T.F. 1968. A photoelastic analysis of fiber discontinuities in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 2(1), 44-45.
11. Hwang, S.J. and Gibson, R.F. 1987. Micromechanical modeling of damping in discontinuoud fiber composites using strain energy/finite element approach. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 109, 47-52.
12. Gibson, R.F. 2007. *Principles of Composite Material Mechaniscs*, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KÖSE, Görkem
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 15.07.1985 Uşak
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0 (276) 216 51 27 - 0 (542) 355 59 44
e-mail : gorkemk@kisladag.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi/ Makine Müh. Bölümü	2007
Lise	Uşak Orhan Dengiz Anadolu Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2007-2008	7A Mühendislik	Makina Mühendisi
2008- ?	Tüprag Metal Madencilik	Makina Mühendisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

-

Hobiler

Kitap Okumak, Yürüyüş Yapmak