T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KANAL YÜZEYLERİNİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA BOZKURT

TEMMUZ 2012

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KANAL YÜZEYLERİNİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA BOZKURT

UŞAK 2012

Fatma BOZKURT tarafından hazırlanan "Kanal Yüzeylerinin Geometrik Özellikleri" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ……………………………….
Makine Mühendisliği, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER ……………………………….
Matematik, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ……………………………….
Matematik, Uşak Üniversitesi

Tarih: 28/06/2012

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma BOZKURT

KANAL YÜZEYLERİNİN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma BOZKURT

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2012

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde kanal yüzeyleri, kanal yüzeylerinin geometrik özellikleri verildi. Kanal yüzeyinin şekil operatörü, umbilik noktaları, asli eğrilik çizgileri, asimptotik çizgileri bulundu. kanal yüzeyinin Weingarten ve Lineer Weingarten yüzey olma durumları araştırıldı. Kanal yüzeyinin Focal yüzeyleri, paralel yüzeyleri, singüler noktaları, geodezikleri bulundu.

Üçüncü bölümde kanal yüzeyinin diferensiyel özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde hortum yüzeyi olarak kanal yüzeyleri, dönel yüzey olarak kanal yüzeyleri, merkez eğrisi bir düzlemsel eğri olan kanal yüzeyleri verildi.

Bilim Kodu : **403.02.01**

Anahtar Kelimeler : **kanal yüzeyi, hortum yüzeyi**

Sayfa Adedi : **59**

Tez Yöneticisi : **Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN**

GEOMETRIC PROPERTIES OF CANAL SURFACES

(M. Sc. Thesis)

Fatma BOZKURT

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2012

ABSTRACT

This thesis consist of four chapters.

In the first chapter, the basic definitions and theorems are given related to this subject.

In the second chapter, canal surfaces, geometric properties of canal surface are given. Shape operator, umbilic points, lines of principal curvature, asimptotic lines of canal surface are found. Weingarten canal surface and linear Weingarten canal surface are studied. Furthermore, focal surfaces, parallel surfaces, singülar points, geodesics of canal surface are found.

In the third chapter, differential properties of canal surface are given.

In the fourth chapter, tubes as canal surfaces, surface of revolution as canal surfaces, canal surfaces with center curve that is a plane curve are given.

Science Code : **403.02.01**

Key Words : **canal surface, tubes , tubular surface**

Page Number : **59**

Adviser : **Asist. Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN**

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması esnasında büyük yardımlarını gördüğüm ve her an her konuda manevi desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmamdaki eksiklerimi tamamlayan, yol gösteren Yrd. Doç. Dr. Yılmaz TUNCER'e (Uşak Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren, manevi destek olan, duydukları ve hissettirdikleri sonsuz güven için anneme, babama ve kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜRLER iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELERİN LİSTESİ vi

1. BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Temel Tanım ve Teoremler 2

2. BÖLÜM 18

2.1 Kanal Yüzeyleri 18

2.2 Kanal Yüzeyinin Geometrik Özellikleri 24

2.2.1 Kanal Yüzeyinin Şekil Operatörü ve Umbilik Noktaları 24

2.2.2 Kanal Yüzeyinin Asli Eğrilik Çizgileri 26

2.2.3 Kanal Yüzeyinin Asimptotik Çizgileri 27

2.3 Kanal Yüzeyinin Weingarten Yüzey Olması 28

2.4 Kanal Yüzeyinin Lineer Weingarten Yüzey Olması 31

2.5 Kanal Yüzeyinin Focal Yüzeyleri 33

2.6 Kanal yüzeyinin Paralel Yüzeyleri 35

2.7 Kanal yüzeyinin Singüler Noktası 42

2.8 Kanal Yüzeyinin Geodezikleri 52

3. BÖLÜM 46

3.1 Kanal Yüzeyinin Diferensiyel Özellikleri 46

4. BÖLÜM 52

4.1 Hortum Yüzeyi Olarak Kanal Yüzeyleri 52

4.2 Dönel Yüzey Olarak Kanal Yüzeyleri 55

4.3 Merkez Eğrisi Bir Düzlemsel Eğri Olan Kanal Yüzeyi 58

KAYNAKLAR 60

ÖZGEÇMİŞ 61

SİMGELERİN LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\lVert , \rVert$	Norm
$\wedge$	Vektörel çarpım
$\langle , \rangle$	İç çarpım
M	Bir yüzey
U	Bir yüzeyin birim normali
I	Bir yüzeyin birinci temel formu
II	Bir yüzeyin ikinci temel formu
E, F, G	Bir yüzeyin birinci temel formunun katsayıları
e, f, g	Bir yüzeyin ikinci temel formunun katsayıları
S	Bir yüzeyin şekil operatörü
K	Bir yüzeyin Gauss eğriliği
H	Bir yüzeyin ortalama eğriliği
k_1, k_2	Bir yüzeyin asli eğrilikleri
T	Bir yüzeyin teğet vektörü
N	Bir yüzeyin asli normal vektörü
B	Bir yüzeyin binormal vektörü

κ	Bir yüzeyin eğriliği
τ	Bir yüzeyin burulması
κ_g	Bir yüzeyin geodezic eğriliği
τ_g	Bir yüzeyin geodezik burulması
κ_n	Bir yüzeyin normal eğriliği
M_i^*	Bir yüzeyin focal yüzeyleri
$\overline{M}$	Bir yüzeye paralel yüzey
$\overline{U}$	Bir yüzeye paralel yüzeyin birim normali
$\overline{I}$	Bir yüzeye paralel yüzeyin birinci temel formu
$\overline{II}$	Bir yüzeye paralel yüzeyin ikinci temel formu
$\overline{S}$	Bir yüzeye paralel yüzeyin şekil operatörü
$\overline{K}$	Bir yüzeye paralel yüzeyin Gauss eğriliği
$\overline{H}$	Bir yüzeye paralel yüzeyin ortalama eğriliği
$\overline{k}_1, \overline{k}_2$	Bir yüzeye paralel yüzeyin asli eğrilikleri

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Kanal yüzeyleriyle ilgili bugüne kadar bir takım çalışmalar yapılmıştır. 2006 yılında Z. Xu, R. Feng ve J. Sun kanal yüzeylerinin analitik ve geometrik özelliklerini inceledi. 2000 yılında M. K. Karacan ve Y. Yaylı Kanal yüzeyinin özel bir hali olan hortum yüzeyinin singüler noktalarını inceledi. Y. Tunçer, D. W. Yoon, M. K. Karacan 2011 yılında Weingarten ve Lineer Weingarten kanal yüzeylerini inceledi. 2012 yılında Y. Yaylı ve F. Doğan kanal yüzeyinin özel bir hali olan hortum yüzeylerinin Darbox çatısını inceledi. Bugüne kadar yapılan bu çalışmalarda kanal yüzeyleri ve kanal yüzeylerinin özel hali olan hortum yüzeyleri incelendiği görülür.

Bu çalışmada ise, R^3 te kanal yüzey tanımlandı. Kanal yüzeyinin I. temel formunun katsayıları, II. temel formunun katsayıları, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve asli eğrilikleri bulundu. Kanal yüzeyinin şekil operatörü, umbilik noktaları, asli eğrilik çizgileri ve asimptotik çizgileri bulundu. Kanal yüzeyinin Weingarten ve lineer Weingarten olması durumları incelendi. Kanal yüzeyinin focal yüzeyleri, paralel yüzeyleri, singüler noktaları ve geodezikleri bulundu. Ayrıca kanal yüzeyinin paralel yüzeylerinin şekil operatörü, Gauss eğrilikleri, ortalama eğrilikleri, asli eğrilikleri, Weingarten ve lineer Weingarten durumları incelendi. Kanal yüzeyinin diferensiyel özellikleri incelendi. Kanal yüzeyinin özel bir hali olan hortum yüzeyleri tanımlandı. Hortum yüzeyinin I. temel formu, II. temel formu, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği ve asli eğrilikleri bulundu. Kanal yüzeyinin özel bir hali olan dönel yüzeyler tanımlandı. Dönel yüzeyin asli eğrilikleri, focal yörüngesi ve evolütü verildi.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1 Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V 'de $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle , \rangle &: V \times V \to IR \\ (x,y) &\to \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [1].

Tanım 1.1.2 3 boyutlu reel sayılar cümlesinde

$$\begin{aligned} \times &: R^3 \times R^3 \to R^3 \\ (\alpha,\beta) &\to \alpha \times \beta \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı "×" iç işlemine **vektörel çarpım işlemi** denir ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nın **vektörel çarpımı** denir [1].

Teorem 1.1.1 $\alpha,\beta \in R^3$ olmak üzere

$$\alpha \times \beta = \sum_{i=!}^{n} \det(e_i,\alpha,\beta)e_i$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.1.3 V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki aksiyomlar ile tanımlanan dönüşüme **iç çarpım** denir [3].

$$\langle , \rangle : V \times V \to R$$

olmak üzere

(i) Simetri aksiyomu

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v \in V$$

(ii) Bilineerlik aksiyomu

$$\langle cu,v\rangle = c\langle u,v\rangle = \langle u,cv\rangle \quad \forall c \in IR,\ \forall u,v \in V$$
$$\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle \quad \forall u_1, u_2, v \in V$$
$$\langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle \quad \forall u, v_1, v_2 \in V$$

(iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu

$$\langle u,u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$$
$$\langle u,u\rangle = 0 \quad u = \vec{0}$$

Tanım 1.1.4 V bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olsun. x vektörünün normu $\|x\|$ olmak üzere x vektörünün $\frac{1}{\|x\|}$ skaları ile çarpılmışına x'in **normlanmışı** denir ve $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$ ile gösterilir [3].

Tanım 1.1.5 $I \subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere (I,α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^n \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

şeklindeki α'ya **eğri** denir. $I \subseteq R$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [1].

Tanım 1.1.6 $M \subset R$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| &: I \to R \\ t &\to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre **skalar hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M 'nin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir [1].

Tanım 1.1.7 M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer, $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi α 'ya göre **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir [1].

Tanım 1.1.8 Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir [1].

Tanım 1.1.9 $X \subset R^3$ regüler bir yüzey için birim normalini U ile gösterirsek

$$U(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u,v)$$

şeklindedir ve $(u,v) \in R^3$ noktalarında $X_u \times X_v$ sıfırdan farklıdır [2].

Tanım 1.1.10 $M \subset E^n$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin **Serret-Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), ..., V_r(m)\}$ ifadesine de $m \in M$

noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı** denir. Her bir $V_i, 1 \le i \le r$ ye **Serret-Frenet vektörü** adı verilir [1].

Tanım 1.1.11 $M \in R^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ keyfi parametre olmak üzere $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$\left\{ T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \qquad B(t) = \frac{\alpha'(t)\times\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}, \qquad N(t) = B(t)\times T(t) \right\}$$

şeklindedir [1].

Tanım 1.1.12 $M \in R^3$ eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ise

$$\left\{ T(s) = \alpha'(s), \quad N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \qquad B(s) = T(s)\times N(s) \right\}$$

şeklindedir [1].

Teorem 1.1.2 $\alpha : (c,d) \to R^3$; $c < s < d$ için $\kappa(s) > 0$ ile birim hızlı bir eğri olsun. O halde Frenet Formülleri:

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir. τ eğrinin torsiyonu, κ eğrinin eğriliğidir [1].

Tanım 1.1.13 $M, N \subset E^3$ iki eğri olsun. M ve N sırası ile $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N'in Frenet r-ayaklıları sırasıyla

$$\{V_1(s),...,V_r(s)\}$$

ve

$$\{V_1^*(s),...,V_r^*(s)\}$$

olmak üzere

$$\langle V_1(s), V_1^*(s)\rangle = 0$$

ise N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir [1].

Tanım 1.1.14 M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [1].

Tanım 1.1.15 A, R^3 ün açık bir alt cümlesi olmak üzere $M : A \to R^3$ bir yüzey ve $E, F, G : U \to R$'e tanımlı olmak üzere,

$$E = \langle x_u, x_u \rangle$$
$$F = \langle x_u, x_v \rangle$$
$$F = \langle x_v, x_v \rangle$$

dir.

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

M yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu denir. Buradaki E, F, G; M in birinci temel formunun katsayılarıdır [2].

Tanım 1.1.16 A, R^3 ün açık bir alt cümlesi olmak üzere $M : A \to R^3$ bir yüzey, U yüzeyin birim normali ve $e, f, g : A \to R$ fonksiyonlarını tanımlarsak

$$\begin{aligned} e &= \langle U, M_{uu} \rangle \\ f &= \langle U, M_{uv} \rangle \\ g &= \langle U, M_{vv} \rangle \end{aligned}$$

dir.

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

M yüzeyinin ikinci temel formu denir. Buradaki e, f, g; M nin ikinci temel formunun katsayılarıdır [2].

Tanım 1.1.17 E^n 'in bir hiperyüzeyi M ve M 'nin birim normal vektör alanı U verilsin. E^n 'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X U$ şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya M 'nin **Weingarten dönüşümü** denir [2].

Tanım 1.1.18 M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları E, F, G ve ikinci temel formunun katsayıları e, f, g olmak üzere yüzeyin şekil operatörü matrisi S

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} Ge - Ff & Ef - Fe \\ Gf - Fg & Eg - Ff \end{vmatrix}$$

şeklindedir [2].

Tanım 1.1.19 R^3 te regüler bir yüzey M olsun. M yüzeyinin **Gauss eğriliği** K, **Ortalama eğriliği** H ve $K, H : M \to R$ olmak üzere sırasıyla

$$K(P) = \det(S(P))$$

ve

$$H(P) = \frac{1}{2} iz(S(P))$$

şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 1.1.3 $M : A \to R^3$ bir regüler yüzey olsun. M in Gauss eğrilik ve ortalama eğrilik formülleri;

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{1.1}$$

ve

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \tag{1.2}$$

dir. e, f, g; M 'in ikinci temel formunun katsayıları ve E, F, G; M 'in birinci temel formunun katsayılarıdır [2].

Teorem 1.1.4 $M \subset R^3$ regüler yüzeyinin, K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği ile asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında

$$K = k_1 k_2$$

ve

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Sonuç olarak

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

olur. Buradan da

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

ve

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dır [2].

Tanım 1.1.20 E^n **'**de hiperdüzlem M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın teğet vektör alanı T ve M 'nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S 'nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir **eğrilik çizgisi** denir. Bu tanıma göre M üzerindeki eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi $\lambda \neq 0$ bir skalar olmak üzere, $S(T) = \lambda T$ şeklindedir [2].

Tanım 1.1.21 Bir $M(s,t)$ yüzeyinin eğrilik çizgisinin diferensiyel denklemi

$$\begin{vmatrix} ds^2 & -dsdt & dt^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

şeklindedir [2].

Tanım 1.1.22 E^n 'de bir hiperyüzey M ve M 'nin şekil operatörü S olsun. M 'nin bir P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik (eigen) değerlerine M 'nin bu noktadaki **asli eğrilikleri** denir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik (eigen) vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M 'nin bu P noktasındaki **asli eğrilik doğrultuları** denir [2].

Tanım 1.1.23 E^n 'de bir hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasında M 'nin şekil operatörü S olmak üzere;

1) $\exists \lambda \in IR$ için $S = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M 'nin bir **umbilik noktası** denir.

2) $S = 0$ şeklinde bir sıfır dönüşümü ise P noktasına M 'nin bir **düzlemsel(flat) noktası** denir [2].

Tanım 1.1.24 M yüzeyinin şekil operatörünün matrisi birim matrisin bir katı şeklinde yazıldığı noktalara umbilik noktalar denir. Bunun için esas köşegen üzerindeki elemanlar birbirine eşit, diğerleri sıfır olmalıdır [2].

Tanım 1.1.25 E^n 'de bir hiperyüzeyi M ve $P \in M$ noktasındaki şekil operatörü S olsun. Eğer, $X_P, Y_p \in T_M(P)$ için $\langle S(X_P), Y_p \rangle = 0$ ise bu iki tanjant vektöre **eşlenik** denir. Bir $X_P \neq 0$ tanjant vektörü için, $\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$ ise X_P doğrultusuna, M 'nin P noktasındaki bir **asimptotik doğrultusu** ve X_P 'yi $\forall P \in \alpha$ noktasında teğet vektörü kabul eden α eğrisine M üzerinde bir **asimptotik çizgi** denir [2].

Lemma 1.1.1 Bir yüzeyin **asimptotik çizgilerinin** diferensiyel denklemi

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0$$

şeklindedir [4].

Lemma 1.1.2 $M \subset R^3$ regüler yüzeyi üzerinde bir eğri α olsun. α 'nın **asimptotik** olması için gerek ve yeter şart her noktasındaki ivmesinin M 'ye daima teğet olmasıdır. Buna göre α'', U 'ya (yüzeyin birim normaline) dik olur [4].

Teorem 1.1.5 $\alpha, M \subset R^3$ regüler yüzeyi üzerinde bir eğri, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, κ, α 'nın eğriliği ve U, M yüzeyinin birim normali olsun. α 'nın **asimptotik çizgi** olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ ya da $\langle N, U \rangle = 0$ olmasıdır [4].

Tanım 1.1.26 R^3te regüler bir yüzey M ve M 'nin herhangi bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P)$ ve $k_2(P)$ olmak üzere $k_1(P) = k_2(P)$ ise, P 'ye M yüzeyinin bir **umbilik noktası** denir [4].

Tanım 1.1.28 $\beta : (c,d) \to R^n$ ile tanımlı β eğrisi birim hızlı bir eğri olsun. $\kappa(s) = \|\beta''(s)\|$ eşitliği ile verilen $\kappa : (c,d) \to IR$ değerine β 'nın **eğriliği** adı verilir [4].

Teorem 1.1.6 $\beta : (c,d) \to M$ birim hızlı bir eğri ve M 'nin β eğrisine göre **Darboux çatısı** $\{T, V_2, V_3\}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ (V_2)' \\ (V_3)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [4].

Tanım 1.1.28 E^{n+1} de bir M hiperyüzeyi üzerindeki bir eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M 'ye ortogonal ise bu eğriye **geodezik** adı verilir. Başka bir ifadeyle $M \subset R^3$ bir yüzey ve $\alpha : (a,b) \to M$ bir eğri olsun. α'' ivme vektörünün teğetsel bileşeni yoksa α eğrisine **geodezik** denir [2,4].

Lemma 1.1.3 M üzerindeki bir α eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart α'nın sabit hızlı ve geodezik eğriliğinin $\kappa_g = 0$ olmasıdır [5].

Teorem 1.1.7 (Joachimsthal Teoremi) $\alpha; M_1, M_2 \subset R$ regüler düzlemlerin kesişiminde uzanan bir eğri olsun. $M_i, i = 1,2$ de U_i de birim düzlem normali göstersin. M_1, M_2 yüzeyleri α boyunca a sabit açıda kesiştiğini farzedersek; bu da $\langle U_1, U_2 \rangle$ iç çarpımı α eğrisi boyunca sabittir. O halde α eğrisinin M_1 de düzlemsel bir eğri olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin M_2 de düzlemsel bir eğri olmasıdır [4].

Lemma 1.1.4 $f^2 + g^2 = 1$ olmak üzere $f, g : (a,b) \to R$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar. $a < t_0 < b$ için t_0 farzedelim ki $f(t_0) = \cos t_0$ ve $g(t_0) = \sin t_0$ dır. O halde $\vartheta : (a,b) \to R$ bir tek fonksiyon vardır öyle ki $a < t < b$ aralığında

$$\vartheta(t_0) = t_0$$

için

$$f(t) = \cos \vartheta(t)$$

ve

$$g(t) = \sin \vartheta(t)$$

dır [4].

Tanım 1.1.29 $\alpha : (a,b) \to R^3$ eğriliği sıfır olmayan bir eğri için hortum yüzeyi

$$tube(s,t) = \alpha(s) + r(-N(s)\cos t + B(s)\sin t) \quad a \le s \le b, \ 0 \le t \le 2\pi$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 1.1.30 $SR:[0,2\pi]\times(a,b)\to R^3$ yüzeyi

$$SR(u,v)=(\varphi(v)\cos u,\varphi(v)\sin u,\psi(v))$$

şeklinde tanımlansın. SR ye M dönel yüzeyinin standart parametrizasyonu denir. Burada $\alpha=(0,0,s)$, $T=(0.0.1), N=(1,0,0)$ ve $B=(0,1,0)$ alındığında

$$t=-u \quad , \quad s=v \quad , \quad \varphi(v)=\mp r(v)\sqrt{1-r'(v)^2} \ \text{ ve } \ \psi(v)=v-r(v)r'(v)$$

şeklinde dönüşüm yapılmıştır [4].

Lemma 1.1.5 $M,\alpha(\varphi,\psi)$ kesit eğrisi ile tanımlanan bir dönel yüzey $SR:A\to R^3$; M nin standart parametrizasyonudur. O halde

$$\begin{aligned} E&=\varphi^2 \\ F&=0 \\ G&=\varphi'^2+\psi'^2 \end{aligned}$$

dır. Böylece SR ; φ ve $\varphi'^2+\psi'^2$ regüler olduğu yerde sıfırdan farklıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} e&=\frac{-|\varphi|\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} \\ f&=0 \\ g&=\frac{sign(\varphi)(\varphi''\psi'-\varphi'\psi'')}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} \end{aligned}$$

ve birim normal vektörü ise

$$U(u,v)=sign(v)\frac{(\psi'\cos u,\psi'\sin u,\varphi')}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$$

dir [4].

Sonuç 1.1.1 SR; R^3 de $\alpha(\varphi,\psi)$ birim hızlı kesit eğrisi ile tanımlanan dönel yüzeyin standart parametrelendirilişi olsun. Yüzeyin I. temel formunun katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \varphi^2 \\ F &= 0 \\ G &= 1 \end{aligned}$$

şeklindedir. Yüzeyin II. temel formunun katsayıları ise

$$\begin{aligned} e &= -|\varphi|\psi' \\ f &= 0 \\ g &= sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') \end{aligned}$$

şeklindedir. k_μ ve k_τ dönel yüzeyin asli eğrilikleri

$$\begin{aligned} k_\mu &= sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') \\ k_\tau &= -\frac{\psi'}{|\varphi|} \end{aligned}$$

şeklindedir. Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(sign(\varphi)(\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') - \frac{\psi'}{|\varphi|}), \\ K &= -\frac{\varphi''}{\varphi} \end{aligned}$$

şeklindedir [4].

Tanım 1.1.31 $M(s,t)$ bir yüzey, K ve H da sırası ile M nin Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere, yüzeyin eğrilikleri

$$\Phi(K,H) = \det\begin{pmatrix} K_s & K_t \\ H_s & H_t \end{pmatrix} = 0$$

Jacobi denklemini sağlıyorsa bu yüzeye Weingarten yüzeyi denir. Yüzeyin, Weingarten yüzeyi olması için

$$K_s H_t - K_t H_s = 0$$

denklemini sağlaması gerekir [9].

Tanım 1.1.32 $M(s,t)$ bir yüzey, K ve H da sırası ile M nin Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere, yüzeyin eğrilikleri

$$aK + bH - c = 0$$

denklemini sağlıyorsa bu yüzeye Lineer Weingarten yüzeyi denir [9].

Tanım 1.1.33 $M \subset R^3$ regüler bir yüzey ve M'ye λ (pozitif ya da negatif olabilir) uzaklıktaki paralel yüzeyi $\overline{M}$ olmak üzere

$$\overline{M}(u,v) = M(u,v) + \lambda U(u,v)$$

şeklindedir. Burada U, M yüzeyinin birim normalidir [4].

Lemma 1.1.6 $M \subset R^3$ regüler bir yüzey ve M yüzeyine λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyi $\overline{M}$ olsun. M yüzeyinin şekil operatörü matrisi S, asli eğrilikleri k_1, k_2, Gauss eğriliği K, ortalama eğriliği H ve $\overline{M}$ yüzeyinin şekil operatörü matrisi $\overline{S}$, asli eğrilikleri $\overline{k}_1, \overline{k}_2$, Gauss eğriliği $\overline{K}$, ortalama eğriliği $\overline{H}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\overline{S} = S(I - \lambda S)^{-1}$

ii. $\overline{k}_i = \dfrac{k_i}{1 - \lambda k_i}$

iii. $\overline{K} = \dfrac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$

iv. $\overline{H} = \dfrac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$

şeklindedir [4].

Tanım 1.1.34 E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ boyutlu yüzeye hiperyüzey adı verilir [2].

Tanım 1.1.35 $M \subset R^3$ regüler bir yüzey ve M 'nin focal yüzeyi M_i^* olmak üzere

$$M_i^*(u,v) = M(u,v) + k_i U(u,v) \quad i = 1,2$$

şeklindedir. Burada $k_i, i = 1,2$, M yüzeyinin asli eğriliğidir [4].

Tanım 1.1.36 $M \subset R^3$ regüler bir yüzey olmak üzere

$$M_s(u_0,v_0) \times M_t(u_0,v_0) = 0$$

sağlayan (u_0,v_0) noktalarına yüzeyin singüler noktaları denir [8].

Tanım 1.1.37 $J : R^2 \to R^2$ kompleks yapılı fonksiyonu

$$J(x,y) = (-y,x)$$

şeklinde tanımlıdır [4].

Tanım 1.1.38 $\alpha : R^2 \to R^2$ bir eğri ve α nın evolütü γ eğrisi olsun. γ eğrisi

$$\gamma = \alpha + \frac{\|\alpha'\|^2}{\langle \alpha'', J(\alpha') \rangle} J(\alpha')$$

şeklindedir.

Tanım 1.1.39 $M \subset R^3$ regüler bir yüzey olmak üzere M nin dejenere olmayan focal yörünge formülü

$$z_i(u,v) = M(u,v) + \rho_i U(u,v)$$

şeklindedir. Burada

$$\rho_i = \frac{1}{k_i}$$

M nin asli eğriliğinin çarpmaya göre tersi ve U M nin birim normalidir.

2. BÖLÜM

2.1 Kanal Yüzeyleri

Yüzeylerin bir parametreli ailesinin bir zarfı $F(x,y,z,\lambda)=0$ diferensiyellenebilir fonksiyonu ile tanımlanabilir. Burada λ bir parametredir. Bu denklemde λ yok edildiğinde

$$F(x,y,z,\lambda)=0$$
$$\frac{\partial F(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda}=0$$

şeklinde zarf elde edilir. Bu zarfı $G(x,y,z)=0$ olarak tanımlayabiliriz [4].

Tanım 2.1.1 R^3 de $s \to S^2(s)$ kürelerinin 1-parametreli ailesinin zarfına bir kanal yüzeyi denir. Kürelerin merkezleri olan eğriye kanal yüzeyinin merkez eğrisi denir. Kanal yüzeyinin yarıçapı olan $r(s)$ fonksiyonu $S^2(s)$ kürelerinin yarıçapıdır [4].

Lemma 2.1.1 $s \to S^2(s)$ kürelerinin 1-parametreli aileleri, M kanal yüzeyi olarak tanımlansın. O halde $\forall s$ için $S^2(s)\cap M$ cümlesi M de bir çember ve bir eğrilik çizgisidir [4].

İspat: $S^2(s)$ ve M , $S^2(s)\cap M$ boyunca birbirine teğet olduğundan bu yüzeylerin normalleri arasındaki açı sıfırdır. Ayrıca $S^2(s)$ de herhangi bir eğri, bir eğrilik çizgisidir. Teorem 1.1.7 (Joachimsthal Teoremi) den $S^2(s)\cap M$, M de bir eğrilik çizgisidir.

Teorem 2.1.1 Focal cümlesi $Focal(M)$ olan bir $M \subset R^3$ bir regüler yüzeyi bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

i. M bir kanal yüzeyidir;
ii. M nin asli eğrilerinin sistemlerinin biri çemberlerden oluşmaktadır;
iii. $Focal(M)$ nin bileşenlerinden biri eğridir.

İspat: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Lemma 2.1.1'in bir sonucudur. Normal doğrular, bir noktada bir çemberle karşılaşan herhangi asli eğrinin üzerindeki noktalardan geçer. Dairesel asli eğrilikler M üzerinde hareket ettiği için onların merkezleri bir eğri üretir ki, bu eğri $Focal(M)$ nin bileşenlerinden biri olmak zorundadır. Böylece (ii) $\Longrightarrow$ (iii) olur. Son olarak eğer (iii) ü kabul edersek, bir kanal yüzey üretmek için; kanal yüzeyinin yarıçapını $Focal(M)$ ve M arasındaki mesafeyi kullanarak, $Focal(M)$ nin bileşeni olan bir eğriyi kullanabiliriz. Sonuç olarak bu kanal yüzey M ile çakışır. Böylece (iii) $\Longrightarrow$(i) dir.

Teorem 2.1.2 Bir kanal yüzeyinin merkez eğrisi, eğriliği sıfırdan farklı olan birim hızlı $\alpha:(a,b)\rightarrow R^3$ eğrisi olsun. Bu taktirde, kanal yüzeyini aşağıdaki formül ile tanımlayabiliriz.

$$M(s,t)=canalsurf(s,t)=\alpha(s)+r\left(-r'T(s)\pm\sqrt{1-r'^2}\left(-N(s)\cos t+B(s)\sin t\right)\right). \qquad (2.1)$$

Burada T,N,B , α eğrisinin teğet, normal, binormalini gösterir.

İspat: α nın eğriliği sıfırdan farklı olduğundan, α eğrisinin Frenet çatısından kanal yüzeyinin kürelerinin zarfını aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$M(s,t)-\alpha(s)=a(s,t)T(s)+b(s,t)N(s)+c(s,t)B(s)\ . \qquad (2.2)$$

Burada a,b ve c , α nın tanımlı olduğu aralıkta diferensiyellenebilirdir. Buradan

$$\|M(s,t)-\alpha(s)\|^2=r(s)^2 \qquad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (2.3), $M(s,t)$ nin α merkezli, $r(s)$ yarıçaplı, $S^2(s)$ küresi üzerinde bulunduğunu gösterir. Ayrıca $M(s,t)-\alpha(s)$ kanal yüzeyi normal bir vektördür. Böylece

$$\begin{aligned}\langle (M(s,t)-\alpha(s)),M_s\rangle=0\\ \langle (M(s,t)-\alpha(s)),M_t\rangle=0\end{aligned} \qquad (2.4)$$

yazabiliriz. Denklem (2.4) göre M_s ve M_t vektörleri $S^2(s)$ ye teğettir. (2.2) ve (2.3) den

$$\left.\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=r^2 \\ aa_s+bb_s+cc_s&=rr' \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

yazılabilir. (2.2) denkleminin s ye göre türevini alırsak ve Teorem 1.1.2 teki Frenet formüllerini kullanırsak

$$M_s=(1+a_s-b\kappa)T+(a\kappa-c\tau+b_s)N+(c_s+b\tau)B \tag{2.6}$$

elde ederiz. O halde (2.2),(2.4),(2.5),(2.6) den

$$a+rr'=0 \tag{2.7}$$

elde edilir ve (2.5) ve (2.7) den

$$b^2+c^2=r^2\left(1-r'^2\right) \tag{2.8}$$

elde edilir. Lemma 1.1.3 den

$$b=\mp r\sqrt{1-r'^2}\cos t$$

ve

$$c=\pm r\sqrt{1-r'^2}\sin t$$

yazılabilir. Bulunan bu değerler (2.2) de yerine yazılırsa

$$M(s,t)-\alpha(s)=-rr'T(s)\mp r\sqrt{1-r'^2}N(s)\cos t\pm r\sqrt{1-r'^2}B(s)\sin t \tag{2.9}$$

elde edilir. O halde (2.9) denklemi, (2.1) şeklinde yazılabilir.

Şimdi $M(s,t)$ kanal yüzeyinin I. ve II. temel formlarını bulalım.

$$M(s,t)=\alpha(s)+r\left(-r'T(s)\pm\sqrt{1-r'^2}\left(-N(s)\cos t+B(s)\sin t\right)\right)$$

$M(s,t)$ kanal yüzeyinin s ve t ye göre türevlerini alalım. Buradan

$$M_s(s,t)=\left(1-r'^2-rr''\pm r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)T$$
$$+\left(-rr'\kappa\mp r'\sqrt{1-r'^2}\cos t\pm\frac{rr'r''}{\sqrt{1-r'^2}}\cos t\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\tau\sin t\right)N$$
$$+\left(\pm r'\sqrt{1-r'^2}\sin t\mp\frac{rr'r''}{\sqrt{1-r'^2}}\sin t\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\tau\cos t\right)B$$

ve

$$M_t(s,t)=\left(\pm r\sqrt{1-r'^2}\sin t\right)N+\left(\mp r\sqrt{1-r'^2}\cos t\right)B$$

bulunur. $M_s(s,t)$ ve $M_t(s,t)$ yi vektörel çarparsak

$$M_s(s,t)\times M_t(s,t)=\left(\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t-\left(1-r'^2\right)+rr''\right)\left(rr'T\mp r\sqrt{1-r'^2}\left(-N\cos t+B\sin t\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|M_s\times M_t\right\|^2=\left(\mp r^2\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t-r\left(1-r'^2\right)+r^2r''\right)^2$$
$$\left\|M_s\times M_t\right\|=\left(\mp r^2\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t-r\left(1-r'^2\right)+r^2r''\right)$$

bulunur. Bulunan bu değerler Tanım 1.1.9 da yerine yazılırsa, kanal yüzeyin birim normal vektörü

$$U=\frac{M_s\times M_t}{\left\|M_s\times M_t\right\|}=-r'T\pm\sqrt{1-r'^2}\left(-N\cos t+B\sin t\right)$$

elde edilir . Tanım 1.1.15 den, kanal yüzeyinin I. temel formunun katsayıları

$$E=\left\langle M_s,M_s\right\rangle=1-r'^2-2rr''\pm 2r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t+r^2\left[\begin{array}{l}\left(-r'\kappa\pm\dfrac{r'r''\cos t}{\sqrt{1-r'^2}}\mp\sqrt{1-r'^2}\,\tau\sin t\right)^2+\\ \left(\mp\dfrac{r'r''\sin t}{\sqrt{1-r'^2}}\mp\sqrt{1-r'^2}\,\tau\cos t\right)^2+\\ \left(-r''\pm\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)^2\end{array}\right]$$
$$F=\left\langle M_s,M_t\right\rangle=r^2\left(\mp r'\kappa\sqrt{1-r'^2}\sin t-\left(1-r'^2\right)\tau\right)\qquad(2.10)$$
$$G=\left\langle M_t,M_t\right\rangle=r^2\left(1-r'^2\right)$$

olarak bulunur. Tanım 1.1.16 dan kanal yüzeyinin II. temel formunun katsayıları

$$e=\langle M_{ss},U\rangle=-\langle M_s,U_s\rangle=r''\mp\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t-r\begin{bmatrix}\left(-r''\pm\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)^2+\\ \left(-r'\kappa\pm\dfrac{r'r''\cos t}{\sqrt{1-r'^2}}\mp\sqrt{1-r'^2}\tau\sin t\right)^2+\\ \left(\mp\dfrac{r'r''\sin t}{\sqrt{1-r'^2}}\mp\sqrt{1-r'^2}\tau\cos t\right)^2\end{bmatrix}$$

$$f=\langle M_{st},U\rangle=-\langle M_s,U_t\rangle=\pm rr'\sqrt{1-r'^2}\kappa\sin t+r\left(1-r'^2\right)\tau \tag{2.11}$$

$$g=\langle M_{tt},U\rangle=-\langle M_t,U_t\rangle=-r\left(1-r'^2\right)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.1.1 I. ve II. temel formun katsayıları arasında $F=-rf$ ve $G=-rg$ olacak şekilde bir bağıntı vardır.

$M(s,t)$ kanal yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliğini Teorem 1.1.3 yardımıyla sırasıyla

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$K=\frac{rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}$$

ve

$$H=\frac{Eg-2Ff+eG}{2(EG-F^2)}$$

$$H=\frac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $M(s,t)$ kanal yüzeyinin asli eğriliklerini

$$k_1=H-\sqrt{H^2-K}$$
$$=-\frac{1}{r}$$

ve

$$k_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$= \frac{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2)}$$

olarak bulunur.

2.2 Kanal Yüzeyinin Geometrik Özellikleri

Bu bölümde kanal yüzeyinin şekil operatörü, umbilik noktaları, asli doğrultuları, asimptotik çizgilerini bulacağız.

2.2.1 Kanal Yüzeyinin Şekil Operatörü ve Umbilik Noktaları

Bir $M(s,t)$ kanal yüzey şekil operatörü matrisi Tanım 1.1.18 da Sonuç 2.1.1 deki bağıntılar yerine yazılırsa

$$S = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} -rge + rf^2 & Ef + rfe \\ \underbrace{-rgf + rfg}_{0} & Eg + rf^2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

şeklinde bulunur. $M(s,t)$ kanal yüzeyinin umbilik noktaları bulmak için Tanım 1.1.24 den yüzeyin şekil operatörünü birim matrisinin λ katına eşitlenirse

$$S = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} -rge + rf^2 & Ef + rfe \\ 0 & Eg + rf^2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in IR$$

olur. Buradan

$$\begin{gathered} Ef + rfe = 0 \\ f(E + re) = 0 \end{gathered}$$

şeklindedir. Buradan ya

$$f = 0 \qquad (E + er) \neq 0$$

dır ya da

$$f \neq 0 \qquad E + re = 0$$

dır. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
-rge + rf^2 &= Eg + rf^2 \\
-rge &= Eg \\
E &= -re \\
E + re &= 0
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur. O halde

$$f \neq 0 \qquad E + re = 0$$

dır. Burada

$$
\begin{aligned}
1 - r'^2 - rr'' \pm r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t &= 0 \\
r'^2 &= 1 \\
r' &= \pm 1 \\
r &= \pm s
\end{aligned}
$$

noktasında $f = 0$ olur. Bu yüzden yüzeyin umbilik noktası yoktur.

Şimdi de kanal yüzeyinin flat (düzlemsel) noktalarına bakalım. Tanım 1.1.24 e göre (2.12) deki kanal yüzeyinin şekil operatörünü sıfır matrisine eşitleyelim.

$$S = \frac{1}{EG - F^2}\begin{bmatrix} -rge + rf^2 & Ef + rfe \\ \underbrace{-rgf + rfg}_{0} & Eg + rf^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
-rge + rf^2 &= 0 \\
Eg + rf^2 &= 0 \\
Ef + rfe &= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu denklemleri birlikte çözersek

$$r = \pm s$$

olarak bulunur. Bu nokta kanal yüzeyinin düzlemsel noktasıdır.

2.2.2 Kanal Yüzeyinin Asli Eğrilik Çizgileri

Asli eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi;

$$(Ef - Fe)ds^2 - (Ge - Eg)dsdt + (Fg - Gf)dt^2 = 0 \tag{2.13}$$

şeklindedir. Burada $M(s,t)$ kanal yüzeyinin asli eğrilikleri, (2.13) denkleminde Sonuç 2.1.1 deki bağıntı yazılırsa

$$\begin{aligned}
&(Ef - Fe)ds^2 - (Ge - Eg)dsdt + \left(\underbrace{Fg - Gf}_{0}\right)dt^2 = 0 \\
&(Ef + rfe)ds^2 - (-rge - Eg)dsdt = 0 \\
&f(E + re)ds^2 + g(er + E)dsdt = 0 \\
&(E + re)(fds + gdt)ds = 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Buradan üç durum oluşur. Bunlar;

Birincisi

$$E + re = 0 \tag{2.14}$$

olur. Burada (2.14) denkleminde (2.10) ve (2.11) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{gathered}
1 - r'^2 - rr'' \pm r\sqrt{1 - r'^2}\,\kappa \cos t = 0 \\
r = \pm s
\end{gathered}$$

olur. İkincisi

$$fds + gdt = 0$$

şeklindedir. Üçüncüsü

$$\begin{gathered}
ds = 0 \\
s = sabit
\end{gathered}$$

şeklindedir.

2.2.3 Kanal Yüzeyinin Asimptotik Çizgileri

$M(s,t)$ kanal yüzeyinin asimptotik çizgilerinin diferensiyel denklemi,

$$II = 0$$

açık olarak

$$eds^2 + 2fdsdt + gdt^2 = 0 \tag{2.15}$$

şeklindedir. (2.11) eşitliklerinde verilen e, f, g değerlerini (2.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left(r'' \mp \sqrt{1-r'^2}\kappa \cos t - r \left[\begin{array}{l} \left(-r'' \pm \sqrt{1-r'^2}\kappa \cos t\right)^2 + \\ \left(-r'\kappa \pm \dfrac{r'r'' \cos t}{\sqrt{1-r'^2}} \mp \sqrt{1-r'^2}\tau \sin t\right)^2 + \\ \left(\mp \dfrac{r'r'' \sin t}{\sqrt{1-r'^2}} \mp \sqrt{1-r'^2}\tau \cos t\right)^2 \end{array} \right] \right) ds^2 + 2\left(\pm rr'\sqrt{1-r'^2}\kappa \sin t + r\left(1-r'^2\right)\tau\right) dsdt + \left(-r\left(1-r'^2\right)\right) dt^2 = 0$$

şeklinde asimptotik çizgileri veren diferensiyel denklemi elde edilir. Buradan elde edilen eğriler asimptotik eğrilerdir.

2.3 Kanal Yüzeyinin Weingarten Yüzey Olması

Tanım 1.1.31 e göre bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin Weingarten yüzey olması için, K ve H Gauss ve ortalama eğrilikleri olmak üzere

$$K_s.H_t - H_s.K_t = 0 \tag{2.16}$$

denklemini sağlamasıdır. Kanal yüzeyinin Ortalama eğriliğini Gauss eğriliği şeklinde yazarsak

$$H = \frac{Eg - 2Ff + eG}{2\left(EG - F^2\right)} = \frac{Eg - fF}{2(EG - F^2)} + \frac{eG - Ff}{2(EG - F^2)} \tag{2.17}$$

olur. Burada Sonuç 2.1.1 bağıntısını (2.17) denkleminde yazarsak

$$H = \frac{Eg + rf^2}{2(-Erg - r^2 f^2)} + \frac{-erg + rf^2}{2(EG - F^2)} = \frac{Eg + rf^2}{-2r(Eg + rf^2)} - \frac{r(eg - f^2)}{2(EG - F^2)} \tag{2.18}$$

elde edilir. Burada

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Gauss formülünü (2.18) de yerine yazarsak

$$H = -\frac{1}{2r} - \frac{rK}{2} \tag{2.19}$$

elde ederiz. Burada (2.19) eşitliğinin her iki tarafını s değişkenine göre kısmi türevini alırsak

$$H_s = \frac{r'}{2r^2} - \frac{rK_s}{2} - \frac{r'K}{2} \tag{2.20}$$

elde ederiz. (2.19) eşitliğinin her iki tarafını t değişkenine göre kısmi türevini alırsak

$$H_t = -\frac{rK_t}{2} \tag{2.21}$$

elde ederiz. (2.20) ve (2.21) eşitliklerini (2.16) denkleminde yerine yazalım. O zaman

$$K_s.H_t - K_t.H_s = 0$$

$$K_s.\left(-\frac{rK_t}{2}\right) - K_t.\left(\frac{r'}{2r^2} - \frac{rK_s}{2} - \frac{r'K}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{rK_sK_t}{2} - \frac{r'K_t}{2r^2} + \frac{rK_tK_s}{2} + \frac{r'K_tK}{2} = 0$$

$$-\frac{r'K_t}{2r^2} + \frac{r'K_tK}{2} = 0$$

$$\frac{r'K_t}{2}\left(-1 + Kr^2\right) = 0$$

elde ederiz. Burada üç durum ortaya çıkar;

(i) $r' = 0 \Rightarrow r = sabit$

$$K_t \neq 0$$
$$K_t \neq \kappa \sin t$$
$$t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(ii) $(-1 + Kr^2) = 0 \Rightarrow r^2 K = 1$

$M(s,t)$ kanal yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{rr'' \mp r\sqrt{1 - r'^2}\,\kappa \cos t}{-r^2\left(\left(1 - r'^2\right) - \left(rr'' \mp r\sqrt{1 - r'^2}\,\kappa \cos t\right)\right)}$$

şeklindedir. Gauss eğriliğini r^2 ile çarparsak

$$r^2 K = \frac{rr'' \mp r\sqrt{1 - r'^2}\,\kappa \cos t}{-\left(\left(1 - r'^2\right) - \left(rr'' \mp r\sqrt{1 - r'^2}\,\kappa \cos t\right)\right)} \tag{2.22}$$

elde ederiz. (2.22) denklemini 1 e eşitlersek

$$\frac{rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t}{-\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}=1$$

$$rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t = -\left(1-r'^2\right)+\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)$$

$$-\left(1-r'^2\right)=0$$

$$r'^2=1$$

$$r=\pm s$$

olur.

(iii) $K_t = 0 \Rightarrow \mp(1-r'^2)\sqrt{1-r'^2}\kappa\sin t = 0$

$$t = k\pi, k = 0,1,...$$

olduğunda

$$r' \neq 1 \Rightarrow r \neq \pm s$$

olmalıdır.

Sonuç 2.3.1 Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki özelliklerin sağlanmasıdır.

(i) $r' = 0$

(ii) $r^2 K = 1$

(iii) $K_t = 0$

Burada K, $M(s,t)$ kanal yüzeyinin Gauss eğriliğidir.

2.4 Kanal Yüzeyinin Lineer Weingarten Yüzey Olması

Tanım 1.1.32 ye göre yüzeyin Lineer Weingarten yüzeyi olması için K ve H yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere

$$aK + bH - c = 0 \tag{2.23}$$

denklemini sağlamalıdır. O halde $M(s,t)$ kanal yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = \frac{rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}$$

ve

$$H = \frac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}$$

şeklindedir. Burada (2.23) eşitliğinde Gauss ve Ortalama eğriliği yerine yazalım ve gerekli işlemleri yaparsak

$$aK+bH-c=0$$

$$a\left(\frac{rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}\right)+b\left(\frac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}\right)-c=0$$

$$\frac{-2a\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)-br\left(\left(1-r'^2\right)-2\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}{r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}$$

$$-\frac{2r^2c\left(\left(1-r'^2\right)-2\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}{r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}=0$$

$$2(-a+br+cr^2)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)+\left(-br-2cr^2\right)\left(1-r'^2\right)=0$$

elde ederiz. O halde $K \neq 0$ ve $H \neq 0$ olduğundan

$$\left(1 - r'^2\right) \neq 0$$

dır. Buradan

$$\left(rr'' \mp r\sqrt{1 - r'^2}\,\kappa \cos t\right) \neq 0$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} &\left(-br - 2cr^2\right) = 0 \\ &(-a + br + cr^2) = 0 \\ &b = -2cr \end{aligned}$$

eşitliklerini birlikte çözersek

$$a = -cr^2 \qquad b = -2cr$$

buluruz.Buradan $c = 1$ alırsak

$$a = -r^2 \qquad b = -2r$$

elde ederiz.

Sonuç 2.4.1 Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin lineer Weingarten olması için Tanım 1.1.32 deki lineer W1eingarten denkleminin a, b, c katsayıları arasında

$$a = -cr^2 \qquad b = -2cr$$

şeklinde bir ilişki olması gerekir.

2.5 Kanal Yüzeyinin Focal Yüzeyleri

Tanım 1.1.35 ten bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin focal yüzeyleri M_i^* olmak üzere

$$M_i^*(s,t) = M(s,t) + \frac{1}{k_i} U(s,t) \quad i = 1,2 \tag{2.24}$$

şeklindedir. Burada $U(s,t)$ yüzeyin birim normali ve k_i'ler de yüzeyin birinci ve ikinci asli eğrilikleridir. $M(s,t)$ kanal yüzeyinin birim normali

$$U = -r'T(s) \pm \sqrt{1-r'^2}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)$$

şeklindedir. $M(s,t)$ kanal yüzeyinin birinci asli eğriliği

$$k_1 = -\frac{1}{r(s)}$$

şeklindedir. Yüzeyin birinci asli eğriliğinin çarpmaya göre tersini alırsak

$$\frac{1}{k_1} = -r(s)$$

elde ederiz. Kanal yüzeyinin birim normalini ve birinci asli eğriliğini çarpmaya göre tersini (2.24) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
M_1^*(s,t) &= M(s,t) + \frac{1}{k_1} U(s,t) \\
M_1^*(s,t) &= \alpha(s) + r(s)(-r'(s)T(s) \pm \sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \\
&\quad - r(s)(-r'(s)T(s) \pm \sqrt{1-r'^2(s)}(N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \\
M_1^*(s,t) &= \alpha(s)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $M(s,t)$ kanal yüzeyinin ikinci asli eğriliği

$$k_2 = \frac{\mp \sqrt{1-r'^2(s)}\kappa \cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa \cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2)}$$

şeklindedir. Yüzeyin ikinci asli eğriliğinin çarpmaya göre tersini alırsak

$$\frac{1}{k_2} = -r(s) + \frac{(1-r'^2)}{\mp\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t + r''}$$

elde ederiz. Buradan kanal yüzeyinin birim normali ve ikinci asli eğriliğinin çarpmaya göre tersini (2.24) eşitliğinde yerine yazarsak

$$M_2^*(s,t) = M(s,t) + \frac{1}{k_2}U(s,t)$$

$$\begin{aligned} M_2^*(s,t) = {} & \alpha(s) + r(s)(-r'(s)T(s) \pm \sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \\ & + (-r(s) + \frac{(1-r'^2(s))}{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''})(-r'(s)T(s) \pm \sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \end{aligned}$$

$$M_2^*(s,t) = \alpha(s) + \frac{(1-r'^2(s))(-r'(s)T(s) \pm \sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t))}{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''}$$

O halde kanal yüzeyinin M_1^*, M_2^* focal yüzeylerini elde ederiz

2.6 Kanal Yüzeyinin Paralel Yüzeyleri

Tanım 1.1.33 den bir $M(s,t)$ yüzeyinin paralel yüzeyi $\overline{M}(s,t)$ olmak üzere

$$\overline{M}(s,t) = M(s,t) + \lambda U(s,t) \tag{2.25}$$

şeklindedir. Burada $U(s,t)$ yüzeyin birim normali ve $\lambda \neq 0$ bir tamsayı olmak üzere $M(s,t)$ ve $U(s,t)$ denklemleri, (2.25) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M^*(s,t) &= \alpha(s) + r(s)(-r'T(s) \pm \sqrt{1-r'^2}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \\
&\quad + \lambda(-r'T(s) \pm \sqrt{1-r'^2}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \\
M^*(s,t) &= \alpha(s) + (r(s)+\lambda)(-r'T(s) \pm \sqrt{1-r'^2}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t)) \\
M^*(s,t) &= \alpha(s) + (r(s)+\lambda)U(s,t)
\end{aligned}$$

olarak kanal yüzeyinin paralel yüzeyini elde ederiz. Bu paralel yüzeyin şekil operatörü matrisi, asli eğriliklerini, Gauss eğriliğini ve ortalama eğriliğini bulalım. $M(s,t)$ kanal yüzeyinin şekil operatörü matrisi (2.12) denkleminde

$$S = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} -rge+rf^2 & Ef+rfe \\ 0 & Eg+rf^2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $M(s,t)$ yüzeyine λ birim uzaktaki paralel yüzeyinin şekil operatörü matrisi Lemma 1.1.6 dan

$$\begin{aligned}
\overline{S} &= S(I-\lambda S)^{-1} \\
&= \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} -rge+rf^2 & Ef+rfe \\ 0 & Eg+rf^2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{EG-F^2}\begin{bmatrix} -rge+rf^2 & Ef+rfe \\ 0 & Eg+rf^2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(eg-f^2)}{-g(-E+\lambda e)+f^2(r+\lambda)} & \dfrac{f(E+re)}{(r+\lambda)(g(-E+\lambda e)-f^2(r+\lambda))} \\ 0 & -\dfrac{1}{(r+\lambda)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $M(s,t)$ yüzeyinin asli eğrilikleri

$$k_1 = -\frac{1}{r(s)}$$

$$k_2 = \frac{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2)}$$

dir. $M(s,t)$ yüzeyine λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyinin asli eğrilikleri Lemma 1.1.6 dan

$$\bar{k}_i = \frac{k_i}{1-\lambda k_i}$$

dir. $i=1$ için paralel yüzeyin birinci asli eğriliği

$$\begin{aligned}\bar{k}_1 &= \frac{k_1}{1-\lambda k_1}\\ &= \frac{-\frac{1}{r}}{1+\frac{\lambda}{r}}\\ &= -\frac{1}{(r+\lambda)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $i=2$ için paralel yüzeyin ikinci asli eğriliği

$$\begin{aligned}\bar{k}_2 &= \frac{k_2}{1-\lambda k_2}\\ &= \frac{\dfrac{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2)}}{1-\lambda\left(\dfrac{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2)}\right)}\\ &= \frac{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2) - \lambda\left(\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)\right)}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $M(s,t)$ yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K=\frac{rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}$$

ve ortalama eğriliği

$$H=\frac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}$$

dir. $M(s,t)$ yüzeyine λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyin Gauss eğriliği Lemma 1.1.6 dan

$$\begin{aligned}\overline{K}&=\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}\\&=\frac{\dfrac{rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}}{1-2\lambda\left(\dfrac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\right)+\lambda^2\left(\dfrac{rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\right)}\\&=\frac{-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\end{aligned}$$

şeklindedir. $M(s,t)$ yüzeyine λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyin ortalama eğriliği Lemma 1.1.6 dan

$$\begin{aligned}\overline{H}&=\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2K}\\&=\frac{\dfrac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}-\lambda\left(\dfrac{rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\right)}{1-2\lambda\left(\dfrac{-\left(1-r'^2\right)+2\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{2r\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\right)+\lambda^2\left(\dfrac{rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t}{-r^2\left(\left(1-r'^2\right)-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\right)}\\&=\frac{-r\left(1-r'^2\right)-2(r+\lambda)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{2(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 2.6.1 Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyin şekil operatörü $\overline{S}$, asli eğrilikleri $\overline{k_1}, \overline{k_2}$, Gauss eğriliği $\overline{K}$, ortalama eğriliği $\overline{H}$ olmak üzere aşağıdaki şekildedir.

(i) $$\overline{S} = \begin{bmatrix} \dfrac{\left(eg - f^2\right)}{-g(-E+\lambda e)+f^2(r+\lambda)} & \dfrac{f(E+re)}{(r+\lambda)\left(g(-E+\lambda e)-f^2(r+\lambda)\right)} \\ 0 & -\dfrac{1}{(r+\lambda)} \end{bmatrix}$$

(ii) $$\overline{k_1} = -\frac{1}{(r+\lambda)}$$

$$\overline{k_2} = \frac{\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)}{\pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t - r(s)r'(s) + (1-r'^2) - \lambda\left(\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t + r''(s)\right)}$$

(iii) $$\overline{K} = \frac{-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}$$

(iv) $$\overline{H} = \frac{-r\left(1-r'^2\right)-2(r+\lambda)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{2(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}.$$

Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyin Weingarten ve lineer Weingarten olmasına bakalım. Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyinin Weingarten olması için $\overline{K}$ ve $\overline{H}$ yüzeyin sırasıyla Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere

$$\overline{K}_s\overline{H}_t - \overline{K}_t\overline{H}_s = 0 \tag{2.26}$$

denklemi sağlanmalıdır. Bu paralel yüzeyin ortalama eğriliğini Gauss eğriliği şeklinde yazarsak

$$\overline{H} = -\frac{1}{2(\lambda+r)} - \frac{(\lambda+r)\overline{K}}{2} \tag{2.27}$$

elde ederiz. (4.10) denkleminin her iki tarafını s değişkenine göre kısmi türevini alırsak

$$\overline{H}_s = \frac{r'}{2(\lambda + r)^2} - \frac{r'\overline{K}}{2} - \frac{(r+\lambda)\overline{K}_s}{2} \tag{2.28}$$

elde ederiz. (4.10) denkleminin her iki tarafını t değişkenine göre kısmi türevini alırsak

$$\overline{H}_t = -\frac{(r+\lambda)\overline{K}_t}{2} \tag{2.29}$$

elde ederiz. (4.12) ve (4.13) denklemlerini (4.10) denkleminde yerine yazarsak

$$\overline{K}_s\left(-\frac{(r+\lambda)\overline{K}_t}{2}\right) - \overline{K}_t\left(\frac{r'}{2(\lambda+r)^2} - \frac{r'\overline{K}}{2} - \frac{(r+\lambda)\overline{K}_s}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{(r+\lambda)\overline{K}_t\overline{K}_s}{2} - \frac{r'\overline{K}_t}{2(\lambda+r)^2} + \frac{r'\overline{K}\overline{K}_t}{2} + \frac{(r+\lambda)\overline{K}_s\overline{K}_t}{2} = 0$$

$$-\frac{r'\overline{K}_t}{2(\lambda+r)^2} + \frac{r'\overline{K}\overline{K}_t}{2} = 0$$

$$\frac{r'\overline{K}_t\left(\overline{K}(\lambda+r)^2 - 1\right)}{2(\lambda+r)^2} = 0$$

$$r'\overline{K}_t\left(\overline{K}(\lambda+r)^2 - 1\right) = 0$$

olur. Burada üç durum oluşur. Bunlar;

(i) $r' = 0 \Rightarrow r = sabit$

$$\overline{K}_t = \kappa \sin t \neq 0$$

$$t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

(ii) $\overline{K}(\lambda + r) - 1 = 0 \Rightarrow \overline{K}(\lambda + r) = 1$

Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyinin Gauss eğriliği

$$\overline{K} = \frac{-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)}{(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right) - (\lambda+r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t\right)\right)} \tag{2.30}$$

şeklindedir. (4.14) denklemini $(\lambda + r)^2$ ile çarparsak

$$(\lambda + r)^2 \overline{K} = \frac{-(\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)}{\left(r\left(1-r'^2\right) - (\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)\right)} \tag{2.31}$$

elde ederiz. (4.15) denklemini 1'e eşitlersek

$$\begin{aligned}
&\frac{-(\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)}{\left(r\left(1-r'^2\right) - (\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)\right)} = 1 \\
&-(\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right) = r\left(1-r'^2\right) - (\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right) \\
&r\left(1-r'^2\right) = 0 \\
&r'^2 = 1 \Rightarrow r' = \pm 1 \Rightarrow r = \pm s
\end{aligned}$$

(iii) $\overline{K}_t = 0 \Rightarrow \left(1-r'^2\right)\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \sin t = 0$

$$t = k\pi,\ k = 0,1,2...$$

olduğunda

$$r' \neq \pm 1 \Rightarrow r \neq \pm s$$

olmalıdır.

Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyinin lineer Weingarten olması için $\overline{K}$ ve $\overline{H}$ yüzeyin sırasıyla Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere

$$a\overline{K} + b\overline{H} - c = 0 \tag{2.32}$$

denklemini sağlamalıdır. O halde $M(s,t)$ kanal yüzeyinin λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyinin sırasıyla Gauss ve ortalama eğriliği

$$\overline{K} = \frac{-\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)}{(\lambda + r)\left(r\left(1-r'^2\right) - (\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)\right)}$$

ve

$$\overline{H} = \frac{-r\left(1-r'^2\right) - 2(r + \lambda)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)}{2(\lambda + r)\left(r\left(1-r'^2\right) - (\lambda + r)\left(rr'' \mp r\sqrt{1-r'^2}\,\kappa \cos t\right)\right)}$$

şeklindedir. Burada (4.15) denkleminde Gauss ve ortalama eğriliklerini yerine yazalım ve gerekli işlemleri yaparsak

$$a\left(\frac{-\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}\right)$$
$$+b\left(\frac{-r\left(1-r'^2\right)-2(r+\lambda)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)}{2(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}\right)-c=0$$

$$\frac{\begin{array}{l}-2a\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)+b\left(-r\left(1-r'^2\right)+2(r+\lambda)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)\\ -2c\left((\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)\right)\end{array}}{2(\lambda+r)\left(r\left(1-r'^2\right)-(\lambda+r)\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\right)}=0$$

$$\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\left(-2a+2b(r+\lambda)+2c(\lambda+r)^2\right)+\left(1-r'^2\right)\left(-br-2cr(\lambda+r)\right)=0$$

elde ederiz. O halde $\overline{K}\neq 0$ ve $\overline{H}\neq 0$ olduğundan

$$\left(rr''\mp r\sqrt{1-r'^2}\kappa\cos t\right)\neq 0$$

ve

$$\left(1-r'^2\right)\neq 0$$

dır. O halde

$$\begin{aligned}&-br-2cr(\lambda+r)=0\\&-2a+2b(r+\lambda)+2c(\lambda+r)^2=0\end{aligned}$$

eşitliklerini birlikte çözersek

$$\begin{aligned}b&=-2c(\lambda+r)\\a&=-c(\lambda+r)^2\end{aligned}$$

elde edilir.

2.7 Kanal Yüzeyinin Singüler Noktası

Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin singüler noktaları Tanım 1.1.36 e göre

$$M_s \times M_t = 0$$

olduğu noktalardır. Buradan

$$M_s \times M_t = (-r(s)r'(s)T(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t))\begin{pmatrix} (1-r'^2(s)) - r(s)r''(s) \\ \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\cos t\kappa \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi sıfıra eşitlersek

$$(1-r'^2(s)) - r(s)r''(s) \pm r(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\cos t = 0 \qquad (2.33)$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan (s_0, t_0) noktaları $M(s,t)$ yüzeyinin singüler noktalarıdır. Buradan (2.33) eşitliği çözülürse $M(s,t)$ kanal yüzeyinin singüler noktaları

$$r(s) = \pm s, \ \ t \neq k\pi \ (k = 0,1,...)$$

olarak bulunur.

2.8 Kanal Yüzeyinin Geodezikleri

Bir $M(s,t)$ kanal yüzeyinin birim normali

$$U=-r'(s)T(s)\pm\sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t+B(s)\sin t) \tag{2.34}$$

şeklindedir. (2.34) denkleminin s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}U' &= T(s)\left(-r''(s)\pm\sqrt{1-r'^2(s)}\cos t\kappa\right)+N(s)\left(-r'(s)\kappa\pm\frac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}}\cos t\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\sin t\tau\right)\\ &+B(s)\left(\mp\frac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}}\sin t\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\cos t\tau\right)\end{aligned} \tag{2.35}$$

elde edilir. (2.34) denklemini $T(s)$ ile vektörel çarpılırsa

$$(U\times T)=\pm B(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\cos t\pm N(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\sin t \tag{2.36}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.36) eşitliğinin s değişkenine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(U\times T)' &= T(s)\left(\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa\sin t\right)+N(s)\left(\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\tau\cos t\mp\frac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}}\sin t\right)\\ &+B(s)\left(\mp\frac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}}\cos t\pm\sqrt{1-r'^2(s)}\tau\sin t\right)\end{aligned} \tag{2.37}$$

bulunur. Dolayısıyla kanal yüzeyinin Darboux çatısı $\{T,(U\times T),U\}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix}T'\\(U\times T)'\\U'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\kappa_g&\kappa_n\\-\kappa_g&0&\tau_g\\-\kappa_n&-\tau_g&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\(U\times T)\\U\end{bmatrix} \tag{2.38}$$

şeklinde yazılabilir. Burada κ_g geodezik eğriliği, κ_n geodezik burulması ve τ_g normal eğriliğidir. Buradan

$$
\begin{aligned}
T' &= \kappa_g (U \times T) + \kappa_n U \\
(U \times T)' &= -\kappa_g T + \tau_g U \\
U' &= -\kappa_n T - \tau_g (U \times T)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.39) denkleminde (2.34), (2.35), (2.36), (2.37) denklemlerini yerine yazarsak

$$
T' = \kappa_g \left(\pm B(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\cos t \pm N(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\sin t \right) + \kappa_n \begin{pmatrix} -r'(s)T(s) \\ \pm\sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t + B(s)\sin t) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
T(s)\left(\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\kappa \sin t \right) \\
+N(s)\left(\mp\sqrt{1-r'^2(s)}\tau \cos t \mp \dfrac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}} \sin t \right) \\
+B(s)\left(\mp\dfrac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}} \cos t \pm \sqrt{1-r'^2(s)}\tau \sin t \right)
\end{pmatrix}
= -\kappa_g T + \tau_g \begin{pmatrix} -r'(s)T(s) \\ \pm\sqrt{1-r'^2(s)}(-N(s)\cos t \\ +B(s)\sin t) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
T(s)\left(-r''(s) \pm \sqrt{1-r'^2(s)}\cos t\kappa \right) \\
+N(s)\left(-r'(s)\kappa \pm \dfrac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}} \cos t \mp \sqrt{1-r'^2(s)}\sin t\tau \right) \\
+B(s)\left(\mp\dfrac{r'(s)r''(s)}{\sqrt{1-r'^2(s)}} \sin t \mp \sqrt{1-r'^2(s)}\cos t\tau \right)
\end{pmatrix}
= -\kappa_n T - \tau_g \begin{pmatrix} \pm B(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\cos t \\ \pm N(s)\sqrt{1-r'^2(s)}\sin t \end{pmatrix}
$$

elde ederiz. Bu eşitlikler $r(s) = sabit$ ve $t = \pi/2 + k\tau, k = 0,1,2...$ olduğu noktalarda çözümlenir ve bu noktalarda çözümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\kappa_g &= 0 \\
\kappa_n &= \kappa \\
\tau_g &= -\tau
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer noktalarda (2.39) denklemleri çözülemez.

Sonuç 2.8.1 $M(s,t)$ kanal yüzeyinin geodezik eğriliği, geodezik burulması ve normal eğriliği ancak ve ancak $r(s) = sabit$ ve $t = \pi/2 + k\pi, k = 0,1,2...$ noktalarında bulunabilir. Bu noktalarda

$$\kappa_g = 0$$
$$\kappa_n = \kappa$$
$$\tau_g = -\tau$$

şeklindedir. Burada $M(s,t)$ kanal yüzeyi $r(s) = sabit$ ve $t = \pi/2 + k\pi, k = 0,1,2...$ noktalarında birim hızlı ve $\kappa_g = 0$ olduğundan bu noktalarda geodeziktir. Diğer noktalarda geodeziklikten bahsedemeyiz.

3. BÖLÜM

3.1 Kanal Yüzeyinin Diferensiyel Özellikleri

Bu bölümde kabul edelim ki $\alpha(s)$ regüler bir eğri olsun. Yarıçap vektörü de s nin bir fonksiyonu olsun. α eğrisi ile yarıçap fonksiyonu arasında $r'(s)^2 < |\alpha'(s)|^2 = 1$ şeklinde bir bağıntı olduğunu kabul edelim. Frenet formüllerini kullanarak kanal yüzeyini (2.1) denklemindeki gibi yazabiliriz.

$$M(s,t) = canalsurf(s,t) = \alpha(s) + r(s)\left(-r'(s)T(s) + \sqrt{1-r'(s)^2}\,(N(s)\cos t + B(s)\sin t)\right) \quad (3.1)$$

$s \in [0,l], t \in [0,2\pi]$.

Burada l eksen eğrisinin toplam uzunluğudur. $M_s(s_0,t_0) \times M_t(s_0,t_0) = 0$ olduğu zaman (s_0,t_0) M nin bir tekil noktasıdır. Bu durum yüzeyin yerel olarak kendi kendini kesmesidir. Yerel olarak kendini kesmeyen kanal yüzey bir regüler kanal yüzeyidir. Bu bölümde birinci temel formu kullanarak yerel olarak kendisini kesmeyen kanal yüzeyi için gerekli şartlar verilecektir.

Bir uzay eğrisi için Teorem 1.1.2 teki Frenet denklemlerini yazarsak

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \qquad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \qquad \frac{dB}{ds} = -\tau N$$

şeklindedir. T tanjant vektör, N normal vektör, B binormal vektör, τ torsiyon κ eğriliktir.

(3.1) kanal yüzey denkleminde $g = r\sqrt{1-r'^2}$, $h = rr'$ alarak denklemi tekrar yazarsak

$$M(s,t) = \alpha(s) - hT + g\big(N(s)\cos t + B(s)\sin t\big) \quad (3.2)$$

elde ederiz. 2. Bölümde (2.10) denklemiyle I. temel formun katsayılarını bulmuştuk. (3.2) denklemine göre kanal yüzeyinin I. temel formunu tekrar yazarsak

$$E = \langle M_s, M_s \rangle = (1 - \kappa g \cos t - h')^2 + (g\tau + h\kappa \sin t)^2 + (g' - h\kappa \cos t)^2$$
$$F = \langle M_s, M_t \rangle = g^2 \tau + gh\kappa \sin t$$
$$G = \langle M_t, M_t \rangle = g^2$$

şeklindedir. Buradan

$$\|M_s \times M_t\|^2 = EG - F^2 = g^2\left((1 - \kappa g \cos t - h')^2 + (h\kappa \cos t - g')^2\right)$$

elde edilir.

Lemma 3.1.1 $1 - \kappa(s_0)g(s_0)\cos t_0 - h'(s_0) = 0$ olduğu zaman $h(s_0)\kappa(s_0)\cos t_0 - g'(s_0) = 0$ $s_0 \in [0, l], t_0 \in [0, 2\pi)$ olur.

İspat: $r'^2 < \|\alpha'\|^2 = 1$ olduğunda $g = r\sqrt{1 - r'^2} \neq 0, \forall s \in [0, l]$ olur.

$1 - \kappa(s_0)g(s_0)\cos t_0 - h'(s_0) = 0$ dan $\kappa(s_0)\cos t_0 = \dfrac{1 - h'(s_0)}{g(s_0)}$ elde edilir. Buradan

$h^2 + g^2 = r^2$ denkleminin s değişkenine göre türevini aldığımızda

$$h(s) - h(s)h'(s) - g(s)g'(s) = 0, \forall s \in [0, l]$$

olduğu ispatlanabilir. Buradan $1 - \kappa(s_0)g(s_0)\cos t_0 - h'(s_0) = 0$ olduğu zaman

$$h(s_0)\kappa(s_0)\cos t_0 - g'(s_0) = h(s_0)\frac{1 - h'(s_0)}{g(s_0)} - g'(s_0) = \frac{h(s_0) - h(s_0)h'(s_0) - g(s_0)g'(s_0)}{g(s_0)} = 0$$

olur. Buradan teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.1 $r(s) < \dfrac{2 - \left(r^2(s)\right)''}{2|\kappa|}$ olduğu zaman kanal yüzeyi yerel olarak kendini kesmez.

İspat: I. temel formdan kanal yüzeyinin yerel olarak kendini kesmesi için gerek ve yeter şart $1 - \kappa r\sqrt{1 - r'^2}\cos t - \dfrac{1}{2}\left(r^2\right)'' = 0$ olmasıdır. Lemma 3.1.1 den $1 - \kappa g \cos v - h' = 0$ göz önüne almamız gerekmektedir. Çünkü $\cos t$; -1 ve 1 aralığında değişmektedir. Eğer $|\kappa| r\sqrt{1 - r'^2} + \dfrac{1}{2}\left(r^2\right)'' < 1$ ise yerel olarak kendini kesme söz konusu değildir. $\sqrt{1 - r'^2} \leq 1$

olduğunu göz önüne alırsak $|\kappa| r\sqrt{1-r'^2}+\frac{1}{2}\left(r^2\right)'' \leq |\kappa| r+\frac{1}{2}\left(r^2\right)''$ olur. Buradan $|\kappa| r+\frac{1}{2}\left(r^2\right)'' < 1$ olduğunda $|\kappa| r\sqrt{1-r'^2}+\frac{1}{2}\left(r^2\right)'' < 1$ olmak üzere $r(s) < \frac{2-\left(r^2(s)\right)''}{2|\kappa|}$ dır.

Böylece teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.1.1 $r(s)=as+b$ olduğunda $r < \frac{1-a^2}{|\kappa|}$ ise kanal yüzey kendisini kesmez.

Sonuç 3.1.2 $r(s)=\sqrt{as+b}$ olduğunda $r < \frac{1}{|\kappa|}$ ise kanal yüzey kendisini kesmez.

Teorem 3.11 den Sonuç 3.1.1 ve Sonuç 3.1.2 yi kolayca ispatlayabiliriz.

Açılabilir yüzeyler bilgisayar uygulamalarında önemli bir rol oynar. Bizim için önemli olan kanal yüzey ne zaman açılabilirdir. İyi bilinir ki bir noktada açılabilir yüzeyin Gauss eğriliği sıfırdır. O halde kanal yüzeyinin Gauss eğriliğini bulursak kanal yüzeyinin açılabilirliği hakkında fikir sahibi olabiliriz.

Şimdi de (3.2) denklemindeki kanal yüzeyinin birim normali U olmak üzere

$$U=\frac{M_s\times M_t}{\|M_s\times M_t\|}=\frac{(g'-\kappa h\cos t)T+(\kappa g\cos t+h'-1)(N(s)\cos t+B(s)\sin t)}{\sqrt{(g'-\kappa h\cos t)^2+(\kappa g\cos t+h'-1)^2}}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan (3.2) denklemindeki kanal yüzeyinin ikinci temel formu katsayılarını l,m,n olmak üzere

$$l=\langle M_{ss},U\rangle=\frac{(g'-\kappa h\cos t)\begin{pmatrix}\kappa^2 h-h'' \\ -2\kappa g'\cos t \\ +\kappa g\tau\sin t\end{pmatrix}+(\kappa g\cos t+h'-1)\begin{pmatrix}\kappa\cos t-2h'\kappa\cos t \\ -g''-\kappa^2 g\cos^2 t \\ -\tau^2 g-\tau\kappa h\end{pmatrix}}{\sqrt{(g'-\kappa h\cos t)^2+(\kappa g\cos t+h'-1)^2}}$$

$$m=\langle M_{st},U\rangle=\frac{(g'-\kappa h\cos t)\kappa g\sin t-\tau g(\kappa g\cos t+h'-1)}{\sqrt{(g'-\kappa h\cos t)^2+(\kappa g\cos t+h'-1)^2}}$$

$$n=\langle M_{tt},U\rangle=-\frac{g(\kappa g\cos t+h'-1)}{\sqrt{(g'-\kappa h\cos t)^2+(\kappa g\cos t+h'-1)^2}}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu değerler Teorem 1.1.6 daki Gauss eğriliği $K=\dfrac{l.n-m^2}{EG-f^2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$K=\frac{\begin{pmatrix}(\kappa g\cos t+h'-1)(\kappa(\kappa g\cos t+h'-1)(\kappa g\cos t+2h'-1)\cos t\\ +2(g'-\kappa h\cos t)\kappa g'\cos t+\tau\kappa(\kappa g\cos t+h'-1)(g'-\kappa h\cos t)g\sin t\\ -(g'-\kappa h\cos t)(\kappa^2 h-h'')-g''(\kappa g\cos t+h'-1)+(\kappa g\cos t+h'-1)\tau\kappa h\\ -(g'-\kappa h\cos t)^2\kappa^2 g\sin^2 t/(\kappa g\cos t+h'-1)\end{pmatrix}}{g^2\left((g'-\kappa h\cos t)^2+(\kappa g\cos t+h'-1)^2\right)^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2 Bir regüler kanal yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart kanal yüzeyinin silindir veya koni olmasıdır.

İspat: Açıkça bir silindir yada koni olduğu zaman kanal yüzeyi açılabilirdir. Regüler kanal yüzeyi ancak Gauss eğriliği $K=0$ olduğunda açılabilir. Yani $lm-n^2=0$ olduğu zaman

$$\begin{aligned}&\tau\kappa(\kappa g\cos t+h'-1)(g'-\kappa h\cos t)g\sin t\equiv(\kappa g\cos t+h'-1)\\&(\kappa(\kappa g\cos t+h'-1)(\kappa g\cos t+2h'-1)\cos t+2(g'-\kappa h\cos t)\kappa g'\cos t-(g'-\kappa h\cos t)(\kappa^2 h-h'')\\&-g''(\kappa g\cos t+h'-1)+(\kappa g\cos t+h'-1)\tau\kappa h-(g'-\kappa h\cos t)^2\kappa^2 g\sin^2 t/(\kappa g\cos t+h'-1))\end{aligned}\tag{3.1}$$

olur. (3.1) ifadenin her iki tarafının karesi alınırsa ve $\sin^2 t=1-\cos^2 t$ kullanılırsa (3.1) denkleminin sağ ve sol tarafının her tarafı derece 6 ve 8 ile $\cos t$ polinomlarıdır. Polinomların özelliklerinden (3.1) denkleminin sağ tarafının en yüksek derecesinin katsayısı 0'a eşittir. Böylece

$$\kappa^4 g^2\left(g^2+h^2\right)=0,\ g\neq 0,\ \kappa\equiv 0$$

dır. $g\neq 0,\ \kappa\equiv 0$ (3.1) denkleminde yerine koyarsak

$$(h'-1)\left(g'h''-g''(h'-1)\right)\equiv 0 \tag{3.2}$$

elde ederiz. $\kappa=0$ olduğu zaman ispatlamak kolaydır. Eğer $h'-1=0, s_0\in[0,1]$ o zaman (s_0,v) ve $(0,2\pi)$ noktasında $l.n-m^2=0$ dır. Böylece $h'-1=0$ olduğunda kanal yüzey regüler değildir. Kanal yüzeyin regüler olması kabulüne göre

$$g'h'' - g''(h'-1) = 0$$

$$g'' = \left(\frac{3r'r'' + r'''}{h'-1} + \frac{r''}{r'\left(1-r'^2\right)}\right)g' \tag{3.3}$$

$$h'' = 3r'r'' + rr'''$$

olduğunu göstermek kolaydır. Bu sonuç kullanılırsa (3.3) denklemi (3.4) denklemi şeklini alır.

$$-(h'-1)\frac{r''}{r'\left(1-r'^2\right)}g' = 0 \ . \tag{3.4}$$

Yukarıdaki hesaplamalardan $h'-1 \neq 0$ dır. $g' = \dfrac{r'(1-h')}{\sqrt{1-r'^2}}$ olduğundan eğer $g' = 0$ ise $r' = 0$ dır. Böylece $g' \equiv 0$ olduğunda r nin sabit olduğu görülür. Eğer $r'' \equiv 0$ ise $,r,s$ ye bağlı lineer bir doğru veya sabittir. Böylece (3.4) denkleminden r sabit veya s ye bağlı lineer fonksiyondur. $\kappa \equiv 0$ olduğunda merkez eğri bir doğrudur. r sabit ve s nin bir lineer fonksiyonu olduğunda sırasıyla kanal yüzeyi bir silindir veya bir konidir. Böylece teoremin ispatı elde edilmiş olur.

Teorem 3.1.3 $M(s,t)$ kanal yüzeyi $s \in [0,1]$ ve $t \in [0,2\pi]$ aralığında regüler ise kanal yüzeyinin toplam alanı A olmak üzere

$$A = \pi\left|\int_0^l r\left(r^2\right)'' - 2r\,ds\right| \tag{3.5}$$

denklemiyle verilir.

İspat: İyi bilinir ki

$$A = \int_0^l\int_0^{2\pi}\sqrt{EG-F^2}\,dt\,ds$$

dir. (3.1) denkleminde

$$EG - F^2 = g^2\left((1-\kappa g\cos t - h')^2 + (h\kappa\cos t - g')^2\right)$$

dir. $g = r\sqrt{1-r'^2}$, $h = rr'$ yerine yazılırsa

$$EG - F^2 = \left(r^2\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t + rr'' + r'^2 - 1\right)^2$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$A = \int_0^l \int_0^{2\pi} \left| r^2\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t + rr'' + r'^2 - 1 \right| dtds \qquad (3.6)$$

Kanal yüzeyinin regüler olduğu kabulünden dolayı $s \in [0, l],\ t \in [0, 2\pi)$ aralığında $EG - F^2$ sabit işaretli olmalıdır. (3.6) denkleminin sağ tarafı tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^l \int_0^{2\pi} \left| r^2\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t + rr'' + r'^2 - 1 \right| dtds \\
&= \left| \int_0^l \int_0^{2\pi} r^2\sqrt{1-r'^2}\,\kappa\cos t + rr'' + r'^2 - 1 \right| dtds \\
&= \left| 2\pi \int_0^l \left(rr'' + r'^2 - 1\right) dtds \right| \\
&= \pi \left(\int_0^l \left(r\left(r^2\right)'' - 2r \right) ds \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.BÖLÜM

4.1 Hortum Yüzeyi Olarak Kanal Yüzeyleri

Denklem (2.1) deki kanal yüzeyinin $r(s)$ yarıçap fonksiyonu sabit alınırsa Tanım 1.1.29 deki hortum yüzeyi elde edilir. Yani hortum yüzeyi

$$M(s,t)=\alpha(s)+r(-N(s)\cos t+B(s)\sin t) \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.1 Bir M kanal yüzeyi için aşağıdakiler denktir.

- **i.** M , (2.1) den elde edilen bir hortum yüzeyidir.
- **ii.** M nin yarıçapı sabittir.
- **iii.** M kanal yüzeyinin tanımlandığı ailedeki her bir kürenin yarıçap vektörü merkez eğrisiyle dik olarak kesişir.

Şimdi de hortum yüzeyinin I. ve II. temel formunun katsayılarını bulalım. (4.1) denkleminin s ve t ye göre türevlerini alıp Frenet formüllerini kullanırsak

$$M_t = r(-N(s)(\sin t)+B(s)(\cos t))$$

ve

$$\begin{aligned} M_s &= T(s)+r\cos t(-\kappa T(s)+\tau B(s))+r\sin t(-\tau N(s)) \\ &= (1-r\kappa\cos t)T(s)+r\tau(-N(s)(\sin t)+B(s)(\cos t)) \\ &= (1-r\kappa\cos t)T(s)+\tau M_t \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} M_s \times M_t &= (1-r\kappa\cos t)T(s)\times r(-N(s)(\sin t)+B(s)(\cos t)) \\ &= -r(1-r\kappa\cos t)(N(s)(\cos t)+B(s)(\sin t)). \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|M_s \times M_t\|^2 = r^2(1 - r\kappa\cos t)^2$$

ve

$$U = \frac{M_s \times M_t}{\|M_s \times M_t\|} = -N(s)(\cos t) - B(s)(\sin t)$$

bulunur. I. temel formun katsayıları

$$\begin{aligned}
E &= \langle M_s, M_s \rangle = (1 - r\kappa\cos\theta)^2 + (r\tau)^2 \\
F &= \langle M_s, M_t \rangle = r^2\tau \\
G &= \langle M_t, M_t \rangle = r^2
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. II. temel formun katsayıları da,

$$\begin{aligned}
M_{tt} &= -r(N(s)(\cos t) + B(s)(\sin t)) \\
M_{ts} &= r(\kappa T(s)(\sin t) - \tau N(s)(\cos t) - \tau B(s)(\sin t)) \\
M_{ss} &= \left(s' - (sr\kappa)'\cos t\right)T + s^2(1 - r\kappa\cos t)(\kappa N) + (sr\tau)'(-N\sin t + B\cos t) + \\
&(s^2 r\tau)(-\sin t(-\kappa T + \tau B) + \cos t(-\tau N)) \\
&= \left(s' - (sr\kappa)'\cos t + s^2 r\tau\sin t\right)T + \left(s^2(1 - r\kappa\cos t)\kappa - (sr\tau)'\sin t - s^2 r\tau^2\cos t\right)N + \\
&\left((sr\tau)'\cos t - s^2 r\tau^2\sin t\right)B \\
&= \left(s' - (sr\kappa)'\cos t + s^2 r\tau\sin t\right)T + \left(s^2\kappa - s^2 r(\kappa^2 + \tau^2)\cos t - (sr\tau)'\sin t\right)N + \\
&\left((sr\tau)'\cos t - s^2 r\tau^2\sin t\right)B.
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
e &= \langle M_{ss}, U(s,t) \rangle = \left(-\kappa\cos t + r\kappa^2\cos^2 t + r\tau^2\right) \\
f &= \langle M_{st}, U(s,t) \rangle = r\tau \\
g &= \langle M_{tt}, U(s,t) \rangle = r.
\end{aligned}$$

elde edilir. Hortum yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği ise

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{rs^2\left(-\kappa\cos t+r\kappa^2\cos^2 t+r\tau^2\right)-\left(rs\tau\right)^2}{r^2s^2\left(1-r\kappa\cos t\right)^2}=\frac{-\kappa\cos t}{r\left(1-r\kappa\cos t\right)}$$

ve

$$H=\frac{eG-2Ff+gE}{2\left(EG-F^2\right)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\kappa r\right).$$

şeklindedir. Hortum yüzeyinin asli eğrilikleri ise

$$H^2-K=\frac{1}{4}\left(r\kappa-\frac{1}{r}\right)^2$$

den

$$k_1=H+\sqrt{H^2-K}=\frac{-\kappa\cos t}{1-r\kappa\cos t}$$

ve

$$k_2=H-\sqrt{H^2-K}=\frac{1}{r}$$

şeklinde bulunur.

4.2 Dönel Yüzey Olarak Kanal Yüzeyleri

Teorem 4.2.1 Bir M kanal yüzeyinin merkez eğrisinin düz bir doğru olması için gerek ve yeter şart M nin dönme eksenine paralel olan yüzeye normal doğrusu olmayan bir dönel yüzey olmasıdır. Ayrıca (2.1) denklemi Tanım 1.1.30 e indirgenebilir.

İspat: M dönel yüzey ve $p \in M$ olsun. L_p normal doğrusu, M nin meridyenlerinden geçen düzlemlerde bulunan p noktasında M ye diktir. Bu düzlem M nin A dönme eksenini içerir. Böylece L_p ya A ile kesişir ya da ona paraleldir.

L_p, q noktasında A'yı kessin. $r(q) = \|q - p\|$ yarıçaplı $S^2(q)$ küresi ve q merkezi p noktasında L_p ile çakışır. Böylece küre, p noktasında M ye teğettir. Bu taktirde M, $q \to r(q)$ değişken yarıçaplı ve merkez eğrili bir kanal yüzeyidir.

Tersine kabul edelim, M, merkez eğrisi bir doğru olan bir kanal yüzey olsun. α eğrisi boyunca Frenet çatısı yerine bir paralel bir **{T,N,B}** çatısı seçebiliriz. Teorem 2.1.2 ispatı benzer şekilde uygulanabilir. Tek fark merkez eğrisi için $\kappa = \tau = 0$ olmasıdır. Buradan (2.1) elde edilir.

M nin bir dönel yüzey olduğunu göstermek için merkez eğrisi z-ekseni olan M yi hareket ettirmek için Öklid hareketini kullanalım ve burada

$$T = (0,0,1) \qquad N = (1,0,0) \qquad \text{ve} \qquad B = (0,1,0)$$

alalım. Ayrıca $\alpha(s) = (0,0,s)$ kabul edersek, o zaman (2.1) denklemi

$$M(s,t) = \left(\mp r(s)\sqrt{1 - r'(s)^2}\cos t, \pm r(s)\sqrt{1 - r'(s)^2}\sin t, s - r(s)r'(s) \right) \tag{4.2}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$t = -u \ , \ s = v \ , \ \varphi(v) = \mp r(v)\sqrt{1 - r'(v)^2} \ \text{ ve } \ \psi(v) = v - r(v)r'(v)$$

aldığımız zaman Tanım 1.1.30 teki denklem ile (4.2) denklemi çakışır. Böylece M bir dönel yüzeydir.

Dönel yüzeylerin focal cümleleri ve düzlem eğrilerinin evolütleri arasında yakın bir ilişki vardır.

Teorem 4.2.2 C düzlem eğrisi tarafından üretilen M dönel yüzeyinin focal cümlesinin bileşenlerinden biri C eğrisinin evolütü tarafından üretilen bir dönel yüzeydir.

İspat: C birim hızlı α eğrisi ile parametrelendirilmiş olsun ve $\alpha = (\varphi, \psi)$ şeklinde yazalım. M nin standart parametrizasyonu

$$M(u,v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v))$$

şeklindedir. Basitlik için $\varphi > 0$ seçelim, Sonuç1.1.1 e göre M nin asli eğrilikleri

$$k_\mu = (\varphi''\psi' - \varphi'\psi'') \text{ ve } k_\pi = -\frac{\psi'}{\varphi}$$

ile verilir. Ayrıca Lemma 1.1.5 den M nin birim normali

$$U = (\psi'\cos u, \psi'\sin u, \varphi')$$

şeklindedir. Böylece M nin dejenere olmayan focal yörüngeleri

$$\begin{aligned}
z_1(u,v) &= (M + \rho_1 U)(u,v) \\
&= \left(M + \frac{1}{k_\mu} U(u,v) \right) \\
&= (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(u)) + \frac{(\psi'(v)\cos u, \psi'\sin u, \varphi'(v))}{\varphi''(v)\psi'(v) - \varphi'(v)\psi''(v)} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos u)\left(\varphi(v) + \dfrac{\psi'(v)}{\varphi''(v)\psi'(v) - \varphi'(v)\psi''(v)} \right), (\sin u)\left(\varphi(v) + \dfrac{\psi'(v)}{\varphi''(v)\psi'(v) - \varphi'(v)\psi''(v)} \right), \\ \left(\psi(v) - \dfrac{\varphi'(v)}{\varphi''(v)\psi'(v) - \varphi'(v)\psi''(v)} \right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_2(u,v) &= \left(M(s,t)+\rho_2 U(u,v)\right) \\
&= \left(M(u,v)+\frac{1}{k_\pi}U(u,v)\right) \\
&= \left(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(u)\right) - \frac{\varphi}{\psi'}\left(\psi'(v)\cos u, \psi'(v)\sin u, \varphi'(v)\right) \\
&= \left(0,0,\psi(v)-\frac{\varphi(v)\varphi'(v)}{\psi'(v)}\right)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Burada $\rho_i, i=1,2,$ $M(u,v)$ nin asli eğriliklerinin çarpmaya göre tersidir. Diğer taraftan $\alpha=(\varphi,\psi)$ nın evolütü γ ise

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \alpha + \frac{\|\alpha'\|^2}{\langle \alpha''.J(\alpha')\rangle}J(\alpha') \\
&= (\varphi,\psi)+\frac{(\varphi'+\psi')}{\langle(\varphi'',\psi''),(-\psi',\varphi')\rangle}(-\psi',\varphi')
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

şeklindedir. Burada α birim hızlı olduğundan

$$
\varphi'+\psi'=1 \tag{4.4}
$$

ve

$$
J(\alpha')=(-\psi',\varphi') \tag{4.5}
$$

şeklindedir. (4.4) ve (4.5) değerlerini (4.3) denkleminde yerine yazarsak ve gerekli işlemleri yaparsak α nın evolütü

$$
\gamma=\left(\varphi(v)+\frac{\psi'(v)}{\varphi''(v)\psi'(v)-\varphi'(v)\psi''(v)}, \psi(v)-\frac{\varphi'(v)}{\varphi''(v)\psi'(v)-\varphi'(v)\psi''(v)}\right) \tag{4.6}
$$

ile verilir. (4.6) denkleminden basit bir hesaplama gösterir ki dönel yüzey, γ tarafından üretilir.

4.3 Merkez Eğrisi Bir Düzlemsel Eğri Olan Kanal Yüzeyleri

Herhangi bir kanal yüzeyin asli eğrileri, bir çemberler sistemine sahiptir. Direkt hesaplamayla bunu ispatlayalım.

Lemma 4.3.1 M , (2.1) ile verilmiş bir kanal yüzey olsun. Sabit s için $t \to canalsurf(s,t)$ eğrisi, asli eğriliği $-\dfrac{1}{r(s)}$ olan bir asli eğridir.

İspat: $M(s,t) = canalsurf(s,t)$ olsun. M kanal yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U = \frac{M - \alpha}{\|M - \alpha\|} = \frac{1}{r}(M - \alpha) \tag{4.7}$$

şeklindedir. Buradan

$$M = \alpha + rU \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) denkleminin t ye göre türevini alırsak

$$M_t = \alpha U_t = -rS_{M_t} \tag{4.9}$$

elde edilir. Burada S kanal yüzeyinin şekil operatörüdür.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1 M , (2.1) ile verilen bir kanal yüzey olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitlikler birbirine denktir.

(i) Her s için $s \to canalsurf(s,t)$ yüzeyi, asli eğridir.

(ii) Ya r fonksiyonu sabittir ve α merkez eğrisinin torsiyonu sıfırdır ya da α nın hem eğriliği hem de torsiyonu sıfırdır.

(iii) α merkez eğrisi bir düzlemsel eğridir ve ya r fonksiyonu sabittir ya da α nın eğriliği sıfırdır.

İspat: (i) yi kabul edelim. Önce kanal yüzeyinin U birim normal vektör alanını yazmak için (4.2) ve (4.7) denklemlerini kullanalım. Böylece

$$U=-T(s)r'\pm\sqrt{1-r'^2}\left(N(s)\cos t+B(s)\sin t\right) \tag{4.10}$$

elde edilir. Buradan U nun t ve s ye göre türevini alırsak,

$$U_t=\pm\sqrt{1-r'^2}\left(-N(s)\sin t+B(s)\cos t\right) \tag{4.11}$$

ve

$$\begin{aligned} U_s &= -r''T(s)-r'\kappa N(s)\pm\left(\sqrt{1-r'^2}\right)'\left(N(s)\cos t+B(s)\sin t\right)\\ &\pm\sqrt{1-r'^2}\left(\cos t\left(-\kappa T(s)+\tau B(s)\right)+\sin t\left(-\tau N(s)\right)\right)\\ &=-\left(r''\pm\kappa\cos t\sqrt{1-r'^2}\right)T(s)-r'\kappa N(s)\pm\left(\sqrt{1-r'^2}\right)'\left(\cos tN(s)+\sin tB(s)\right)\\ &\pm r\sqrt{1-r'^2}\left(-\sin tN(s)+\cos tB(s)\right)\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde ederiz. (4.11) ve (4.12) den

$$\left\langle U_t,U_s\right\rangle=\pm r'\kappa\sin t\sqrt{1-r'^2}+r\left(1-r'^2\right)\tau \tag{4.13}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.8) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$M_s=T(s)+r'U+rU_s \tag{4.14}$$

elde edilir. O halde (4.9), (4.10), (4.11), (4.13) ve (4.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle M_s,M_t\right\rangle &=\left(T(s)+r'U+rU_s\right).\left(rU_t\right)=r^2\left(U_s\times U_t\right)\\ &=r^2\left(\pm r'\kappa\sin t\sqrt{1-r'^2}+r\left(1-r'^2\right)\right)\tau\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Eğer M_s asli ise, M_t ye dik olmalıdır. Eğer bu olursa (4.15) in sağ tarafındaki her iki terim sıfırdır. Böylece $\tau=0$ ve ya $r'=0$ ya da $\kappa=0$ dır. Böylece (ii) elde edilir. Eğer (ii) yi kabul edersek, o zaman (4.15) denkleminden M_s nin asli eğri olduğunu gösterir. Son olarak açık bir şekilde (iii) e denktir.

KAYNAKÇA

[1] Hacısalihoğlu, H. H. "Diferensiyel Geometri I. Cilt", Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1-167 (2000).

[2] Hacısalihoğlu, H. H. "Diferensiyel Geometri II. Cilt", Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 1-143 (2000).

[3] Hacısalihoğlu, H. H. "Lineer Cebir I. Cilt", Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara, 147-165 (2000).

[4] Gray, A., "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica 2nd ed.", CRC Press Washington, 14-808 (1998)

[5] Xu Z., Feng R., Sun J., 2006 "Analytic and Algebraic Properties of Canal Curface", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 195, 220-228.

[6] Yaylı Y., Doğan F., 2012 "Tubes with Darboux Frame" *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 7, No. 16, 751-758.

[7] Çetin M., 2010, "Öteleme Yüzeylerinin Diferensiyel Geometrisi", Yüksek Lisans Tezi, *Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Uşak, 1-67

[8] Es H., Karacan M.K., Yaylı Y., 2000, "Singüler Points of Tubular Surface", *AMS Subject Classification: 53A04,53A05.*

[9] Tunçer Y, Yoon D. W., Karacan M. K., 2011, "Weingarten and Linear Weingarten Canal Surfaces", arXiv: 1106.3175v1 [math.DG], 1-12.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BOZKURT, Fatma

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve yeri : 28.05.1987 Turgutlu/ Manisa

Medeni Hali : Bekar

Telefon : 05379448601

E-mail : fatma6387@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Lisans	Afyon Kocatepe Üniversitesi Uşak Fen Edebiyat Fakültesi	2009
Lise	Turgutlu Anadolu Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-2010	Turgutlu Elit Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2010-2011	Turgutlu Birey Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2011-2012	Turgutlu Musacalı İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce