

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

KOMPOZİT MALZEMELERİN ENİNE ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN
SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİYLE HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALUK EKİCİ

HAZİRAN 2011
UŞAK

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

KOMPOZİT MALZEMELERİN ENİNE ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN
SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİYLE HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALUK EKİCİ

UŞAK 2011

Haluk EKİCİ tarafından hazırlanan Sürekli Lif Yapılarındaki Kompozitlerin Enine Elastisite Modüllerinin Sınır Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Halit GÜN

Tez Danışmanı, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Alaattin AKTAŞ

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Doç. Dr. Halit GÜN

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yusuf CUNDEDİOĞLU

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Niğde Üniversitesi

Tarih: 01/06/2011

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Haluk EKİCİ

**KOMPOZİT MALZEMELERİN ENİNE ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR
ELEMANLAR YÖNTEMİYLE HESAPLANMASI**

(Yüksek Lisans Tezi)

Haluk EKİCİ

**UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Haziran 2011

ÖZET

Şimdiye kadar kompozit malzemelerin enine elastisite modüllerinin hesaplanması için literatürde analitik, deneye dayalı modeller ile sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler yaygın olarak kullanılmıştır. Bu çalışmada kompozitlerin enine elastisite modüllerinin hesaplanması için kuadratik sınır elemanlar yöntemi sunulmuştur.

Sunulan sınır elemanlar formülasyonu E-galss/epoxy, S-glass/epoxy, T300/epoxy ve Boron/epoxy kompozit malzemelerine uygulanmıştır. Sonuçlar analitik Tsai-Hahn modeli çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Sunulan formülasyonun kompozit malzemelerin enine elastisite modüllerinin hesaplanmasında etkin olarak kullanılabilceği gösterilmiştir.

Bilim Kodu : 625.03.00

Anahtar Kelimeler : Kompozit, Enine elastisite modülü, Sınır elemanlar yöntemi.

Sayfa Adedi : 40

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Halit GÜN

**PREDICTION OF TRANSVERSE ELASTICITY MODULUS USING BOUNDARY
ELEMENT**

(M.Sc. Thesis)

Haluk EKİCİ

**UŞAK UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

Jun 2011

ABSTRACT

Until now analytical, semiempirical models and numerical methods such as finite element are widely used for prediction of transverse elasticity modules of composite materials in the literature. In this work, a quadratic boundary element formulation is presented to predict transverse elasticity modules of composite.

The present boundary element formulation is applied to E-glass/epoxy, S-glass/epoxy, T300/epoxy and Boron/epoxy composite materials. Results are compared with analytical and Tsai-Hahn models. It is shown that the present formulation can be effectively used for prediction of transverse elasticity modules of composite materials.

Science Code : 625.03.00

Key Words : Composite, Transverse elasticity modulus, Boundary Element

Page Number : 40

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Halit GÜN

TEŐEKKÖR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Doç. Dr. Halit GÖN'e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme ve her zaman bana güç veren niőanlıma sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	vi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. ÇALIŞMANIN KAPSAMI	1
2. SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ.....	3
2.1 Analitik Formülasyonu	3
2.2 Navier Denklemleri	3
2.3 Temel Çözüm	8
2.4 Sınır İntegral Eşitliği	11
2.5 Sayısal İntegrasyon.....	13
2.5.1 Çözüm Bölgesi Sınırının Elemanlara Bölünmesi	14
2.5.1 Sınır İntegrallerin Sayısal İntegrasyonu	16
2.6 Sınır Koşullarının Göz Önüne Alınması	21
2.7 Sınır Düğüm Noktalarında Gerilmelerin Hesaplanması.....	22
2.8 Çözüm Bölgesi İçinde Değişkenlerin Hesaplanması.....	24
2.9 Temas Problemleri İçin Sınır Elemanları Yöntemi Algoritması.....	25
3. KOMPOZİTLERİN ENİNE ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE HESAPLANMASI.....	27

3.1 Sürekli Liflere Sahip Kompozit Malzemelerin Enine Elastisite Modüllerinin Hesaplanması.....	27
3.2 Elastisite Modülünün Sınır Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması	29
4. SONUÇLAR.....	34
KAYNAKLAR.....	36

	Sayfa
EKLER	37
EK-1 Örnek Veri Kütüğü	38
ÖZGEÇMİŞ.....	40

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge

Sayfa

Çizelge 3.1 Kompozit malzemelerin elastisite modülleri, poisson oranları ile lif çapları... 31

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1 Lineer denklem takımının oluşturulması.....	15
Şekil 2.2 Yüzey gerilme vektörünün yerel ve global koordinatlardaki bileşenleri	23
Şekil 3.1 Dairesel kesit geometrisine sahip lifin dikdörtgen kesit geometrisine dönüştürülerek karakteristik hacim elemanını alt bölgelere ayrıştırılması ve boyutlandırılması	28
Şekil 3.2 Sınır elemanlar analiz modelinin sınır ve yük koşulları.....	30
Şekil 3.3 x-ekseni üzerindeki lif ile matris malzemesinin ortak düğüm noktasına ait σ_x gerilmeleri oranları değişimi	31
Şekil 3.5 S-glass/epoxy için enine elastisite modülü.....	32
Şekil 3.4 E-glass/epoxy için enine elastisite modülü	32
Şekil 3.6 Boron/epoxy için enine elastisite modülü	33
Şekil 3.7 T300/epoxy için enine elastisite modülü.....	33

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
D_{kij}	Yer değiştirmeler için üçüncü dereceden tansörel fonksiyonlar
d	Lif çapı
E	Elastisite modülü
E_{f2}	Lifin enine elastisite modülü
E_m	Matris malzemesinin elastisite modülü
E_2	Kompozit malzemenin enine elastisite modülü
f_i	Yük vektörü
G_i	Galarkin vektörü
J	Jacobian
m	Yüzey birim teğet vektörü
n	Yüzey birim normal vektörü
p	Yük noktası
Q	Alan noktası

S_{kij}	Yüzey gerilmeleri için Üçüncü dereceden tansörel fonksiyonlar
s	Kompozitin karakteristik hacim elemanının boyutu
T_{ij}	Yüzey gerilmeleri için tansörel fonksiyonlar
t	Yüzey gerilmesi (gerilme vektörü)
U_{ij}	Yer değiştirmeler için tansörel fonksiyonlar
u_i	Yer değiştirme bileşenleri
ν	Poisson oranı
ν_f	Lifin kompozit içerisindeki hacimsel oranı
ν_m	Matrisin kompozit içerisindeki hacimsel oranı
w_g	Gauss ağırlıklı fonksiyonu
∇^2	Laplace operatörü
δ_{ij}	Kronecker delta
η_{gi}	Gauss koordinatları
η_2	Matris malzeme ile lifdeki ortalama gerilme
Γ	İki boyutlu çözüm bölgelerinin sınırları
α	Birim yüzey normal bileşenlerinin tanımladığı açı
ϵ_{ij}	şekil değiştirme bileşenleri

μ	Kayma modülü
ξ	Yerel koordinat değişkeni
π	Pi sayısı
σ_{ij}	Gerilme bileşenleri

Kısaltmalar

Açıklama

SE

Sınır elemanlar

ŞİE

Sınır integral eşitliği

1. ÇALIŞMANIN KAPSAMI

Günümüzde, bilgisayara bağımlı olan sayısal çözüm yöntemleri olmadan, mühendislik tasarım problemlerinin analizi mümkün olamayacağı iyi bilinmektedir. Katı cisim mekaniğinde kullanılan sayısal yöntemler, son yıllarda gelişmekte olan ağırsız yöntemler dışında, katı cisim üzerinde küçük bir diferansiyel elemanın davranışını oldukça sağlıklı bir şekilde ifade eden matematiksel ifadeler ve denklemler türetmenin mümkün olması ilkesine dayalıdır. Böylesi diferansiyel elemanlar üzerinden çözüm bölgesinin tamamında değişkenlerin (örneğin gerilme analizinde gerilmeler, yer değiştirmeler) değerlerini iyi bir hassasiyetle elde etmek mümkündür. Ancak bu diferansiyel elemanın boyutları küçüldükçe çözümün genelde iyileşmesi beklense de; bu elemanların ne kadar küçük olması gerektiği sorusunun yanıtı yoktur.

Sayısal çözüm yöntemlerinden biri sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntem endüstride oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Dahası mühendisler, bu yöntemin kendilerine sunduğu analizlerin ve analiz sonuçlarının değişik sunuş seçeneklerinden oldukça mutlu oldukları gözlenmektedir. Ancak son yıllarda, özellikle çözüm bölgesinde değişkenlerin oldukça keskin şekillerde değiştiği mühendislik uygulamalarında (örneğin temas ve kırılma mekaniği problemleri) etkin çözümler üreten Sınır Elemanlar (SE) veya Sınır İntegral Eşitliği (SİE) yöntemi olarak ta bilinen yöntem alternatif bir tasarım aracı olarak belirmektedir. Daha da etkin çözümler üretmek için bu iki yöntemin karma formülasyonu yoluna gidilmektedir. Bu yöntem için ihtiyaç duyulan veri kütüklerinin hazırlanması için gerekli olan zaman ve çaba sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırıldığında oldukça daha azdır.

Elastostatik problemlerin sınır elemanlar formülasyonu açıklandıktan sonra bu formülasyonun sayısal integrasyon aşamaları tanıtılacaktır. Verilen bir problem için sınır

koşularının tanıtılması ve çözüm matrislerinin elde edilmesi ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Üçüncü bölümde ise Coulumb sürtünme kanununu kullanan sınır elemanlar temas mekaniği formülasyonu kısaca tanıtılacaktır. Farklı malzemelerden oluşan ancak tek bir parça davranışı sergilemesi beklenen elemanların analizi, sürtünme katsayısının sonsuz olması fiziksel kabulüyle mümkün olacaktır. Sınır elemanlar temas formülasyonunu kullanarak çalışmada amaçlanan sürekli liflere sahip kompozitlerin enine elastisite modülleri hesaplanması yöntemi ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Elde edilen sonuçlar literatürde verilen analitik ve deneye dayalı verilen çözümlerle karşılaştırılacaktır.

2. SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1 Analitik Formülasyon

Bu çalışmada, sınır elemanlar yönteminin dolaylı ya da yarı-dolaylı formülasyonları mümkün olsa da gerçek fiziksel büyüklüklerin kullanıldığı doğrudan formülasyonu kullanılacaktır.

Sınır elemanlar formülasyonuna, iki boyutlu problemlerde kullanılan yaklaşımlar ifade edilerek başlanacaktır. Bilindiği gibi iki boyutlu çözümler, üç boyutlu çözümlerin yaklaşımlarıdır. Formülasyonda sadece xy -düzlemi göz önünde tutulacaktır. z -yönünde kalınlık hakkında iki kabul yapılır:

1. Düzlem Gerilme: Kalınlık boyunca gerilmenin ihmal edildiği ince geometrilere kullanılmaktadır. ($\sigma_{zz} = 0$)
2. Düzlem Şekil Değiştirme: Kalınlık boyunca şekil değiştirmenin ihmal edildiği fakat gerilmenin sıfır olmadığı kalınlığın sonsuz kabul edildiği geometriler için kullanılmaktadır. ($\varepsilon_{zz} = 0$ fakat $\sigma_{zz} = \text{sabit}$)

2.2 Navier Denklemleri

Diferansiyel denklemin yer değiştirmeler cinsinden ifade edilmesi için aşağıda belirtilen üç matematiksel ifadeler kullanılmaktadır.

1. Diferansiyel denge denklemi
2. Hook Kanunu (Gerilme-Şekil Değişirme Denklemleri)
3. Şekil Değişirme-Yer Değişirme Denklemleri

Gerilmelerle yüklenen bir yapı elemanında ∂x ve ∂y boyutlarında bir küçük diferansiyel alan göz önüne alarak, bu diferansiyel eleman için denge denklemi gerilmeler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [1].

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0 \quad (2.1)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad (2.2)$$

f_x ve f_y kütle kuvvet vektörünün x ve y bileşenleridir.

Şekil değişirme- yer değişirme bağıntısı aşağıdaki ifadelerle verilmektedir:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.4)$$

Gerilme - şekil değişirme bağıntısı (Hook Kanunu) düzlem gerilme ve düzlem şekil değişirme için aşağıdaki ifadelerle verilmektedir [1]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \quad (2.5)$$

Doğrusal homojen izotrop malzemeler için μ kayma modülü, elastisite modülü poisson oranı cinsinde aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.6)$$

Denklem 2.5'te düzlem gerilme koşulu ($\sigma_{zz} = 0$) göz önüne alınırsa Denklem 2.5 aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir:

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{1}{E}\right) \sigma_{xx} + \left(\frac{-\nu}{E}\right) \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \left(\frac{-\nu}{E}\right) \sigma_{xx} + \left(\frac{1}{E}\right) \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{xy} \quad (2.7)$$

Her iki düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme kabullerinin kapsamı için malzeme özellikleri içeren E^* , ν^* ve μ^* ifadelerini kullanarak Denklem 2.5'teki Hook kanunu aşağıdaki ifadeler şeklinde düzenlenebilmektedir [1].

$$\varepsilon_{xx} = \left(\frac{1 - (\nu^*)^2}{E^*}\right) \sigma_{xx} + \left[\frac{-\nu^*(1 + \nu^*)}{E^*}\right] \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \left[\frac{-\nu^*(1 + \nu^*)}{E^*}\right] \sigma_{xx} + \left(\frac{1 - (\nu^*)^2}{E^*}\right) \sigma_{yy}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\mu^*} \sigma_{xy} \quad (2.8)$$

$$E^* = E; \quad \nu^* = \nu; \quad \mu^* = \mu \quad (\text{Düzlem şekil değiştirme}) \quad (2.9)$$

$$E^* = \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2}; \quad \nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}; \quad \mu^* = \mu \quad (\text{Düzlem gerilme}) \quad (2.10)$$

Eşitlik 2.8'deki denklemlerde gerilmeler sol tarafa alınarak yeniden düzenlenirse aşağıdaki bağıntılar elde edilmektedir [1]:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \quad (2.11)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (2.12)$$

Burada δ_{ij} , Kronecker deltasıdır.

Denklem 2.3, Denklem 2.11 de yerine konursa aşağıdaki gerilme-yer değiştirme bağıntısı elde edilmektedir [1]:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.14)$$

Son olarak yer değiştirmelere ait diferansiyel denklemlere ulaşmak için yukarıdaki denklemleri Eşitlik 2.1'deki denge denklemlerinde yerine koyarsak aşağıdaki matematiksel ifadelere ulaşılmaktadır [1]:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) = \frac{-f_x}{\mu}$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) = \frac{-f_y}{\mu} \quad (2.15)$$

Tansörel gösterilim ile

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left(\frac{1}{1-2\nu} \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{-f_i}{\mu} \quad (2.16)$$

Yukarıdaki denklemlere Navier denklemleri denir. Bir tamamlayıcı fonksiyon ve bir kısmı integralle çözülebilmektedir.

2.3 Temel Çözüm

Navier denklemleri biharmonik diferansiyel denklemlere dönüştürülebilmesi için aşağıda, yer değiştirmeler için tansörel gösterimle verilen ifade kullanılmaktadır [1].

$$u_i = \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 G_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (2.17)$$

Buradaki G Galarkin vektörüdür. Bu ifade Navier denkleminde taşınırsa analitik çözümün çok daha kolay aranabildiği aşağıdaki biharmonik denklem elde edilmektedir.

$$\nabla^4 G_i = \nabla^2(\nabla^2 G_i) = \frac{-f_i}{\mu} \quad (2.18)$$

Burada ∇^2 Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.19)$$

Galarkin vektörü, biharmonik denklemin çözümleri olup aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir [1].

$$G_x = G_y = \frac{1}{8\pi\mu} r^2(p, Q) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \quad (2.20)$$

Bu ifadede $r(p, Q)$ yük noktası p ile, alan noktası Q , arasındaki uzaklığı ifade eder ve matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [1].

$$r(p, Q) = \sqrt{(X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2} \quad (2.21)$$

G_x ve G_y ait ifadeler Denklem 2.17'ye taşınırsa, yer değiştirmelere ait matematiksel ifade tansörel gösterimle aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (2.22)$$

Yer değiştirme vektör bileşenlerini aşağıdaki gibi tansörel fonksiyonlarına ayrıştırılabilmektedir:

$$u_i = U_{ij}(p, Q) e_j \quad (2.23)$$

Bu matematiksel ifadede $U_{ij}(p, Q)$ fonksiyonları aşağıdaki matematiksel ifadelerle verilmektedir [1]:

$$U_{xx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$U_{xy}(p, Q) = U_{yx}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$U_{yy}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.24)$$

Tansörel gösterilim ile

$$U_{ij}(p, Q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln \left[\frac{1}{r(p, Q)} \right] \delta_{ij} + \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right\} \quad (2.25)$$

Yukarıdaki fonksiyonlara yer değiştirmelerin ana terimleri denir. Temel çözümde ortaya çıkan yüzey gerilmesi vektörü, yer değiştirme vektörünün diferansiyeli alınıp ve Denklem 2.5'teki Hook kanununda yerine taşınarak, temel çözümde ortaya çıkan yüzey gerilmesi vektörü aşağıdaki matematiksel ifadesi ile elde edilmektedir [1]:

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right]$$

$$+ \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \quad (2.26)$$

Yüzey gerilmesi vektörünün bileşenlerini tansörel gösterimle aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$t_i = T_{ij}(p, Q)e_j \quad (2.27)$$

$T_{ij}(p, Q)$ fonksiyonlarına yüzey gerilmesi ana terimleri denir ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [1]:

$$\begin{aligned} T_{xx}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \\ T_{xy}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right) \right] \\ T_{yx}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_y - \frac{\partial r}{\partial x} n_x \right) \right] \\ T_{yy}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Tansörel gösterim ile

$$\begin{aligned} T_{ij}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left(\frac{\partial r(p, Q)}{\partial n} \right) \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2 \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} \right] \\ &\quad - \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r(p, Q)} \left[\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_j} n_i - \frac{\partial r(p, Q)}{\partial x_i} n_j \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki normal türevi $\frac{\partial r}{\partial n}$ aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (2.30)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki dış normal cinsinden x ve y koordinatlarının türevlerine bağlı olarak x ve y doğrultularındaki birim dış normal bileşenleri n_x ve n_y aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}; \quad n_y = \frac{\partial y}{\partial n} \quad (2.31)$$

$r(p, Q)$ uzaklığının türevleri aşağıdaki matematiksel ifade ile tanımlanmaktadır:

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p, Q)}$$

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p, Q)} \quad (2.32)$$

2.4 Sınır İntegral Eşitliği

Betti etkileşim teoremini kullanarak yer değiştirmeler için sınır entegral eşitliği aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir [1-3]. Bu ifade de kütle kuvvetleri göz önüne alınmamaktadır.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x(p) \\ u_y(p) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{xx}(p, Q) & T_{xy}(p, Q) \\ T_{yx}(p, Q) & T_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{xx}(p, Q) & u_{xy}(p, Q) \\ u_{yx}(p, Q) & u_{yy}(p, Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix} d\Gamma(Q) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Tansörel gösterim ile yukarıdaki sınır integral eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [1-3]:

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (2.34)$$

2.32 sınır integral denklemi iki farklı problem arasında bağlantı kurar, birincisi bir nokta kuvvetine (U_{ij} ve T_{ij} ana terimleri) ait temel çözümdür ve ikincisi ise çözmeye çalıştığımız problemdir (bilinmeyen değişkenler u_j ve t_j).

p 'deki yer değiştirmelere ait sınır integral denkleminin diferansiyelini alıp, Eşitlik 2.5'deki Hook Kanunu denkleminde yerine taşınırsa, bir p noktasındaki gerilmeler için benzer sınır integral denklemi aşağıdaki matematiksel ifade ile edilmektedir [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(p) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial T_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} + \mu \left[\frac{\partial T_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right] \right\} u_k(Q) d\Gamma(Q) \\ = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial U_{mk}(p, Q)}{\partial x_m} \right. \\ \left. + \mu \left[\frac{\partial U_{ik}(p, Q)}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}(p, Q)}{\partial x_i} \right] \right\} t_k(Q) d\Gamma(Q)\end{aligned}\quad (2.35)$$

Yukarıdaki denklem, üçüncü mertebeden yeni ana terimler S_{kij} ve D_{kij} cinsinden aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir.

$$\sigma_{ij}(p) + \int_{\Gamma} S_{kij}(p, Q) u_k(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} D_{kij}(p, Q) t_k(Q) d\Gamma(Q)\quad (2.36)$$

Üçüncü mertebeden tansörel büyüklükler S_{kij} ve D_{kij} aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [1-3]:

$$\begin{aligned}D_{kij}(p, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{r} \right) \left[(1-2\nu) \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right]\end{aligned}\quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
S_{kij}(p, Q) = & \frac{\mu}{2\pi(1-v)} \left(\frac{1}{r^2}\right) n_i \left[2v \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2v)\delta_{jk} \right] \\
& + \frac{\mu}{2\pi(1-v)} \left(\frac{1}{r^2}\right) n_j \left[2v \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_k} + (1-2v)\delta_{ik} \right] \\
& + \frac{\mu}{2\pi(1-v)} \left(\frac{1}{r^2}\right) n_k \left[2(1-2v) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - (1-4v)\delta_{ij} \right] \\
& + \frac{\mu}{2\pi(1-v)} \left(\frac{1}{r^2}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial n}\right) \left[(1-2v)\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_k} + v \left(\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \delta_{ik} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \right. \\
& \left. - 4 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right] \tag{2.38}
\end{aligned}$$

2.5 Sayısal İntegrasyon

Sınır integral eşitliğini sayısal integrasyon için, çözüm bölgesinin sınırları sınır elemanlarına bölünür ve her bir eleman düğüm noktaları ile tanımlanır. Çözüm bölgesinin sınırları üzerinde N adet düğüm noktası olduğu kabul edilsin. Her bir düğümde dört adet değişken u_x, u_y, t_x, t_y olacağından çözüm bölgesinde toplam $4N$ adet değişken olacaktır. Herhangi bir problemin bir tek çözümü olması için her bir düğüm noktası üzerinde değişkenlerin yarısı verilmiş olmalıdır. Örneğin bir düğüm noktasında hiçbir değer verilmemişse o düğüm noktasındaki her iki yüzeyin gerilmemiş olduğu kabul edilecektir.

$2N$ adet bilinmeyen varsa problemi çözebilmek için $2N$ adet denkleme ihtiyaç duyulacaktır. Bir kuvvet (ya da yüzey gerilmesi) birinci düğümde olduğu kabul edilirse, temel çözümü kullanarak birinci düğüm noktasından N . düğüm noktasına kadar her bir düğümdeki yer değiştirmeleri ve yüzey gerilmelerini hesaplanabilecektir. Bu bize lineer denklemlerin birinci takımını verir (çözüm matrisin 1. ve 2. satırları). Lineer denklemlerin 2. takımını oluşturmak için (matrisin 3. ve 4. satırları) kuvveti ikinci düğüm noktasında olduğunu kabul ederek ve tekrar temel çözümün kullanarak ederek düğüm noktalarındaki

bütün değişkenleri hesaplanır. Bu işlem, kuvvet N . düğüm noktasına yerleştirilene kadar yani son denklem takımını verene kadar tekrar edilir. Bu da tek çözüm veren $2N$ bilinmeyenli $2N$ boyutlarındaki çözüm matrislerini getirecektir. Çözüm aşamasına ulaşmak için yukarıda özetlenen işlem örnek olarak Şekil 2.1 gösterilmiştir.

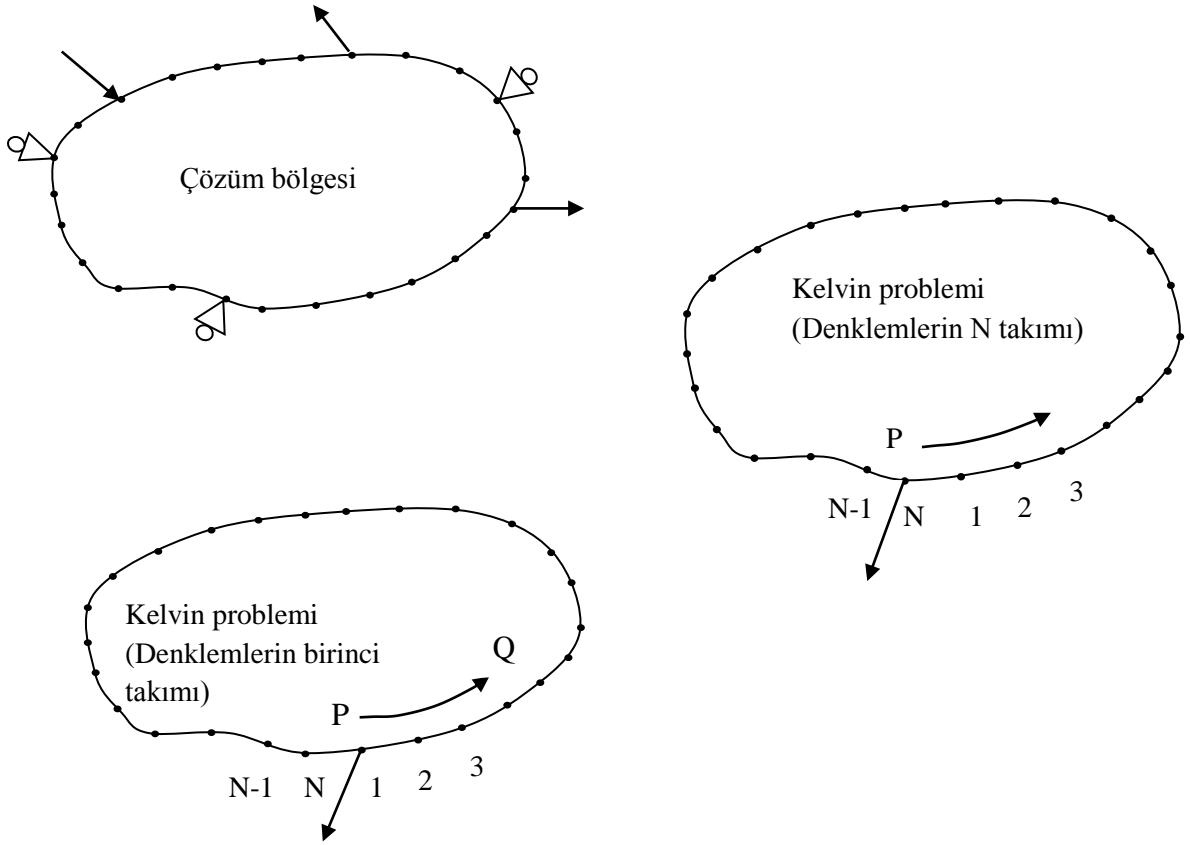
2.5.1 Çözüm Bölgesi Sınırının Elemanlara Bölünmesi

Çözüm bölgesinin sınırı birbirleri ile bağlanacak şekilde elemanlara bölünmelidir. Her bir eleman üzerinden geometrinin değişimi ve değişkenler (yer değiştirmeler ve yüzey gerilmeleri) tanımlanmalıdır. Bu değişmeler sabit, lineer, kuadratik, kübik ya da yüksek mertebeden olabilmektedir. Ayrıca geometrinin değişimi değişkenlerin değişiminden farklı olabilmektedir. İzoparametrik elemanlar, hem geometri ve hem de bilinmeyen değişkenler için aynı mertebeyi kullanan elemanlardır.

Kuadratik elemanlar, orta noktasıyla her iki ucunda düğüm noktaları olan elemanlardır. Yerel değişken ξ , merkezi orta nokta düğümünde olan ve son düğüm noktalarında -1 ve $+1$ değerlerini alır. Buna göre bir elemanın geometrisi, üç düğüm noktasının koordinatları üzerinden aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir:

$$x(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)x_c = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3$$

$$y(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)y_c = N_1(\xi)y_1 + N_2(\xi)y_2 + N_3(\xi)y_3 \quad (2.39)$$



Şekil 2.1 Lineer denklem takımının oluşturulması

Elemanlar İzoparametrik olduğundan, aynı şekil fonksiyonları çözüm değişkenleri için kullanılabilir:

$$u_i(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(u_i)_c = N_1(\xi)(u_i)_1 + N_2(\xi)(u_i)_2 + N_3(\xi)(u_i)_3$$

$$t_i(\xi) = \sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(t_i)_c = N_1(\xi)(t_i)_1 + N_2(\xi)(t_i)_2 + N_3(\xi)(t_i)_3 \quad (2.40)$$

2.5.1 Sınır İntegrallerin Sayısal İntegrasyonu

Çözüm bölgesi sınır elemanlarla tanımlandıktan sonra, lokal koordinatlar ξ kullanarak her bir sınır eleman üzerinden integrasyon gerçekleştirilmektedir. Bunun için gerekli olan ve aşağıda matematiksel ifade ile verilen Jacobian hesaplanmalıdır.

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (2.41)$$

Birim dış normalin bileşenlerinin hesaplanması için gerekli olan birim teğetsel vektör m aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir:

$$m = \frac{m_x}{|m|} e_x + \frac{m_y}{|m|} e_y \quad (2.42)$$

m vektörünün sayısal değeri aşağıdaki matematiksel ifade üzerinden hesaplanmaktadır.

$$|m| = \sqrt{(m_x)^2 + (m_y)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (2.43)$$

Buna göre birim teğetsel vektörün bileşenleri ise aşağıdaki matematiksel ifadelerle verilmektedir.

$$m_x = \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]$$
$$m_y = \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \quad (2.44)$$

z -yönünde birim vektör göz önüne alınırsa, birim normal vektör n , m ve e_z (xy -düzlemine dik) vektörlerinin vektörel çarpımına eşit olacaktır:

$$\begin{aligned}
n = m \times e_z &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] & \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right] e_x - \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] e_y
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Buna göre, birim uzunluk için birim dış normalinin bileşenleri aşağıdaki matematiksel ifadelerle verilmektedir.

$$\begin{aligned}
n_x &= \frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dy(\xi)}{d\xi} \right] \\
n_y &= -\frac{1}{J(\xi)} \left[\frac{dx(\xi)}{d\xi} \right]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

ξ cinsinden $x(\xi)$ ve $y(\xi)$ koordinatlarının diferansiyelleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\frac{dx(\xi)}{d\xi} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} x_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} x_3 \\
\frac{dy(\xi)}{d\xi} &= \frac{dN_1(\xi)}{d\xi} y_1 + \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} y_2 + \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} y_3
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Buna göre Denklem 2.33 ile verilen sınır integral denklemi yerel koordinat ξ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir [1-3]:

$$\begin{aligned}
C_{ij}(P)u_i(P) + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 u_j(Q) \int_{-1}^{+1} T_{ij}(P, Q) N_c(\xi) J(\xi) d\xi \\
= \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 t_j(Q) \int_{-1}^{+1} U_{ij}(P, Q) N_c(\xi) J(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Bu ifadelerde M elemanların toplam sayısıdır. Yukarıdaki denklemlerdeki integraller, $[A]$ ve $[B]$ gibi yeni fonksiyonlarla ifade edilirse sınır integral eşitliği aşağıda gibi ifade edilebilecektir [1]:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} C_{xx}(P) & C_{xy}(P) \\ C_{yx}(P) & C_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{bmatrix} \\
& + \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \\
& = \sum_{m=1}^M \sum_{c=1}^3 \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix}_{m,c} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Sırası ile her bir düğüm noktasını göz önüne alarak integrasyon gerçekleştirirse aşağıdaki gibi lineer denklem takımı elde edilmektedir.

$$[A][U] = [B][t] \tag{2.50}$$

$[A]$ ve $[B]$ matrisleri sırasıyla T_{ij} ve U_{ij} ana terimlerinin integrallerini içermektedir. $[A]$ ve $[B]$ matrisleri aşağıdaki gibi daha açık şekilde ifadelerle verilecektir [1].

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & [A_{13}] & [A_{14}] & \dots \\ [A_{21}] & [A_{22}] & [A_{23}] & [A_{24}] & \dots \\ [A_{31}] & [A_{32}] & [A_{33}] & [A_{34}] & \dots \\ [A_{41}] & [A_{42}] & [A_{43}] & [A_{44}] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \\ [u_4] \\ \dots \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} [B_{11}] & [B_{12}] & [B_{13}] & [B_{14}] & \dots \\ [B_{21}] & [B_{22}] & [B_{23}] & [B_{24}] & \dots \\ [B_{31}] & [B_{32}] & [B_{33}] & [B_{34}] & \dots \\ [B_{41}] & [B_{42}] & [B_{43}] & [B_{44}] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [t_1] \\ [t_2] \\ [t_3] \\ [t_4] \\ \dots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Bu ifadelerdeki $[A]$ ve $[B]$ alt -matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$[A]_{ij} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix}; \quad [B]_{ij} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

Bu ifadelerde $[u]$ ve $[t]$ vektörleri x ve y yönlerindeki sırası ile yer değiştirmeleri ve yüzey gerilmelerini (tractions) ifade etmektedir.

$$[u]_i = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}_i ; \quad [t]_i = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}_i \quad (2.53)$$

Daha önce bahsedildiği gibi temel çözüm tekildir. Bu tekilliğin anlamı $\eta \rightarrow 0$ iken sınır integral eşitliğindeki matematiksel ifadelerin $\ln(1/\eta)$ ya da $1/\eta$ mertebesinden terimler içermesidir. Matematiksel terimler P ve Q arasındaki mesafeye bağlı olduğundan, P ve Q 'nun çözüm bölgesindeki konumlarına göre karşılaşılacak üç integrasyon durumu incelenecektir:

i) P ve Q farklı elemanlarda ise: Standart Gauss integrasyon yöntemi u_{ij} ve T_{ij} ana terimlerine kolaylıkla uygulanabilir çünkü ana terimler bu durumda tekil değildirler. Gauss integrasyon yöntemi aşağıdaki matematiksel ifade ile verilmektedir.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^G f(\xi_g) w_g \quad (2.54)$$

G , Gauss integrasyon noktalarının toplam sayısıdır (genellikle dört) ve ξ_g , ise ağırlıklı fonksiyon w_g ile ifade edilen Gauss koordinatıdır.

ii) P ve Q aynı elemanda fakat ($P = Q$) ise: Bu durumda ana terimlerin tekilliğinden dolayı standart Gauss integrasyon yöntemi kullanılamaz. Öncelikle u_{ij} ana terimini göz önüne alındığında Denklem 2.23 de P ve Q 'nun çakıştığı görülür. Bu integral formu özel logaritmik Gauss integrasyon yöntemi kullanılarak doğru hesaplanabilmektedir. Bunun için aşağıda matematiksel ifade ile verilen logaritmik Gauss integrasyon yöntemi uygulanabilmektedir [1].

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{gi=1}^{G_i} f(\eta_{gi}) w_{gi} \quad (2.55)$$

Bu matematiksel ifadede G_i , logaritmik Gauss integrasyon noktalarının (genellikle dört) toplam sayısıdır ve η_{gi} , ise ağırlıklı fonksiyon w_{gi} ile ifade edilen Gauss koordinatıdır. İntegrasyon işleminin 0'dan 1'e kadar olan integrasyon sınırlarında gerçekleşmesi için bir lineer dönüşümle aşağıdaki gibi yapılabilmektedir [1]:

- 1) Eğer P elemanın birinci düğümü ise, $\eta = 0.5(1 + \xi)$
- 2) Eğer P elemanın ikinci düğümü ise eleman iki alt elemana bölünür:
 $\eta = -\xi$ ($-1 < \xi < 0$ için) ve $\eta = \xi$ ($0 < \xi < 1$ için)
- 3) Eğer P elemanın üçüncü düğümü ise, $\eta = 0.5(1 - \xi)$

P , Q 'ya yaklaşırken U_{ij} ana terimi yakından incelendiğinde iki ayrı parçaya ayrılacağı görülecektir. Bir logaritmik parça ve bir logaritmik olmayan parça olarak. Bundan dolayı sadece logaritmik parça Denklem 2.56'daki integrasyon yöntemi ile integre edilebilmektedir. Logaritmik olmayan parça ise standart Gauss integrasyon yöntemi kullanılarak integre edilebilmektedir. Ana terimin tekil ve tekil olmayan parçalara bölerek integrasyonunun gerçekleştirilmesi biraz daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir.

T_{ij} ana terimini ele aldığımızda, $\eta \rightarrow 0$ iken $1/\eta$ mertebesinden terimler olduğu görülür. Çok sayıda integrasyon noktası kullanılsa da artık sağlıklı integrasyon gerçekleşmeyecektir. T_{ij} ana teriminin katı cisim hareketi yaklaşımı ile integrasyon sorunu aşılabilmektedir [1]. Bu ise yer değiştirmeler sabit olduğundan yer değiştirmelerin türevleri olan T_{ij} ilgili terimlerini sıfır yapar ve bize aşağıda verilen matematiksel ifadeyi getirecektir [1].

$$[A][u_c] = [B][0] = 0 \quad (2.56)$$

Burada u_c , herhangi bir yönde keyfi sabit yer değiştirmedir. Bu ifadeye göre $[A]$ 'nın herhangi bir satırındaki bütün katsayıların toplamı sıfır olmalıdır. Bundan dolayı $[A]$ 'nın diyagonal terimleri, diyagonal olmayan terimlerin toplamı olacak şekilde hesaplanmış olur. Bu ise:

$$[A]_{ij} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N [A]_{ij} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \text{ için} \quad (2.57)$$

Şeklindeki matematiksel ifadeyle verilecektir [1]. Bu ifade de i ve j sırasıyla satır ve sütunu ifade etmektedir. N ise düğümlerin toplam sayısıdır.

2.6 Sınır Koşullarının Göz Önüne Alınması

Şimdiye kadar $[A]$ ve $[B]$ matrislerinin bütün katsayıları hesaplanmıştır. Fakat sınır koşulları tanımlanmadığından çözümü aranan bir problem yok demektir. Tipik bir elastostatik problemde üç tip sınır koşulu mümkündür:

- 1) Sınır üzerinde tanımlanmış yer değiştirmeler
- 2) Sınır üzerinde tanımlanmış yüzey gerilmesi (ya da gerilme)
- 3) Yüzey gerilmesi ve yer değiştirme arasındaki lineer ilişki (örneğin çözüm bölgesine bağlanmış bir yay)

Lineer denklemleri çözebilmek için, $[A]$ ve $[B]$ matrisleri, bütün bilinen değişkenler sağ tarafa ve bütün bilinmeyen değişkenler sol tarafta olacak şekilde düzenlenmesi gerekecektir. Düzenlenirse aşağıdaki lineer denklemler sistemine ulaşılabacaktır:

$$[A^*][x] = [B^*][y] \quad (2.58)$$

$[x]$ bütün bilinmeyen değişkenleri, $[y]$ 'de bütün bilinen değişkenleri içerir. $[A^*]$ ve $[B^*]$ matrisleri sırasıyla $[A]$ ve $[B]$ 'nin sınır koşullarına göre düzenlenmiş formlarıdır. $[y]$ bilinenleri içeren vektör olduğundan lineer denklemler çözüm aşaması olan ifade aşağıdaki gibi verilebilecektir:

$$[A^*][x] = [C] \quad (2.59)$$

Çözüm matrisi $[A^*]$, üçüncü aşamadan sonra simetrik değildir ve sıfır olmayan katsayılar içerir. Gauss eliminasyon yöntemiyle çözüme gidilecektir.

2.7 Sınır Düğüm Noktalarında Gerilmelerin Hesaplanması

Sınır gerilmelerinin hesabı iki ayrı yolla hesaplanabilmektedir. Birincisi gerilmeler için verilen sınır integral eşitliği olan Denklem 2.35; ikincisi ise sınır elemanlar üzerinden şekil fonksiyonlarını kullanarak hesaplanan yer değiştirmeler ve yüzey gerilmeler üzerinden gerilmeler hesaplanır. Denklem 2.43 de, x ve y doğrultularında m_x ve m_y bileşenleri olan birim teğetsel vektör tanımlanmıştı. Teğetsel ve normal yerel doğrultular 1 ve 2 olarak etiketlenirse, yerel teğetsel yer değiştirme vektörü u_1 kartezyen yer değiştirmeler cinsinden aşağıdaki matematiksel ifade ile verilebilecektir:

$$u_1(\xi) = u_x(\xi)m_x + u_y(\xi)m_y \quad (2.60)$$

(2.40) denklemindeki şekil fonksiyonları kullanıldığında yukarıdaki denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir:

$$u_1(\xi) = \left[\sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(u_x)_c \right] m_x + \left[\sum_{c=1}^3 N_c(\xi)(u_y)_c \right] m_y \quad (2.61)$$

Teğetsel doğrultudaki şekil değiştirme ε_{11} 'i elde etmek için yukarıda ifadenin teğetsel doğrultuda türevi alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir:

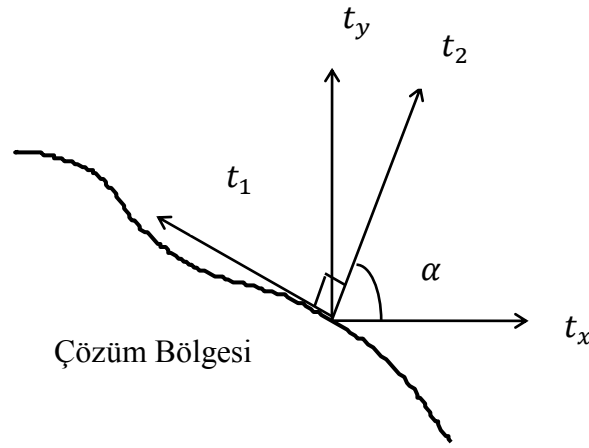
$$\varepsilon_{11}(\xi) = \frac{1}{J(\xi)} \left\{ \left[\sum_{c=1}^3 \frac{\partial N_c(\xi)}{\partial \xi} (u_x)_c \right] m_x + \left[\sum_{c=1}^3 \frac{\partial N_c(\xi)}{\partial \xi} (u_y)_c \right] m_y \right\} \quad (2.62)$$

Yüzey gerilmesi vektörünün yerel bileşenleri t_1 ve t_2 , t_2 Şekil 2.2'de gösterildiği gibi normal ve teğetsel bileşenlerle ifade edilebilecektir. Eğer α , yüzey normali ile global yüzey

gerilmeleri arasındaki açı ise, lokal yüzey gerilmeleri kartezyen global yüzey gerilmeleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilecektir:

$$t_1 = -t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha$$

$$t_2 = t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \quad (2.63)$$



Şekil 2.2 Yüzey gerilme vektörünün yerel ve global koordinatlardaki bileşenleri

1 ve 2 yerel yönlerindeki gerilmeleri elde etmek için, Eşitlik 2.5'deki Hook Kanunu denklemi aşağıdaki gibi kullanılabilecektir [1]:

$$\sigma_{11} = \left(\frac{E}{1 - \nu^2} \right) \varepsilon_{11} + \left(\frac{\nu}{1 - \nu^2} \right) t_2$$

$$\sigma_{22} = t_2$$

$$\sigma_{12} = t_1 \quad (2.64)$$

Yukarıdaki gerilme ifadelerinde düzlem şekil değiştirme koşulları kullanılmıştır. Yerel gerilmeleri global gerilmelere dönüştürmek için aşağıdaki dönüşüm matrisi kullanılmaktadır:

$$\begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Teğetsel doğrultunun, 1. kosinüs doğrultmanları = $(-\sin\alpha); (\cos\alpha)$

Normal doğrultunun, 2. kosinüs doğrultmanları = $(\cos\alpha); (\sin\alpha)$ (2.66)

Buna göre Global gerilmeler Denklem 2.66 kullanarak aşağıdaki ifade ile hesaplanabilecektir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

α açısı, n_x ve n_y birim normal bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{n_y}{n_x} \right) \quad (2.68)$$

2.8 Çözüm Bölgesi İçinde Değişkenlerin Hesaplanması

Şimdiye kadar sözü edilen çözüm aşamaları gerçekleşirse çözüm bölgesinin sınır düğüm noktalarında yer değiştirmeler, yüzey gerilmeleri, şekil değiştirmeler ve gerilmeler hesaplanmış olacaktır. Çözüm bölgesi içinde istenilen herhangi bir noktada gerilemeler ise gerilemeler için verilen sınır integral eşitliği sorunsuz bir şekilde kullanılabilir. Çünkü çözüm bölgesinde integrasyon gerçekleşirken yük P ve alan Q noktaları birbirleri ile hiç karşılaşmayacaktır.

2.9 Temas Problemleri İçin Sınır Elemanları Yöntemi Algoritması

Temasın olmadığı mühendislik uygulamaları yok gibidir. Bu nedenle de temas problemleri mühendislik uygulamalarında önemli bir yer tutar. Genellikle temas alanının önceden bilinmemesi ve sürtünme olasılığı durumunda davranışın uygulanan yüke bağlı olmasından dolayı temas problemlerinin sayısal analizi özel bir ilgiyi gerektirir. Bu tür problemlerin doğru çözümü iterasyona dayalı sayısal algoritmaları gerektirmektedir. Aşağıda belirtilen nedenlerden dolayı temas problemlerinin analizi için Sınır Elemanlar yöntemi Sonlu Elemanlar yönteminden çok daha uygun bir tasarım aracı olarak karşımıza çıkmaktadır.

- i) Çözüm matrisleri çözüm bölgesinin sınırları üzerinden elde edildiğinden temas gerilmeleri daha hassas elde edilebilmektedir.
- ii) Temas basıncının hesaplanmasında gerekli olan yüzey gerilmeleri, yer değiştirmelerle aynı hassaslıkta hesaplanabilmektedir.
- iii) Sonlu Elemanlar yönteminin aksine temas koşulları ana değişkenler üzerinden doğrudan çözüm matrisine aktarılmaktadır.
- iv) Temas alanının önceden bilinmediği problemler için ilk analiz ağının bir kaç kez gözden geçirilmesini gerekecektir; ancak analiz ağının yenilenmesi Sınır Elemanlar yönteminde sonlu elemanlarla karşılaştırıldığında daha kolaydır.

Temasın uygulanan yüke bağlı olarak, temas alanı doğrusal olarak değişmediğinden temas da olan cisimler doğrusal malzeme davranışı gösterse de temas problemleri doğrusal olmayan problemlerdir. Uyumsuz geometriye sahip cisimlerin temasında veya sürtünme olması durumunda davranışın uygulanan yüke bağlı olmasından dolayı temas alanı önceden bilinemez, sadece tahmin edilir. Bu nedenle, temas problemlerinin doğru çözümü iterasyona dayalı sayısal algoritmaları gerektirmektedir. Doğru temas alanının hesaplanması için kullanılan sınır elemanlar algoritması, iterasyon süresince aşağıda verilen kontrolleri yapmaktadır [1].

Temas bitiminde deformasyonunun uygun olup olmadığı kontrol edilir. Örneğin cismin diğer cismin içine geçmesi sağlıksız bir deformasyon şeklidir. Böyle bir deformasyon,

verilen yük için seçilen temas alanın küçük seçildiğini anlatır. Bu nedenle de bir sonraki iterasyona geçilirken bu sağlıklı deformasyonun görüldüğü elemanlar temasa sokulur.

İterasyon sürecinde, temasta olan elemanlarda çekme gerilmesinin ortaya çıkıp çıkmadığı kontrol edilir. Çekme gerilmesinin varlığı ise seçilen temas alanının büyük seçildiğini anlatır. Bu nedenle de çekme gerilmesinin görüldüğü elemanlar temastan çıkartılarak bir sonraki iterasyona geçilir.

Sürtünme varsa, teğetsel yüzey gerilmeleri ile normal yüzey gerilmeleri arasındaki oranın statik sürtünme katsayısını aşıp aşmadığına bakılır. Eğer aşıyorsa, ilgili elemanların teğetsel yüzey gerilmelerine Coulomb'un sürtünmeli kayma koşulu uygulanarak kaymalarına izin verilerek bir sonraki iterasyona geçilir. Kayma yönünün belirlenmesi için kaymalarına izin veren iterasyonun bir önceki adımında bu elemanların yapışma konumlarında oldukları düşünülür.

Doğru temas alanı elde edilinceye kadar bu iterasyonlar yülütülür. Kuşkusuz bilgisayar programı, yukarıda belirtilen iterasyonları sağlıklı bir şekilde yürütebilmesi için tahmin edilen temas alanı önemlidir. Bu da bir mühendislik birikimi gerektirir. Ancak uygulamada karşılaşılan karmaşık geometriye sahip cisimlerin temas problemlerinin analizinde birkaç analiz ağının hazırlanmasını gerektirecektir.

Farklı malzemelerden oluşan ancak tek bir parça davranışı göstermesi beklenen elemanların sayısal yöntem analizi için, sürtünme katsayısının sonsuz olması fiziksel kabulüyle mümkün olacaktır.

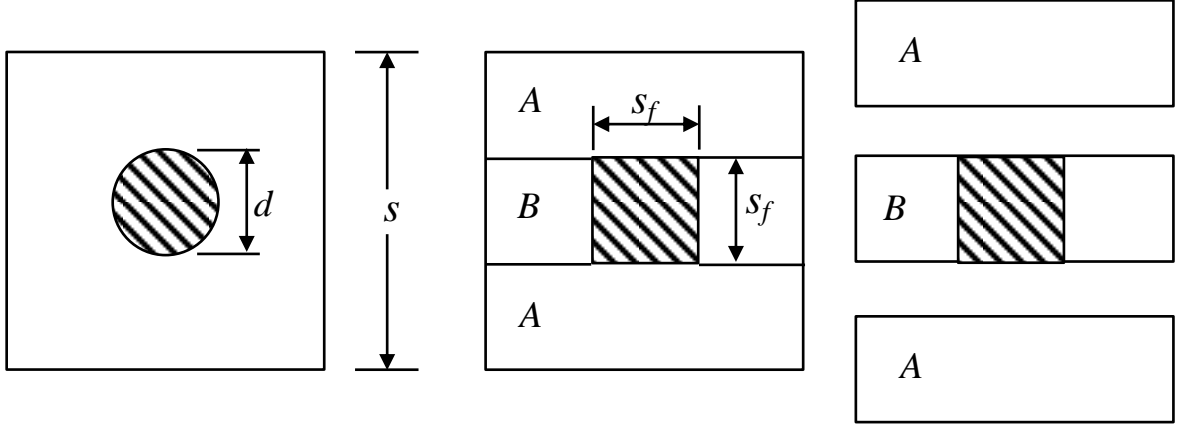
3. KOMPOZİTLERİN ENİNE ELASTİSİTE MODÜLLERİNİN SINIR ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE HESAPLANMASI

3.1 Sürekli Liflere Sahip Kompozit Malzemelerin Enine Elastisite Modüllerinin Hesaplanması

Kompozit malzemelerin boyuna elastisite modüllerinin hesaplanmasında karışımlar kuralı iyi bir yaklaşım olsa da kompozit malzemelerin enine elastisite modülünün hesaplanmasında, karışımlar kuralı yaklaşımını kullanan ve ters karışımlar kuralı olarak bilinen yaklaşım iyi çözüm vermemektedir [4]. Bu nedenle, mukavemet modelleri olarak ta bilinen bu yaklaşımların yanında elastisite modelleriyle deneye dayalı modeller geliştirilmiştir [4].

Kompozit malzemelerde, Lif ve matris malzemelerin kompozit içinde hacimsel yüzdeleri tanımlanırken ilgili kompozitin birim hacmi kullanılmaktadır. Kompozitin bu birim hacmine karakteristik hacim elemanı adı verilmektedir. Uygulamalarda, kompozit malzemelerdeki lifler matris malzemesi içinde düzenli bir dağılım göstermese de, kompozit malzemedeki liflerin hacimsel oranlarının lif çapına bağlı olarak tanımlanabilmesi için liflerin matris malzemesi içinde düzenli dağıldığı varsayılmaktadır. Şekil 3.1’de görüldüğü gibi, dairesel dik kesit geometrisine sahip lifin kesit alanına eşit dikdörtgen kesit geometrisine dönüştürerek ve karakteristik hacim elemanını alt bölgelere ayırarak, karakteristik hacim elemanının boyutları Denklem 3.1’deki gibi ifade edilmektedir [5].

$$s = \sqrt{\frac{\pi}{4v_f}} d \quad (3.1)$$



Şekil 3.1 Dairesel kesit geometrisine sahip lifin dikdörtgen kesit geometrisine dönüştürülerek karakteristik hacim elemanını alt bölgelere ayrıştırılması ve boyutlandırılması

Bu yaklaşım üzerinden hacimsel oranların ifade edildiği ve karışımlar kuralına benzer yaklaşımı kullanan gözden geçirilmiş alt bölgeler yöntemine ait matematiksel ifade Denklem 3.2’de verilmektedir [4].

$$E_2 = E_m \left[(1 - \sqrt{v_f}) + \frac{\sqrt{v_f}}{1 - \sqrt{v_f} \left(1 - \frac{E_m}{E_{f2}}\right)} \right] \quad (3.2)$$

Bu ifade de E_2 kompozit malzemenin enine elastisite modülünü ifade etmektedir. E_m ise matris malzemenin elastisite modülünü ifade etmektedir. v_f lifin kompozit malzeme içindeki hacimsel oranını ve E_{f2} ise lifin enine elastisite modülünü ifade etmektedir. Bu çalışmada matris ve lif malzemeleri doğrusal, elastik, homojen ve izotrop malzeme davranışları sergiledikleri kabul edilmiştir.

Gerilmeler için karışımlar kuralı kabulünün geçerli olduğu glass/epoxy kompozit malzeme için verilen deneysel sonuçlarla iyi bir yaklaşım içinde olan deneye dayalı Tsai-Hahn modeli Denklem 3.3’deki gibi matematiksel bir ifade ile verilmektedir [4, 6].

$$\frac{1}{E_2} = \frac{1}{v_f + \eta_2 v_m} \left[\frac{v_f}{E_f} + \frac{\eta_2 v_m}{E_m} \right] \quad (3.3)$$

v_f lifin kompozit malzeme içindeki hacimsel oranı v_m matrisin kompozit malzeme içindeki hacimsel oranını ifade etmektedir. η_2 ise matris malzeme ile lif deki ortalama gerilmeler arasındaki oran olup Denklem 3.4'deki gibi matematiksel ifadeyle verilmektedir.

$$\eta_2 = \frac{\bar{\sigma}_m}{\bar{\sigma}_{f2}} \quad (3.4)$$

3.2 Elastisite Modülünün Sınır Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması

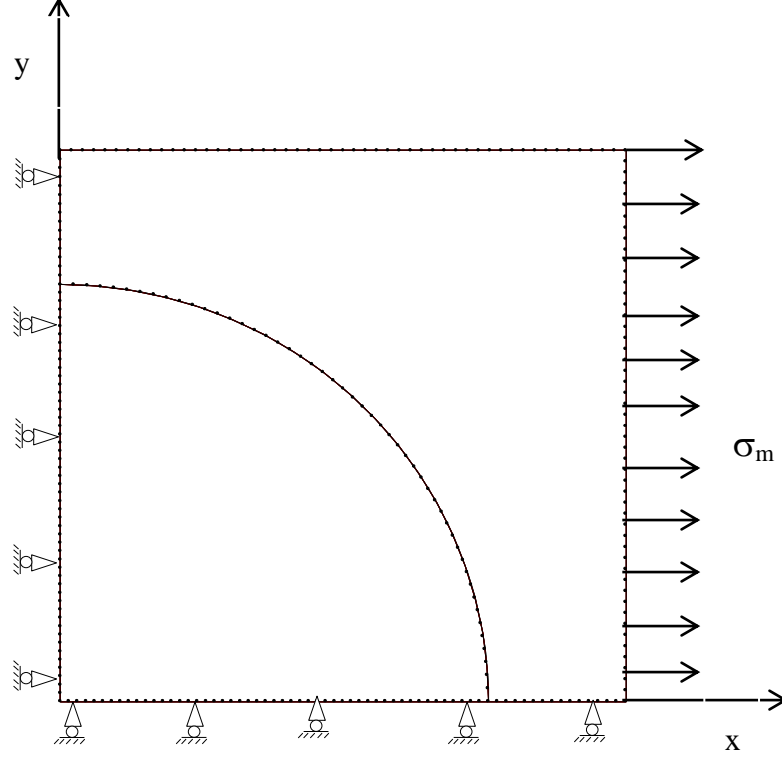
Düzlem şekil değiştirme kabulü altındaki sınır elemanlar analiz modelinin sınır ve yük koşulları ise Şekil 3.2 de verilmiştir. 70 ile 90 arasında değişen eleman sayılarında değişik sınır elemanlar analiz modelleri seçilerek eleman sayılarının sonuçlar üzerindeki etkileri irdelenmiştir. Bu eleman sayılarındaki analiz modellerinin ürettiği sonuçlar arasında önemli bir etkisi olmadığı gözlenmiştir. Bu analiz modelinde yüklemenin σ_m yapıldığı yüzeylerdeki yer değiştirmeler sınır elemanlar yöntemiyle hesaplanarak, bu yüzeye ait ortalama yer değiştirme;

$$\bar{u} = \frac{2}{s} \int_0^{s/2} u dy \quad (3.5)$$

İfadesi üzerinden hesaplandıktan sonra kompozit malzemenin enine elastisite modülü de aşağıda verilen ifadeyle hesaplanabilecektir.

$$E_2 = \frac{\sigma_m}{\bar{\epsilon}_x} = \frac{\sigma_m}{2\bar{u}/s} \quad (3.6)$$

Sınır elemanlar yönteminin ürettiği çözüm kütüğü örneği EK-1’de verilmiştir.



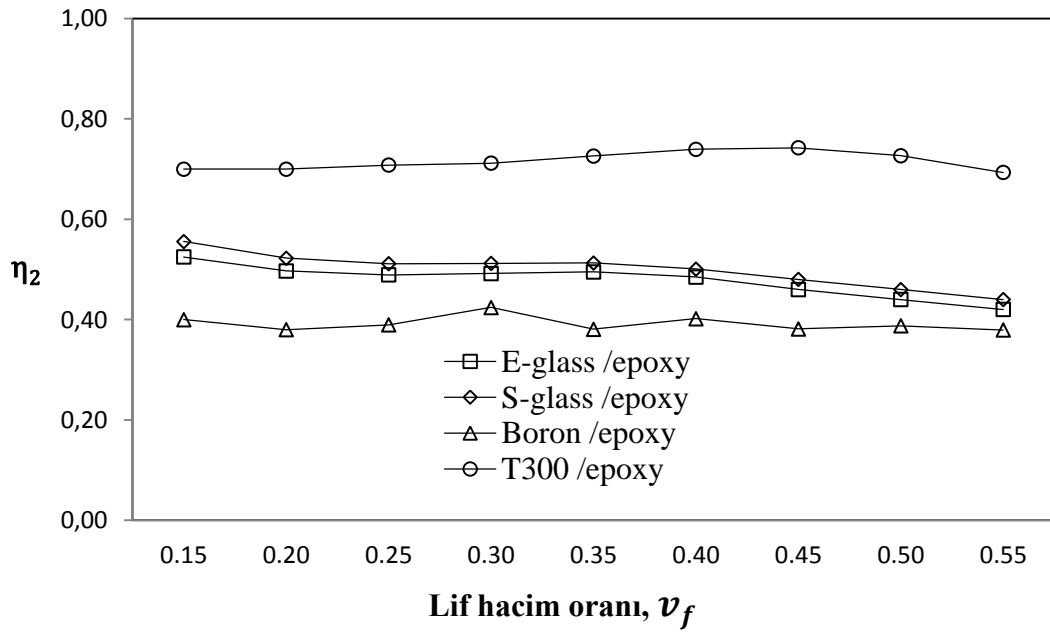
Şekil 3.2 Sınır elemanlar analiz modelinin sınır ve yük koşulları

Bu çalışmada sunulan kompozit malzemelerin enine elastisite modüllerinin sınır elemanlar yöntemini kullanarak hesaplanması sayısal yöntemi, E-glass/epoxy, S-glass/epoxy, Boron/epoxy ve T300/epoxy kompozit malzemelerine uygulanmıştır. Sayısal analiz için bu kompozit malzemelerin doğrusal elastik izotrop malzeme davranışları sergiledikleri kabul edilmiştir. Bu kompozit malzemelerin elastisite modülleri, poisson oranları ile lif çapları Çizelge 3.1 de verilmiştir. Şekil 3.2 de verilen sınır elemanlar analiz modelindeki x-ekseni üzerindeki lif ile matris malzemesinin ortak düğüm noktasına ait σ_x gerilmeleri oranları Şekil 3.3 de verilmiştir. Bu ise Tsai-Hahn modelindeki gerilme oranı η_2 parametresinin hangi sayısal değerde olabileceğini açıklayacaktır. E-glass/epoxy, S-glass/epoxy, Boron/epoxy ve T300/epoxy kompozit malzemeleri için elde edilen sonuçlar sırasıyla

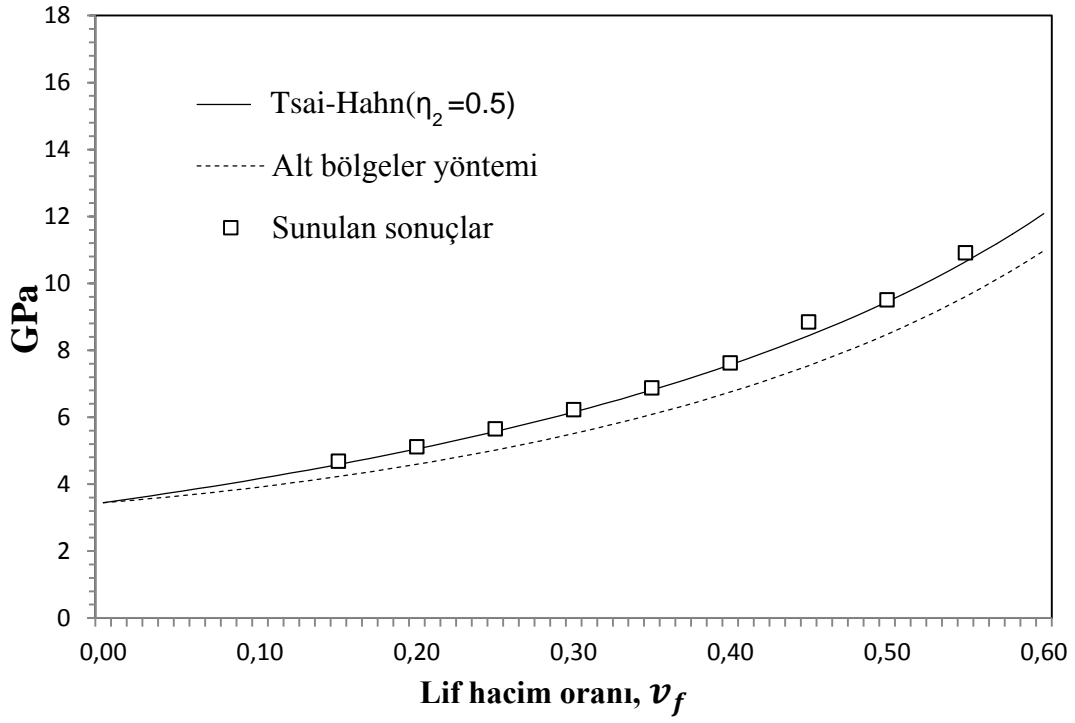
Şekil 3.4, Şekil 3.5, Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 de verilmiştir. Grafiklerden görülebileceği gibi elde edilen sonuçların, alt bölgeler yönteminden daha çok deneysel sonuçlarla karşılaştırıldığında iyi bir yaklaşım içinde olan deneye dayalı Tsai-Hahn modeliyle oldukça iyi bir yaklaşım içindedirler [4].

Çizelge 3.1 Kompozit malzemelerin elastisite modülleri, poisson oranları ile lif çapları [4]

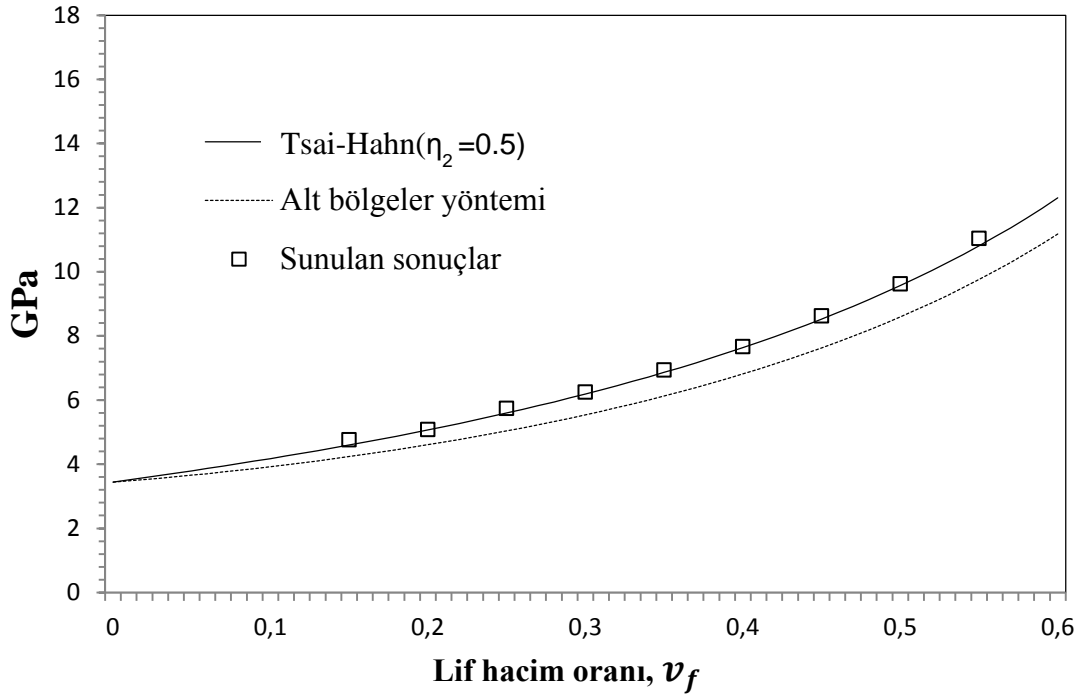
Kompozit Malzeme	E_f (N/mm ²)	ν_f	E_m (N/mm ²)	ν_m	d (mm)
E-Glass/Epoxy	73084,43	0,22	3447	0,35	0,009144
S-Glass/Epoxy	85494,99	0,22	3447	0,35	0,009144
Boron/Epoxy	399895,92	0,20	5171	0,35	0,14224
T300/Epoxy	220632,23	0,20	5171	0,35	0,00762



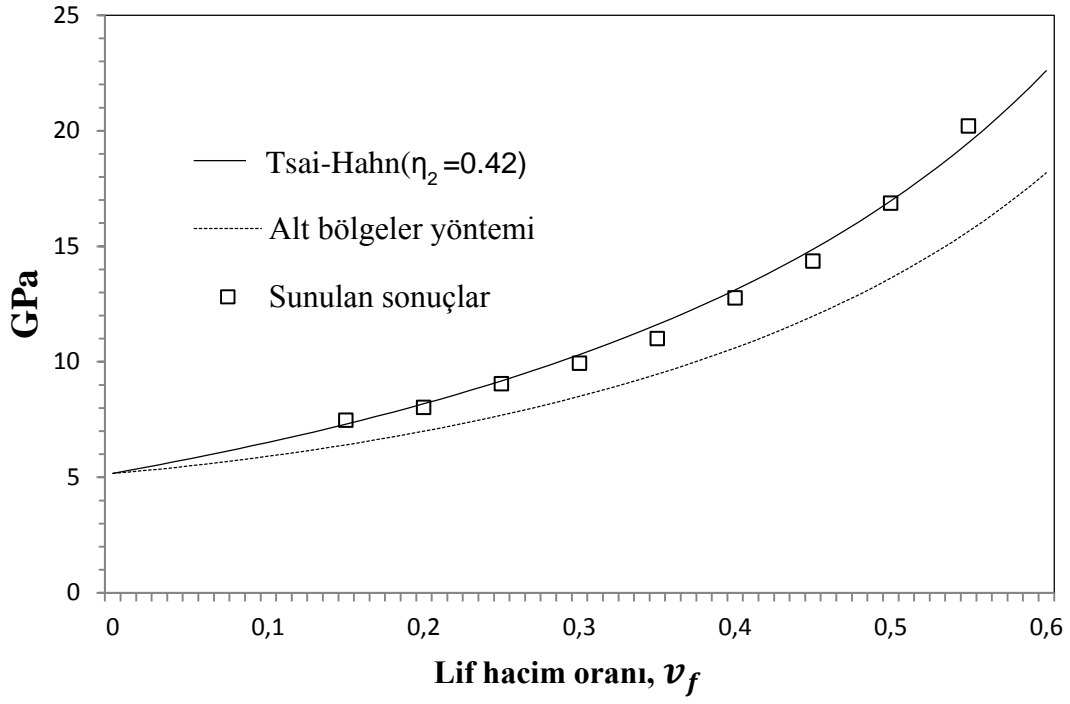
Şekil 3.3 x-ekseni üzerindeki lif ile matris malzemesinin ortak düğüm noktasına ait σ_x gerilmeleri oranları değişimi



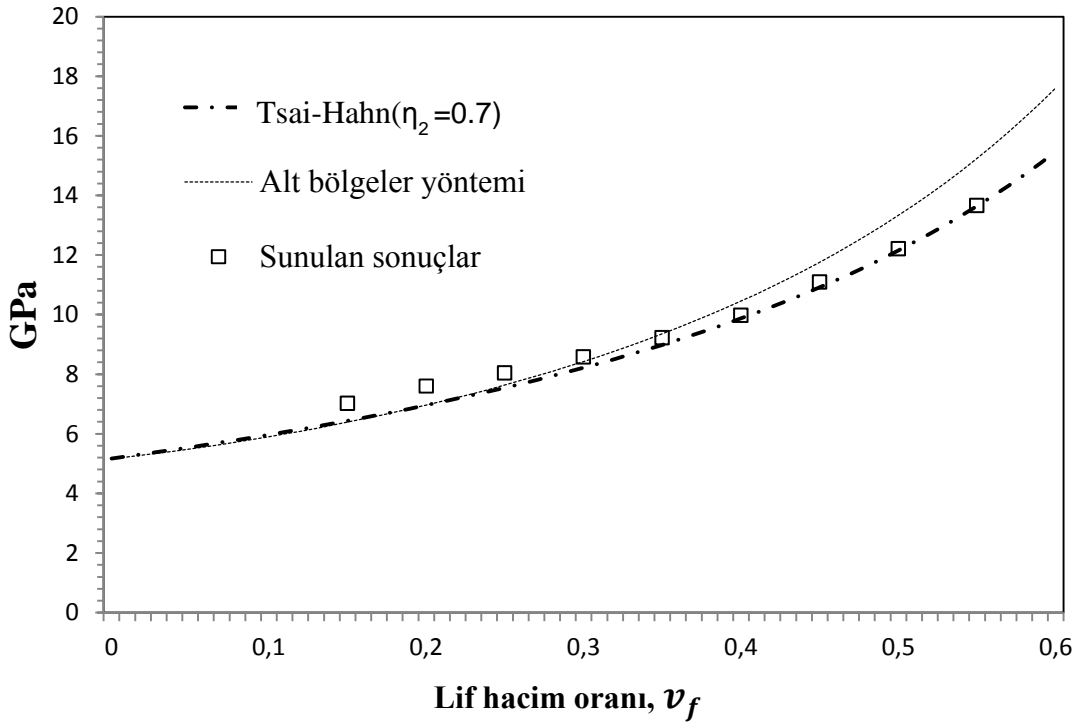
Şekil 3.5 E-glass/epoxy için enine elastisite modülü



Şekil 3.4 S-glass/epoxy için enine elastisite modülü



Şekil 3.6 Boron/epoxy için enine elastisite modülü



Şekil 3.7 T300/epoxy için enine elastisite modülü

4. SONUÇLAR

Sayısal çözüm yöntemlerinden biri olan sonlu elemanlar yöntemi endüstride oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Dahası mühendisler, bu yöntemin kendilerine sunduğu analiz ve analiz sonuçlarının değişik sunuş seçeneklerinden oldukça mutlu oldukları gözlenmektedir. Ancak son yıllarda, özellikle çözüm bölgesinde değişkenlerin oldukça keskin şekillerde değiştiği mühendislik uygulamalarında (örneğin temas ve kırılma mekaniği problemleri) etkin çözümler üreten Sınır Elemanlar (SE) veya Sınır İntegral Eşitliği (SİE) yöntemi olarakta bilinen yöntem alternatif bir tasarım aracı olarak belirmektedir. Daha da etkin çözümler üretmek için bu iki yöntemin karma formülasyonu yoluna gidilebilmektedir. Bu yöntem için ihtiyaç duyulan veri kütüklerinin hazırlanması için gerekli olan zaman ve çaba sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırıldığında oldukça daha azdır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde elastostatik problemlerin sınır elemanlar formülasyonu verilmiştir. Bu kuadratik şekil fonksiyonlarının kullanan formülasyonun sayısal integrasyon aşamaları adım adım tanıtılmıştır. Verilen bir problem için sınır koşullarının tanıtılması ve çözüm matrislerinin elde edilmesi ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Üçüncü bölümde ise, temas mekaniği problemleri için Coulumb sürtünme kanununu kullanan sınır elemanlar formülasyonu kısaca açıklanmıştır. Farklı malzemelerden oluşan ancak tek bir parça davranışı gösteren elemanların sayısal yöntemle analizi, sürtünme katsayısının sonsuz olması fiziksel kabulüyle mümkün olacaktır. Bu temas koşulu altında sınır elemanlar temas formülasyonunu kullanarak çalışmada amaçlanan kesik liflere sahip kompozit malzemelerin enine elastisite modüllerinin sayısal hesaplanması aşamaları açıklanmıştır.

Bu çalışmada sunulan kesik liflere sahip kompozitlerin enine elastisite modüllerinin sınır elemanlar yöntemini kullanarak hesaplanması sayısal yöntemi, E-glass/epoxy, S-

glass/epoxy, Boron/epoxy ve T300/epoxy kompozit malzemelerine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar, alt bölgeler yöntemi ile deneysel sonuçlar iyi bir yaklaşım içinde olduğu bilinen deneye dayalı Tsai-Hahn modeliyle karşılaştırılmıştır ve bu çalışmada sunulan sınır elemanlar formülasyonuna dayalı yöntemle etkin çözümler elde edilebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Becker, A. A., 1992, "The Boundary Element Method in Engineering", *McGraw Hill Pen*, New York.
- [2] Gao, X. W., 2002, "Boundary Element Programming in Mechanics", *Cambridge University Press*, Cambridge.
- [3] Beer, G., Smith, I., Dauenser, C., 2008, "The Boundary Element Method with programming", *Springer-Verlag*, Wien.
- [4] Ronald, F. G., 2007, "Principles of Composite Material Mechanics 2nd ed.", *CRC Press*, London.
- [5] Hopkins, D. A., Chamis, C. C., 1988, "A unique set of micromechanics equations for high temprature metal matrix composites", *American Society for Testing and Materials, Philadelphia*, 159-176.
- [6] Tsai, S. W., Hahn, H. T., 1980, "*Introduction to Composite Materials*", Technomic Publishing Co., Lancaster.

EKLER

EK-1 Örnek Veri Kütüğü

*TITLE

ANALYSIS OF E-GLASS & EPOCY , Vf=0,45

*CONTROL

GEOM=PSTRAIN

ANALYSIS=ELASTIC

INTEG=4

DOMAIN=2

*KEYPOINTS

1 0.0 0.0

2 0.004572 0.0

3 0.0 0.004572

4 0.004572 0.0

5 0.00604 0.0

6 0.00604 0.00604

7 0.0 0.00604

8 0.0 0.004572

*CURVES

1,2 0 25 1.0

2,3 1 25 1.0

0.00323 0.00323

3,1 0 25 1.0

4,5 0 15 1.0

5,6 0 25 1.0

6,7 0 25 1.0

7,8 0 15 1.0

8,4 1 25 1.0

0.00323 0.00323

*MATERIAL

1 73084,0.22 0.0 0.0 0.0

EK-1 Örnek Veri Kütüğü (Devam)

2 3447,0.35 0.0 0.0 0.0

*BCOND=DISPLACEMENT

OPTION=KEY

1,2,2,0.0,0.0

4,5,2,0.0,0.0

7,8,1,0.0,0.0

3,1,1,0.0,0.0

*BCOND=STRESS

OPTION=KEY

VALUE=CONSTANT

5,6,100.0,0.0,0.0

*CONTACT=DOMAINS

OPTION=KEY

1, 1,1

2, 4,4

*CONTACT=PAIRS

OPTION=GLUED

*DATAEND

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : EKİCİ, Haluk
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 27.04.1986 Eskişehir
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0 (222) 320 63 12 - 0 (555) 869 98 70
e-mail : haluk.ekici@mmo.org.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi/ Makine Mühendisliği Bölümü	2009
Lise	Gazi Lisesi (Eskişehir)	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2009-2010	Biomekatronik Ltd. Şti.	Ar-Ge Mühendisi
2010- 2011	Hatır Makine	Üretim Şefi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayımlar

-

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Sinema, Müzik