T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELİPTİK KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEÇİL ÖZİZMİRLİ

HAZİRAN 2011
UŞAK

SEÇİL ÖZİZMİRLİ tarafından hazırlanan "Eliptik Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümleri Üzerine" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYİDOĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: 13/06/2011

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür V.

ELİPTİK KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Seçil ÖZİZMİRLİ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Haziran, 2011

ÖZET

Bu çalışmada Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu'ndan yola çıkılarak lineer Laplace denklemi ve lineer olmayan denklemlerin değişik başlangıç şartları altında çözümleri bulunacaktır.

İlk bölümde çalışmanın kapsamından söz edilmiştir.

İkinci bölümde bu konu ile ilgili temel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu farklı başlangıç şartları altında verilen Laplace denklemine ve lineer olmayan eliplik denkleme uygulanmıştır.

Beşinci bölümde ise dördüncü bölümde elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bilim Kodu:403.06.01
Anahtar Kelimeler: Laplace Denklemi, Adomian Ayrışım Metodu, Homotopi Pertürbasyon Metodu
Sayfa Adedi:34
Tez yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ

THE SOLUTİON OF ELLIPTIC PARTIAL DIFERANTIAL EQUATION

(M.Sc . Thesis)

SEÇİL ÖZİZMİRLİ

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUDE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June, 2011

ABSTRACT

In this study, the Adomian Decomposition Method and Homotopy Perturbation Method for solving the linear Laplace Equation and nonlinear elliptic equation are implemented with appropriate initial conditions.

In the first chapter, the content of study is mentioned.

In the second chapter, some basic definitions have been given.

In the third chapter, the Adomian Decomposition Method and Homotopy Perturbation Method are explained.

In the fourth chapter, applying of Adomian Decomposition Method and Homotopy Perturbation Method to Laplace Equations and nonlinear elliptic equation with different initial conditions were performed.

In the fifth chapter, results which are obtained from the fourth chapter are compared.

Scıence Code:403.06.01

Key Words: Laplace Equation, elliptic partial differantial equations, Adomian Decomposition Method, Homotopy Perturbation Method

Page Number:34

Adviser:Asist.Prof.Dr.Ali DENİZ

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun seçilmesinde, çalışmanın planlanması, hazırlanması ve sonuçlandırılması sürecinde gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, rehberliğini ve ilgisini esirgemeyen çok kıymetli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca yüksek lisans süresince benden maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen aileme, tezimi tamamlamam için benimle beraber emek harcayan nişanlım Özkan BULAL'a, çalışmalarım boyunca yardımını esirgemeyen Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü çalışanlarına teşekkürlerimi sunarım.

HAZİRAN 2011 **Seçil ÖZİZMİRLİ**

UŞAK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

L	**: Diferansiyel operatörü**
L^{-1}	**: İntegral operatörü**
Nu	**: Lineer olmayan terim**
Lu	**: Lineer terim**
A_n	**: Adomian polinomu**
$u(x,t)$	**: Çözüm fonksiyonu**
$B\left(u,\frac{\partial u}{\partial n}\right)$	**: Başlangıç koşulu**
$f(r)$	**: Analitik fonksiyon**

1. GİRİŞ

1.1 Çalışmanın kapsamı:

Kısmi türevli diferansiyel denklemler uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendisliğin birçok alanında önemli rol oynamaktadır.

Gelişen bilgisayar teknolojisi ile lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözüm metodları ile birlikte sayısal metotlar için geçen birkaç yıl içinde birçok genel amaçla metotlar geliştirilmiştir. Bu çalışmada ele alınan metotlardan biri olan Adomian ayrışım metodu, G. Adomian tarafından 1980' li yıllarda literatüre kazandırılmıştır. Lineer- lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan ayrışım yöntemi, uygulamada başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana göre bir veya çok boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini bulmada kullanılmaktadır. Sayısal metotların çoğunda kısmi diferansiyel denklemleri indisleyerek ya da günümüzde geçerli olan sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak, diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri oluşturulmuştur. Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için önerilen ayrıştırma metodu kullanılarak indislemeye ihtiyaç duyulmaz. Sayısal çözümlerin elde edilmesi için indisleme yapma yerine, ayrıştırma serisinin terimleri bulunarak sayısal çözümler oluşturulmuştur(Adomian, 1988). Bu metot lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemleri sadeleştirmeden çözerek gerçekçi çözümler sağlar. Bulunan çözümler seri formundadır. Sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın nümerik sonuçlar bulunabilir. Ayrışım metodu, diğer klasik yöntemlere göre daha basit daha karmaşık denklemlere uygulanabilen bir yöntemdir(Adomian, 1988). Literatürde bu metot kullanılarak lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (Kaya 1999; 2000; 2001; 2002; Wazwaz 1995; 1997; 1999; 2001) ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinde hesaplanabildiği ve bilinen klasik metotlar kullanılarak bu sayısal sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır (Bellomo ve Sarafyan, 1987; Bellomo ve Monaco, 1985; Wazwaz, 1998; Van Tonningen, 1995; Kaya ve Çatalbaş,2000).

Çalışılan diğer metot homotopi pertürbasyon metodu lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin çözümü için uygulanabilmektedir. İlk olarak Ji. Huan, He tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu yöntemde homotopi tekniğine göre $p \in [0,1]$ parametresi ile bir homotopi kurulur ve bu parametre küçük bir parametre olarak düşünülür. Bilinen pertürbasyon metotlarının ve topolojideki homotopinin avantajlarını kapsayan bu metot, kolaylıkla çözülebilecek basit problemlere dönüştürülerek çözüm elde edilebilmektedir. Bu yöntem ayrıca lineer olmayan dalga denklemlerine, başlangıç değer problemlerine, lineer olmayan salınım denklemlerine de uygulanabilmektedir.

Bu çalışmada Adomian Ayrıştırma Metodu ve Homotopi Pertürbasyon Metodu' nun karşılaştırılmasına da yer verilmiştir. Laplace Denklemi' ne ve diğer eliptik kısmi türevli denkleme uygulanan metodlarda bulunan sonuçlar karşılaştırılmış ve aynı olduğu görülmüştür. Fakat lineer olan denklemlerin çözümü için iki metodunda uygulaması kısa ve basit olup, lineer olmayan denklemlerin çözümünde Adomian Ayrışım Metodu kullanıldığında Adomian polinomlarının bulunması zor ve zaman aldığından Homotopi Pertürbasyon Metodu'nun daha kısa, daha kolay ve daha hızlı sonuca ulaştığı görülecektir.[7]

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. (Diferansiyel Denklem): Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir. Genel olarak ikiye ayrılır.

Tanım 2.1.2. (Adi Diferansiyel Denklem): Bir bağımlı ve bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denkleme denir ve genel olarak adi diferansiyel denklem,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_0(x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

şeklindedir. n. basamaktan bir diferansiyel denklemin genel formu F keyfi bir fonksiyon olmak üzere;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1.1)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.3. (Kısmi Diferansiyel Denklem): İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denkleme denir.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0 \qquad (2.1.2)$$

şeklindedir. Burada

$$z_x = \frac{dz}{dx}, z_y = \frac{dz}{dy}, z_{xx} = \frac{d^2 z}{dx^2}, z_{xy} = \frac{d^2 z}{dxdy}, z_{yy} = \frac{d^2 z}{dy^2}$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli

$x = (x_1, \ldots, x_n),\ z = z(x)$ olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \ldots) = 0 \qquad (2.1.3)$$

formundadır.[12]

Kısmi türevli diferansiyel denklemleri hiperbolik, parabolik, eliptik olarak sınıflandırmak için

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

denklemini düşünelim. Burada $A, B, C \in C^2[D]$ dir. Diğer yandan

$$\Delta(x,y) = [B(x,y)]^2 - 4A(x,y)C(x,y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

a) $\Delta(x,y) > 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda hiperbolik,

b) $\Delta(x,y) = 0$ eşitliğinin sağlandığı noktalarda parabolik,

c) $\Delta(x,y) < 0$ eşitsizliğinin sağlandığı noktalarda eliptik

tiptendir denir. Şimdi fiziksel olayların bu tip kısmi diferansiyel denklemler şeklinde ifade edilmesine ait bilinen bazı örnekleri verelim.

Hiperbolik Tip:

En iyi bilinen örneği dalga denklemleridir. c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkeni ve $u = u(x,y)$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

1-boyutlu dalga denklemidir.

Bir boyutlu dalga denkleminin çözümü bize ℓ uzunluğunda titreşim halinde olan bir telden t saniye sonra bir ucundan x kadar uzaklıktaki enine yer değişimini verir. Bu tip denklemlerde başlangıç ve sınır değerleri bilinir.

Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır. Ayrıca hiperbolik denklemler genellikle titreşim problemlerinde veya yoğunluk, basınç ve hızdaki süreksizlik durumları ile ilgili problemlerde kullanılır.

Parabolik Tip:

Zamana bağlı ısı veya madde yayılması problemlerinde karşılaşılır. En basit parabolik denklem;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklindedir.

Bu denklem ısı iletim teorisinden elde edilmiş olup çözümü bize termal olarak izole edilmiş bir çubuğun bir ucundan x kadar uzaklıktaki noktasında t anındaki veya t saniye sonraki sıcaklığını verir. Bu tip denklemlerde başlangıç ve sınır değerleri bilinir.

Eliptik Tip:

Eliptik kısmi diferansiyel denklemler genellikle denge veya kararlı hal problemleri ve bunların çözümüyle karşımıza çıkar.

En iyi bilinen eliptik denklemler Laplace ve Poisson Denklemleridir. Matematikte Laplace denklemi ve özellikleri ilk defa Pierre-Simon Laplace tarafından çalışılmış bir kısmi türevli denklemdir. Laplace denklemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Çoğunlukla bu denklem $\nabla^2 \varphi = 0$ denklemi olarak veya div'in divergensi ve grad'ın ise gradyanı temsil ettiği

$$div\ grad\varphi = 0$$

denklemi olarak veya Δ ' nın Laplace operatörü olduğu

$$\Delta\varphi = 0$$

denklemi olarak yazılır.

Laplace denkleminin çözümlerine aynı zamanda harmonik fonksiyonlarda denmektedir.

Denklemin sağ tarafı eğer belli bir $f(x,y)$ fonksiyonu şeklinde verilirse, yani denklem

$$\Delta\varphi = f(x,y)$$

olarak ifade edilirse, o zaman denkleme Poisson denklemi adı verilir. Poisson denklemi aynı zamanda aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f(x,y)$$

Laplace denklemi potansiyel teorinin temel denklemlerinden birisi olduğundan fiziksel uygulamaları çoktur. Örneğin yüzeyleri izole edilmiş bir ortamda zamandan bağımsız bir ısı dağılımı varsa (ki buna kararlı ısı denir) herhangi bir (x,y) noktasındaki ısı miktarını veren $u(x,y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar. Ayrıca ısı kaynağı olmayan bir bölgede kararlı sıcaklık dağılımı, iletkenlerle çevrili yüksüz bir bölgede elektrostatik potansiyel, kaynak veya kuyu olmayan bir akışkanda hız dağılımı vs. problemlerinde de karşımıza çıkar.

Dış kuvvetlerin etkisi altındaki bir telin zamana bağlı olarak denge konumuna gelmesi ise Poisson denklemi ile gösterilir. Ayrıca bundan başka skaler potansiyelde Poisson denklemini sağlar. Poisson denklemi ile gösterilen fiziksel iki olguyu örnek olarak verecek olursak; birincisi, ρ yük yoğunluğunun varlığı, negatif bir Ψ elektriksel potansiyelin oluşmasına sebep olur. Bu fiziksel olgu ε sabit olmak üzere $\nabla^2\Psi=-{}^{\rho}/_{\varepsilon}$ ile gösterilir. İkincisi ise akışkan içinde θ ısı kaynağından bir yayılımın varlığı, T sıcaklığının oluşmasına sebep olur. Böylece k sabiti için $\nabla^2T=k\theta$ şeklinde yazılır. Kısmi diferansiyel operatörü olan ve herhangi bir boyutta tanımlanabilen ∇^2 ye Laplace operatörü veya kısaca Laplasyen denir.

Tanım 2.1.4: m. dereceden bir

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m=0$$

polinomunu ele alalım. $f(x)$ fonksiyonunun $x_0=c$ de her mertebeden türevi varsa

$$f(x)=f(c)+f^{'}(c)(x-c)+\frac{f^{'}(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{n}(c)}{n!}(x-c)^n+\cdots$$

ifadesine, yani kısaca

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

toplamına $x_0=c$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi adı verilir. Eğer $c=0$ alınırsa

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

toplamına Maclaurin serisi denir.

2.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Lineer, Yarı lineer ve Hemen Hemen Lineer olmasına göre Genel Bir Sınıflandırması

2.2.1. Lineer Olmasına Göre

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (veya değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları oluyorsa bu denkleme *lineerdir* denir. Aksi halde *lineer olmayan denklem* adını alır.

İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x,y)z_x + Q(x,y)z_y + R(x,y)z = S(x,y)$$

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y)z_x + E(x,y)z_y + F(x,y)z = G(x,y)$$

2.2.2. Yarı Lineer (Kuasi-Lineer) Olmasına Göre

Bir kısmi türevli denklem, denklemde bulunan en yüksek basamaktan kısmi türevlere göre (denklemdeki düşük basamaklı türevlerin ve bağımlı değişkenin bulunuş şeklinden bağımsız olarak) lineer ise bu denklem *yarı lineer (Kuasi-Lineer)* adını alır.

İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(x,y,z)z_x + Q(x,y,z)z_y = R(x,y,z)$$

$$A(x,y,z,z_x,z_y)z_{xx} + B(x,y,z,z_x,z_y)z_{xy} + C(x,y,z,z_x,z_y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

2.2.3. Hemen-Hemen Lineer Olmasına Göre

Bir kısmi türevli denklem yarı-lineer ve denklemde görülen en yüksek basamaktan türevlerin katsayıları yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonları ise bu denkleme hemen-hemen lineerdir denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip ikinci basamaktan hemen-hemen lineer bir denklemin genel şekli;

$$A(x,y)z_{xx} + B(x,y)z_{xy} + C(x,y)z_{yy} + D(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

dır.[12]

3. ELİPTİK DENKLEMLERİN ÇÖZÜM METODLARI

3.1. Adomian Ayrıştırma Metodu(ADM):

Ayrısım metodu bir seri çözüm yöntemidir. Birçok lineer veya lineer olmayan, cebirsel diferansiyel denkleme başarıyla uygulanabilmektedir. Adomian ayrışım metodu diferansiyel denklemlerin çözümü ve denklemleri 1.dereceden diferansiyel denkleme dönüştürmek için kullanılır. Bu metot genel hatları ile incelenecek olursa, F hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere,

$$Fu(x) = g(x) \tag{3.1.1}$$

denklemi ele alınsın. (3.1.1) denkleminde, N ; diferansiyel denkleminde lineer olmayan terimi R ; lineer operatörden kalan kısmı ve L ; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini göstermek üzere,

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{3.1.2}$$

şeklinde ayrıştırarak yazılsın. L lineer bir operatördür ve terside mevcuttur.

$$L_{xx} = \frac{\partial}{\partial x^2}$$

olarak ifade edilir. (3.1.2) eşitliği

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafına L^{-1} operatörü sol taraftan uygulanırsa,

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.1.4}$$

eşitliği elde edilir.

Başlangıç değer problemleri için L^{-1}, t_0 dan t ye tanımlanan integral operatörü olarak tanımlanabilir.

Eğer L, 2.derece operatör ise L^{-1} çift integral operatörüdür.

$$L^{-1}u(.) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}(.)dtdt$$

olarak tanımlanır.

Buradan

$$L^{-1}Lu = u - u(t_0) - (t - to)u'(to) \quad (3.1.5)$$

elde edilir. (3.1.4) eşitliğinde , $L^{-1}Lu$ yerine yazılırsa;

$$u = u(t_0) + tu'(t_0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.1.6)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (3.1.6) eşitliğindeki Nu lineer olmayan terim ve $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ biçiminde ifade edilebilir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır. Bu polinomlar üzerinde konuşulacaktır. (3.1.6) eşitliğindeki u ayrıştırılmış bir seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi olan u_0, verilen başlangıç değeri ve denkleminin sağ taraf fonksiyonunun integrali alınmak üzere,

$$u_0 = a + bt - L^{-1}g \quad (3.1.7)$$

şeklinde bulunur.

Daha sonra seri çözümünün birinci terimi olan u_0 terimini kullanarak $u_1, u_2, u_3, \ldots$ terimleri elde edilir. Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \quad (3.1.8)$$

biçiminde yazılabilir ve serinin yakınsak olduğu düşünülecektir. Bu seri çözümünü kullanarak (3.1.7) eşitliği tekrar yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.1.9)$$

biçimindeki genel seri formu elde edilir. Bununla beraber, (3.1.6) belirgin biçimde

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_o$$

$$u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1$$

$$\vdots \qquad (3.1.10)$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, n \geq 0$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki A_n polinomları lineer olmayan her bir terim için genelleştirilebilir. Bu genelleştirmede A_0 sadece u_0 ‘a, A_1 sadece u_0 ve u_1 ‘e, A_2 ise, u_0, u_1, u_2’ ye bağlı ve benzer şekilde (3.1.9) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir[18]. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise kaynaklarda,

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0),$$

$$A_2 = u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) + \left(\frac{u_1^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0), \qquad (3.1.11)$$

$$A_3 = u_3\left(\frac{d}{du_0}\right)f(u_0) + u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)f(u_0) + \left(\frac{u_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)f(u_0),$$

$$\vdots$$

şeklinde verilmektedir (Adomian, 1994). Ayrıştırılmış polinomların genel durumu,

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=1}, n > 0 \qquad (3.1.12)$$

Biçiminde formulize edilerek (Adomian, 1994; Seng ve arkadaşları, 1996) tarafından kaynaklara kazandırılmıştır. Bu Adomian polinomlarını elde etmek için bir alternatif metot ise (Wazwaz, 1999) tarafından geliştirilmiştir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olması istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (3.1.12) genel formülünün kullanılması, istenildiği kadar çok sayıda (3.1.8) ayrıştırma serisinin terimlerinin hesaplanmasında kolaylıklar sağlamaktadır.

Ayrışım metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için,

$$\phi_n(x,t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_n(x,t); \qquad n \geq 0 \qquad (3.1.13)$$

olmak üzere,

$$\mathrm{Lim}_{n\to\infty}\, \phi_n \qquad (3.1.14)$$

İfadesinin $(3.1.10)$ indirgeme bağıntısı incelenerek kolayca hesaplanabilir. Buna ek olarak $(3.1.14)$ şeklindeki ayrışım seri çözümü, genellikle fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsak ortaya çıkarmaktadır. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır. Ayrışım serisinin yakınsaklığını teorik olarak (Cherrualt ve Adomian, 1993; Abbaoui ve Cherrualt, 1994; Abbaoui ve Cherrualt, 1995) incelemişlerdir.

3.1.1. Adomian Polinomlarının Hesaplanması

Wazwaz [18] lineer olmayan terimlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirdi. Bu algoritmanın kullanılmasıyla bazı A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemle yapılır.

3.1.1.1. Lineer Olmayan Polinomlar

1.Durum

Eger $F(u) = u^2$ ise;

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad (3.1.15)$$

olmak üzere $F(u) = u^2$ lineer olmayan terimi $(3.1.15)$ de yerine yazılırsa

$$F(u) = (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)^2 \qquad (3.1.16)$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı açılırsa

$$F(u) = u_0^2 + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + u_1^2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_2 + \cdots \qquad (3.1.17)$$

elde edilir. $(3.1.17)$'deki açılımda indis toplamları aynı olan terimler bir araya getirilirse

$$F(u) = u_0^2 + 2u_0u_1 + 2u_0u_2 + u_1^2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_2 + 2u_0u_4 + 2u_1u_3 + u_2^2 + 2u_0u_5 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3 + \ldots \tag{3.1.18}$$

olur. (3.1.18)' dan

$F(u) = u^2$ için Adomian polinomları

$$\begin{aligned}
A_o &= u_0^2, \\
A_1 &= 2u_0u_1, \\
A_2 &= u_1^2 + 2u_0u_2, \\
A_3 &= 2u_1u_2 + 2u_0u_3, \\
A_4 &= y_2^2 + 2u_1u_3 + 2u_0u_4,
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

formunda bulunur.

II. Durum

Eger lineer olmayan terim

$F(u) = uu_x$ ise

$$\begin{cases} u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \\ u_x = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_x} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
F(u) &= (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots)(u_{0_x} + u_{1_x} + u_{2_x} + u_{3_x} + \ldots) \\
&= u_0u_{0_x} + u_{0_x}u_1 + u_0u_{1_x} + u_{0_x}u_2 + u_{1_x}u_1 \\
&+ u_{2_x}u_0 + u_{0_x}u_3 + u_{1_x}u_2 + u_{2_x}u_1 + u_{3_x}u_0 \\
&+ u_{0_x}u_4 + u_0u_{4_x} + u_{1_x}u_3 \ldots
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

ve indis toplamları aynı olan ifadeler gruplandırılırsa

$$\begin{aligned}
A_o &= u_0u_{0_x}, \\
A_1 &= u_{0_x}u_1 + u_0u_{1_x}, \\
A_2 &= u_{0_x}u_2 + u_{1_x}u_1 + u_{2_x}u_0, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

bulunur.

3.1.1.2 Trigonometrik Lineer Olmayanlık

1.Durum

$F(u) = sin\,u$ ise o zaman ilk olarak $A_0 = F(u_0)$ ifadesini diğer terimlerden ayırmalıyız, çünkü diğer terimler y_0'a bağlı olarak hesaplanmaktadır.

$$F(u) = sin\,u$$

Lineer olmayan terimi (3.1.16) da yerine yazılırsa

$$F(u) = sin\,[u_0 + (u_1 + u_2 + u_3 \ldots) \tag{3.1.22}$$

Ve bu ifadede $\theta = u_0, \emptyset = u_1 + u_2 + u_3 \ldots$ alınırsa,

$$sin(\theta + \emptyset) = sin\,\theta\,cos\,\emptyset + cos\theta sin\emptyset \tag{3.1.23}$$

ifadesinden

$$F(u) = sin\,u_0\,cos(u_1 + u_2 + u_3 \ldots) + cos\;u_0\,sin\;(u_1 + u_2 + u_3 \ldots) \tag{3.1.24}$$

Bulunur. Burada $cos(u_1 + u_2 + u_3 \ldots)$ ve $sin(u_1 + u_2 + u_3 \ldots)$ ifadeleri Taylor serisine açılırsa

$$F(u) = sinu_0\left[1 - \frac{1}{2!}(u_1 + u_2 + u_3 \ldots)^2 + \frac{1}{4!}(u_1 + u_2 + \cdots)^4 - \ldots\right]$$

$$+ cos\,u_0\left[(u_1 + u_2 + u_3 \ldots) - \frac{1}{3!}(u_1 + u_2 + \cdots)^3 + \ldots\quad\right] \tag{3.1.25}$$

ve böylece

$$F(u) = sinu_0\left(1 - \frac{1}{2!}(u_1^2 + 2u_1u_2 + \ldots + \frac{1}{4!}u_1^4 + u_2^4 + \ldots) - \ldots\right) +$$

$$cos\,u_0\left[(u_1 + u_2 + u_3 \ldots) - \frac{1}{3!}(u_1^3 + u_2^3 + \ldots) + \ \ldots\right] \tag{3.1.26}$$

Bulunur. (3.1.26) ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned}
A_o &= sin\,u_0,\\
A_1 &= u_1 cos\,u_0,\\
A_2 &= u_2 \cos u_0 - \frac{1}{2!}\mathrm{u}_1^2 sinu_0,\\
A_3 &= u_3 \cos u_0 - u_1u_2 sinu_0 - \frac{1}{3!}u_1^3 cosu_0\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.27}$$

elde edilir.

II.Durum

Eger $F(u) = \cos u$ ise yukarıdaki yapılan işlemlerin benzerleri verilen lineer olmayan terim için uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
A_0 &= \cos u_0,\\
A_1 &= -u_1 \sin u_0,\\
A_2 &= -u_2 sinu_0 - \frac{1}{2!}u_1^2 cosu_0,
\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

$$A_3 = -u_3 sinu_0 - u_1u_2 \cos u_0 - \frac{1}{3!}u_1^3 \sin u_0,$$

$$A_4 = -u_4 sinu_0 - \left(\frac{1}{2!}u_2^2u_1u_2\right)\cos u_0 + \frac{1}{2!}u_1^2u_2 sinu_0 + \frac{1}{4!}u_1^4 cosu_0$$

bulunur.

III.Durum

Eger $F(u) = sinh\, u$ ve $F(u) = cosh\, u$ şeklinde hiperbolik lineer olmayanlığa sahip ise aynı algoritma kullanılarak Adomian polinomları sırasıyla,

$$A_0 = sinh\, u_0,$$

$$A_1 = u_1 coshu_0,$$

$$A_2 = u_2 coshu_0 + \frac{1}{2!}u_1^2 \, sinh\, u_0,$$

$$A_3 = u_3 \, cosh\, u_0 + u_1u_2 \, sinh\, u_0 + \frac{1}{3!}u_1^3 \, cosh\, u_0,$$

$$A_4 = u_4 \, cosh\, u_0 + \left(\frac{1}{2!}u_2^2u_1u_3\right) sinhu_0 x \frac{1}{2!}u_1^2u_2 \cos u_0 + \frac{1}{4!}u_1^4 \sin y_0$$

$$\vdots$$

ve

$$A_0 = cosh\, u_0$$

$$A_1 = u_1 \, sinh\, u_0,$$

$$A_2 = u_2 \, sinh\, u_0 + \frac{1}{2!}u_1^2 \, cosh\, u_0,$$

$$A_3 = u_3 \, sinh\, u_0 + u_1u_2 \, cosh\, u_0 + \frac{1}{3!}u_1^3 \, sinh\, u_0,$$

$$A_4 = u_4 \, sinh\, u_0 + \left(\frac{1}{2!}u_2^2u_1u_3\right) cosh\, u_0 \, x \frac{1}{2!}u_1^2u_2 \sin u_0 + \frac{1}{4!}u_1^4 \cos y_0,$$

$$\vdots$$

formülleriyle elde edilir.

3.1.1.3 Üstel Lineer Olmayanlık

I.Durum

Eger $F(u) = e^u$ ise bu takdirde $F(u_0) = e^{u_0}$ teriminin diğer terimlerden ayrılması gerekir.

$$F(u) = e^u$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$F(u) = e^{u_0+u_1+u_2+u_3 \ldots}$$

ve ya

$$F(u) = e^{u_0}e^{u_1+u_2+u_3 \ldots}$$

elde edilir.

Bu son ifadede;

$e^{u_1+u_2+u_3 \ldots}$ terimi Taylor serisine açılırsa

$$F(u) = e^{u_0}x\left[1 + (u_1 + u_2 + u_3 + \ \ldots) + \frac{1}{2!}(u_1 + u_2 + u_3 + \ \ldots)^2 + \ \ldots\right]$$

$$= e^{u_0} + u_1e^{u_0} + \left(u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2\right)e^{u_0} + \left(u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3\right)$$

$$+ \left(u_4 + u_1u_3 + \frac{1}{2!}u_2^2 + \frac{1}{2!}u_1^2u_2 + \frac{1}{4!}u_1^4\right)e^{u_0} + \ \ldots$$

bulunur. Buradan da

$$A_0 = e^{u_0},$$

$$A_1 = u_1e^{u_0},$$

$$A_2 = \left(u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2\right)e^{u_0},$$

$$A_3 = \left(u_3 + u_1u_2 + \frac{1}{3!}u_1^3\right)e^{u_0},$$

$$A_4 = \left(u_4 + u_1u_3 + \frac{1}{2!}u_2^2 + \frac{1}{2!}u_1^2u_2 + \frac{1}{4!}u_1^4\right)e^{u_0},$$

$$\vdots$$

elde edilir.

II. Durum

Eger $F(u) = e^{-u_0}$, ise bu takdirde Adomian polinomları

$$A_0 = e^{-u_0},$$

$$A_1 = -u_1e^{-u_0},$$

$$A_2 = \left(-u_2 + \frac{1}{2!}u_1^2\right)e^{-u_0},$$

$$A_3 = \left(-u_3 + u_1u_2 - \frac{1}{3!}u_1^3\right)e^{-u_0},$$

$$A_4 = \left(-u_4 + u_1u_3 + \frac{1}{2!}u_2^2 - \frac{1}{2!}u_1^2u_2 + \frac{1}{4!}u_1^4\right)e^{-u_0},$$

$$\vdots$$

şeklinde olur.

3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu

Yakın zamana kadar lineer olmayan problemlerin çözümü için pek çok teknik, Pertürbasyon metotları ile yaygın biçimde verildi. Hemen hemen tüm Pertürbasyon metotları, bir küçük parametrenin mevcut olması varsayımına dayanır. Bilindiği gibi lineer olmayan problemlerin büyük çoğunluğu küçük parametreler içermez. Küçük parametreleri belirlemek özel teknikler içerir. Uygun olmayan küçük parametre seçimleri kötü sonuçlar verebilir. Uygun parametre varsa, Pertürbasyon metotları ile elde edilen çözüm doğrudur. Birçok durumda sadece parametrelerin küçük değerlerinde sağlanır. Tüm bu kısıtlamalar küçük parametre kabulünden kaynaklanmaktadır.

Homotopi pertürbasyon metodu lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerin, ayrıca lineer olmayan dalga denklemlerine, başlangıç değer problemlerine, lineer olmayan salınım denklemlerine de uygulanabilmektedir. Bu yöntemde homotopi tekniğine göre $p \in [0, 1]$ parametresi ile bir homotopi kurulur ve bu parametre küçük bir parametre olarak düşünülür. Pek çok durumda bu metot çabuk bir şekilde seri çözümü vermektedir.[10]

Bu bölümde, geliştirilen pertürbasyon metotlarından homotopi pertürbasyon metodunu inceleyeceğiz.

$$A(u) - f(r) = 0, \; r \in \Omega \tag{3.2.1}$$

lineer olmayan ve

$$B(u, \partial \mathrm{u}/\partial \mathrm{n}) = 0, u \in \Gamma \tag{3.2.2}$$

başlangıç koşulu ile verilen diferansiyel denklemi düşünelim. Burada, A genel diferansiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen fonksiyon, Γ ise Ω örnek uzayın bir bölgesi olsun A genel diferansiyel operatörü L ve N şeklinde iki kısma ayrılır. L lineer kısmı, N ise lineer olmayan kısmı temsil eder. Böylelikle (3.2.1) denklemi

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{3.2.3}$$

şekline dönüşür.

$$\mathcal{H}(v,p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0,\ p \in [0,1],\ r \in \Omega \quad (3.2.4)$$

Olacak şekilde $v(r,p)\colon \Omega \times [0,1] \to R$ homotopisi kurulur.

4. UYGULAMALAR

Örnek 4. 1:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad , x > 0,\; y < \pi$$

$$u(0, y) = 0 \qquad u(\pi, y) = sinhxcosy$$

$$u(x, 0) = sinhx \qquad u(x, \pi) = -sinhx$$

başlangıç koşulları ile verilen denklemi iki metodla da çözelim.

Çözüm:

İlk olarak ADM metodu ile çözüm yapılırsa;

$$L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

lineer operatör olmak üzere tersleri de mevcut ve

$$L^{-1}u(.) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} (.)dtdt$$

şeklinde tanımlansın.

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ denklemini operatör formda yazarsak;

$$L_{xx}u = -L_{yy}u$$

(4.1.1) elde edilir. Çözüm;

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x, y)$$

şeklinde olacaktır.

(4.1.1) eşitliğinin her iki tarafına ${L_{xx}}^{-1}$ uygulanırsa;

$$ {L_{xx}}^{-1}\big(L_{xx}u(x,y)\big) = -{L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) $$

elde edilir. Buradan

$$ u(x,y) + xh_1(y) + h_2(y) = -{L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) $$

bulunur. $u(x,y)$' yi düzenlersek;

$$ u(x,y) = -xh_1(y) - h_2(y) - {L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) $$

elde edilir. Çözüm seri formunda bir çözüm olacağından u_0 ilk yaklaşımı başlangıç şartları yerine yazılırsa;

$$ u_0(x,y) = \ sinhxcosy $$

bulunur. $u_0(x,y)$ yaklaşımı $sinhx \approx x$ olduğu yerde sağlanır.

$$ u_1(x,y) = -{L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}u_0(x,y)\right) $$

olduğuna göre

$$ \begin{aligned} u_1(x,y) &= -{L_{xx}}^{-1}\big(L_{yy}(xcosy)\big) \\ &= -{L_{xx}}^{-1}(-xcosy) \\ &= \int_0^x \int_0^x xcosydxdx \\ &= \int_0^x \frac{x^2}{2} cosy\, dx \\ &= \frac{1}{3!} x^3 cosy \end{aligned} $$

$$ u_2(x,y) = -{L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}(\frac{1}{3!}x^3cosy)\right) $$

$$= -L_{xx}{}^{-1}(-\frac{1}{3!}x^3 cosy)$$

$$= \int_0^x \int_0^x \frac{1}{3!}x^3 cosydxdx$$

$$= \int_0^x \frac{x^4}{4!} cosy\, dx$$

$$= \frac{1}{5!}x^5 cosy$$

$$u_3(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}(\frac{1}{5!}x^5 cosy)\right)$$

$$= -L_{xx}{}^{-1}(-\frac{1}{5!}x^5 cosy)$$

$$= \int_0^x \int_0^x \frac{1}{5!}x^5 cosydxdx$$

$$= \int_0^x \frac{x^6}{6!} cosy\, dx$$

$$= \frac{1}{7!}x^7 cosy$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,y) = \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} cosy$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,y) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

$$= cosy\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots\right)$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafında parantez içindeki serinin $sinhx$ in açılımı olduğu kolayca görülür. Denklemin çözümünün kapalı formunun $u(x,y) = cosysinhx$ fonksiyonu olduğu görülebilir.[10]

Homotopi pertürbasyon metodunu kullanarak çözüm yapılırsa;

$$\mathcal{H}(v,p) = (1-p)v_{xx} + p\big(v_{xx} + v_{yy}\big) = 0, \qquad p \in [0,1],$$

olacak şekilde $\Omega \times [0,1] \rightarrow R$ homotopisini kuralım.

$$v_{xx} - pv_{xx} + pv_{xx} + pv_{yy} = 0$$

$$v_{xx} + pv_{yy} = 0 \tag{4.1.2}$$

v , p' nin kuvvetlerine göre açılırsa:

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \ldots \tag{4.1.3}$$

(4.1.3) denklemini (4.1.2) denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{\partial(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots)}{\partial x^2} + \frac{p\partial(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x^2} + p\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + p^2\frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \ \ldots + p\frac{\partial v_0}{\partial y^2} + p^2\frac{\partial v_1}{\partial y^2} + p^3\frac{\partial v_2}{\partial y^2} + \ldots = 0$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x^2} + p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y^2}\right) + p^2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial v_1}{\partial y^2}\right) + \ \ldots = 0$$

elde edilir. p' nin kuvvetlerine göre paranteze alınırsa

$$p^0: \ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0 \tag{4.1.4}$$

$$p^1: \ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \tag{4.1.5}$$

$$p^2: \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0$$

$$p^3: \ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

denklemi çözülürse;

$$\int\int v_{xx} dxdx = 0$$

$$\int v_x \, dx = h_1(y)$$

$$v(x,y) = xh_1(y) + h_2(y)$$

elde edilir. Başlangıç şartları yerine yazıldığında $sinhx \approx x$ olduğu yerde v_0 ilk yaklaşımı $v_0(x,y) = xcosy$ sağlanır. v_0 yaklaşımı (4.1.5) denkleminde yerine yazılırsa;

$$v_1(x,y) = \frac{1}{3!}x^3 cosy$$

$$v_2(x,y) = \frac{1}{5!}x^5 cosy$$

$$v_3(x,y) = \frac{1}{7!}x^7 cosy$$

$p \to 1$

$$u(x,y) = cosy\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 cosy + \cdots\right)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki parantezdeki ifadenin $sinhx$' nin seriye açılımıdır. Bu durumda

$$u(x,y) = sinhxcosy$$

çözümü bulunur.

Örnek 4.2:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad , x > 0,\; y < \pi$$

$$u_x(0,y) = 0 \qquad u_x(\pi,y) = 0$$

$$u_y(x,0) = cosx \qquad u_y(x,\pi) = cosh\pi cosx$$

Neuman başlangıç koşulları ile verilen denklemin çözümü ilk olarak ADM metodu ile yapılırsa;

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Denklemini operatör formda yazarsak;

$$L_{yy}u = -L_{xx}u \tag{4.2.1}$$

elde edilir.

(4.2.1) eşitliğinin her iki tarafına ${L_{yy}}^{-1}$ uygulanırsa;

$${L_{yy}}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) = -{L_{yy}}^{-1}\left(L_{xx}u(x,y)\right)$$

elde edilir. Burada $u_{yy}\,(x,y)$' nin y ye göre integrali alınırsa;

$$\int\left(u_y(x,y) + h_1(x)\right)dy = -\,{L_{yy}}^{-1}\left(L_{xx}u(x,y)\right)$$

bulunur.

$u_y(x,\pi)$ başlangıç koşulu yerine yazılırsa;

$$u_y(x,\pi) = cosh\pi cosx = -h_1(x)$$

$$u_y(x,y) = coshycosx \tag{4.2.2}$$

bulunur. $u_y(x,y)$' nin tekrar integrali alınırsa

$$u(x,y) = -yh_1(x) - h_2(x)$$

elde edilir. Başlangıç koşulları yerine yazıldığında

$$u_0(x,\pi) = ycosx$$

$-sinhy \approx y$ olduğu yerde sağlanır.

$$u_1(x,y) = -L_{yy}{}^{-1}\big(L_{xx}u_0(x,y)\big)$$

olduğundan;

$$u_1(x,y) = -L_{yy}{}^{-1}(L_{xx}(ycosx))$$

$$= -L_{yy}{}^{-1}(-ycosx)$$

$$= \frac{y^3}{3!}cosx$$

$$u_2(x,y) = -L_{yy}{}^{-1}\left(L_{xx}(\frac{y^3}{3!}cosx)\right)$$

$$= \ -L_{yy}{}^{-1}\left(-\frac{y^3}{3!}cosx\right)$$

$$= \frac{y^5}{5!}cosx$$

$$u_3(x,y) = -L_{yy}{}^{-1}\left(L_{xx}(\frac{y^5}{5!}cosx)\right)$$

$$= \ -L_{yy}{}^{-1}\left(-\frac{y^5}{5!}cosx\right)$$

$$= \ \frac{y^7}{7!}cosx$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,y) = \frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}cosx$$

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,(x,y) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

$$= cosx\left(y + \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 + \frac{1}{7!}y^7 + \cdots\right)$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafında parantez içindeki serinin $sinhy$ in açılımı olduğu kolayca görülür. Neuman başlangıç koşulları ile çözüldüğü için C sabiti olacaktır. Denklemin çözümünün kapalı formunun $u(x,y) = C + cosxsinhy$ fonksiyonu olduğu görülebilir.

Denklemin Homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü yapılırsa;

$$\mathcal{H}(v,p) = (1-p)v_{xx} + p\left(v_{xx} + v_{yy}\right) = 0, \qquad p \in [0,1],$$

olacak şekilde $\Omega \times [0,1] \to R$ homotopisini kuralım.

$$v_{xx} - pv_{xx} + pv_{xx} + pv_{yy} = 0$$

$$v_{xx} + pv_{yy} = 0 \tag{4.2.3}$$

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \ \dots \tag{4.2.4}$$

(4.2.4) denklemini (4.2.3) denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{\partial(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots)}{\partial x^2} + \frac{p\partial(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots)}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x^2} + p\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + p^2\frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \ \dots + p\frac{\partial v_0}{\partial y^2} + p^2\frac{\partial v_1}{\partial y^2} + p^3\frac{\partial v_2}{\partial y^2} + \dots = 0$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x^2} + p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y^2}\right) + p^2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial v_1}{\partial y^2}\right) + \ \dots = 0$$

elde edilir. p' nin kuvvetlerine göre paranteze alınırsa

$$p^0: \ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0 \tag{4.2.5}$$

$$p^1: \ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \tag{4.2.6}$$

$$p^2: \ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = 0 \tag{4.2.7}$$

$$p^3: \ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0 \tag{4.2.8}$$

$$\vdots$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

denklemi çözülürse;

$$\int\int v_{xx} dx dx = 0$$

$$\int v_x \, dx = h_1(y)$$

$$v(x, y) = x h_1(y) + h_2(y)$$

elde edilir. Başlangıç şartları yerine yazıldığında $sinhy \approx y$ olduğu yerde v_0 ilk yaklaşımı $v_0(x, y) = ycosx$ sağlanır. v_0 yaklaşımı (4.2.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$v_1(x, y) = \frac{1}{3!} y^3 cosx$$

$$v_2(x, y) = \frac{1}{5!} y^5 cosx$$

$$v_3(x, y) = \frac{1}{7!} y^7 cosx$$

$p \to 1$

$$u(x, y) = cosx\left(1 + \frac{1}{3!} y^3 + \frac{1}{5!} y^5 + \cdots\right)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki parantezdeki ifadenin $sinhy$' nin seriye açılımıdır. Bu durumda

$$u(x, y) = sinhycosx$$

Çözümü bulunur.

Örnek 4.3:

$$u_{xx} + u_{yy} = u^2$$

$$u_x(0,y) = 0,\, u(0,y) = y^2$$

$$\mathrm{u_y(x,0) = 0, u(x,0) = 0}$$

ile verilen başlangıç koşulları ile çözümü yapılsın;

İlk olarak Adomian Ayrışım Metodu kullanılırsa;

$$u_{xx} + u_{yy} = u^2$$

Denklemini operatör formda yazarsak;

$$L_{xx}u = -L_{yy}u + Nu \qquad (4.3.1)$$

elde edilir.

(4.3.1) eşitliğinin her iki tarafına ${L_{xx}}^{-1}$ uygulanırsa;

$${L_{xx}}^{-1}\big(L_{xx}u(x,y)\big) = -{L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) + {L_{xx}}^{-1}(Nu) \qquad (4.3.2)$$

elde edilir. Burada $u_{xx}\,(x,y)$' nin x ye göre integrali alınırsa

$$u(x,y) + xu_x(0,\mathrm{y}) + u(0,y) = -{L_{xx}}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) + {L_{xx}}^{-1}(Nu) \qquad (4.3.3)$$

Nu lineer olmayan terim;

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

u' da

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

e ayrıştırılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} = -{L_{xx}}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} u_n - {L_{xx}}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

elde edilir.

u_0 elde etmek için başlangıç koşulları yerine yazılırsa;

$$u(x,y) = -y^2 - L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}u(x,y)\right) + L_{xx}{}^{-1}(Nu)$$

bulunur. Buradan $u_0(x,y) = -y^2$ elde edilir. Lineer olmayan terimler;

$$A_o = u_0^2,$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2u_0u_1, \\ A_2 &= u_1^2 + 2u_0u_2, \\ A_3 &= 2u_1u_2 + 2u_0u_3, \\ A_4 &= u_2^2 + 2u_1u_3 + 2u_0u_4, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

formunda hesaplanıp yerine yazıldığında u_1, u_2, u_3 ... elde edilir.

$$u_1(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}(u_0)\right) + L_{xx}{}^{-1}(A_0)$$

$$u_1(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}(-y^2)\right) + L_{xx}{}^{-1}(u_0^2)$$

$$= -L_{xx}{}^{-1}(-2) + L_{xx}{}^{-1}(y^4)$$

$$= x^2 + \frac{x^2y^4}{2}$$

bulunur.

$$u_2(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}(u_1)\right) + L_{xx}{}^{-1}(A_1)$$

$$u_2(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}\left(x^2 + \frac{x^2y^4}{2}\right)\right) + L_{xx}{}^{-1}(2u_0u_1)$$

$$= -L_{xx}{}^{-1}(6x^2y^2) + L_{xx}{}^{-1}\left(2(-y^2)\left(x^2 + \frac{x^2y^4}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{x^4y^2}{2} - \frac{x^4y^2}{6} - \frac{x^4y^6}{12}$$

$$= -\frac{2x^4y^2}{3} - \frac{x^4y^6}{12}$$

$$u_3(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}(u_2)\right) + L_{xx}{}^{-1}(A_2)$$

$$u_3(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}\left(-\frac{2x^4y^2}{3} - \frac{x^4y^6}{12}\right)\right) + L_{xx}{}^{-1}(u_1^2 + 2u_0u_2)$$

$$= -L_{xx}{}^{-1}\left(-\frac{4x^4}{3} - \frac{5x^4y^4}{2}\right) + L_{xx}{}^{-1}\left(x^4 + \frac{7x^4y^4}{3} + \frac{5x^4y^8}{12}\right)$$

$$= \frac{2x^6}{45} + \frac{x^6y^4}{12} + \frac{x^6}{30} + \frac{7x^6y^4}{90} + \frac{5x^6y^8}{360}$$

$$u_4(x,y) = -L_{xx}{}^{-1}\left(L_{yy}(u_3)\right) + L_{xx}{}^{-1}(A_3)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

olarak bulunacağından çözüm;

$$u = -y^2 + x^2 + \frac{x^2y^4}{2} - \frac{2x^4y^2}{3} - \frac{x^4y^6}{12} + \frac{2x^6}{45} + \frac{x^6y^4}{12} + \frac{x^6}{30} + \frac{7x^6y^4}{90} + \frac{5x^6y^8}{360} + \cdots$$

elde edilir.

Çözüm Homotopi Pertürbasyon Metodu kullanılarak yapılırsa;

$$\mathcal{H}(v,p) = (1-p)v_{xx} + p\left(v_{xx} + v_{yy} - v^2\right) = 0, \qquad p \in [0,1],$$

olacak şekilde $\Omega \times [0,1] \rightarrow R$ homotopisini kuralım.

$$v_{xx} - pv_{xx} + pv_{xx} + pv_{yy} - pv^2 = 0$$

$$v_{xx} + pv_{yy} - pv^2 = 0 \tag{4.3.5}$$

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \cdots \tag{4.3.6}$$

(4.3.6) denklemini (4.3.5) denkleminde yerine yazarsak;

$$\frac{\partial(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots)}{\partial x^2} + \frac{p\partial(v_0 + pv_1 + \cdots)}{\partial y^2} - p(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \cdots)^2$$

$$= 0\frac{\partial v_0}{\partial x^2} + p\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + p^2\frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \ \ldots + p\frac{\partial v_0}{\partial y^2} + p^2\frac{\partial v_1}{\partial y^2}$$

$$+ p^3\frac{\partial v_2}{\partial y^2} + \ldots - p(v_0 + pv_1 + \cdots)^2 += 0$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x^2} + p\left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial v_0}{\partial y^2} - v_0^2\right) + p^2\left(\frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial v_1}{\partial y^2} - 2v_0v_1\right) + \ \ldots = 0$$

elde edilir. p' nin kuvvetlerine göre paranteze alınırsa

$$p^0:\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0 \tag{4.3.7}$$

$$p^1:\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - v_0^2 = 0 \tag{4.3.8}$$

$$p^2:\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - 2v_0v_1 = 0 \tag{4.3.9}$$

$$p^3:\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} - 2v_0v_2 - v_1^2 = 0 \tag{4.3.10}$$

$$\vdots$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0$$

denklemi çözülürse;

$$\int\int v_{0_{xx}} dxdx = 0$$

$$v_0(x, y) = -xv_x(0, y) - v(0, y)$$

bulunur. Başlangıç koşulları yerine yazılırsa;

$$v_0(x,y) = -y^2$$

elde edilir. $v_1(x,y)$ i elde etmek için

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - v_0^2 = 0$$

denklemi çözülürse;

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - 2 - y^4 = 0$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 2 + y^4$$

$$v_1(x,y) = x^2 + \frac{x^2 y^4}{2}$$

elde edilir.

$v_2(x,y)$ yi elde etmek için;

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - 2v_0 v_1 = 0$$

denklemi çözülürse;

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -6x^2y^2 + 2(-y^2)\left(x^2 + \frac{x^2y^4}{2}\right)$$

$$= -6x^2y^2 - 2x^2y^2 - x^2y^6$$

$$v_2(x,y) = -\frac{2x^4y^2}{3} - \frac{x^4y^6}{12}$$

elde edilir.

$v_2(x,y)$ yi elde etmek için;

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} - 2v_0 v_2 - v_1^2 = 0$$

denklemi çözülürse;

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = \frac{4x^4}{3} + \frac{5x^4y^4}{2} + 2(-y^2)\left(-\frac{2x^4y^2}{3} - \frac{x^4y^6}{12}\right) + \left(x^2 + \frac{x^2y^4}{2}\right)^2$$

$$v_3(x,y) = \frac{2x^6}{45} + \frac{x^6y^4}{12} + \frac{x^6}{30} + \frac{7x^6y^4}{90} + \frac{5x^6y^8}{360}$$

elde edilir.

$$u(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{x^2y^4}{2} - \frac{2x^4y^2}{3} - \frac{x^4y^6}{12} + \frac{2x^6}{45} + \frac{x^6y^4}{12} + \frac{x^6}{30} + \frac{7x^6y^4}{90} + \frac{5x^6y^8}{360} + \cdots$$

çözümü bulunur.

5.SONUÇ

Bu çalışmada uygulamalı matematik dallarında sıkça karşılaşılan kısmi türevli denklemlerden olan değişik başlangıç koşulları ile verilen eliptik Laplace Denklemi ve başka bir eliptik denkleme Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon metodu uygulanmıştır. Daha önce birçok lineer olmayan hiperbolik, parabolik denklemlere Adomian Ayrışım Metodu ve Homotopi Pertürbasyon metodu uygulanmış olup, lineer olmayan eliptik denklemlere uygulaması üzerinde çok durulmamıştır. Bu çalışmada farklı metodlarla çözülmüş olan lineer olmayan bir eliptik denklem ele alınarak çözümü incelenen iki metodla bulunmuştur.

Laplace Denklemi' ne ve diğer eliptik kısmi türevli denkleme uygulanan metodlarda bulunan sonuçlar karşılaştırılmış ve aynı olduğu görülmüştür.[7] Fakat lineer olan denklemlerin çözümü için iki metodunda uygulaması kısa ve basit olup, lineer olmayan denklemlerin çözümünde Adomian Ayrışım Metodu kullanıldığında Adomian polinomlarının bulunması zor ve zaman aldığından Homotopi Pertürbasyon Metodu'nun daha kısa, daha kolay ve daha hızlı sonuca ulaştığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1]ADOMİAN, G. and RACH, R., 1990, Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations, Comp. Math. Appl., 19, 9–12.

[2]ABBASBANDY , S., 2006, Numerical Solutions of the İntegral Equations:
Homotopy Perturbation Method and Adomian's Decomposition Method, Applied Mathematics and Computation, 173, 493-500 p.

[3]ABBAOUİ, K. and CHERRUAULT, Y., 1994, Convergence of Adomian's Method
Applied to Differential Equations, Comp. Math. Appl., 28, 103-109.

[4]ABBAOUİ, K. and CHERRUAULT, Y., 1995, New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods, Comp. Math. Appl., 29, 103-108.

[5]ABBAOUİ, K. VE CHERRUAULT, Y. VE SENG, V., 1995, Practical formulae for the calculus of multivariable Adomian Polynomials, Math. Comput. Modelling, 22 (1), 89-93

[6]ABBAOUİ, K. and CHERRUAULT, Y. VE ENDOUR M., 1995, The Decomposition Method applied to differantial systems, Kybernetes, 24 (8), 32-40

[7]A.SADİNGHİ, D.D.GANJİ ,2007, Exact solutions of Laplace equation by homotopy-perturbation and Adomian decomposition methods, 83-87

[8]CHERRUAULT, Y. , 1989, Convergence of Adomian's method, Kybernetes, 18 (2), 31-38.

[9]EL-SAYED, A.M.A. and Gaber, M., 2006, The Adomian Decomposition Method,
Physics Leters A, 359, 175-182 p.

[10]HE, Jİ-HUAN , 2000, Homotopy Perturbation Method: A New Nonlinear Analytical Technique, Appl. Math. Comput., 35, 37-43 p.

[11]HE, Jİ-HUAN, 2000, A Coupling Method of a Homotopy Technique and Perturbation Technique for Non-Linear Problems, International Journal of Non-Linear Mechanics, 35, 37-43 p.

[12]KOCA, K., 2003, Kısmi Türevli Denklemler, Ankara, Eğitim Yayıncılık, 233

[13]MEHDİ DEGHAN, MEHDİ TATARİ,2005, The use of Adomian decomposition method for solving problems in calculus of variations

[14]SENG, V., ABBAOUİ, K. and CHERRUAVİT, Y., 1996, Adomian Polynomials for Nonlinear Operators, 24, 59-65 p.

[15]S.A. EL-WAKİL, A. ELHANBALY AND M.A. ABDOU, 2006 ,Adomian decomposition method for solving fractional nonlinear differential equations,313-324p.

[16]WAZWAZ, A.M., 1997, Equality of Partial Solutions In The Decomposition Method for Partial Differential Equations, Int. J. Comput. Math., 65, 293–308p.

[17]WAZWAZ, A.M., 2006, A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method, Journal of Computational and Applied Mathematics 207, 129 – 136p.

[18]WAZWAZ, A.M., 2000, A new algorithma for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, Appl. Math. Comput., 111, 33-51p.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Soyadı, Adı: Seçil ÖZİZMİRLİ

Uyruğu :T.C

Doğum tarihi ve yeri:DENİZLİ/ 1986

Medeni hali:BEKAR

Telefon:05548291168

E-mail:secil19_8@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Uşak Üniversitesi/Matematik Bölümü	2011
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi/Matematik Bölümü	2008
Lise	Sarayköy Anadolu Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2008-2011	Uşak Şafak Öncü Dershanesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce