T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMET DORUK

HAZİRAN 2011
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMAN SKALASINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMET DORUK

UŞAK 2011

Muhammet DORUK tarafından hazırlanan **"Zaman Skalasında Genelleştirilmiş İntegraller"** adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ……………………
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ ………………………………
Uşak Üniversitesi, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ………………………
Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ .………………………………
Uşak Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

13 / 06 / 2011

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ………………………………
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Muhammet DORUK

ZAMAN SKALASINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Muhammet DORUK

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2011

ÖZET

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde zaman skalası üzerinde Riemann integrali ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde zaman skalasında Riemann integrali için ortalama değer teoremleri incelendi. Bu doğrultuda birinci ortalama değer teoremi, ikinci ortalama değer teoremi I ve ikinci ortalama değer teoremi II incelendi.

Üçüncü bölümde zaman skalası üzerinde birinci çeşit genelleştirilmiş integraller incelenerek tanım ve teoremler verildi.

Dördüncü bölümde zaman skalası üzerinde birinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin örnekleri incelendi.

Beşinci bölümde zaman skalası üzerinde ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller incelendi.

Bilim Kodu : 403.03.00, 403.03.01

Anahtar Kelimeler : Zaman Skalası, Riemann İntegrali,Genelleştirilmiş İntegraller, Ortalama Değer Teoremleri

Sayfa Adedi : 32

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

IMPROPER INTEGRALS ON TIME SCALES

(M. Sc. Thesis)

Muhammet DORUK

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2011

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the basic definitions and theorems are given related to Riemann integration.

In the second chapter, mean value theorem for Riemann integration on time scales are investigated. Hence first mean value theorem, second mean value theorem I and second mean value theorem II are given.

İn the third chapter, improper integrals of first kind on time scales are investigated and definitions and theorems related to them are given.

In the forth chapter, examples of improper integrals of first kind on time scales are given.

In the fifth chapter, improper integrals of second kind on time scales are investigated.

Science Code : 403.03.00, 403.03.01

Key Words : Time Scales, Riemann Integration, Improper Integrals, Mean Value Theorem.

Page Number : 32

Adviser : Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu tezin hazırlanması esnasında büyük yardımlarını gördüğüm ve her an her konuda manevi desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU’na teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren, destek olan, duydukları ve hissettirdikleri sonsuz güven için anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELERİN LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
T	Zaman skalası
R	Reel sayılar kümesi
Z	Tam sayılar kümesi
Z_+	Pozitif tamsayılar kümesi
N	Doğal sayılar kümesi
$[a,b]$	Kapalı aralık
P	Bir aralığın parçalanması
$\mathrm{P} = \mathrm{P}(a,b)$	$[a,b]$ aralığının tüm P parçalanmalarının kümesi
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Sıçrama operatörü
M_i	$M_i = \sup\left\{ f(t) : t \in \left[t_{i-1}, t_i\right) \right\}$
m_i	$m_i = \inf\left\{ f(t) : t \in \left[t_{i-1}, t_i\right) \right\}$
$U(f,P)$	Üst Darboux Δ-toplamı
$L(f,P)$	Alt Darboux Δ-toplamı
$U(f)$	$\inf\left\{U(f,P) : P \in \mathrm{P}(a,b)\right\}$
$L(f)$	$\sup\left\{L(f,P) : P \in \mathrm{P}(a,b)\right\}$
S	Riemann toplamı
$\int_a^b f(t)\Delta t$	Darboux Δ-integrali
$\int_a^b f(t)\nabla t$	Darboux ∇-integrali

1.GİRİŞ

Zaman skalası analizi diskret analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla Hilger ve Aulbach tarafından ortaya atılmıştır[7,8]. [7,8] ve [2]'de zaman skalası üzerinde integral kavramı bir fonksiyonun antitürevi olarak tarif edilmiş ve Cauchy integrali adı verilmiştir. [8]'de zaman skalası üzerinde Darboux-Δ integralinin tanımı ve [3,5,9]'da da Riemann-Δ integralinin tanımı ile birlikte zaman skalasında tanımlanan integraller için integral hesabı temel teoremi verilmiştir. Bu tezde, [3,5,8,9] çalışmalarına ek olarak zaman skalasında tarif edilen integraller için ortalama değer teoremlerinin bazı versiyonları ifade edilir. Son olarak sonsuz aralıklarda tanımlanan, dinamik sistemlerdeki çalışmalarda önemli bir yeri olan genelleştirilmiş integraller incelenmiştir.

Bu tez şu şekilde devam eder: İkinci bölümde, ana hatlarıyla zaman skalasında Riemann integral kavramı verilir. Bu bölümün son kısmında ise zaman skalasının bazı özellikleri ispatsız olarak yer alır. Üçüncü bölümde, zaman skalasında ortalama değer teoremleri ispatı ile birlikte ifade edilir. Bu teoremler, dördüncü bölümde verilen birinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin özelliklerini ispatlamak için kullanılacaktır. Birinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin bazı örneklerine beşinci bölümde yer verilir. Beşinci bölümde yer alan örnekler özellikle reel sayılar kümesinde tanımlanan birinci çeşit genelleştirilmiş integraller ile zaman skalası üzerinde tanımlanan birinci çeşit genelleştirilmiş integraller arasındaki farkı görme açısından önemlidir. Son bölüm olan altıncı bölümde ise zaman skalası üzerinde ikinci çeşit genelleştirilmiş integrallere değinilir.

Bu tez büyük oranda delta integralini dikkate alır. Nabla integrali benzer yollarla ele alınabilir.

2.RİEMANN İNTEGRALİ ÜZERİNE TEMEL KAVRAMLAR

Bir T zaman skalası, reel sayıların boş olmayan keyfi bir kapalı alt kümesidir. Şüphesiz ki T, $d(t,s)=|t-s|$ metriğine göre bir tam metrik uzaydır. $t\in T$ için ileri sıçrama operatörü

$$\sigma : T \to T$$

$$\sigma(t) = inf\,\{s\in T : s>t\}$$

ile geri sıçrama operatörü ise

$$\rho : T \to T$$

$$\rho(t) = \sup\{s\in T : s<t\}$$

ile tanımlanır. Eğer $\sigma(t)>t$ ise t noktasına sağ saçılmış, $\rho(t)<t$ ise t noktasına sol saçılmış nokta adı verilir. Bir $t\in T$ noktası için $\sigma(t)=t$ oluyorsa t noktasına sağ yoğun nokta , $\rho(t)=t$ oluyorsa t noktasına sol yoğun nokta denir.

T zaman skalasındaki a ve b noktaları için $a\leq b$ olsun. $[a,b]$ aralığı

$$[a,b]=\{t\in T : a\leq t\leq b\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde açık aralıklar ve yarı açık aralıklar tanımlanır. Bu tez boyunca ele alınan tüm aralıklar T zaman skalasındaki aralıklar olacaktır.

T bir zaman skalası, $[a,b]\subset T$ olsun. $t_i\in[a,b]$ $(i=1,2...n)$ ve $a=t_0<t_1<...<t_n=b$ olmak üzere, $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması denir. $[a,b]$ aralığının tüm parçalanmalarının kümesi $\mathrm{P}=\mathrm{P}(a,b)$ ile gösterilir. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı bir fonksiyon olsun. M, m, M_i, m_i reel sayılarını;

$$M=\sup\{\, f(t) : t\in[a,b)\},\quad m=inf\,\{\, f(t) : t\in[a,b)\}$$

ve

$$M_i=\sup\{\, f(t_i) : t\in[t_{i-1},t_i)\},\quad m_i=inf\,\{\, f(t_i) : t\in[t_{i-1},t_i)\}$$

şeklinde tarif edelim. f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen $U(f,P)$ üst Darboux toplamı ile $L(f,P)$ alt Darboux toplamı sırasıyla

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(t_i-t_{i-1}),L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i-t_{i-1})$$

şeklinde tanımlanır.

Açık bir şekilde $[a,b]$ aralığının her P parçalanması için

$$m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)$$

olur. f fonksiyonunun a'dan b'ye üst Darboux integrali $U(f)$ ve alt Darboux integrali $L(f)$:

$$U(f)=\inf\{U(f,P):P\in \mathrm{P}(a,b)\} \text{ ve } L(f)=\sup\{L(f,P):P\in \mathrm{P}(a,b)\}$$

olarak tanımlanır.

f sınırlı olduğundan $L(f)$ ve $U(f)$ sonludur ve $L(f)\le U(f)$ eşitsizliği mevcuttur.

Tanım 2.1. $L(f)=U(f)$ şartını sağlayan f fonksiyonuna a'dan b'ye integrallenebilirdir ya da $\Delta-$integrallenebilirdir denir ve $\int_a^b f(t)\Delta t$ ile gösterilir. Bu integrale aynı zamanda Darboux $\Delta-$integrali denir[3].

Tanım 2.5'te de görüleceği gibi Riemann $\Delta-$integralin tanımı biraz farklıdır. Fakat Teorem 2.6 da bu iki tanımın denk olduğunu göreceğiz.

Lemma 2.2. Her $\delta>0$ için bir $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}\in \mathrm{P}(a,b)$ parçalanması vardır öyle ki her $i\in\{1,2,...n\}$ için ya $t_i-t_{i-1}\le\delta$ ya da $t_i-t_{i-1}>\delta$ ve $\rho(t_i)=t_{i-1}$ dir[3].

Tanım 2.3. Lemma 2.2'de belirtilen özelliğe sahip $[a,b]$ aralığının tüm parçalanmalarının kümesi $P_\delta=P_\delta(a,b)$ ile gösterilir[1].

Aşağıdaki teorem integrallenebilme için Cauchy kriterini verir.

Teorem 2.4. $f:[a,b]\to R$ sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında Δ-integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon>0$ sayısı için $[a,b]$ aralığının

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir P parçalanmasının var olmasıdır [3].

Şimdi Riemann integrallenebilme tanımını verelim.

Tanım 2.5. $f:[a,b]\to R$ sınırlı bir fonksiyon ve $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}\in \mathrm{P}(a,b)$ olsun. Her bir $[t_{i-1},t_i)$ aralığından keyfi bir ξ_i noktası seçelim. $(1\le i\le n)$

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı denir. Aşağıdaki özelliği sağlayan bir I sayısı varsa f fonksiyonuna a'dan b'ye Riemann integrallenebilir denir:

Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\delta>0$ sayısı vardır öyle ki her $P\in P_\delta$ parçalanmasına karşılık gelen S Riemann toplamı için $|S-I|<\varepsilon$ olur. Burada $\xi_i\in[t_{i-1},t_i)$ noktalarının nasıl seçildiğinin bir önemi yoktur[3].

Teorem 2.6. $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir f fonksiyonun Riemann integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Darboux integrallenebilir olmasıdır[3].

$a<b$ olduğu durumda $\int_a^b f(t)\Delta t=-\int_b^a f(t)\Delta t$ ve $\int_a^a f(t)\Delta t=0$ olarak tanımlanır. Şimdi, bu tez içerisinde ileride kullanılacak olan Riemann integralinin bazı özellikleri verilecektir.

Teorem 2.7. Her sabit $f(t)=c$ fonksiyonu a'dan b'ye integrallenebilirdir ve $\int_a^b f(t)\Delta t=c(b-a)$ olur[3].

Teorem 2.8. $[a,b]$ üzerinde her monoton fonksiyon integrallenebilirdir[3].

Teorem 2.9. $[a,b]$ üzerinde her sürekli fonksiyon integrallenebilirdir[3].

Teorem 2.10. f fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen sınırlı bir fonksiyon olsun. O zaman, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının her $[c,d]$ alt aralığında integrallenebilirdir[3].

Teorem 2.11. f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar ve $\alpha \in R$ olsun. O zaman,

(i) αf integrallenebilirdir ve $\int_a^b f(\alpha t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t$

(ii) $f+g$ integrallenebilirdir ve $\int_a^b (f+g)(t)\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$ [3].

Teorem 2.12. Eğer f ve g fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise onların çarpımı olan $f.g$ fonksiyonu da integrallenebilirdir[3].

Teorem 2.13. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ve $c \in T$, $a<c<b$ şartını sağlasın. Eğer f fonksiyonu a'dan c'ye ve c'den b'ye integrallenebilir ise f fonksiyonu a'dan b'ye integrallenebilir ve $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t$ eşitliği sağlanır[3].

Teorem 2.14. Eğer f ve g fonsiyonları, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve her $t \in [a,b]$ için $f(t) \le g(t)$ ise o zaman, $\int_a^b f(t)\Delta t \le \int_a^b g(t)\Delta t$ eşitsizliği vardır[3].

Teorem 2.15. f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu takdirde $|f|$ de integrallenebilir olup

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \le \int_a^b |f(t)|\Delta t$$

eşitsizliği mevcuttur[3].

Teorem 2.16. T zaman skalasında a ve b noktaları $a<b$ eşitsizliklerini sağlasın ve a ile b arasında T zaman skalasının başka hiçbir noktası olmasın. Bu takdirde, $f:T\rightarrow R$ şeklinde tanımlanan her fonksiyon a'dan b'ye delta ve nabla integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(t)\Delta t = f(a)(b-a) \text{ ve } \int_a^b f(t)\nabla t = f(b)(b-a)$$

eşitlikleri vardır[1].

3. İNTEGRALLER İÇİN ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

Teorem 3.1(Birinci Ortalama Değer Teoremi). f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sınırlı ve integrallenebilir fonksiyonlar ve g fonksiyonu ,$[a,b]$ üzerinde negatif olmayan (veya pozitif olmayan) bir fonksiyon olmak üzere,

$$m = \inf\left\{ f(t) : t \in [a,b) \right\} \quad \text{ve} \qquad M = \sup\left\{ f(t) : t \in [a,b) \right\}$$

olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = \Lambda \int_a^b g(t)\Delta t \tag{3.1}$$

olacak şekilde $m \le \Lambda \le M$ eşitsizliğini sağlayan bir Λ reel sayısı mevcuttur[1].

İspat: Her $t \in [a,b)$ için

$$m \le f(t) \le M \tag{3.2}$$

olduğunu biliyoruz.

Kabul edelim ki $g(t) \ge 0$ olsun. (3.2) eşitsizliği $g(t)$ ile çarpılırsa her $t \in [a,b)$ için

$$mg(t) \le f(t)g(t) \le Mg(t)$$

elde edilir. Bununla birlikte Teorem 2.11 ve Teorem 2.12 ye göre her mg , fg , Mg fonksiyonları integrallenebilirdir. Böylece Teorem 2.14 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$m\int_a^b g(t)\Delta t \le \int_a^b f(t)g(t)\Delta t \le M\int_a^b g(t)\Delta t \tag{3.3}$$

Eğer $\int_a^b g(t)\Delta t = 0$ ise (3.3) eşitsizliğinden $\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = 0$ olduğu ve böylece (3.1) eşitliği açıktır.

Eğer $\int_a^b g(t)\Delta t > 0$ ise o zaman, (3.3) eşitsizliği

$$m \le \frac{\int_a^b f(t)g(t)\Delta t}{\int_a^b g(t)\Delta t} \le M$$

eşitsizliğini gerektirir. Bu eşitsizliğin ortadaki terimi, $m \le \Lambda \le M$ eşitsizliğini sağlayan bir Λ sayısına eşittir. Bu ise göstermek istediğimizdir. Özel olarak $g(t) = 1$ olduğu durumda, Teorem 3.1 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2. f fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon ve m ile M sırasıyla $[a,b]$ üzerinde f fonksiyonunun infimum ve supremum değeri olsun.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \Lambda(b-a)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde m ile M arasında bir Λ sayısı mevcuttur[1].

Buradan hareketle Abel lemması olarak bilinen lemma verilebilir.

Lemma 3.3. p_i sayıları için $p_1 \ge p_2 \ge ... \ge p_n \ge 0$ olsun. $1 \le k \le n$ için $S_k = \sum_{i=1}^{k} q_i$ olmak üzere, k nin tüm değerleri için $m \le S_k \le M$ eşitsizliği sağlansın. Burada M, m ve q_i herhangi reel sayılardır. Bu takdirde, $mp_1 \le \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \le Mp_1$ eşitsizliği mevcuttur[1].

Teorem 3.4 (İkinci Ortalama Değer Teoremi I **).** f fonksiyonu , $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen sınırlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca m_F ve M_F sırasıyla $[a,b]$ üzerinde $F(t) = \int_a^t f(s)\Delta s$ fonksiyonunun infimumu ve supremumu olsun. Bu takdirde,

(i) g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $g(t) \ge 0$ şartını sağlayan artmayan bir fonksiyon ise,

$$\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = g(a)\Lambda \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $\Lambda \in [m_F, M_F]$ vardır.

(ii) g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında monoton, herhangi bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = [g(a)-g(b)]\Lambda + g(b)\int_a^b f(t)\Delta t \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $\Lambda \in [m_F, M_F]$ vardır[1].

İspat: (i) kısmını ispatlamak için g fonksiyonunun artmayan bir fonksiyon ve her $t \in [a,b]$ için $g(t) \geq 0$ olduğu kabul edilsin. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ ele alalım. f ve $f.g$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olduğundan Teorem 2.4 ve Teorem 2.5'ten bir $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \in \mathrm{P}(a,b)$ parçalanması

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \tag{3.6}$$

ve

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)\Delta t \right| < \varepsilon \tag{3.7}$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde seçilebilir.

Burada m_i ve M_i sırasıyla f fonksiyonunun $[t_{i-1}, t_i)$ aralığı üzerinde infimumu ve supremumudur. $g(t_{i-1}) \geq 0$ olduğu için $m_i \leq f(t_{i-1}) \leq M_i$ eşitsizliğinden

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \tag{3.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 3.2 sayesinde, $1 \leq i \leq n$ için

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\Delta t = \Lambda_i (t_i - t_{i-1})$$

eşitliğini sağlayan Λ_i sayıları, $m_i \leq \Lambda_i \leq M_i$ olacak şekilde vardır. $1 \leq k \leq n$ için

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \Lambda_i (t_i - t_{i-1}) = \int_a^{t_k} f(t)\Delta t$$

sayısı göz önüne alındığında, açık şekilde $m_F \leq S_k \leq M_F$ olur. Burada m_F ve M_F sırasıyla $[a,b]$ üzerinde F fonksiyonunun infimumu ve supremumudur. $1 \leq i \leq n$ için

$$p_i = g(t_{i-1}) \text{ ve } q_i = \Lambda_i (t_i - t_{i-1})$$

olarak alalım. g fonksiyonu artmayan ve $g(t)\geq 0$ olduğundan

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq 0$$

eşitsizlikleri vardır. p_i, S_i ve q_i sayıları Lemma 3.3'ün şartlarını sağlar. Böylece,

$$m_F g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})\Lambda_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_F g(a) \tag{3.9}$$

eşitsizlikleri mevcut olup diğer taraftan,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})\Lambda_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \tag{3.10}$$

eşitsizliği mevcuttur. (3.8),(3.10),(3.6) eşitsizlikleri ve g foksiyonunun monotonluğunu kullanarak

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})[f(t_{i-1}) - \Lambda_i](t_i - t_{i-1})\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) g(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq g(a)\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \\
&\leq g(a)\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ve (3.7) eşitsizliğinden

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\Delta t - \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})\Lambda_i(t_i - t_{i-1})\right| < \varepsilon + g(a)\varepsilon$$

böylece (3.9) eşitsizliğini kullanarak

$$-\varepsilon - g(a)\varepsilon + m_F g(a) < \int_a^b f(t)g(t)\Delta t < m_F g(a) + \varepsilon + g(a)\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$m_F g(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\Delta t \leq M_F g(a) \tag{3.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $g(a)=0$ ise (3.11) eşitsizliğinden $\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = 0$ olur ve böylece (3.4) eşitliği açıktır. Eğer $g(a)>0$ ise bu takdirde, (3.11) eşitsizliğinden

$$m_F \le \frac{\int_a^b f(t)g(t)\Delta t}{g(a)} \le M_F .$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece bu eşitsizliğin ortanca terimi $m_F \le \Lambda \le M_F$ eşitsizliğini sağlayan bir Λ sayısına eşittir, bu da istenen sonuçtur.

Şimdi, g fonksiyonu keyfi artmayan bir fonksiyon olsun. O zaman, $h(t) = g(t) - g(b)$ ile tanımlanan h fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde artmayan fonksiyondur ve $h(t) \ge 0$ dır. Böylece h fonksiyonuna (3.4) formülü uygulanırsa

$$\int_a^b f(t)[g(t) - g(b)]\Delta t = [g(a) - g(b)]\Lambda$$

yazılabilir. Bu eşitlik artmayan g fonksiyonu için (ii) kısmın formülünü verir. Eğer g azalmayan fonksiyon ise $g_1 = -g$ fonksiyonu artmayandır. Bir önce elde edilen sonuçları g_1 fonksiyonuna uygulayarak, azalmayan g fonksiyonu için benzer sonuçlar elde edilir.

Aşağıdaki teorem Teorem 3.4 için yapılan ispata benzer bir yolla ispatlanabilir.

Teorem 3.5 (İkinci Ortalama Teoremi II**).** f fonksiyonu**,** $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen sınırlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca, m_Φ ve M_Φ sırasıyla $\Phi(t) = \int_t^b f(s)\Delta s$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde infimumumu ve supremumu olsun. Bu takdirde,

(i) g fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde $g(t) \ge 0$ şartını sağlayan artmayan bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = g(b)\Lambda$$

olacak şekilde bir $\Lambda \in [m_\Phi, M_\Phi]$ vardır.

(ii) g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında monoton, herhangi bir fonksiyon ise

$$\int_a^b f(t)g(t)\Delta t = [g(b) - g(a)]\Lambda + g(a)\int_a^b f(t)\Delta t$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\Lambda \in [m_\Phi, M_\Phi]$ vardır[1].

4. **BİRİNCİ ÇEŞİT GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER**

T bir zaman skalası ve $a \in T$ olsun. Bu bölüm boyunca

$$a = t_0 < t_1 < \ldots \text{ ve } \lim_{k\to\infty} t_k = \infty \text{ olacak şekilde bir } \{t_k : k \in N_0\} \subset T \tag{4.1}$$

alt kümenin varlığını kabul edelim. Diğer bir deyişle, T zaman skalası yukarıdan sınırsız olsun. Reel değerli bir f fonksiyonu $[a,\infty) = \{t \in T : t \geq a\}$ aralığında tanımlı ve $A \geq a$ olacak şekilde a'dan herhangi bir $A \in T$ noktasına Riemann integrallenebilir olsun. Eğer

$$F(A) = \int_a^A f(t)\Delta t \tag{4.2}$$

integrali $A \to \infty$ için sonlu bir limite yakınsıyorsa bu limite A'dan ∞' a f fonksiyonunun birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir ve

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{A\to\infty}\left\{\int_a^A f(t)\Delta t\right\} \tag{4.3}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t \tag{4.4}$$

genelleştirilmiş integrali vardır ve yakınsaktır denir. Eğer (4.3) limiti yoksa, (4.4) genelleştirilmiş integrali yoktur ya da ıraksaktır denir.

Örnek 4.1. T zaman skalası (4.1) şartını sağlasın ve $a > 0$ olsun. O halde

$$\int_a^\infty \frac{\Delta t}{t\sigma(t)} = \frac{1}{a} \quad \text{ve} \quad \int_a^\infty \frac{t+\sigma(t)}{(t\sigma(t))^2} = \frac{1}{a^2}$$

eşitlikleri mevcuttur. Bu iki formül aşağıdaki denklemlerden elde edilir.

$$\left(\frac{1}{t}\right)^\Delta = -\frac{1}{t\sigma(t)} \quad \text{ve} \quad \left(\frac{1}{t^2}\right)^\Delta = \frac{-t-\sigma(t)}{(t\sigma(t))^2}$$

$\lim\limits_{A\to\infty} F(A)$ limitinin varlığı, bir fonksiyonun limitinin varlığı için ifade edilen Cauchy kriteri şartına denktir. Bu kriter şöyle ifade edilir: Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $A_0 > a$ vardır öyle ki, $A_1 > A_0$ ve $A_2 > A_0$ şartını sağlayan her $A_1, A_2 \in T$ noktaları için $|F(A_1) - F(A_2)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Böylece birinci çeşit genelleştirilmiş integral için aşağıdaki Cauchy kriteri verilebilir.

Teorem 4.2. (4.4) integralinin varlığı için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $A_1 > A_0$ ve $A_2 > A_0$ eşitsizliğini sağlayan her $A_1, A_2 \in T$ noktaları için $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t)\Delta t\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $A_0 > a$ noktasının var olmasıdır[1].

f fonksiyonunun mutlak değerinin integrali $\int_a^\infty |f(t)|\Delta t$ yakınsak ise, (4.4) integraline mutlak yakınsak denir. Eğer integral yakınsak fakat mutlak yakınsak değilse (4.4) integraline şartlı yakınsak adı verilir.

Teorem 4.3. Eğer (4.4) integrali mutlak yakınsak ise yakınsaktır[1].

İspat: Bu sonuç, Teorem 2.15 göz önüne alınarak aşağıdaki eşitsizlik ve Teorem 4.2 ile elde edilir.

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(t)\Delta t\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(t)|\Delta t$$

Yakınsak bir birinci çeşit genelleştirilmiş integral mutlak yakınsak olmayabilir. Fakat tabi ki, negatif olmayan bir fonksiyonun yakınsak genelleştirilmiş integrali, her zaman mutlak yakınsaktır.

Şimdi, negatif olmayan f fonksiyonun (4.4) yakınsak genelleştirilmiş integralini göz önüne alalım. Bu durumda (4.2) ile tanımlanan F fonksiyonu açıkça azalmayandır. O halde, F

fonksiyonu sınırlı ise yani, her $A \geq a$ için $F(A) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, o zaman (4.4) integrali yakınsaktır ve

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)\Delta t \leq M$$

eşitsizliği mevcuttur. Eğer F fonksiyonu sınırsız ise (4.4) integrali ıraksaktır ve

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)\Delta t = \infty$$

eşitliği mevcuttur. Böylece aşağıdaki sonuca ulaşılabilir:

Teorem 4.4. Her $t \geq a$ için $f(t) \geq 0$ şartını sağlayan f fonksiyonunun (4.4) integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $A \geq a$ için

$$\int_a^A f(t)\Delta t \leq M$$

olacak şekilde sabit bir $M > 0$ mevcut olmasıdır. Bu durumda genelleştirilmiş integralin değeri M den büyük değildir[1].

Şimdi aşağıdaki karşılaştırma testi verilebilir.

Teorem 4.5. Her $t \in [a, \infty)$ için , $0 \leq f(t) \leq g(t)$ eşitsizlikleri sağlansın. O zaman

$$\int_a^\infty g(t)\Delta t \tag{4.5}$$

genelleştirilmiş integralinin yakınsaklığı,

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t \tag{4.6}$$

genelleştirilmiş integralinin yakınsaklığını gerektirir ve

$$\int_a^\infty f(t)\Delta t \leq \int_a^\infty g(t)\Delta t$$

eşitsizliği mevcuttur. Diğer taraftan (4.6) integralinin ıraksaklığı, (4.5) integralinin ıraksaklığını gerektirir[1].

İspat: Bu teoremin ispatı Teorem 4.4 kullanılarak, her $A \geq a$ için

$$\int_a^A f(t)\Delta t \leq \int_a^A g(t)\Delta t$$

eşitsizliğinden elde edilir.

Uygulamalarda eşitsizliklerle çalışmanın neden olacağı zorluklardan kaçınmak için çoğu zaman aşağıdaki teoremi kullanmak, direkt olarak karşılaştırma testini kullanmaktan daha uygundur.

Teorem 4.6. $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ ve $\int_a^\infty g(t)\Delta t$ genelleştirilmiş integralleri pozitif integrantlı, birinci çeşit genelleştirilmiş integraller olsun.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = L \tag{4.7}$$

limiti var (sonlu) ve sıfır olmasın. Bu takdirde, birinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklık karakterleri aynıdır[1].

İspat: Bu sonuç (4.7) eşitliğinden elde edilir. Her $\varepsilon \in (0, L)$ sayısına karşılık $A_0 > a$ olacak şekilde $A_0 \in T$ vardır öyle ki her $t > A_0$ için

$$L - \varepsilon < \frac{f(t)}{g(t)} < L + \varepsilon$$

eşitsizliği vardır. $g(t) > 0$ olduğundan her $t > A_0$ için

$$(L-\varepsilon)g(t) < f(t) < (L+\varepsilon)g(t) \tag{4.8}$$

eşitsizliği elde edilir. $\int_a^\infty g(t)\Delta t$ integralinin yakınsaklığı, $\int_{A_0}^\infty g(t)\Delta t$ integralinin yakınsaklığını ve dolayısıyla $\int_{A_0}^\infty (L+\varepsilon)g(t)\Delta t$ integralinin yakınsaklığını gerektirir. Sonuç olarak, Teorem 4.5 e göre $\int_{A_0}^\infty f(t)\Delta t$ integrali ayrıca yakınsaktır ve bununla beraber $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ integrali yakınsaktır. Tersine, eğer $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ yakınsak ise $\int_a^\infty g(t)\Delta t$ de yakınsaktır. Bu özellik de (4.8) eşitsizliğinin sol kısmı kullanılarak benzer şekilde ispatlanabilir.

Uyarı 4.7. Teorem 4.6'da tarif edilen integraller için $L = 0$ olduğu durumda, $\int_a^\infty g(t)\Delta t$ yakınsak ise $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ de yakınsaktır. $L = \infty$ olduğu durumda, eğer $\int_a^\infty g(t)\Delta t$ ıraksak ise $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ de ıraksaktır[1].

Teorem 4.3 ve Teorem 4.5 den aşağıdaki sonuç açıktır.

Sonuç 4.8. $t \geq a$ olacak şekildeki tüm $t \in T$ noktaları için $|f(t)| \leq g(t)$ olsun. O halde, $\int_a^\infty g(t)\Delta t$ birinci çeşit genelleştirilmiş integralinin yakınsaklığı, $\int_a^\infty f(t)\Delta t$ birinci çeşit genelleştirilmiş integralinin yakınsaklığını gerektirir[1].

Eğer birinci çeşit genelleştirilmiş bir integral şartlı yakınsak ise onun yakınsaklığının gösterimi oldukça karmaşık bir durumdur. Pratik olması bakımından, önemli uygulamaların çoğunda aşağıdaki teorem ele alınır. Bu teorem, reel sayılar kümesinde tanımlanan birinci çeşit genelleştirilmiş integraller için iyi bilinen Dirichlet Abel testine benzer.

Teorem 4.9. Aşağıdaki şartlar sağlansın:

(i) f fonksiyonu $A \geq a$ olmak üzere a noktasından herhangi bir $A \in T$ noktasına integrallenebilir ve $F(A) = \int_a^A f(t)\Delta t$ integrali her $A \geq a$ için sınırlı,

(ii) g fonksiyonu $[a, \infty)$ aralığında monoton ve $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$ olsun.

Bu takdirde,

$$\int_a^\infty g(t) f(t)\Delta t \qquad (4.9)$$

formundaki birinci çeşit genelleştirilmiş integral yakınsaktır[1].

İspat: Ortalama değer teoremini uygulayarak $A_2 > A_1 \geq a$ şartını sağlayan her $A_1, A_2 \in T$ için,

$$\int_{A_1}^{A_2} g(t)f(t)\Delta t = \left[g(A_1) - g(A_2)\right]\Lambda + g(A_2)\int_{A_1}^{A_2} f(t)\Delta t \tag{4.10}$$

yazılabilir. Burada Λ değeri, $F(A)$ fonksiyonunun infimumu ile supremumu arasındadır. Kabul edelim ki K, $[a,\infty)$ aralığında $|F(A)|$ için bir sınır yani $|F(A)| \leq K$ olsun. O halde, (4.10) eşitliğinin sağ tarafındaki integralin $F(A_2) - F(A_1)$ değerine eşit olduğunu dikkate alarak

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} g(t)f(t)\Delta t\right| \leq K\left[|g(A_1)| + 3|g(A_2)|\right] \tag{4.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği kullanarak ispatı tamamlamak zor değildir. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun $t \to \infty$ için $g(t) \to 0$ olacağından, $t \geq A_0$ sayıları için $|g(t)| < \dfrac{\varepsilon}{4K}$ olacak şekilde bir $A_0 > a$ sayısı seçilebilir. Böylece (4.11) eşitsizliğinden $A_1 > A_0$ ve $A_2 > A_0$ şartını sağlayan tüm A_1 ve A_2 ler için

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} g(t)f(t)\Delta t\right| < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, Teorem 4.2 (Cauchy kriteri)'ye göre (4.9) integrali yakınsaktır.

Uyarı 4.10. İntegrasyon aralığının bir sınırı $-\infty$ olan birinci çeşit genelleştirilmiş integraller yukarıda verilenlere paralel bir şekilde ele alınır[1].

5.ÖRNEKLER

Bu bölümün ilk kısmında

$$0 < t_0 < t_1 < \dots \text{ ve } \lim_{k\to\infty} t_k = \infty \text{ olacak şekilde bir } T = \{t_k : k \in N_0\} \tag{5.1}$$

zaman skalasını dikkate alalım. (5.1) formundaki her zaman skalası (4.1) genel kabulümüzü sağlar. Aşağıdaki yardımcı sonuçlar kullanışlı olacaktır.

Lemma 5.1. T zaman skalası (5.1) şartını sağlasın. Eğer $f : [t_0, \infty) \to R$ ile tanımlanan bir fonksiyon ise

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)\Delta t = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)(t_{k+1} - t_k) \quad \text{ve} \quad \int_{t_0}^{\infty} f(t)\nabla t = \sum_{k=0}^{\infty} f(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k)$$

eşitlikleri mevcuttur. Ayrıca, f fonksiyonu $[t_0, \infty)$ aralığında artmayan bir fonksiyon ise o zaman,

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)\nabla t \le \int_{t_0}^{\infty} f(t)dt \le \int_{t_0}^{\infty} f(t)\Delta t$$

eşitsizliği vardır. Burada ortadaki integral R'nin $[t_0, \infty)$ aralığında alınırken ilk ve son integraller T zaman skalasından alınmıştır[1].

İspat: Lemmanın ilk kısmı Teorem 2.13 ve Teorem 2.16 yardımıyla elde edilir. İkinci kısım

$$f(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k) \le \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)dt \le f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

eşitsizliklerini $k = 0$'dan ∞'a toplayarak elde edilir.

Lemma 5.1 kullanılarak aşağıdaki yakınsaklık kriteri doğrudan bulunur.

Teorem 5.2. T , (5.1) şartını sağlayan bir zaman skalası ve $f:[t_0,\infty)\to R_+$ artmayan bir fonksiyon olsun. Burada R_+ negatif olmayan reel sayıların kümesini temsil eder.

(i) Eğer $\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt=\infty$ ise $\int_{t_0}^{\infty} f(t)\Delta t=\infty$;

(ii) Eğer $\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt<\infty$ ise $\int_{t_0}^{\infty} f(t)\nabla t<\infty$ [1].

Örnek 5.3. T , (5.1) şartını sağlayan bir zaman skalası olsun. Bu takdirde,

$$0\le p\le 1 \text{ ise } \int_{t_0}^{\infty}\frac{\Delta t}{t^p}=\infty \quad \text{ve}$$

$$p>1 \text{ ise } \int_{t_0}^{\infty}\frac{\nabla t}{t^p}<\infty$$

olur.

Örnek 5.4. $q>1$ olmak üzere, $T=\{q^k : k\in N_0\}$ şeklinde tanımlanan bir zaman skalası ele alalım. Bu durumda, $\int_1^{\infty}\frac{\Delta t}{t}=\infty$ olur. Gerçekten,

$$\int_1^{q^n}\frac{\Delta t}{t}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(q^k)}{q^k}=\sum_{k=0}^{n-1}(q-1)=(q-1)n$$

eşitliği mevcuttur. Böylece $t\in T$ noktası için

$$\int_1^{t}\frac{\Delta \tau}{\tau}=(q-1)\log_q t\to\infty \quad , \quad (t\to\infty)$$

Teorem 5.5 T , (5.1) şartını sağlayan bir zaman skalası olsun. O zaman,

$$0\le p\le 1 \text{ ise, } \int_{t_0}^{\infty}\frac{\nabla t}{t^p}=\infty \text{ [1].}$$

İspat: Diğer durumlar karşılaştırma yaparak elde edilebileceğinden sadece $p=1$ durumunu göstermek yeterlidir. Bu sonucu elde etmek için Teorem 5.2 kullanılamaz. Lemma 5.1 yardımıyla

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\nabla t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+1}} \tag{5.2}$$

eşitliği elde edilir. Lemma 5.1 ve Örnek 5.3 (ve ayrıca direkt olarak)'ten

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_k} = \infty \tag{5.3}$$

olduğu biliniyor. Bir çelişki elde etmek için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+1}} < \infty \tag{5.4}$$

olduğunu kabul edelim. Fakat o zaman, $k \to \infty$ için $\dfrac{t_{k+1}}{t_k} \to 1$ olur. O halde her $k \geq N$ için $\dfrac{t_{k+1}}{t_k} \leq 2$ olacak şekilde bir $N \in N_0$ indisi vardır. Buradan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_k} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_k} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+1}} . \frac{t_{k+1}}{t_k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_k} + 2\sum_{k=N}^{\infty} \frac{t_{k+1}-t_k}{t_{k+1}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Bu durum (5.3) eşitliği ile çelişir. Böylece (5.4) kabulü yanlıştır ve sonuç (5.2) eşitliğinden elde edilir.

Aşağıdaki örnek, reel sayılar kümesi üzerinde ifade edilen toplam ve integral analizinde bulunması beklenmeyecek türden bir örnektir.

Örnek 5.6 $p > 1$ ve her $k \in N_0$ için t_k noktaları

$$t_k = 2^{(p^k)}$$

şekilde tanımlansın. Şimdi, genel (5.1) kabulünü sağlayan $T=\{t_k : k\in N_0\}$ zaman skalasını göz önüne alalım. Bu zaman skalası için

$$\sigma(t)=t^p \quad \text{ve} \quad \mu(t)=t^p-t$$

fonksiyonları mevcuttur.

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty}\frac{\Delta t}{t^p} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(t_k)}{t_k{}^p} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t_k{}^p-t_k}{t_k{}^p} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}[1-\frac{1}{t_k{}^{p-1}}] \\ &= \infty\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliği hesaplamak için Lemma 5.1 kullanıldı. Çünkü son terimin genel terimi $k\to\infty$ için 1'e yakınsamaktadır.

Örnek 5.6'da da görüldüğü gibi, $p>1$ için

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{\Delta t}{t^p}<\infty \tag{5.5}$$

genelde sağlanmaz. Burada araştırılması gereken zaman skalasının (5.5) eşitsizliğini hangi durumda sağladığıdır. Şimdi bu problemin üzerinde duralım.

Teorem 5.7. T, (5.1) şartını sağlayan bir zaman skalası ve $f:[t_0,\infty)\to R_+$ fonksiyonu, $\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt<\infty$ olacak şekilde artmayan bir fonksiyon olsun. $g:T\to R_+$ fonksiyonu her $k\in N$ ve keyfi bir $K>0$ sabiti için

$$g(t_k)\le Kf(t_{k+1}) \tag{5.6}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu takdirde, $\int_{t_0}^{\infty} g(t)\Delta t<\infty$ olur[1].

İspat: Lemma 5.1 yardımıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)\Delta t = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(t_k) g(t_k)$$

$$\leq K \sum_{k=0}^{\infty} \mu(t_k) f(t_{k+1})$$

$$\leq K \int_{t_0}^{\infty} f(t) dt$$

$$< \infty$$

Böylece $\int_{t_0}^{\infty} g(t)\Delta t$ yakınsaktır.

Teorem 5.7 ile aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 5.8. T , (5.1) şartını sağlayan bir zaman skalası ve $p > 1$ olsun. Eğer,

$$\sigma(t) = \mathrm{O}(t^{\alpha}),\ \ t \to \infty$$

olacak şekilde $\alpha \in [1, p)$ varsa (5.5) sağlanır. Yani $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p} < \infty$ olur[1].

İspat: $p > 1$ ve $t \to \infty$ için $\sigma(t) = \mathrm{O}(t^{\alpha})$ olacak şekilde $1 \leq \alpha < p$ olsun. O zaman,

$$t_{k+1} = \sigma(t_k) \leq K t_k^{\alpha}$$

şartını sağlayan sabit bir $K > 0$ sayısı vardır. $q = \frac{p}{\alpha}$ alınırsa $q > 1$ olur. O halde her $k \in N_0$ için

$$t_{k+1}^{q} \leq K^{q} t_k^{p}$$

ve böylece her $k \in N_0$ için

$$\frac{1}{t_k^p} \leq K^q \frac{1}{t_{k+1}^q}$$

olur. O halde $f(t) = 1/t^q$ ve $g(t) = 1/t^p$ fonksiyonları (5.6) eşitsizliğini sağlar. Ayrıca, f fonksiyonunun $[t_0, \infty)$ aralığında artmayan bir fonksiyon ve $\int_{t_0}^{\infty} f(t) dt < \infty$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.7 sayesinde $\int_{t_0}^{\infty} g(t)\Delta t < \infty$ yani, $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p} < \infty$ sonucuna ulaşılır.

Örnek 5.9. Her $k \in N_0$ için

$$t_k = 2^{(2^k)}$$

noktalarını ve (5.1) şartını sağlayan $T = \{t_k : k \in N_0\}$ zaman skalasını dikkate alalım. Bu zaman skalası için

$$\sigma(t) = t^2 = \mathrm{O}(t^2)\ ,\ t \to \infty$$

eşitliği mevcuttur. Teorem 5.8 kullanılarak

$$\int_2^\infty \frac{\Delta t}{t^3} < \infty$$

sonucuna ulaşılır.

Bu bölümün ikinci kısmı için yukardan sınırsız olan keyfi bir zaman skalasını dikkate alalım. Yani (4.1) şartını zaman skalasını göz önüne alalım.

Lemma 5.10. T zaman skalası (4.1) şartını sağlasın. Eğer $f : [t_0 . \infty) \to R$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k) \le \int_{t_0}^{\infty} f(t)\Delta t \le \sum_{k=0}^{\infty} f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

eşitsizlikleri mevcuttur[1].

İspat:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty} f(t)\Delta t &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t)\Delta t \\ &\ge \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t_{k+1})\Delta t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(t_{k+1})(t_{k+1} - t_k)\end{aligned}$$

ifadesi ilk eşitsizliği gösterir. İkinci eşitsizlik benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 5.11. T zaman skalası (4.1) şartını sağlasın. $0 \le p \le 1$ olsun. O zaman,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p} = \infty$$

olur[1].

İspat: $p = 1$ dışındaki durumlar karşılaştırma yapılarak elde edilebileceğinden sadece $p = 1$ durumunu göstermek yeterli olacaktır. Lemma 5.10'un ilk eşitliği ile

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t} \ge \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+1}} \tag{5.7}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_k}$$

toplamı , $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t}$ ıraksak integralin bir üst toplamı olduğundan bu değer sonsuzdur. Açık bir şekilde Teorem 5.5'in ispatında olduğu gibi (5.7) eşitsizliğinin sağ tarafındaki toplam da sonsuza eşittir.

Şimdi, tekrar $p > 1$ için $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p}$ genelleştirilmiş integralin yakınsaklık problemine dönelim.

Teorem 5.12. T, (4.1) şartını sağlayan bir zaman skalası, $f : [t_0 . \infty) \to R_+$ fonksiyonu, $\int_{t_0}^{\infty} f(t) dt < \infty$ olacak şekilde artmayan bir fonksiyon olsun. $g : [t_0 . \infty) \cap T \to R_+$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon ve her $k \in N_0$ için

$$g(t_k) \le K f(t_{k+1}) \tag{5.8}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\int_{t_0}^{\infty} g(t) \Delta t < \infty$ olur. Burada $K > 0$ keyfi bir sabittir[1].

İspat: (5.8) eşitsizliği ve Lemma 5.10'un ikinci eşitsizliğinden yararlanarak

$$\int_{t_0}^{\infty} g(t)\Delta t \leq \sum_{k=0}^{\infty} g(t_k)(t_{k+1}-t_k)$$

$$\leq K\sum_{k=0}^{\infty} f(t_{k+1})(t_{k+1}-t_k)$$

$$\leq K\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt$$

$$< \infty$$

sonucuna ulaşılır. Burada bir integralin alt toplamının bu integralden ya az ya da eşit olma gerçeği kullanıldı.

Şimdi Terem 5.12 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.13. T zaman skalası (4.1) i sağlasın ve $p > 1$ olsun. Eğer

$$t_{k+1} = \mathrm{O}(t_k^{\alpha}) \ , \ k \to \infty$$

olacak şekilde $\alpha \in [1, p)$ varsa $\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p} < \infty$ eşitsizliği mevcuttur[1].

İspat: $p > 1$ ve $\alpha \in [1, p)$ olmak üzere, $t_{k+1} = \mathrm{O}(t_k^{\alpha})$, $k \to \infty$ olsun. O zaman, $\forall k \in N_0$ için

$$t_{k+1} \leq K t_k^{\alpha}$$

olacak şekilde bir $k > 0$ sabiti vardır. $q = \dfrac{p}{\alpha}$ alınırsa $q > 1$ olur. O halde teoremin ispatı, Teorem 5.8'in ispatına benzer şekilde sonlandırılabilir.

Sonuç 5.14. T yukarıdan sınırsız bir zaman skalası ve $p > 1$ olsun. Eğer, $t \to \infty$ için $\sigma(t) = \mathrm{O}(t^{\alpha})$ olacak şekilde $\alpha \in [1, p)$ mevcut ise

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p} < \infty$$

olur[1].

İspat: Teorem 5.13'ün şartlarını sağlayacak şekilde (4.1) şartını sağlayan bir $\{t_k : k \in N_0\}$ dizisi inşa edelim. Böylece teorem Teorem 5.13 ile sağlanacaktır. $p > 1$ ve her $t \in T$ için

$$\sigma(t) \le Kt^{\alpha} \tag{5.9}$$

olacak şekilde $\alpha \in [1, p)$ var olsun. Burada $K > 1$ dir. Her $t \in T$ ve $t > 1$ için

$$A(t) = \{s \in T : t < s \le Kt^{\alpha}\}$$

kümesi göz önüne alınırsa (5.9) eşitsizliğinden her $t \in T$ için $A(t) \ne \varnothing$ dır. Burada T kapalıdır ve $\max A(t)$ mevcut olup her $t \in T$ için T zaman skalasının bir elemanıdır. Şimdi $t_0 > 1$ olmak üzere, $t_0 \in T$ olsun ve her $k \in N_0$ için $t_{k+1} = \max A(t_k)$ ile tanımlanan bir $\{t_k : k \in N_0\}$ dizisi tanımlansın. Böylece her $k \in N_0$ için $t_k < t_{k+1} \le Kt_k^{\alpha}$ eşitsizlikleri vardır. O halde $\{t_k : k \in N_0\}$ dizisi artandır ve Teorem 5.13 koşullarını sağlar. İspatı tamamlamak için sadece

$$\lim_{k \to \infty} t_k = \infty \tag{5.10}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.(5.10) eşitliğinin tersi doğru olsun. Bu durumda $\{t_k : k \in N_0\}$ kümesi sınırlıdır. O zaman, $\lim_{k \to \infty} t_k$ limitinin var ve bu limitin M'ye denk olduğu söylenebilir. T kapalı olduğundan $M \in T$ dir. $A(t)$ aralığının $l(t)$ uzunluğu

$$l(t) = Kt^{\alpha} - t \ge Kt - t \ge (K-1)t_0 =: \delta > 0$$

eşitsizliklerini sağlar. $M - t_N < \delta$ olacak şekilde bir $N \in N_0$ indisi seçilsin. Fakat o zaman t_{N+1} tanımına göre $t_{N+1} \ge M$ olmalıdır ve (5.9) eşitsizliğinden dolayı $t_{N+2} > M$ bir çelişkidir. O halde ispat biter.

Örnek 5.15. T yukarıdan sınırsız bir zaman skalası ve T zaman skalasının sıçrama fonksiyonu sınırlı olsun. O zaman,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Delta t}{t^p} \tag{5.11}$$

birinci çeşit genelleştirilmiş integrali $p \le 1$ ise ıraksak, $p > 1$ ise yakınsaktır. Bu sonuç Teorem 5.11 ve Sonuç 5.14 yardımıyla ($\alpha = 1$) elde edilir.

6.İKİNCİ ÇEŞİT GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

T bir zaman skalası, $a<b$ eşitsizliğini sağlayan a ve b noktaları T zaman skalasının sabit noktaları ve b sol yoğun nokta olsun. f fonksiyonu $[a,b)$ üzerinde tanımlı olsun. f fonksiyonunun $c<b$ olmak üzere her $[a,c]$ aralığında integrallenebilir ve $[a,b)$ aralığında sınırsız olduğunu kabul edelim. O zaman Riemann integrallenebilir bir fonksiyon $[a,b)$ aralığında a'dan b'ye sınırlı olması gerektiğinden f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında sıradan Riemann integrali mevcut olamaz.

$$\int_a^b f(t)\Delta t \tag{6.1}$$

ifadesi ikinci çeşit genelleştirilmiş integral olarak isimlendirilir. (6.1) integralinin $t=b$ noktasında sınırsız olduğu söylenebilir. Bu durumda f fonksiyonu $t=b$ noktasında bir singülerliğe sahiptir. Eğer

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(t)\Delta t \tag{6.2}$$

sol limiti bir sonlu sayı olarak varsa, (6.1) genelleştirilmiş integrali vardır ya da yakınsaktır denir. Bu durumda bu limit (6.1) genelleştirilmiş integralinin değeri olarak isimlendirilir ve

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(t)\Delta t$$

şeklinde yazılır. Eğer (6.2) limiti mevcut değil ise (6.1) integraline yoktur ya da ıraksaktır denir.

Dördüncü bölümde verilen tüm teoremler çok az bir ifade farklılığı ile ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller için geçerli olan teoremlere benzer.

(6.1) integralinin varlığı için gerek ve yeter şart Cauchy kriterini sağlamasıdır: Her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $b_0<b$ sayısı vardır öyle ki $b_0<c_1<b$ ve $b_0<c_2<b$ eşitsizliklerini sağlayan her $c_1,c_2\in T$ için

$$\left| \int_{c_1}^{c_2} f(t)\Delta t \right| < \varepsilon$$

olur.

(6.1) integralinde $f(t) > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde , $c \in [a,b)$ için

$$F(c) = \int_a^c f(t)\Delta t$$

fonksiyonunda c artarken $F(c)$ azalmaz. (6.1) integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart F fonksiyonunun sınırlı olmasıdır. Bu durumda integralin değeri $\lim_{c \to b^-} F(c)$ olur. Bu sonuç, Teorem 4.5 ile benzer bir karşılaştırma testinin ispatına olanak sağlar. Buradan aynı çeşit iki integralin ıraksaklığını ya da yakınsaklığını veren limit testi elde edilir. Yani $\int_a^b f(t)\Delta t$ ve $\int_a^b g(t)\Delta t$ integralleri için $\lim_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)}$ limiti incelenmelidir.

Birinci çeşit genelleştirilmiş integraller için ifade edilen benzer tanımlar yapılır ve benzer sonuçlar ikinci çeşit genelleştirilmiş integraller için elde edilir.

Uyarı 6.1. Uygulamalarda yer alan birçok genelleştirilmiş integral karışık tiptendir. Eğer integrasyon aralığının arasında singüler noktalar varsa ya da integrasyon aralığının her iki ucunda ise, integral birkaç parçaya ayrılmalıdır. Bu parçaların her biri ya birinci çeşit ya da ikinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin saf halleridir. Eğer saf tiplerin bir tanesi ıraksak ise integrale ıraksaktır denir[1].

Şimdi

$$\int_a^b \frac{\Delta t}{(b-t)^p} \tag{6.3}$$

genelleştirilmiş integralini göz önüne alalım:

Teorem 6.2. T keyfi bir zaman skalası, $a, b \in T$ noktaları $a < b$ eşitsiziğini sağlasın. b sol yoğun nokta ve $p \geq 1$ olsun. O zaman, (6.3) integrali ıraksaktır[1].

İspat: $p \geq 1$ durumu için sonuç karşılaştırmadan elde edileceğinden, sadece $p = 1$ durumu için ispatı yapmak yeterlidir.

$t_n \in \mathrm{T}$ noktaları

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < b \text{ ve } \lim_{n \to \infty} t_n = b$$

olarak seçilsin. Her $n \in N_0$ için

$$\tau_n = \frac{1}{b - t_n}$$

olarak alınsın. $\tau_0 = \dfrac{1}{b-a} > 0, \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ...$ ve $\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty$ ve ayrıca her $n \in N_0$ için

$$t_{n+1} - t_n = \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{\tau_n \tau_{n+1}}$$

eşitlikleri mevcuttur. O halde,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\Delta t}{b-t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\Delta t}{b-t} \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Delta t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_{n+1} - t_n}{b - t_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_{n+1} - \tau_n}{\tau_{n+1}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olur. Burada son eşitsizlik Teorem 5.5 yardımıyla elde edilir.

Teorem 6.3. T, Teorem 6.2'nin şartlarını sağlayan bir zaman skalası olsun. $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < b$ ve $\lim_{n \to \infty} t_n = b$ olacak şekilde $n \in N_0$ için $t_n \in T$ noktaları mevcut ve $p < 1$ olmak üzere bir $\alpha \in [1, \frac{1}{p})$ için

$$\frac{1}{b-t_{k+1}}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{(b-t_k)^{\alpha}}\right),\ k\to\infty$$

olsun. Bu takdirde, (6.3) genelleştirilmiş integrali yakınsaktır[1].

İspat: $n\in N_0$ için Teorem 6.2'nin ispatındaki gibi τ_n noktalarını tanımlayarak

$$\tau_{k+1}=\mathrm{O}(\tau_k^{\alpha})\ ,\ \ k\to\infty$$

İfadesi elde edilir. Yani her $k\in N_0$ için $\tau_{k+1}\le Kt_k^{\alpha}$ olacak şekilde sabit bir $K>0$ sayısı vardır. Böylece

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\Delta t}{(b-t)^p} &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\Delta t}{(b-t)^p}\\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b-t_{k+1})^p}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\Delta t\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t_{k+1}-t_k)}{(b-t_{k+1})^p}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k\tau_{k+1}^{1-p}}\\
&\le K^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_{k+1}^{\frac{1}{\alpha}+1-p}}\\
&\le K^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}}\frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha}+1-p}}\\
&= K^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{1}{\alpha}+1-p}}\\
&<\infty
\end{aligned}$$

olur. Çünkü $\alpha\in[1,\frac{1}{p})$ olduğundan $\frac{1}{\alpha}+1-p>1$ olmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Martin Bohner and Gusein Sh.Guseinov,2003,"Improper Integrals on Time Scales",*Dynamic Systems Applications*

[2] Bohner, M.,Peterson, A.,2001, "Dynamic Equations on Time Scales: An introduction with Applications" ,*Birkhauser*, Boston.

[3] Guseinov, S., Kaymakçalan, B. , 2002, "Basics of Riemann delta nabla integration on time scales" ,*J.Difference Equ. Appl.*, Vol.8(11):1001-1017

[4] Bohner, M.,Peterson, A.,2003,"Advances in Dynamic Equations on Time Scales" ,*Birkhauser*, Boston.

[5] Guseinov,G.Sh.,2003, "Integration on Time scales" ,*J. Math. Anal. Appl.*, 285:107-127.

[6] B. Aulbach and S. Hilger. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale. *Nonlinear dynamic and Quantum Dynamical Systems*, 1990, volume 59 of *Math.*

[7] S. Hilger. Analysis on measure chains-a unified approach to contınuous and discret calculus, 1990

[8] S. Sailer. Riemann-Stieltjes Integrale auf Zeitmengen. Universitat Augsburg, 1992.

[9] Guseinov, S., Kaymakçalan, B. On the Riemann integration on time scales. *Conference Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations and Applications*, 2001,Augsburg.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı	:DORUK Muhammet
Uyruğu	:T.C
Doğum Tarihi ve Yeri	:01.03.1986 Acıpayam
Medeni Hali	:Bekar
Telefon	:0554 465 8239
e-mail	:m_doruk_20@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Uşak Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2011
Lisans	Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü	2009
Lise	Acıpayam Anadolu Lisesi /Denizli	2003

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

Yayınlar

“Darboux Rotation Axis of the Curve in Galilean and Pseudo-Galilean Spaces”,2011,*Journal of Vectorial Relativity*

Hobiler

Sinema, Kitap, Futbol, Bilgisayar, Matematik