T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASLIHAN SERTKAYA

TEMMUZ 2012

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ASLIHAN SERTKAYA

UŞAK 2012

Aslıhan SERTKAYA tarafından hazırlanan "İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ……………………………….
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: 16/07/2012

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Aslıhan SERTKAYA

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

(Yüksek Lisans Tezi)

Aslıhan SERTKAYA

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2012

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde bilinen bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları ve bu kavramlara ilişkin teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde toplanabilme metodu tanımlanmış, bu metodun istatistiksel yakınsaklık metodunu içermediği gösterilmiştir. Tauberian teoremleri ve tauberian koşulu tanımlandıktan sonra istatistiksel yakınsaklık metodunda Tauberian koşulu incelenmiştir.

Bilim Kodu : 403.03.01. Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Anahtar Kelimeler : Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık, İstatistiksel Cauchy Dizisi

Sayfa Adedi : 30

Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

STATISTICAL CONVERGENCE

(M.Sc. Thesis)

Aslıhan SERTKAYA

UŞAK UNIVERSİTY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2012

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter is given some well known definitions and theorems.

In chapter three the concepts of statistical convergence and statistical Cauchy sequence and theorems concerning these concepts are given.

Summability method defined in the fourth section, no matrix summability method can include the method of statistical convergence is shown to . Tauberian theorems and Tauberian method Tauberian condition for the condition is defined statistically convergence.

Science Code : 403.03.01. Analysis and Function Theory

Key Words : Density, Statistically Convergent, Statistically Cauchy Sequence

Page Number : 30

Adviser : Assist. Prof. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen, önerileriyle beni yönlendiren değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU’ na saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar cümlesi
$x = (x_k)$	Genel terimi x_k olan reel sayıların bir dizisi
$\|K\|$	K kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin yoğunluğu (Doğal Yoğunluk)
$h.h.k$	Hemen her k
$st - \lim\, x_n$	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limiti
$A = (a_{nk})$	Sonsuz matris
$(Ax)_n \equiv \big(A_n(x)\big)$	x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi
C_1 yada $(C, 1)$	Cesáro ortalaması
$s_n \to l(A)$	(s_n) dizisi l ye Abel limitlenebilir
$\sum a_k = l(A)$	$\sum a_k$ l ye Abel toplanabilir
$O(1)$	Sınırlı ifade
$o(1)$	Sıfıra yakınsak ifade
Δx_k	$x = (x_k)$ dizisinin $x_k - x_{k+1}$ terimleri farkı

1. GİRİŞ

Klasik yakınsaklık kavramının yanı sıra ölçüm, küme ve benzeri araçlar kullanılarak bu kavrama yakın birçok yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır. Yeni yakınsaklık kavramlarının en önemlilerinden biri H. Fast (1951) ve Schoenberg (1959) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanan istatistiksel yakınsaklık metodudur. İlk olarak 1951 yılında Steinhaus tarafından Polonya'da yapılan bir konferansta tanıtılan ve yine aynı yıl H.Fast tarafından geliştirilen "İstatistiksel Yakınsaklık" kavramı, Toplanabilme Teorisi (Schoenberg ve Fridy), Fourier Serileri (Zygmund), Fonksiyonel Analiz (Connor, Demirci ve Orhan, Kline), Sayılar Teorisi (Erdös ve Tenenbaum), İstatistik (Fridy ve Khan), Optimizasyon Teorisi (Pehlivan ve Mamedov), Yaklaşım Teorisi (Gadjiev ve Orhan) ve son zamanlarda ise Ölçü Teorisi (Miller ve Orhan) gibi matematiğin temel alanlarıyla ilişkisi nedeniyle günümüze kadar çok sayıda matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir.

Bu yüksek lisans tezinde, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi tanımlarını kullanarak Analizde iyi bilinen bazı klasik sonuçların istatistiksel benzerlerini elde edeceğiz. Bu sayede bilinen bazı sonuçların daha zayıf koşullar altında da gerçeklenebileceğini göstereceğiz. Matrislerde toplanabilme metodunu tanımlayıp bu metodun istatistiksel yakınsaklık metodunu içermediğini göstereceğiz. Son olarak da Tauberian teoremleri ele alınarak istatistiksel yakınsaklık için Tauberian teoremlerindeki durumu inceleyeceğiz.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli bazı tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyonlara dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi denir. Biz bu yüksek lisans tezinde reel terimli dizileri, yani

$$x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

şeklindeki fonksiyonları inceleyeceğiz.
$x_1, x_2, x_3, \ldots$ reel sayılarına dizinin birinci, ikinci, üçüncü,… terimleri, x_k terimine dizinin genel terimi ve k doğal sayısına da teriminin indisi adı verilir. Biz bu yüksek lisans tezinde genel terimi x_k olan diziyi (x_k) ile göstereceğiz.

Tanım 2.2 Her k doğal sayısı için $x_k \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (x_k) dizisine üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin üst sınırı adı verilir. Her k doğal sayısı için $x_k \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye alttan sınırlıdır denir. m sayısına da bu dizinin alt sınırı adı verilir.

Tanım 2.3 Her k doğal sayısı için $|x_k| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (x_k) dizisine sınırlı dizi denir. Dolayısıyla üstten ve alttan sınırlı bir dizinin sınırlı olacağı açıktır.

Tanım 2.4 (x_k) bir reel sayı dizisi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $k > k_0$ olduğunda $|x_k - x| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı bir k_0 sayısı bulunabiliniyor ise (x_k) dizisi x e yakınsaktır denir ve

$$\lim x_k = x \quad \text{veya} \quad (x_k) \to x$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1 Yakınsak bir dizinin bir tek limiti vardır.

Teorem 2.2 Yakınsak her dizi sınırlıdır.

Teorem 2.3 $(x_k) \to a$ ve $(y_k) \to b \;\Rightarrow\; (x_k + y_k) \to a + b$ olur.

Teorem 2.4 $(x_k) \to a$ ise her $c \in \mathbb{R}$ için $c(x_k) \to ca$ olur.

Teorem 2.5 Yakınsak bir dizinin her alt dizisi yakınsaktır.

Tanım 2.5 (x_k) bir reel terimli dizi olsun. (x_k) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için bir $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, k \geq k_0$ için $|x_n - x_k| < \varepsilon$ olur.

Teorem 2.6 (Cauchy Yakınsaklık Testi) (x_k) bir reel terimli dizi olsun. (x_k) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Tanım 2.6 a ve b reel sayılar olmak üzere,

$$\{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \text{ ve } \{x : x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

kümelerine sırasıyla kapalı aralık ve açık aralık denir. Kapalı aralık $[a, b]$, açık aralık $]a, b[$ ile gösterilir.

$$\{x : x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \text{ ve } \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

kümelerine de sırasıyla soldan kapalı sağdan açık aralık ve sağdan kapalı soldan açık aralık denir. Soldan kapalı sağdan açık aralık $[a, b[$, sağdan kapalı soldan açık aralık $]a, b]$ ile gösterilir.

$a = b$ olduğu zaman yalnız kapalı aralık boş olmayan bir küme olacaktır, diğerleri boş küme olacaktır. Yani $[a, a] = \{a\}$, $[a, a[\, = \,]a, a[\, = \,]a, a] = \emptyset$ olur.
$b < a$ olduğunda ise $[a, b] = \,]a, b] = [a, b[\, = \,]a, b[\, = \emptyset$ olur.
Ayrıca,

$$]-\infty, b[\, = \{x : x \in \mathbb{R}, x < b\} \qquad]a, \infty[\, = \{x : x \in \mathbb{R}, x > a\}$$
$$]-\infty, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq b\} \qquad [a, \infty[\, = \{x : x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7 Her n doğal sayısı için $a_n,\ b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$ olmak üzere $I_n = [a_n, b_n]$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için;

i. $I_n \supset I_{n+1}, I_n \neq I_{n+1}$;
ii. $b_1 - a_1 > b_2 - a_2 > \cdots > b_n - a_n > b_{n+1} - a_{n+1} \to 0$

oluyorsa I_n aralıkları iç içe aralıklar sistemi oluşturur denir.

Teorem 2.7 (İç İçe Aralıklar Teoremi) $\{I_n\}$ aralıklar kümesi bir iç içe aralıklar sistemi olsun. Bu takdirde I_n aralıklarının hepsine ait olan bir tek reel sayı vardır.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Bu bölümde bazı tanım, teorem ve örnekler verilecektir. Öncelikle Doğal Yoğunluk kavramı tanımlanarak bunun yardımıyla İstatistiksel Yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır. Bu kavram örneklerle açıklandıktan sonra İstatistiksel Cauchy Dizisi tanımı yapılacak ve teoremler üzerinde açıklık getirilecektir.

3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1 K**,** $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. $|\{k \leq n: k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısı olmak üzere,

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: k \in K\}|$$

limiti mevcut ise $\delta(K)$ sayısına K kümesinin Yoğunluğu (Doğal Yoğunluğu) denir.
(a_k) pozitif tamsayıların bir dizisi ve $K = \{a_k: k \in K\}$ olmak üzere $\delta(K)$ sayısı mevcut ise

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

olur [3].
Örneğin $\delta(\mathbb{N}) = 1$ ve $\delta(\{k^2: k \in \mathbb{N}\}) = 0$ ve $\delta(\{2k+1: k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımından kolaylıkla görülebilir. Ayrıca doğal sayılar kümesinin her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunlukludur.
İstatistiksel yakınsaklık kavramı doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerle ilgilidir. Bunun için kolaylık sağlaması için aşağıdaki notasyonu verebiliriz:
Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi bir P koşulunu sıfır yoğunluklu bir indis kümesinin elemanları dışındaki her k için sağlıyorsa $x = (x_k)$ dizisi bu P koşulunu "hemen hemen her k" için sağlıyor denir ve bu kısaca "$h.h.k$" şeklinde yazılabilir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.1.2 $x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı var ise bu (x_k) dizisi L sayısına İstatistiksel Yakınsaktır denir ve bu durum;

$$st - \lim x_k = L$$

şeklinde gösterilir [1].

Yoğunluk kavramında verdiğimiz notasyon yardımıyla; $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ yazılabilir.

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılabileceği gibi $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken, bu komşuluğun dışında da indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak şartıyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Dolayısıyla, istatistiksel yakınsaklık bilinen yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır. Bunun karşıtının her zaman doğru olamayacağı aşağıdaki örneklerde görülmektedir.

Örnek 3.1.1 $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi;

$$x_k = \begin{cases} 1\ , & k = m^2 \\ 0\ , & k \ne m^2 \end{cases} \quad , m = 1,2,3,\dots$$

şeklinde tanımlansın.

(x_k) dizisinin terimleri;

$$(x_k) = (x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0, x_8 = 0, x_9 = 1, x_{10} = 0 \dots)$$

şeklinde olur. Bu durumda;

$$|\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik n ile bölünür ve $n \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$st - \lim x_k = 0$$

olduğu sonucuna ulaşırız.

Örnek 3.1.1 de verilen x dizisi yakınsak değildir. Dolayısıyla yakınsak her dizi sınırlı olduğu halde istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Şimdi bunun için bir örnek daha verelim.

Örnek 3.1. $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} \ , & k = m^2 \\ 0 \ , & k \neq m^2 \end{cases} \quad , m = 1,2,3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda;

$$|\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik n ile bölünür ve $n \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$st - \lim x_k = 0$$

olduğu sonucuna ulaşırız. Burada da x dizisi istatistiksel yakınsaktır fakat üstten sınırsızdır.

Teorem 3.1.1 Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi bir a sayısına yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda,

$$|x_k - a| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir k_0 sayısı bulunabilinir. O halde,

$$|\{k \leq n: |x_k - a| \geq \varepsilon\}| \leq k_0$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik n ile bölünür ve $n \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - a| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k_0}{n} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$st - \lim x_k = a$$

olur. Genel olarak,

$$\lim x_k = a \qquad \Rightarrow \qquad st - \lim x_k = a$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 3.1.2 İstatistiksel yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat: $x = (x_k)$ dizisinin L_1 ve L_2 sayılarına istatistiksel yakınsaklığını kabul edelim.
O halde her $\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $A \subset \mathbb{N}$ kümesi ve (ε a bağlı) bir k_0 sayısı bulabiliriz.
Öyle ki $\delta(A) = 1$, her $k > k_0$ ve $k \in A$ için

$$|x_k - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır.
Aynı şekilde her $\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $B \subset \mathbb{N}$ kümesi ve (ε a bağlı) bir k_1 sayısı bulabiliriz.
Öyle ki $\delta(B) = 1$, her $k > k_1$ ve $k \in B$ için

$$|x_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanır.
k_2 sayısını $k_2 = maks\{k_0, k_1\}$ şeklinde alırsak; $\delta(A \cap B) = 1$ olmak üzere her $k > k_2$ ve $k \in A \cap B$ için ,

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - x_k + x_k - L_2| \\ &\leq |L_1 - x_k| + |L_2 - x_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan $|L_1 - L_2| = 0$ bulunur. Böylece $L_1 = L_2$ olup ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.1 $st - \lim x_k = a$, $st - \lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu durumda,

i. $st - \lim(x_k + y_k) = a + b$

ii. $st - \lim(cx_k) = ca$ olur [5].

İspat: i. $st - \lim x_k = a$ ve $st - \lim y_k = b$ olsun.
O halde her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n: |x_k - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n: |y_k - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

olur. Burada,

$$|(x_k + y_k) - (a + b)| \le |x_k - a| + |y_k - b|$$

eşitsizliğinden;

$$\{k \le n: |(x_k + y_k) - (a + b)| \ge \varepsilon\} \subseteq \left[\left\{k \le n: |x_k - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{k \le n: |y_k - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right]$$

içermesi sebebi ile

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n: |(x_k + y_k) - (a + b)| \ge \varepsilon\}|$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n: |x_k - a| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n: |y_k - b| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$st - \lim(x_k + y_k) = a + b$$

bulunur.

ii. $c = 0$ ise durum açıktır. Şimdi $c \ne 0$ olsun. Burada

$$|cx_k - ca| \ge \varepsilon \iff |x_k - a| \ge \frac{\varepsilon}{|c|}$$

olduğundan,

$$\{k \leq n: |cx_k - ca| \geq \varepsilon\} = \left\{k \leq n: |x_k - a| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}$$

bulunur. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |cx_k - ca| \geq \varepsilon\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n: |x_k - a| \geq \frac{\varepsilon}{|c|}\right\}\right|$$
$$= 0$$

olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |cx_k - ca| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$st - \lim(cx_k) = ca$$

bulunur.

3.2 İstatistiksel Cauchy Dizisi

1985 yılında Fridy tarafından Klasik Analizden bildiğimiz Cauchy dizisi kavramının istatistiksel benzeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.1 $x = (x_k)$ dizisi eğer her $\varepsilon > 0$ için N, ε a bağlı olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise $x = (x_k)$ dizisine İstatistiksel Cauchy Dizisi denir. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için en az bir N sayısı mevcuttur. Öyle ki $h.h.k$ için,

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

sağlanır [2].

Teorem 3.2.1 Aşağıdaki ifadeler denktir.

i. x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

ii. x istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii. Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır [2].

İspat: Öncelikle (i) ve (ii) nin denk olduğunu gösterelim. (i) nin (ii) yi gerektirdiğini gösterirken yakınsak bir dizinin Cauchy dizisi olduğunu ispat ederken kullanılan düşüncenin benzerini takip edeceğiz. Öncelikle x dizisinin istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Yani her $\varepsilon > 0$ için $st - \lim x_k = L$ olsun.

Bu durumda $h.h.k$ için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır ve $|x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir N seçilirse $h.h.k$ için

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| = |x_k + L - L - x_N| &\leq |x_k - L| + |x_N - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla x istatistiksel Cauchy dizisidir.

Şimdi (ii) nin doğru olduğunu kabul edelim. Yani x dizisi istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : \left|x_k - x_{k_0}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir k_0 sayısı bulunabilir.

Bu durumda $h.h.k$ için

$$\left|x_k - x_{k_0}\right| < \varepsilon$$

sağlanır.

Özel olarak $\varepsilon = 1$ alındığında $h.h.k$ için x_k yı içeren kapalı aralık;

$$I = [x_N - 1, x_N + 1]$$

olacak şekilde bir N sayısı bulabiliriz.

Özel olarak $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alındığında da $h.h.k$ için x_k yı içeren kapalı aralık;

$$I' = \left[x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2}\right]$$

olacak şekilde bir M sayısıda bulabiliriz.

Buradan $h.h.k$ için x_k yı içeren kapalı aralık

$$I_1 = I \cap I'$$

diyebiliriz.

Şimdi bu aralığın dışındaki x dizisinin terimlerine bakalım.

$$\{k \leq n: x_k \notin I \cap I'\} = \{k \leq n: x_k \notin I\} \cup \{k \leq n: x_k \notin I'\}$$

olması nedeniyle,

$$|\{k \leq n: x_k \notin I \cap I'\}| \leq |\{k \leq n: x_k \notin I\}| + |\{k \leq n: x_k \notin I'\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik n ile bölünür ve $n \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \notin I \cap I'\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \notin I\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \notin I'\}| = 0$$

bulunur. Bulduğumuz I_1 kapalı aralığı $h.h.k$ için x_k yı içeren I ve I' kapalı aralıklarından daha dar bir aralıktır.

Aynı düşünce ile özel olarak $\varepsilon = \frac{1}{4}$ alındığında $h.h.k$ için x_k yı içeren kapalı aralık;

$$I'' = \left[x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4}\right]$$

olacak şekilde bir $N(2)$ sayısı bulabiliriz. Bu durumda,

$$I_2 = I_1 \cap I''$$

aralığı diğer bulduğumuz aralıklara göre daha dar bir aralık olur. I_2 aralığının uzunluğu en fazla $\frac{1}{2}$ dir. Her m uzunluğu için kapalı aralıklar ile $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturalım. I_m aralığının uzunluğu 2^{1-m} den daha büyük olamaz. Hemen her k için $I_m \supseteq I_{m+1}$ ve $x_k \in I_m$ dir. İç içe aralıklar teoremi gereğince, kapalı aralıkların kesişimi;

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = \{\lambda\}$$

olsun. Burada λ bir reel sayı.

Eğer $n > T_m$ ise

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \qquad (3.1)$$

koşulunu sağlayan bir T_m dizisi oluşturalım. Hemen her k için $x_k \in I_m$ seçimi ile oluşturacağımız $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi pozitif tam sayıların artan bir dizisidir.

Şimdi x_k dizisinin tüm terimleri $k > T_1$ ve eğer $T_m < k \leq T_{m+1}$ ise $x_k \notin I_m$ olacak şekilde x dizisinin bir z alt dizisini tanımlayalım.

Sonrada x in bir y alt dizisini,

$$y_k = \begin{cases} \lambda \quad , & x_k \ z \text{ de bir terim} \\ x_k \quad , & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Eğer $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise x_k, z dizisinde bir terimdir. Bunun anlamı $y_k = \boldsymbol{\lambda}$ dır. Aksi durumda $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \boldsymbol{\lambda}| \leq 2^{1-m}$ dir. Buradan,

$$\lim y_k = \lambda$$

olduğu aşikârdır.

Şimdi $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olduğunu gösterelim.

Eğer $T_m < n < T_{m+1}$ ise

$$\{k \leq n: y_k \neq x_k\} \subseteq \{k \leq n: x_k \notin I_m\}$$

Eş.3.1 den,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n: y_k \neq x_k\}| \leq \frac{1}{n}|\{k \leq n: x_k \notin I_m\}| < \frac{1}{m}$$

dolayısıyla limit $n \to \infty$ iken 0 olur ve $h.h.k$ için $x_k = y_k$ dır. Böylece $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisinin var olduğunu göstermiş olduk. (ii) ve (iii) denktir.

Son olarak (iii) nin doğru olduğunu kabul edelim. Hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi mevcut olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için

$$\lim y_k = L$$

olsun. $\varepsilon > 0$ ve her n için,

$$\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subseteq \{k \leq n: y_k \neq x_k\} \cup \{k \leq n: |y_k - L| > \varepsilon\}$$

olur. Buradan;

$$|\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: y_k \neq x_k\}| + |\{k \leq n: |y_k - L| > \varepsilon\}| \qquad (3.2)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

$$\{k \leq n : |y_k - L| > \varepsilon\}$$

kümesi $\lim y_k = L$ olduğundan sabit bir tamsayı içerir. Bu sayıya $I = I(\varepsilon)$ dersek, Eş. 3.2 n ile bölünür ve $n \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \leq n : y_k \neq x_k\}| + \lim_{n\to\infty} \frac{I}{n}$$
$$= 0$$

olur. Çünkü $h.h.k$ için $x_k = y_k$ idi. Dolayısıyla, $h.h.k$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edilmiş olur. x dizisi istatistiksel yakınsaktır. Yani (iii) ve (i) denktir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1 den şu sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1 Eğer x dizisi $st - \lim x_k = L$ ise x in bir alt dizisi y, L noktasına yakınsaktır [2].

4. TOPLANABİLME ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde matrislerde toplanabilme metodunu tanımlayıp bu metodun istatistiksel yakınsaklık metodunu içermediğini göstereceğiz. Tauberian Koşul ve Tauberian Teorem tanımlandıktan sonra istatistiksel yakınsaklık için Tauberian teoremlerindeki durumu inceleyeceğiz.

4.1 Toplanabilme Metodu

Ünlü Alman Matematikçisi O. Toeplitz (1881-1940) toplanabilme metotlarının aslında özel birer matris dönüşümü olduğunu göstermiştir. Şöyle ki; her $n, k = 1,2, \dots$ için a_{nk} bir reel sayı olmak üzere $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ de bir reel sayı dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ matrisini,

$$A = (a_{nk}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$x = (x_k)$ dizisini de;

$$x = (x_k) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda,

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

çarpımını formal olarak yapacak olursak,

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \cdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + \cdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

elde edilir. Kolayca görülebileceği gibi Ax matrisinin her bir terimi;

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Şüphesiz ki bu çarpma işleminin anlamlı olabilmesi için her bir n doğal sayısı için Eş. 4.1 deki serinin yakınsak olduğunu kabul etmeliyiz.

Bu şekilde elde edilen $(Ax)_n \equiv (A_n(x))$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi ya da A-dönüşümü denir [4], [7].

Özel olarak $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisini şöyle seçelim;

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \quad , & k \leq n \\ \\ 0 \quad , & k > n \end{cases}$$

Bu durumda herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin A-dönüşümü $n, k = 1,2, \ldots$ için

$$\big(A_n(x)\big) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

olur. Son eşitlikten görüldüğü üzere bu şekilde seçilen A matrisi $x = (x_k)$ dizisine uygulanınca, dizinin aritmetik ortalamasına dönüşmektedir.

Bu dönüşüme Cesáro Ortalaması denir. $(C, 1)$ veya C_1 şeklinde gösterilir.

Schoenberg istatistiksel yakınsak ve sınırlı bütün dizilerin Cesáro metoduyla toplanabilir olduğunu göstermiştir [6].

Bu durum sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin hangi durumda C_1 yöntemini içerip içermediği sorusunu gündeme getirmektedir. Bir sonraki teoremde bu sorunun cevabını göreceğiz. Fakat öncelikle konuyla ilgili bir lemma vereceğiz.

Lemma 4.1 Sonsuz çokluktaki k indisi için, $t_k \neq 0$ olacak şekilde bir $t = t_k$ dizisi var ise $h.h.k$ için $x_k = 0$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k\, x_k = \infty$$

olacak şekilde bir $x = (x_k)$ dizisi vardır [2].

İspat: Her k için, $m(k) > k^2$ ve $t_{m(k)} \neq 0$ olmak üzere $\{m(k)\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi pozitif tamsayıların artan bir dizisi olsun. Şimdi bir $x = (x_k)$ dizisini;

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{t_{m(k)}} & , \quad k = m(k) \\ 0 & , \quad k \neq m(k) \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$x = (x_k) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots)$$

$k = 1 \quad \Rightarrow \quad m(1) > 1$

$k = 2 \quad \Rightarrow \quad m(2) > 4$

$k = 3 \quad \Rightarrow \quad m(3) > 9$

$\vdots$

$k = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad m(\sqrt{n}) > n$

$\vdots$

$x = (x_k)$ dizisinin 0 dan farklı terimleri,

$$\left(x_{m(1)}, x_{m(2)}, x_{m(3)}, \dots, x_{m(\sqrt{n})}, \dots\right)$$

olur. Buradan,

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olur. Yani $x = (x_k)$ dizisinin sıfırdan farklı terimlerinin yoğunluğu 0 dır. Hemen her k için $x_k = 0$ yani $st - \lim\ x_k = 0$ dır.

Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_{m(k)} \frac{1}{t_{m(k)}} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 4.1 (Limitleme ve Toplama Metodu)

X, Y reel terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x = (x_n) \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(A_n(x)\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x_k\right)$$

x dizisinin $A = (a_{nk})$ matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi mevcut ve $\left(A_n(x)\right) \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X uzayından Y uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlar veya $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y ye bir limitleme metodudur denir. Ayrıca, $x = (x_n)$ bir $\sum a_n$ sersinin kısmi toplam dizisi ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y ye bir Toplama Metodudur denir.

Tanım 4.2 Bir Q metodunun P metodunu içermesi demek;

$$P \subset Q \;\Leftrightarrow\; [(x_n) \to x\ (P) \;\;\Rightarrow\;\; (x_n) \to x\ (Q)]$$

olmasıdır.

Tanım 4.3 Her bir satırında sıfırdan farklı sonlu adette terim bulunan matrise satır-sonlu matris denir.

Teorem 4.1 Hiçbir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez [2].

İspat: Öncelikle A matrisinin belli bir satırdan sonraki bütün satırlarının sıfırdan meydana geldiğini kabul edelim. Örneğin öyle bir $m \in \mathbb{N}$ olsun ki her $n > m$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $a_{nk} = 0$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

Böyle bir matris bütün dizileri sıfıra yakınsayan dizilere dönüştürür.

Gerçekten;

$$((Ax)_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} x_k \, , \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x_k \, , \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k} x_k \, , \dots , \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} x_k \, , 0,0,0, \dots \right)$$

olup $x = (1,1,1,1, \dots)$ dizisi 1 e istatistiksel yakınsak olmasına rağmen

$$A - \lim x_n = 0$$

olduğundan bu metot istatistiksel yakınsaklığı içermez.

Benzer şekilde belli bir sütundan sonraki bütün sütunları sıfır olan matris metodu da istatistiksel yakınsaklığı içermez.

Bunun için,

$$a_{nk} = 0 \qquad \forall k > p \;\; , \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

alalım.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3p} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Bu matris yardımıyla x dizisi;

$$((Ax)_n) = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{1k} x_k \, , \sum_{k=1}^{p} a_{2k} x_k \, , \sum_{k=1}^{p} a_{3k} x_k \, , \dots , \sum_{k=1}^{p} a_{nk} x_k \, , \dots \right)$$

dizisine dönüşür.

Buradan

$$x = (\underbrace{0,0,0,\dots,0}_{\text{p terim } 0},1,1,1,1,\dots)$$

dizisi için

$$((Ax)_n) = (0,0,0,0,\dots)$$

olur. x dizisi 1 e istatistiksel yakınsak olmasına rağmen

$$A - \lim x_n = 0$$

olur.

Demek ki böyle bir matriste istatistiksel yakınsaklığı içermez.

Bir matris istatistiksel yakınsaklık metodunu içeriyorsa Lemma 4.1 de görüldüğü gibi satır-sonlu olmalıdır.

Keyfi bir A matrisi satır-sonlu bir matris ve $a_{n(1)k'(1)} \neq 0$ olsun.

$k > k(1)$ için;

$$a_{n(1)k(1)} \neq 0 \quad \text{ve} \quad a_{n(1)k} = 0$$

olacak şekilde; $k(1) \geq k'(1)$ seçelim.

Şimdi satır ve sütunun artan dizilerini seçelim. Öyle ki her m için,

$$\begin{array}{lll} k(m) \geq m^2 & \text{olduğunda} & a_{n(m)k(m)} \neq 0 \\ k \geq k(m) & \text{olduğunda} & a_{n(m)k} = 0 \end{array}$$

olsun.

Bir $x = (x_k)$ dizisini;

$$x_{k(1)} = \frac{1}{a_{n(1)k(1)}}, \dots, x_{k(m)} = \frac{1}{a_{n(m)k(m)}}\left[m - \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m)k(i)}x_{k(i)}\right], \dots$$

ve diğer durumda $x_k = 0$ olacak şekilde tanımlayalım.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(Ax)_{n(m)} &= \sum_{i=1}^{\infty} a_{n(m)i}x_i \\
&= \sum_{i=1}^{k(m)} a_{n(m)i}x_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} a_{n(m)k(i)}x_{k(i)} \\
&= a_{n(m)k(m)}x_{k(m)} + \sum_{i=1}^{m-1} a_{n(m)k(i)}x_{k(i)} \\
&= m
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sınırsız bir dizi yakınsak olmadığından x, A toplanabilir değildir.

Şimdi x dizisinin istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim:

$k(m) > m^2$ olduğundan,

$$|\{k \le n: x_k \ne 0\}| \le \sqrt{n}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik n ile bölünür ve $n \to \infty$ iken limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n: x_k \ne 0\}| \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

olur. O halde $h.h.k$ için $x_k = 0$ yani $st - \lim x_k = 0$ dır.

Bu durumda satır sonlu A matrisi istatistiksel yakınsaklığı içermez. Bu da ispatı tamamlar.

4.2 Tauberian Koşul ve Tauberian Teorem

Tanım 4.2.1 O ve o tanımları;

(a_n), (b_n) reel terimli diziler olmak üzere,

i.

$$a_n = O(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \sup_n \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \infty$$

ii.

$$a_n = o(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

Tanım 4.2.2 Bir (s_n) dizisi verilsin, $f(x) = \sum s_k x^k$ $(|x| < 1)$ yakınsak ve

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) f(x) = l$$

ise (s_n), l ye Abel Limitlenebilir denir ve $s_n \to l(A)$ şeklinde gösterilir.

(s_n) dizisi $\sum a_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ise $\sum a_k$, l ye Abel Toplanabilir denir ve $\sum a_k = l(A)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca

$$a_n \to l \; (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad a_n \to l \; (A)$$

olur fakat bu koşulun tersi her zaman doğru değildir. Bunu görmek için;

$$a = (a_n) = (1 + (-1)^n)$$

dizisini incelememiz yeterli olacaktır. a dizisinin terimleri;

$$a = (2,0,2,0,2,0,..)$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu şekildeki bir dizinin limiti yoktur. Fakat

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}[1+(-1)^n]x^n$$
$$= \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$
$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)}{(1-x)} + \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)}{(1+x)} = 1$$

olur.

Abel 1826 da $\sum a_n = s$ ise $\sum a_n = s$(A) dır, yani her yakınsak seri aynı değere Abel toplanabilirdir şeklinde bir teorem ispatlamıştır. Bu teoremin tersinin her zaman doğru olmadığını;

$$a = (a_n) = (1 + (-1)^n)$$

dizisi örneğinden görmüştük. A. Tauber 1897 de ilk Tauberian teoremi olarak bilinen, $\sum a_n$ reel serisi Abel toplanabilir ve $a_n = o(n^1)$ ise $\sum a_n$ yakınsaktır teoremini ispatlamıştır. İkinci Teoberian teoremi de $\sum a_n = s$ Abel toplanabilir ve $na_n = o(C,1)$ ise $\sum a_n = s$ şeklindedir. Burada bir serinin yakınsak olup olmadığını test eden bu teoremler toplanabilmeye bazı koşullar eklenerek bulunmuştur.

A belirli bir toplama metodu olsun, A toplama metodu ile birlikte dizi üzerine eklenen koşulla seri yakınsak oluyorsa dizi üzerine eklenen koşula Tauberian koşul böyle teoremlere de Tauberian teorem denir.

David Borwein bir $x = (x_k)$ dizisi için; $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ olmak üzere istatistiksel yakınsaklık metodunda Tauberian koşulunun $\Delta x_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ şeklinde olmasını önermiştir [2]. Bu varsayımın bir sonraki teoremde doğru olduğunu görmekteyiz.

Teorem 4.2.1 Bir $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x_k = L$ ve $\Delta x_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ ise $\lim x_k = L$ olur [2].

İspat: $x = (x_k)$ dizisinin $st - \lim x_k = L$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 3.2.1 den $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisinin var olduğunu söyleyebiliriz.

Her bir k sayısı için;

$$k = m(k) + p(k)$$

olsun. Burada $m(k)$ değeri;

$$m(k) = maks\{i \leq k : x_i = y_i\}$$

eğer $\{i \leq k : x_i = y_i\}$ kümesi boş küme ise $m(k) = -1$ olsun.

İddia edilen koşulun doğru olduğunu görmek için;

$$\lim_k \frac{p(k)}{m(k)} = 0 \tag{4.2}$$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Eğer $\frac{p(k)}{m(k)} > \varepsilon > 0$ ise;

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}|\{i \leq k : x_i \neq y_i\}| &\geq \frac{1}{m(k) + p(k)} p(k) \\ &\geq \frac{p(k)}{\frac{p(k)}{\varepsilon} + p(k)} \\ &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

olur. Böylece sonsuz sayıda k için $\frac{p(k)}{m(k)} \geq \varepsilon$ olurdu bu ise $h.h.k$ için $x_k = y_k$ olması durumuna aykırı bir durumdur.

Bu durumda $\frac{p(k)}{m(k)} < \varepsilon$ olur. Buradan Eş. 4.2 in sağlandığını görmüş oluruz.

Şimdi $y_{m(k)}$ ile x_k arasındaki farkı düşünelim. Her k için;

$$|\Delta x_k| \leq \frac{B}{k}$$

olacak şekilde bir B sabiti olsun. Bu nedenle;

$$\begin{aligned} \left|y_{m(k)-}x_k\right| &= \left|x_{m(k)} - x_{m(k)+p(k)}\right| \\ &\leq \sum_{i=m(k)}^{m(k)+p(k)-1} |\Delta x_i| \\ &\leq p(k)\frac{B}{m(k)} \end{aligned}$$

olur. Eş. 4.2 yardımıyla $k \to \infty$ iken limit alındığında eşitsizliğin sağ tarafı 0 olmaktadır. Buradan $\lim y_k = L$ olduğundan $\lim x_k = L$ olduğu sonucunu elde etmiş oluruz. Bu ise ispatı tamamlar.

Benzer şekilde istatistiksel yakınsaklık metodu için tauberian koşulları eklenerek Tauberian teoremleri yazılabilir. Bu teoremlerin bazıları aşağıda ispatsız şekilde gösterilmiştir.

Teorem 4.2.2 Eğer $\{r_k\}$ pozitif sayıların azalan bir dizisi ve $\{kr_k\}$ sınırsız yani $r_k \neq O\left(\frac{1}{k}\right)$ olmak üzere; bir $x = (x_k)$ dizisi $st - \lim x_k = 0$ ve $\Delta x_k = O(r_k)$ iken $x = (x_k)$ dizisi yakınsak bir dizi değildir [2].

Teorem 4.2.3 $\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $\lim\inf_i \frac{k(i+1)}{k(i)} > 1$ olmak üzere bir $x = (x_k)$ dizisi;

$$k \neq k(i) \qquad\qquad i = 1,2,3, \dots$$

iken eğer $\Delta x_k = 0$ ve $st - \lim x_k = 0$ ise $\lim x_k = L$ olur [2].

KAYNAKLAR

[1] Fast, H., 1951, “Sur la convergence statistique”, *Colloq. Math.*, 2: 241-244.

[2] Fridy, J. A. 1985, “On statistical convergence”, *Analysis*, 5: 301- 313 (1985).

[3] Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1980, “An Introduction to the Theory of Numbers”, Forth Ed., *New York*, John Wiley & Sons.

[4] Maddox, I. J., 1970, “Elements of Functional Analysis”, *Cambridge University Pres*.

[5] Salat, T. 1980, 1981, “On statistically convergent sequences of real numbers”, *Math. Slovaca 30*, 2: 139-150, *Math. Rev.*, 40002.

[6] Schonberg, I. J., 1959, “The integrability of certain functions and related summability methods”, *Amer. Math. Monthly*, 66: 361-375.

[7] Wilansky, 1984, “A. Summability through Functional Analysis”, *North. Holland*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: SERTKAYA, Aslıhan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 25.04.1987 Bursa
Medeni hali	: Bekar
e-mail	: aslihansertkaya@hotmail.com

Eğitim Bilgileri

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Uşak Üniversitesi /Matematik Bölümü	2012
Lisans	Uşak Üniversitesi /Matematik Bölümü	2010
Lise	Bursa Atatürk Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce