T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMANA BAĞLI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMEL BATTAL

TEMMUZ 2012
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ZAMANA BAĞLI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMEL BATTAL

UŞAK 2012

Emel BATTAL tarafından hazırlanan " Zamana Bağlı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması ve Nümerik Çözümleri" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ …………………………….

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ……………………………

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU …………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ …………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih : 16/07/2012

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ………………………….....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emel BATTAL

ZAMANA BAĞLI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Emel BATTAL

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2012

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde diferansiyel denklemlerle ilgili genel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde; Adomian Ayrışım Yöntemi, Varyasyonel İterasyon Yöntemi ve Modifiye Ayrışım Yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca Adomian Ayrışım Yöntemi ve Modifiye Ayrışım Yöntemi uygulamalarında kullanılacak Adomian polinomlarının hesaplamaları verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Isı Denklemi, Adveksiyon Problemi, Klein- Gordon Denklemi, Lane-Emden denklemi ve Dalga Denklemi ile ilgili genel ifadeler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; üçüncü bölümde ifade edilen denklemler çözülmüş ve her iki metod için karşılaştırmalı tabloları yapılmıştır.

Beşinci bölümde ise; elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Bilim Kodu : 403.06.01.
Anahtar Kelimeler : Adomian Polinomları, Adomian Ayrışım Yöntemi, Modifiye Ayrışım Yöntemi, Varyasyonel İterasyon Yöntemi.
Sayfa Adedi : 60
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ

CLASSIFICATION AND NUMERICAL SOLUTIONS OF TIME DEPENDENT PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M.Sc. Thesis)

Emel BATTAL

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2012

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter are given general definitions with respect to differential equations.

In the second chapter information are given about Adomian Decomposition Method, Variational Iteration Method and Modified Decomposition Method. Furthermore the calculation of Adomian polynomials is given which are used for applying Adomian Decomposition Method and Modified Decomposition Method.

In the third chapter general expressions are given of Heat Equation, Advection Equation, Klein-Gordon Equation, Lane- Emden Equation and Wave Equation.

In the fourth chapter the equations given in the third chapter are solved and tables fort the comparisons of both to methods are given.

In the fifth chapter the results obtanied are discussed.

Science Code : 403.06.01.

Key Words : Adomian Polynomials, Adomian Decomposition Method, Modified Decomposition Method, Variational Iteration Method.

Page Number : 60

Advisor : Asst. Prof. Dr. Ali DENİZ

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde bilgi ve tecrübeleriyle daima yanımda olan ve benden desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ' e çok teşekkür ederim. Ayrıca lisans eğitimimi en iyi bir şekilde tamamlamamı sağlayan Muğla Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Mehmet Sezer' e ve tüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Lisansüstü eğitimi yapmam için beni destekleyen, yüreklendiren ve her zaman yanımda olan canım dostum Ayşe KURT' a, üniversite hayatım boyunca ve sonrasında benden manevi desteğini esirgemeyen ikinci ailem İbrahim KURT ve Hayriye KURT' a, aynı şekilde benden sevgilerini ve desteklerini eksik etmeyen çok sevdiğim Sedat İŞÇİ ve ailesine, lise eğitim dönemimden itibaren yanımda olan ve hiçbir konuda beni yalnız bırakmayan canım dostum Demet AKDAĞ' a, ayrıca çalışmalarımın her aşamasında bana sonsuz güven duyan, tüm hayatım boyunca destek olan, ilgilerini ve sevgilerini esirgemeyen canım anneme, babama ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbf{A_n}$	Adomian Polinomları
$\boldsymbol{\lambda}$	Lagrange Çarpanı

Kısaltmalar	**Açıklama**
ADM	Adomian Ayrışım Yöntemi
VIM	Varyasyonel İterasyon Yöntemi

1.GİRİŞ

1.1. Temel Kavramlar

Kısmi türevli denklemlerin çoğu fiziksel olayların analizinden ortaya çıkmıştır. Örneğin belli bir ortamda kararlı ısı denilen zamandan bağımsız ısı yayılması, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar kısmi türevli denklemler yardımıyla kolayca incelenebilmektedir. Fiziksel bir olayı matematiksel ifadelerle analiz ederek bir kısmi türevli denklem elde etmek mümkün olabilir. Kısmi türevli denklemin elde ediliş yolarından birisi budur [1].

Fen ve mühendislikteki pek çok dalda karşılaşılan problemlerin diferansiyel denklemlerle ilgisi vardır; roket ve uyduların hareketi, bir elektrik devresindeki akım veya elektrik yükü, iletken bir çubuktaki ısı akımı, bir tel veya zarın titreşimi, radyoaktif bir maddenin parçalanması, kimyasal reaksiyonların belirlenmesi, belirli bir geometrik özellikteki eğrilerin bulunması gibi. Bir başka deyişle, bu tür problemlerin matematik modeli, karşımıza diferansiyel denklemler olarak çıkar. Genel olarak, belirtilen herhangi bir zamandaki bağıntılarda tanımlanabilir [2].

Tanım 1. Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre türevlerini veya diferansiyellerini içeren bir bağıntıya diferansiyel denklem denir. Örneğin;

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

$$y' = \cos(x)$$

$$\cos(x)dx - dy = 0$$

Tanım 2. Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir tek bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin (veya değişkenlerin) bir tek bağımsız değişkene göre türevlerini (ki bunlar adi türevlerdir) veya diferansiyellerini içeren bir diferansiyel denkleme adi (türevli) diferansiyel denklem denir. Örneğin;

$$x\frac{d^3x}{dt^3} - x^2\frac{dx}{dt} + x = \sin(t)$$

Tanım 3. Bir veya daha çok bağımlı değişkenin birden çok bağımsız değişkene göre kısmi türevleri ile beraber bağımlı ve bağımsız değişkenleri içeren diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

Genel olarak u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenli bir kısmi diferansiyel denklem;

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, \ldots)=0$$

şeklinde bir fonksiyon olarak tanımlanır.

Örneğin;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

denklemleri kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Tanım 4. y bağımlı değişken ve x bağımsız değişken olmak üzere n. mertebeden bir lineer adi diferansiyel denklem,

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=b(x)$$

biçiminde ifade edilebilen bir denklemdir. Diğer bir deyişle, bir diferansiyel denklemde her bağımlı değişken ve her mertebeden türevler 1. dereceden ise ve aynı zamanda bağımlı değişkenler veya türevler çarpım halinde yer almıyorsa, böyle denklemlere lineer (doğrusal); aksi halde lineer olmayan diferansiyel denklemler denir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}=x+y$$

denklemleri lineer kısmi diferansiyel denklemlerdir.

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+y=0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - xy = x$$

denklemleri lineer olmayan denklemlerdir [2].

Birçok fiziksel sistemin matematiksel modellemesinde, fizik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında, adi veya kısmi diferansiyel denklemler yol gösterir. Matematiksel modelin analizi için etkili bir yöntem gereklidir. Çeşitli güçlü matematiksel yöntemler, tam ve yaklaşık analitik çözümlerin elde edilmesi için Tanh Yöntemi, Pseudosoectral Yöntemi, İnverse Scattering Yöntemi (Ters Saçılma Yöntemi), Bakland Dönüşümü, Jacobi Eliptik Fonksiyon Yöntemi, Adomian Ayrışım Yöntemi, Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ve Varyasyonel İterasyon Yöntemi gibi metodlar önerir [11].

2. YÖNTEMLER

2.1. Adomian Ayrışım Yöntemi

Adomian Ayrışım Yöntemi, Adomian tarafından geliştirilmiş ve literatürde yoğun olarak kullanılmıştır [8]. Metod seri biçiminde bir çözüm elde edebilmek için yapılan çalışmalara dayanır. Mühendislik, fizik, biyoloji gibi birçok farklı alanda yapılan bilimsel çalışmalarda kullanılan bir yöntemdir [16].

1980' li yılların başından bu yana Adomian; cebirsel, diferansiyel, integro-diferansiyel, gecikmeli diferansiyel ve kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için ayrışım yöntemini tasarlamış ve geliştirmiştir [8].

Adomian ayrışım metodu kullanılarak, geleneksel yöntemlere göre yaklaşık çözümleri oluşturan serilerin elemanlarının hesaplanmasında daha hassas ve daha hızlı olduğu gözlemlenmiştir. Ayrışım metodu yalnızca başlangıç şartının kullanmasıyla çözümün elde edilmesini sağlar [16]. Adomian Ayrışım Yöntemi, biyolojik ve kimyasal reaksiyonlarda, fizikte, lineer veya lineer olmayan deterministik ve skolastik problemlerin geniş bir sınıfında uygulanmıştır [10- 19]. Lineer olmayan modeller için bu yöntem çok hızlı yakınsar ve analitik yaklaşımı sağlayarak güvenilir sonuçlar verir [9].

Ayrışım yönteminin bir seri metodu olduğu ve birçok cebirsel, lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı bilinmektedir. Genel olarak bu metodu verecek olursak; F, hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$F(u(x))=g(x) \qquad (2.1)$$

denklemi ele alınsın. (2.1) denkleminde L; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini, R; lineer operatörün kalan kısmını ve N; lineer olmayan terimi göstermek üzere,

$$Lu+Ru+Nu=g \qquad (2.2)$$

şeklinde yazılsın. L lineer bir operatör ve tersi de mevcut olsun. (2.2) eşitliği,

$$Lu=g-Ru-Nu \tag{2.3}$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafına soldan L^{-1} operatörü uygulanırsa,

$$L^{-1}\,Lu=L^{-1}g-L^{-1}Ru-L^{-1}Nu \tag{2.4}$$

elde edilir.

L' nin ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğu kabul edilirse, (2.4) eşitliğinde gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$u=u(0)+tu'-L^{-1}Ru-L^{-1}Nu \tag{2.5}$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (2.5) eşitliğindeki Nu lineer olmayan terim $Nu=\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır ve bu polinomlar daha sonra incelenecektir. (2.5) eşitliğindeki u ayrıştırılmış bir seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 verilen başlangıç değeri ve denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali alınmak üzere,

$$u_0=a+bt-L^{-1}g$$

şeklinde bulunur. Daha sonra u_0 terimi kullanılarak u_1, u_2, u_3, … terimleri elde edilir. Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu;

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu seri çözüm fonksiyonu kullanılarak (2.5) eşitliği tekrar yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0-L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.7}$$

şeklinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (2.7) eşitliği açık şekilde,

$$u_1= -L^{-1}Ru_0-L^{-1}A_0$$

$$u_2= -L^{-1}Ru_1-L^{-1}A_1 \tag{2.8}$$

$\vdots$

$$u_{n+1}= -L^{-1}Ru_n-L^{-1}A_n \quad , \quad n\geq 0$$

formunda yazılabilir. Buradaki A_n polinomları lineer olmayan her bir terim için genelleştirilebilir. Bu genelleştirmede A_0 sadece u_0' a, A_1 sadece u_0 ve u_1' e, A_2 ise u_0, u_1, u_2' ye bağlı ve benzer şekilde (2.8) eşitliğindeki bütün A_n Adomian polinomları elde edilebilir. A_n Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise,

$$A_0=\emptyset(u_0)$$

$$A_1=u_1\left(\frac{d}{du_0}\right)\emptyset(u_0)$$

$$A_2=u_2\left(\frac{d}{du_0}\right)\emptyset(u_0)+\left(\frac{u_1^2}{2!}\right)\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)\emptyset(u_0)$$

$$A_3=u_3\left(\frac{d}{du_0}\right)\emptyset(u_0)+u_1u_2\left(\frac{d^2}{du_0^2}\right)\emptyset(u_0)+\left(\frac{u_1^3}{3!}\right)\left(\frac{d^3}{du_0^3}\right)\emptyset(u_0)$$

$\vdots$

şeklinde yazılabilir. Ayrıştırılmış polinomların genel durumu,

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\emptyset\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n u_n\right)\right]_{\lambda=0} \quad , \quad n\geq 0 \tag{2.9}$$

şeklindedir. Bazı problemlerin sayısal çözümlerinin daha hassas olmasının istenildiği durumlarda ayrışım serisi için çok sayıda terimin hesaplanması gerekebilir. Bu gibi durumlarda (2.9) genel formülünün kullanılması, (2.6) ayrıştırma serisinin çok sayıda teriminin hesaplanmasında kolaylık sağlamaktadır.

Ayrışım yöntemi kullanılarak u(x,t) kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için,

$$\emptyset_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n} u_k(x,t) \quad , \qquad n\geq 0 \tag{2.10}$$

olmak üzere,

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty} \emptyset_n(x,t) \tag{2.11}$$

ifadesinde (2.8) indirgeme bağıntısı incelenerek kolayca hesaplanabilir. Bununla birlikte (2.11) şeklindeki ayrışım seri çözümü, genellikle fiziksel problemlerde çok hızlı olarak yakınsayan sonuçlar vermektedir. Ayrışım serisinin yakınsaklığı literatürde birçok yazar tarafından araştırılmıştır [16-17].

2.1.1. Adomian Polinomlarının Hesaplanması

Wazwaz tarafından lineer olmayan terimlerin Adomian polinomlarını hesaplamak için son derece kullanışlı bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmanın kullanılmasıyla A_n Adomian polinomlarının hesaplanması aşağıdaki yöntemlerle verilir [16].

1. Lineer Olmayan Polinomlar

Durum.1. F(u)= u^2

İlk olarak ;

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{2.12}$$

$F(u)=u^2$ de (2.12) eşitliği yerine yazılırsa;

$$F(u)=(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\ldots)^2$$

bulunur.

İfade sağ tarafından genişletilirse,

$$F(u)= u_0^2+2u_0u_1+2u_0u_2+u_1^2+2u_0u_3+2u_1u_2+\ldots$$

elde edilir.

Bu açılımdaki u_n bileşenlerinin indisleri toplamı ile tüm terimler gruplandırılarak düzenlenebilir. Yani,

$$F(u)=\underbrace{u_0^2}_{A_0}+\underbrace{2u_0u_1}_{A_1}+\underbrace{2u_0u_2+u_1^2}_{A_2}+\underbrace{2u_0u_3+2u_1u_2}_{A_3}+\underbrace{2u_0u_4+2u_1u_3+u_2^2}_{A_4}$$

$$+\underbrace{2u_0u_5+2u_1u_4+2u_2u_3}_{A_5}+\ldots$$

şeklinde yazılabilir.

$F(u)=u^2$ için Adomian Polinomları;

$$A_0=u_0^2$$

$$A_1=2u_0u_1$$

$$A_2=2u_0u_2+u_1^2$$

$$A_3=2u_0u_3+2u_1u_2 \qquad (2.13)$$

$$A_4=2u_0u_4+2u_1u_3+u_2^2$$

$$A_5=2u_0u_5+2u_1u_4+2u_2u_3$$

$\vdots$

elde edilir.

Durum.2. $F(u)=u^3$

Daha önce olduğu gibi,

$$F(u)=(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\ldots)^3$$

ifadesi sağ tarafından genişletilirse;

$$F(u)=u_0^3+3u_0^2u_1+3u_0^2u_2+3u_0u_1^2+3u_0^2u_3+6u_0u_1u_2+u_1^3+3u_0^2u_4+3u_1^2u_2+3u_2^2u_0+6u_0u_1u_3+\ldots$$

elde edilir.

u_n bileşenlerinin indisler toplamı ile tüm terimler gruplandırılarak şu şekilde yazılabilir.

$$F(u)=\underbrace{u_0^3}_{A_0}+\underbrace{3u_0^2u_1}_{A_1}+\underbrace{3u_0^2u_2+3u_0u_1^2}_{A_2}+\underbrace{3u_0^2u_3+6u_0u_1u_2+u_1^3}_{A_3}+\underbrace{3u_0^2u_4+3u_1^2u_2+3u_2^2u_0+6u_0u_1u_3}_{A_4}+\ldots$$

$F(u)=u^3$ için Adomian Polinomları;

$$
\begin{aligned}
A_0 &= u_0^3 \\
A_1 &= 3u_0^2u_1 \\
A_2 &= 3u_0^2u_2+3u_0u_1^2 \qquad (2.14)\\
A_3 &= 3u_0^2u_3+6u_0u_1u_2+u_1^3 \\
A_4 &= 3u_0^2u_4+3u_1^2u_2+3u_2^2u_0+6u_0u_1u_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

elde edilir.

2. Lineer Olmayan Türevler

Durum.1. $F(u)=uu_x$

Bu form, lineer olmayan Burger's denkleminde ve adveksiyon probleminde yer alır.

İlk olarak;

$$u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$(2.15)$$

$$u_x=\sum_{n=0}^{\infty} u_{n_x}$$

$F(u)=uu_x$' de (2.15) yerine yazılırsa;

$$F(u)=(u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+\ldots)(u_{0_x}+u_{1_x}+u_{2_x}+u_{3_x}+u_{4_x}+u_{5_x}+\ldots)$$

elde edilir.

$$F(u)=u_0u_{0_x}+u_{0_x}u_1+u_0u_{1_x}+u_{0_x}u_2+u_{1_x}u_1+u_{2_x}u_0+u_{0_x}u_3+u_{1_x}u_2+u_{2_x}u_1+u_{3_x}u_0+u_{0_x}u_4+$$

$$u_0u_{4_x}+u_{1_x}u_3+u_1u_{3_x}+u_2u_{2_x}+\ldots$$

Benzer şekilde u_n bileşenlerinin indisleri toplamı ile tüm terimler gruplandırılarak, F(u) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$F(u)=\underbrace{u_0u_{0_x}}_{A_0}+\underbrace{u_{0_x}u_1+u_0u_{1_x}}_{A_1}+\underbrace{u_{0_x}u_2+u_{1_x}u_1+u_{2_x}u_0}_{A_2}+\underbrace{u_{0_x}u_3+u_{1_x}u_2+u_{2_x}u_1+u_{3_x}u_0}_{A_3}$$

$$+\underbrace{u_{0_x}u_4+u_0u_{4_x}+u_{1_x}u_3+u_1u_{3_x}+u_2u_{2_x}}_{A_4}+\ldots$$

Sonuç olarak Adomian polinomları;

$$A_0= u_0u_{0_x}$$

$$A_1= u_{0_x}u_1+u_0u_{1_x}$$

$$A_2= u_{0_x}u_2+u_{1_x}u_1+u_{2_x}u_0$$

$$A_3= u_{0_x}u_3+u_{1_x}u_2+u_{2_x}u_1+u_{3_x}u_0 \qquad (2.16)$$

$$A_4= u_{0_x}u_4+u_0u_{4_x}+u_{1_x}u_3+u_1u_{3_x}+u_2u_{2_x}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

Durum.2. F(u)= u^2u_x

Gelişim modellerinde ortaya çıkan bu lineer olmama durumu oldukça önemlidir.

İlk olarak;

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$$

$$(2.17)$$

$$u_x=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n_x}$$

$F(u)= u^2u_x$' de (2.17) denklemi yerine yazılırsa;

$F(u)= (u_0+u_1+u_2+u_3+\dots)^2(u_{0_x}+u_{1_x}+u_{2_x}+u_{3_x}+\dots)$

elde edilir.

Daha önceki işlemler yapılarak F(u) aşağıdaki gibi bulunur.

$$F(u)=\underbrace{u_0^2u_{0_x}}_{A_0}+\underbrace{\left(2u_0u_1u_{0_x}+u_0^2u_{1_x}\right)}_{A_1}+\underbrace{\left(2u_0u_2u_{0_x}+u_1^2u_{0_x}+2u_0u_1u_{1_x}+u_0^2u_{2_x}\right)}_{A_2}$$

$$+\underbrace{\left(2u_0u_3u_0'+2u_1u_2u_0'+u_1^2u_1'+2u_0u_2u_1'+2u_0u_1u_2'+u_0^2u_3'\right)}_{A_3}+\dots$$

Sonuç olarak Adomian Polinomları;

$$A_0= u_0^2u_{0_x}$$

$$A_1= 2u_0u_1u_{0_x}+u_0^2u_{1_x} \tag{2.18}$$

$$A_2= 2u_0u_2u_{0_x}+u_1^2u_{0_x}+2u_0u_1u_{1_x}+u_0^2u_{2_x}$$

$$A_3= 2u_0u_3u_0'+2u_1u_2u_0'+u_1^2u_1'+2u_0u_2u_1'+2u_0u_1u_2'+u_0^2u_3'$$

$\vdots$

elde edilir.

3. Trigonometrik Lineer Olmama Durumu

Durum 1. F(u)= sin(u)

İlk olarak,

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n \tag{2.19}$$

ifadesi F(u)= sin(u)' da yerine yazılırsa,

$$F(u)=\sin[u_0+(u_1+u_2+u_3+u_4+\dots)] \tag{2.20}$$

elde edilir.

$$F(u)= \sin(u_0)\cos(u_1+u_2+\dots)+\cos(u_0)\sin(u_1+u_2+\dots) \tag{2.21}$$

elde edilir.

$\cos(u_1+u_2+\ldots)$ ve $\sin(u_1+u_2+\ldots)$

ifadeleri için Taylor açılımı kullanılırsa,

$$F(u)=\sin(u_0)\left(1-\frac{1}{2!}(u_1+u_2+\ldots)^2+\frac{1}{4!}(u_1+u_2+\ldots)^4-\ldots\right)$$

$$+\cos(u_0)\left(\left(u_1+u_2+\ldots\right)-\frac{1}{3!}(u_1+u_2+\ldots)^3+\ldots\right) \tag{2.22}$$

bulunur. Böylece,

$$F(u)=\sin(u_0)\left(1-\frac{1}{2!}\left(u_1^2+2u_1u_2+\ldots\right)+\ldots\right)+\cos(u_0)\left((u_1+u_2+\ldots)-\frac{1}{3!}u_1^3+\ldots\right) \tag{2.23}$$

elde edilir.

Bu açılımın tüm terimleri, indisler toplamı aynı olacak şekilde gruplandırılarak yeniden düzenlenebilir.

$$F(u)=\sin(u_0)+u_1\cos(u_0)+u_2\cos(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2\sin(u_0)+u_3\cos(u_0)-u_1u_2\sin(u_0)$$

$$-\frac{1}{3!}u_1^3\cos(u_0)-u_4\cos(u_0)-\left(\left(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3\right)\sin(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2u_2\cos(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4\sin(u_0)\right)+\ldots$$

$F(u)=\sin(u)$ lineer olmayan operatörü için Adomian polinomları;

$$A_0=\sin(u_0)$$

$$A_1=u_1\cos(u_0)$$

$$A_2=u_2\cos(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2\sin(u_0)$$

$$A_3=u_3\cos(u_0)-u_1u_2\sin(u_0)-\frac{1}{3!}u_1^3\cos(u_0)$$

$$A_4=u_4\cos(u_0)-\left(\left(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3\right)\sin(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2u_2\cos(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4\sin(u_0)\right) \tag{2.25}$$

$\vdots$

elde edilir.

Trigonometrik fonksiyonlar için, Taylor açılımı ve trigonometrik özdeşlikler kullanılarak Adomian polinomları hesaplanmıştır.

Durum. 2. F(u)= cos(u)

Bir önceki durumda olduğu gibi işlemler yapılırsa,

$$F(u)=\cos(u_0)-u_1\sin(u_0)+\left(-u_2\sin(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2\cos(u_0)\right)+\left(-u_3\sin(u_0)-u_1u_2\cos(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3\sin(u_0)\right)$$

$$+\left(-u_4\sin(u_0)-\left(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3\right)\cos(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2u_2\sin(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4\cos(u_0)\right)+\ldots$$

bulunur.

Böylece F(u)= cos(u) için Adomian polinomları,

$$A_0=\cos(u_0)$$

$$A_1=-u_1\sin(u_0)$$

$$A_2=\left(-u_2\sin(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2\cos(u_0)\right) \tag{2.26}$$

$$A_3=\left(-u_3\sin(u_0)-u_1u_2\cos(u_0)+\frac{1}{3!}u_1^3\sin(u_0)\right)$$

$$A_4=\left(-u_4\sin(u_0)-\left(\frac{1}{2!}u_2^2+u_1u_3\right)\cos(u_0)-\frac{1}{2!}u_1^2u_2\sin(u_0)+\frac{1}{4!}u_1^4\cos(u_0)\right)$$

elde edilir [6].

2.2. Modifiye Ayrışım Yöntemi

Adomian Ayrışım Yönteminin güçlü bir modifikasyonu Wazwaz tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemde seri çözümleri, standart Adomian Yöntemine göre daha hızlı bir yakınsama gösterir. Modifiye Ayrışım Metodu, uygulamalı alanlarda araştırmacılar için önemlidir. Ayrıca, Modifiye Ayrışım Metodu lineer olmayan denklemler için Adomian polinomlarını kullanmaksızın ve sadece iki iterasyon kullanarak tam çözümü verebilir [7].

Modifiye formu varsayım üzerine kurulmuştur. f(x) fonksiyonu $f_0(x)$ ve $f_1(x)$ adıyla iki parçaya bölünebilir. Bu varsayımlar altında,

$$f(x)= f_0(x)+f_1(x) \tag{2.27}$$

şeklinde yazılır.

Buna göre, küçük bir değişiklik sadece u_0 ve u_1 bileşenleri üzerinde önerilmiştir. u_0 bileşeni, sadece f_0 parçasına atanır, kalan f_1 parçası ise u_1 için tanımlanmak üzere (2.8)' de verilen diğer terimlerle birleştirilir. Sonuç olarak, tekrarlı modifiye bağıntısı;

$$u_0= f_0(x)$$

$$u_1= f_1(x)-L^{-1}(Ru_0)-L^{-1}(A_0)$$

$$u_{k+2}= -L^{-1}(Ru_{k+1})-L^{-1}(A_{k+1}), \qquad k\geq 0$$

şeklinde yazılır.

u_0 bileşeni sadece f(x)' in $f_0(x)$ parçasıyla tanımlıdır. f(x)' in diğer $f_2(x)$ parçası ise (2.8)' de u_1 bileşeninin tanımında eklidir. u_0' a göre yapılan birkaç azaltmadaki küçük değişim, hesaplamalı çalışmaların boyutunu indirgemiştir. Ayrıca, lineer olmayan denklemlerde u_0 bileşeni üzerinde Adomian polinomlarının bağımlılığı nedeniyle, u_0 terimlerinin indirgenmesiyle hesaplamanın boyutu da indirgenir.

Buna ek olarak, u_0 ve u_1 bileşenlerinin tanımındaki bu küçük değişiklik sadece iki iterasyon kullanarak çözümü verebilir. Modifiye Ayrışım Yöntemi diğer araştırmacılar arasında da etkili bir şekilde kullanılmıştır [7].

2.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Varyasyonel İterasyon Yöntemi, ilk olarak 1998' de Ji-Huan He tarafından ortaya atılmıştır ve 1999 da sistematik olarak gösterilmiştir. Bu yöntem lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam ve yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır [11].

Yöntemin güvenilir olması, bu yöntemin daha geniş uygulanabilir olduğunu göstermiştir. Yöntemin, lineer ve lineer olmayan bilimsel uygulamaların geniş bir sınıfı için güvenilir ve etkili olduğu birçok yazar tarafından kanıtlanmıştır. Bu yöntem, eğer bir çözüm varsa tam çözümün ardışık yaklaşımlarına hızlı bir şekilde yakınsamasını verir. VIM, mevcut bazı tekniklere göre lineer olmayan terimler için özel bir dönüşüm gerektirmez [12].

VIM yöntemi birçok duruma başarıyla uygulanmıştır. Örneğin, He VIM' i kullanarak klasik Blasius denklemini çözmüştür. He lineer olmayan bazı problemlerin yaklaşık çözümünü vermek için VIM' i kullanmıştır. Momani, Helmholtz Denklemine VIM' i uygulamıştır. Bildik, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin farklı tiplerini çözmek için VIM' i kullanmıştır. Wazwaz, Kübik Boussineeq Denklemi, Burgers denklemi, K(2,2) Denklemi ve KdV Denkleminin belirli rasyonel çözümlerinde VIM' i kullanmıştır [14-18].

Adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin bu yöntemle çözülmesi; varyasyonel teorisinde tanımlanmış Lagrange çarpanı adındaki integral çarpanının kullanılmasıyla oluşturulmuş bir indirgeme formülünden elde edilir. Bu indirgeme formülünü içeren ilave fonksiyon genellikle analitik çözüme yakın olan diferansiyel denklemin çözümünü göz önünde bulundurur [16].

Varyasyonel iterasyon yöntemi ile ilgili temel kavramları göstermek için, aşağıdaki genel lineer olmayan sistem incelenir.

$$Lu+Nu=g(x,t) \tag{2.28}$$

Burada L lineer operatör ve N lineer olmayan operatördür. g(x,t) homojen olmayan terimdir.

(2.28) denklemi için bir düzeltme fonksiyonu yazılabilir:

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t \lambda\,\{Lu_n(\xi)+N\tilde{u}_n(\xi)-g(\xi)\}d\xi \quad , \qquad n\geq 0$$

u_j ($j\geq 0$) ardışık yaklaşımlar, λ genel Lagrange çarpanı belirlenerek kurulabilir ve varyasyonel teorisi ile en iyi şekilde tanımlanabilir. $\tilde{u}_n$ fonksiyonu sınırlı bir değişkendir yani $\delta\tilde{u}_n=0$' dır. Böylece ilk belirlenen λ Lagrange çarpanı kısmi integrasyon ile en uygun biçimde tanımlanır. $u(x,t)$ çözümlerinin $n\geq 0$ için $u_{n+1}(x,t)$ ardışık yaklaşımları, herhangi bir u_0 seçici fonksiyonu kullanarak ve elde edilen λ Lagrange çarpanı kullanılarak bulunur. u_0 yaklaşımı, belirli sınır koşullarından en az iki tanesini sağlayan, herhangi bir fonksiyon olarak seçilebilir. Belirlenen λ ile çok sayıda $u_j(x,t)(j\geq 0)$ yaklaşımları takip edilir. Sonuç olarak tam çözüm,

$$u=\lim_{n\to\infty} u_n$$

kullanılarak bulunabilir [12].

3. DENKLEMLER

3.1. Isı Denklemi

Isı denklemi, önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir.

$$u_t = u_{xx} + \epsilon u^m \tag{3.1}$$

ısı denklemi ele alınsın. Burada m=1, 2, 3, … ve ϵ bir parametre, t ve x tanımlı türev indisleridir. m=1 olmadığı sürece (3.1) denklemi lineer olmayan ısı denklemidir.

(3.1) formundaki lineer olmayan denklemler için özel tam çözümlerin elde edilmesi önemli bir problemdir. Özellikle, tam çözümleri bulmak biyolojik yorumlamada temel bir öneme sahiptir [6].

3.2. Adveksiyon Problemi

Homojen ve homojen olmayan adveksiyon problemi;

$$u_t + uu_x = f(x,t) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Bu denklem f(x,t)=0 için, homojen adveksiyon problemine dönüşür. (3.2) deki lineer olmayan adveksiyon denklemi, çeşitli fiziksel süreçleri tanımlamada kullanılır. Aşikar olmayan tam çözümlerin varlığı bilimsel bir problemdir. Tam çözümler önemlidir, çünkü; nümerik çözümler, araştırmalara bağlı bilimsel olayları saptamayabilir [3].

3.3. Klein Gordon Denklemi

Klein- Gordon denklemi kuantum mekaniğinde, göreceli fizikte ve yoğun madde fiziğinde çözümlerin çalışılmasında önemli bir rol oynar [15].

Klein- Gordon denkleminin nümerik işlemi,

$$u_{tt} - u_{xx} = -F(u) \tag{3.3}$$

şeklindedir. Bu denklemde F(u) lineer olmayan fonksiyondur.

Başlangıç şartları, belirli kurallar altında şöyledir:

$$u(x,0)=f(x) \quad , \quad u_t(x,0)=g(x) \tag{3.4}$$

Klein- Gordon denklemi matematiksel fizikte önemli bir rol oynar. Denklem, bir çarpışma plazmasında solitonların etkileşiminin araştırılmasında, başlangıç durumlarının tekrarında ve lineer olmayan dalga denklemlerinin incelenmesinde, yoğunlaşmış madde fiziği ve solitonları çalışarak oldukça dikkat çekmiştir [10].

Lineer ve lineer olmayan Klein- Gordon Denklemini çözmek için Adomian Ayrışım Yöntemi ve He' nin Varyasyonel İterasyon Yöntemi kullanılabilir.

3.4. Lane- Emden Denklemi

Matematiksel fizik ve astrofizik alanında ortaya çıkan birçok problem Lane- Emden denklemi ile modellenebilir [20].

$$y_{xx}+\frac{r}{x}y_x+\alpha f(x,t)g(y)+h(x,t)=y_t \tag{3.5}$$

denklemi incelenirse, burada;

$0<x\leq L$, $0<t\leq T$, $r>0$ ve α bir tamsayıdır.

(3.5)' de modellenen denklem, paralel düzlemlerin yüzeylerine göre ısı dikmesinin difüzyonudur, burada;

$f(x,t)g(y)+h(x,t)$ lineer olmayan ısı kaynağı, $y(x,t)$ sıcaklık ve t boyutsuz zaman değişkenidir.

$r=2$, $h(x,t)=0$ ve kararlı durum için, (3.5) denklemi Emden- Fowler denklemi olarak bilinir.

$$y''+\frac{2}{x}y'+\alpha f(x)g(y)=0 \tag{3.6}$$

$$y(0)=y_0 \quad , y'(0)=0$$

$f(x)$ ve $g(y)$ sırasıyla x ve y nin fonksiyonlarıdır. $f(x)=1$ ve $g(y)=y^n$ için (3.6) denklemi, klasik Lane- Emden denklemidir. Bu denklem, termodinamiğin klasik yasalarına karşılık ve onun moleküllerinin çekim kuvvetlerinin etkisi altındaki küresel bir gaz bulutunun ısıl davranışlarına model olarak kullanılmıştır. $g(y)'$nin diğer özel formları için; Lane- Emden denklemi matematiksel fizikte ve astrofizikte birkaç olayı modellemede kullanılır. Örneğin termiyonik akım teorisi, izotermal gaz alanları, küresel bir gaz bulutunun ısı davranışı ve yıldızın iç yapısının teorisi gibi. Bu modellerin formülleştirilmesi tartışılır ve fiziksel yapıların çözümleri bulunabilir [4-14].

3.5. Dalga Denklemi

$$y_{xx}+\frac{r}{x}y_x+\alpha f(x,t)g(y)+h(x,t)=y_{tt} \tag{3.7}$$

$0<x\leq L$, $0<t\leq T$, $r>0$

α bir tamsayı, $f(x,t)g(y)+h(x,t)$ lineer olmayan kaynak, t boyutsuz zaman değişkenidir. Dalganın x konumundaki ve t zamanındaki yer değişimi ise $y(x,t)$' dir [14].

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde, Adomian ayrışım yöntemi, modifiye ayrışım yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılarak zamana bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü verilecektir.

4.1 Isı Denkleminin ADM ile Çözümü

Örnek.1.

$u_t=u_{xx}+u$ (4.1)

Başlangıç şartı; $u(x,0)=\cos(\pi x)$

(4.2)

Sınır şartları; $u(0,t)=e^{(1-\pi^2)t}$ $u_x(0,t)=0$

t yönlü çözümü bulmak için aşağıdaki tekrarlı bağıntı kullanılır.

$u_0=u(x,0)$, $u_{n+1}=L_t^{-1}[L_x(u_n)+A_n]$, $n\geq 0$ (4.3)

Burada L_t^{-1} ters integrasyon operatörü ve L_x lineer diferansiyel operatörüdür.

$$L_t^{-1}=\int_0^t(.)dt$$

$$L_x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(4.1) denkleminin operatör formu yazılırsa,

$L_t(u(x,t))-L_x(u(x,t))-u(x,t)=0$

(4.4)

elde edilir.

Önce (2.9) denklemi kullanılarak Adomian polinomları bulunur.

$\emptyset(u)=\epsilon u^m$ için,

$m=1$ ve $\epsilon=1$ olduğundan

$\emptyset(u)=u$ olur ve

$A_0=u_0,\ A_1=u_1\ ,A_2=u_2,\ \ldots$

bulunur.

$u(x,0)=\cos(\pi x)$ ve (4.3) deki tekrarlamalı bağıntı kullanılırsa,

$u_0=\cos(\pi x)$ olur.

u_1 bileşenini bulmak için u_0 bileşeni (4.3)' de yerine yazılır,

$$u_1=L_t^{-1}[L_x(u_0)+A_0]=L_t^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cos(\pi x))+(\cos(\pi x))\right]$$

$$u_1=L_t^{-1}[-\pi^2(\cos(\pi x))+(\cos(\pi x))]=\int_0^t(\cos(\pi x))[1-\pi^2]dt$$

$$u_1=t(1-\pi^2)\cos(\pi x)$$

elde edilir.

u_2 bileşenini bulmak için u_1 bileşeni (4.3)' de yerine yazılır,

$$u_2=L_t^{-1}[L_x(u_1)+A_1]=L_t^{-1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(t(1-\pi^2)\cos(\pi x))+t(1-\pi^2)\cos(\pi x)\right]$$

$$u_2=L_t^{-1}[t(1-\pi^2)(1-\pi^2)\cos(\pi x)]=\frac{1}{2!}t^2(1-\pi^2)^2\cos(\pi x)$$

$$u_2=\frac{1}{2!}t^2(1-\pi^2)^2\cos(\pi x)$$

bulunur.

Aynı işlemler uygulanarak diğer bileşenler de bulunur.

$$u_3 = \frac{1}{3!} t^3 (1-\pi^2)^3 \cos(\pi x)$$

$\vdots$

Bu şekilde bileşenler hesaplandıktan sonra,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{4.5}$$

serisinin tam çözümü bulunur.

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

$$u(x,t) = \cos(\pi x) + t(1-\pi^2)\cos(\pi x) + \frac{1}{2!} t^2 (1-\pi^2)^2 \cos(\pi x) + \frac{1}{3!} t^3 (1-\pi^2)^3 \cos(\pi x) + \ldots$$

Seri düzenlenirse,

$$u(x,t) = \cos(\pi x) \left[1 + t(1-\pi^2) + \frac{1}{2!} t^2 (1-\pi^2)^2 + \frac{1}{3!} t^3 (1-\pi^2)^3 + \ldots \right]$$

elde edilir. Bu serinin kapalı formu yazılırsa,

$$u(x,t) = \cos(\pi x)\, e^{(1-\pi^2)t} \tag{4.6}$$

şeklinde problemin tam çözümü bulunmuş olur.

Benzer şekilde $u_t = u_{xx} + u$ ısı denkleminin x-yönlü çözümü bulunur.

Başlangıç şartı; $\quad u(x,0) = \cos(\pi x)$

Sınır şartları; $\quad u(0,t) = e^{(1-\pi^2)t} \qquad u_x(0,t) = 0 \qquad (4.7)$

x-yönlü çözümü bulmak için aşağıdaki tekrarlı bağıntı kullanılır.

$$u_0 = u(0,t) + x u_x(0,t) \quad \text{ve} \quad u_{n+1} = L_x^{-1}\left[L_t(u_n) - A_n \right], \quad n \geq 0 \tag{4.8}$$

Burada L_x^{-1} ters integrasyon operatörü ve L_t lineer diferansiyel operatörüdür.

$$L_x^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.) dxdx$$

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$$

Adomian polinomları diğer çözümde olduğu gibi bulunur. Yani,

$A_0 = u_0,\ A_1 = u_1,\ A_2 = u_2, \dots$

şeklindedir.

Verilen sınır şartları ve (4.8)' deki tekrarlı bağıntı kullanılırsa,

$A_0 = u_0 = e^{(1-\pi^2)t}$ olmak üzere,

$$u_1 = -\frac{(\pi x)^2}{2!} e^{(1-\pi^2)t}$$

$$u_2 = \frac{(\pi x)^4}{4!} e^{(1-\pi^2)t}$$

$$u_3 = -\frac{(\pi x)^6}{6!} e^{(1-\pi^2)t}$$

$\vdots$

u_n bileşenleri elde edilir.

Bileşenler hesaplandıktan sonra (4.5) serisinin tam çözümü bulunur.

$$u(x,t) = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

Eğer seri düzenlenirse,

$$u(x,t) = e^{(1-\pi^2)t}[1 - \frac{(\pi x)^2}{2!} + \frac{(\pi x)^4}{4!} - \frac{(\pi x)^6}{6!} + \dots]$$

elde edilir. Bu serinin kapalı formu yazılırsa,

$$u(x,t) = \cos(\pi x)\, e^{(1-\pi^2)t} \qquad (4.9)$$

elde edilir.

Isı denkleminin tam çözümü bulunmuş olur.

4.2. Isı Denkleminin VIM ile Çözümü

Örnek.1.

$$u_t=u_{xx}+u \tag{4.10}$$

Başlangıç şartı: $u(x,0)=\cos(\pi x)$

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t \lambda\,[u_{n_s}(x,t)-u_{n_{xx}}(x,t)-u_n(x,t)]ds \tag{4.11}$$

Lagrange çarpanı $\lambda=-1$' dir.

Lagrange çarpanının bu değeri (4.11)' deki fonksiyonda kullanılarak iterasyon formülü yazılır.

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t (-1)\,[u_{n_s}(x,t)-u_{n_{xx}}(x,t)-u_n(x,t)]ds \tag{4.12}$$

Verilen başlangıç şartı ve (4.12) kullanılarak ardışık yakınsamalar bulunur;

$u_0(x,t)=u(x,0)=\cos(\pi x)$

(4.12)' de verilen iterasyonda u_0 yerine yazılarak u_1 bulunur.

$$u_1(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t (-1)[u_{0_s}(x,t)-u_{0_{xx}}(x,t)-u_0(x,t)]ds$$

$$u_1(x,t)=\cos(\pi x)-\int_0^t (0+\pi^2\cos(\pi x)-\cos(\pi x))ds$$

$$u_1(x,t)=\cos(\pi x)+t(1-\pi^2)\cos(\pi x)$$

İterasyon formülü (4.12)' de u_1 yerine yazılarak u_2 bulunur.

$$u_2(x,t)=u_1(x,t)+\int_0^t (-1)[u_{1_s}(x,t)-u_{1_{xx}}(x,t)-u_1(x,t)]ds$$

$$u_2(x,t)=\cos(\pi x)+t(1-\pi^2)\cos(\pi x)-\int_0^t [(1-\pi^2)\cos(\pi x)-\pi^2\cos(\pi x)-\pi^2 s(1-\pi^2)\cos(\pi x)$$

$$-\cos(\pi x)-s(1-\pi^2)\cos(\pi x)]$$

$$u_2(x,t)= \cos(\pi x) +t(1-\pi^2)\cos(\pi x)-(1-\pi^2)\cos(\pi x) \left(\pi^2 \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}\right)$$

Yukarıdaki denklem daha düzenli bir şekilde yazılırsa;

$$u_2(x,t)= \cos(\pi x) +t(1-\pi^2)\cos(\pi x)+\frac{1}{2}t^2(1-\pi^2)^2\cos(\pi x)$$

ifadesi elde edilir.

Aynı şekilde her adımda bir önceki bileşen yerine yazılır ve ardışık yakınsamalar bulunur.

Sonuç olarak;

$$u= \lim_{n\to\infty} u_n$$

ifadesi kullanılırsa,

$$u(x,t)= \cos(\pi x) +t(1-\pi^2)\cos(\pi x)+\frac{1}{2}t^2(1-\pi^2)^2\cos(\pi x)+\ldots$$

denklemi elde edilir. Bu seriyi daha düzenli bir şekilde yazarsak,

$$u(x,t)= \cos(\pi x) \left[1+(1-\pi^2)t+\frac{1}{2!}(1-\pi^2)^2t^2+ \ldots\right]$$

bulunur. Serinin kapalı formu yazılırsa,

$$u(x,t)= \cos(\pi x)\, e^{(1-\pi^2)t} \tag{4.13}$$

tam çözümü elde edilir.

ADM ve VIM için $\left|u(x,t)-\emptyset_{30}(x,t)\right|$ mutlak hataları Çizelge 4.1.' de verilmiştir. Çizelge 4.1. de görüldüğü gibi bu yöntemlerle elde edilen sonuçların mutlak hataları çok küçüktür.

Çizelge 4.1. $|u(x,t)-\emptyset_{30}(x,t)|$ için Örnek.1'in nümerik sonuçları

x	t	ADM Mutlak Hata	VIM Mutlak Hata
0,1	0,1	$0{,}15x10^{-8}$	$0{,}10x10^{-8}$
	0,2	$0{,}7x10^{-9}$	$0{,}2x10^{-9}$
	0,3	$0{,}129x10^{-8}$	$0{,}646x10^{-8}$
0,2	0,1	$0{,}3x10^{-9}$	$0{,}3x10^{-9}$
	0,2	$0{,}6x10^{-9}$	$0{,}4x10^{-9}$
	0,3	$0{,}115x10^{-8}$	$0{,}467x10^{-8}$
0,3	0,1	$0{,}1x10^{-9}$	$0{,}2x10^{-9}$
	0,2	$0{,}8x10^{-10}$	$0{,}52x10^{-9}$
	0,3	$0{,}98x10^{-9}$	$0{,}36x10^{-9}$

4.3. Adveksiyon Probleminin ADM ile Çözümü

Örnek.2.

$u_t + uu_x = 0$ (4.14)

Başlangıç şartı:

$u(x,0) = -x$ (4.15)

Verilen problem önce operatör formda yazılır.

$Lu = -uu_x$ (4.16)

$u(x,0) = -x$

Burada L diferansiyel operatörüdür.

$$L = \frac{\partial}{\partial t}$$

L^{-1} ise integral operatörüdür.

$$L^{-1}(.) = \int_0^t (.)dt$$

L^{-1} operatörü (4.16) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa ve başlangıç şartı kullanılırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$u(x,t) = -x - L^{-1}(uu_x)$ (4.17)

ADM' de $u(x,t)$ fonksiyonu, (2.6)' daki sonsuz seri ile tanımlıdır.

F(u) lineer olmayan operatör ise;

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{4.18}$$

ile verilen polinomlar sonsuz bir serinin içinde tanımlanabilir.

$F(u) = uu_x$ olmak üzere,

Yukarıda verilen (4.17) denkleminde (2.6) ve (4.18) kullanılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = -x-L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} A_n) \tag{4.19}$$

elde edilir.

Burada A_n' ler Adomian polinomlarıdır.

$n\geq 1$ için diğer $u_n(x,t)$ bileşenleri aşağıdaki tekrarlı bağıntı kullanılarak bulunabilir.

$u_0(x,t)= -x$

$$u_{k+1}(x,t)= -L^{-1}(A_k) \quad , \qquad k\geq 0 \tag{4.20}$$

A_k, Adomian polinomları (2.16)' da verildiği gibidir.

Adomian polinomları ve (4.20) kullanılarak $u_n(x,t)$ bileşenleri hesaplanır.

$u_0(x,t)=-x$

$$u_1(x,t)= -L^{-1}(A_0)= -L^{-1}(-x(-1))= -\int_0^t xdt= -xt$$

$$u_2(x,t)= -L^{-1}(A_1)= -L^{-1}(u_0u_{1x}+u_1u_{0x})= -L^{-1}((-x)(-t)-xt(-1))$$

$$u_2(x,t)= -L^{-1}(xt+xt)= -\int_0^t 2xtdt = -2x\frac{t^2}{2} = -xt^2$$

$u_2(x,t)= -xt^2$

$$u_3= -L^{-1}(A_2)= -L^{-1}(u_0u_{2x}+u_1u_{1x}+u_2u_{0x})= -L^{-1}(-x(-t^2)-xt(-t)-xt^2 (-1)$$

$$= -L^{-1}(3xt^2)= -3x\int_0^t t^2dt= -xt^3$$

$$u_3= -xt^3 \tag{4.21}$$

$\vdots$

$u_n(x,t)$ bileşenleri elde edilir.

u(x,t) çözümü (4.21)' den dolayı bir seri formunda kolaylıkla elde edilir.

$u(x,t)= u_0+u_1+u_2+u_3+\dots$

$u(x,t)= -x-xt-xt^2-xt^3-\dots$

$u(x,t)= -x(1+t+t^2+t^3+\dots)$

Bu ifade daha düzenli bir hale getirilip, kapalı formda yazılırsa;

$$u(x,t)=\frac{x}{t-1} \qquad (4.22)$$

elde edilir.

4.4. Adveksiyon Probleminin VIM ile Çözümü

Örnek.2.

$$u_t+uu_x=0 \qquad (4.23)$$

Başlangıç şartı: $u(x,0)=-x$

Verilen problem için düzeltme fonksiyonu şöyledir:

$$u_{n+1}(x,t)= u_n(x,t)+\int_0^t \lambda(s)[u_{n_s}(x,t)+u_n(x,t)u_{n_x}(x,t)-0]ds \qquad (4.24)$$

Sabit şartlarda,

$\lambda'(s)=0$

$1+\lambda(s)=0$

Bu dönüşüm $\lambda= -1$ değerini verir.

Lagrange çarpanının bu değeri (4.24) fonksiyonelinde kullanılırsa;

$$u_{n+1}(x,t)= u_n(x,t)-\int_0^t [u_{n_s}(x,t)+u_n(x,t)u_{n_x}(x,t)-0]ds, \quad n\geq 0 \qquad (4.25)$$

iterasyon formülü elde edilir.

u_0 için herhangi bir seçici fonksiyon kullanılabilir. $u_0=-x$ başlangıç şartı kullanılabilir. Sonuç olarak, (4.25)' deki iterasyon kullanılarak ardışık yakınsamalar bulunur.

$u_0(x,t)= -x$

$$u_1= u_0- \int_o^t [(u_0)_s+u_0(u_0)_x-0]ds$$

$$u_1= -x- \int_0^t (0+(-x)(-1)-0)ds$$

$u_1= -x-xt$

$$u_2= u_1- \int_o^t [(u_1)_s+u_1(u_1)_x-0]ds$$

bileşenleri elde edilir.

İntegralin içine u_1 fonksiyonu yazılırken, t değişkeni yerine s değişkeni yazılır ve integralin değeri hesaplanır.

$$u_2= -x-xt- \int_o^t (-x-xs)_s+(-x-xs)(-1-s)ds$$

$$u_2= -x-xt-xt^2-x\frac{t^3}{3}$$

$$u_3= -x-xt-xt^2-xt^3-\frac{2}{3}xt^4-x\varphi(t^5)$$

$$u_4= -x-xt-xt^2-xt^3-xt^4-\frac{14}{15}xt^5-x\varphi(t^6)$$

$$u_5= -x-xt-xt^2-xt^3-xt^4-xt^5-x\varphi(t^6)$$

$\vdots$

bileşenleri bulunur.

$u_n(x,t)= -x-xt-xt^2-xt^3- xt^4-xt^5-\ldots-xt^n-...$

serisi elde edilir. Sonuç olarak,

$u = \lim_{n\to\infty} u_n$

$$u(x,t) = -x(1+t+t^2+t^3+t^4+t^5\ldots) \tag{4.26}$$

bulunur.

(4.26) denkleminin kapalı formu yazılırsa,

$$u(x,t) = \frac{x}{t-1} \tag{4.27}$$

elde edilir.

4.5. Klein-Gordon Denkleminin Modifiye Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

Örnek.3.

$$u_{tt} - u_{xx} = -u^2 \tag{4.28}$$

Başlangıç şartları: $u(x,0) = 1+\sin(x)$, $u_t(x,0) = 0$ (4.29)

Modifiye ayrışım yöntemi kullanılarak, f(x), $f_0 = 1$ ve $f_1 = \sin(x)$ olarak iki parçaya ayrılır. Bu dönüşüm,

$u_0(x,t) = f_0(x)$

$u_1(x,t) = f_1(x) + L_t^{-1}((u_0(x,t))_{xx} - L^{-1}(A_0)$

$u_2(x,t) = L_t^{-1}((u_1(x,t))_{xx} - L^{-1}(A_1)$

$u_3(x,t) = L_t^{-1}((u_2(x,t))_{xx} - L^{-1}(A_2)$

$u_4(x,t) = L_t^{-1}((u_3(x,t))_{xx} - L^{-1}(A_3)$

$\vdots$

şeklindedir.

Burada L_t^{-1} operatörü iki katlı integral ile tanımlıdır.

$$L_t^{-1}(.)=\int_0^t\int_0^t (.)dtdt$$

$F(u)=u^2$ Adomian polinomları ise lineer olmayan polinomlardaki (2.13) gibi tanımlıdır.

Adomian polinomları ve verilen eşitlikler kullanılarak $u_n(x,t)$ bileşenleri bulunur.

$$u_0(x,t)=1$$

$$u_1(x,t)=\sin(x)+L_t^{-1}(1)_{xx}-L^{-1}(1)$$

$$u_1(x,t)=\sin(x)+0-\int_0^t\int_0^t (1)dtdt$$

$$u_1(x,t)=-\frac{t^2}{2}+\sin(x)$$

$$u_2(x,t)=L_t^{-1}\left(-\frac{t^2}{2}+\sin(x)\right)_{xx}-L^{-1}(2u_0u_1)$$

$$u_2(x,t)=\int_0^t\int_0^t(-\sin(x))dtdt\ -\int_0^t\int_0^t 2(\sin(x)-\frac{t^2}{2})dtdt$$

$$u_2(x,t)=-\frac{t^2}{2}\sin(x)-(-\frac{t^4}{12}+2\frac{t^2}{2}\sin(x))$$

$$u_2(x,t)=\frac{t^4}{12}-\frac{3t^2}{2}\sin(x)$$

$$u_3(x,t)=L_t^{-1}(\frac{t^4}{12}-\frac{3t^2}{2}\sin(x))_{xx}-L^{-1}\left(2u_0u_2+u_1^2\right)$$

$$u_3(x,t)=-\frac{t^6}{72}+\frac{11t^4}{24}\sin(x)-\frac{t^2}{2}\sin^2(x)$$

$$u_4(x,t)=L_t^{-1}(-\frac{t^6}{72}+\frac{11t^4}{24}\sin(x)-\frac{t^2}{2}\sin^2(x))_{xx}-L^{-1}(2u_0u_3+2u_1u_2)$$

$$u_4(x,t)=\frac{t^8}{504}-\frac{t^4}{12}\cos(2x)-\frac{73t^6}{720}\sin(x)+\frac{t^4}{3}\sin^2(x)$$

$\vdots$

bileşenleri elde edilir.

Buna göre, çözümün seri formu;

$$u(x,t)= u_0(x,t)+u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t)+u_4(x,t)+\ldots$$

$$u(x,t)= 1+\sin(x)+\frac{t^2}{2!}\left(-1-3\sin(x)-\sin^2(x)+\ldots\right)+\frac{t^4}{4!}(2-2\cos(2x)+11\sin(x)+8\sin^2(x)+\ldots)$$

$$+\frac{t^6}{6!}(-10-73\sin(x)+\ldots)+\ldots \tag{4.30}$$

(4.30) denklemi ile ifade edilir.

Bu yaklaşım nümerik amaçlar için kullanılabilir. Çünkü çözümün kapalı formu yoktur. Bununla birlikte, daha doğru ve hassas bir sonuca ulaşmak için daha çok terim hesaplanabilir [10].

4.6. Klein-Gordon Denkleminin VIM ile Çözümü

Örnek.3.

$$u_{tt}-u_{xx}=-u^2 \tag{4.31}$$

Başlangıç şartları:

$$u(x,0)=1+\sin(x) \qquad u_t(x,0)=0 \tag{4.32}$$

(4.31) denklemi için düzeltme fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$u_{n+1}(x,t)= u_n(x,t)+\int_0^t \lambda(s)\left[u_{n_{ss}}(x,s)-\tilde{u}_{n_{xx}}(x,s)+\tilde{u}_n^2(x,s)\right]ds \tag{4.33}$$

Burada $\delta\tilde{u}_n$ sınırlı bir değişken olarak kabul edilir. Sabit şartlarda Lagrange çarpanı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\lambda''= 0$$

$$1-\lambda'|_{s=t}= 0$$

$\lambda|_{s=t} = 0$

Bu dönüşüm,

$\lambda(s)= s-t$

Lagrange çarpanını verir.

Lagrange çarpanının bu değeri (4.33) fonksiyonelinin içinde kullanılarak aşağıdaki iterasyon formülü elde edilir.

$$u_{n+1}(x,t)= u_n(x,t)+ \int_0^t (s-t)\left[u_{n_{ss}}(x,s)-u_{n_{xx}}(x,s)+u_n^2(x,s)\right]ds \qquad (4.34)$$

$u_0(x,t)$ için herhangi bir fonksiyon kullanılabilir; (4.32)' de verilen başlangıç şartı kullanılırsa,

$$u_0(x,t)= u(x,0)+tu_t(x,0)$$

$$u_0(x,t)= 1+\sin(x)$$

bulunur. Sonuç olarak, (4.34) kullanılarak aşağıdaki ardışık yakınsamalar elde edilir.

$$u_1(x,t)= u_0(x,t)+ \int_0^t (s-t)\left[\, u_{0_{ss}}(x,s)-u_{0_{xx}}(x,s)+u_0{}^2(x,s)\,\right]ds$$

$$u_1(x,t)= 1+\sin(x)+ \int_0^t (s-t)\left[\sin(x)+1+2\sin(x)+\sin^2(x)\,\right]ds$$

$$u_1(x,t)= 1+\sin(x)+\left(1+3\sin(x)+\sin^2(x)\right)\left(\frac{t^2}{2}-t^2\right)$$

$$u_1(x,t)= 1+\sin(x)-\frac{t^2}{2!}\left(1+3\sin(x)+\sin^2(x)\right)$$

$$u_2(x,t)= u_1(x,t)+ \int_0^t (s-t)\left[\, u_{1_{ss}}(x,s)-u_{1_{xx}}(x,s)+u_1{}^2(x,s)\,\right]ds$$

$$u_2(x,t)= 1+\sin(x)-\frac{t^2}{2!}\left(1+3\sin(x)+\sin^2(x)\right)+\frac{t^4}{4!}\left(11+12\sin(x)+2\sin^2(x)\right)\sin(x)+\ldots$$

$$u_3(x,t)= 1+\sin(x)-\frac{t^2}{2!}\left(1+3\sin(x)+\sin^2(x)\right)+\frac{t^4}{4!}\left(11+12\sin(x)+2\sin^2(x)\right)\sin(x)$$

$$+\frac{t^6}{6!}\left(18-57\sin(x)-160\sin^2(x)-82\sin^3(x)-10\sin(4x)\right)+\ldots$$

$$u_4(x,t)= 1+\sin(x)-\frac{t^2}{2!}\left(1+3\sin(x)+\sin^2(x)\right)+\frac{t^4}{4!}\left(11+12\sin(x)+2\sin^2(x)\right)\sin(x)$$

$$+\frac{t^6}{6!}\left(18-57\sin(x)-160\sin^2(x)-82\sin^3(x)-10\sin(4x)\right)$$

$$+\frac{t^8}{8!}\left(-356-27\sin(x)+2304\sin^2(x)+2692\sin^3(x)+884\sin^4(x)+80\sin^5(x)\right)+\ldots$$

$\vdots$

$u_n(x,t)$ bileşenleri bulunur.

Bu yaklaşımlar sadece sayısal amaçlar için kullanılabilir. Çünkü çözümün kapalı bir formu elde edilemez.

ADM ve VIM için beş iterasyonla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2.' de verilmiştir. Çözümün kapalı formu olmadığı için mutlak hataya bakılamamıştır.

Çizelge 4.2. Beş iterasyon için Örnek.3’ ün nümerik sonuçları

x	t	ADM [6]	VIM
0,1	0,1	1,093291132	1,093291179
	0,2	1,073723730	1,073726319
	0,3	1,073723730	1,041329307
0,2	0,1	1,190502988	1,190503087
	0,2	1,166134875	1,166138052
	0,3	1,125945576	1,125974855
0,3	0,1	1,285668610	1,285668847
	0,2	1,256326130	1,256331033
	0,3	1,208114007	1,208147937

4.7. Lane-Emden Denkleminin ADM ile Çözümü

Örnek.4.

$$y_{xx}+\frac{2}{x}y_x-\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y=y_t \qquad (4.35)$$

Başlangıç şartları: $y(0,t)=e^{\sin(t)}$ $\qquad y_x(0,t)=0$ (4.36)

(4.35) denklemi operatör formda düzenlenirse,

$$Ly=\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y+y_t \qquad (4.37)$$

elde edilir.

Başlangıç şartı kullanılarak ve (4.37)' nin her iki tarafına L^{-1} operatörü uygulanılarak $y(x,t)$ bulunur.

L^{-1} iki katlı ters integral operatörüdür.

$$L^{-1}(.)=\int_0^x x^{-2}\int_0^x x^2\,(.)dxdx \qquad , \qquad r>0$$

şeklinde tanımlıdır.

$$y(x,t)=e^{\sin(t)}+L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y+y_t\right) \qquad (4.38)$$

$y(x,t)$
için,

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x,t)$$

ayrışım serisi kullanılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x,t)=e^{\sin(t)}+L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y+y_t\right) \qquad (4.39)$$

elde edilir.

$y_0(x,t)$ bileşeni başlangıç değerinden oluşur ve daima tüm terimler ile tanımlı olur. Bu Adomian yönteminin temel özelliğidir.

$y(x,t)$ çözümünün $y_n(x,t)$ bileşenleri aşağıdaki tekrarlı bağıntı kullanılarak hesaplanabilir.

$$y_0(x,t)= e^{\sin(t)}$$

$$y_{k+1}(x,t)= L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y_k+y_{k_t}\right) , \qquad k\geq 0 \tag{4.40}$$

$y_n(x,t)$ bileşenleri;

$$y_0(x,t)= e^{\sin(t)}$$

$$y_1(x,t)= L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y_0+y_{0_t}\right)= L^{-1}\left(e^{\sin(t)}(6+4x^2)\right)$$

$$y_1(x,t)=\int_0^x x^{-2}\int_0^x x^2\, e^{\sin(t)}(6+4x^2)dxdx$$

$$y_1(x,t)= e^{\sin(t)}\left(x^2+\frac{1}{5}x^4\right)$$

$$y_2(x,t)= L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y_1+y_{1_t}\right)$$

$$y_2(x,t)= L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)\left(x^2+\frac{1}{5}x^4\right)e^{\sin(t)}+ e^{\sin(t)}\left(x^2+\frac{1}{5}x^4\right)\cos(t)\right)$$

$$y_2(x,t)= L^{-1}\left(e^{\sin(t)}\left(x^2+\frac{1}{5}x^4\right)(6+4x^2)\right)$$

$$y_2(x,t)=\int_0^x x^{-2}\int_0^x x^2\, e^{\sin(t)}\left(x^2+\frac{1}{5}x^4\right)(6+4x^2)dxdx$$

$$y_2(x,t)= e^{\sin(t)}\left(\frac{3}{10}x^4+\frac{13}{105}x^6+\frac{1}{90}x^8\right) \tag{4.41}$$

$$y_3(x,t)= L^{-1}\left(\left(6+4x^2-\cos(t)\right)y_2+y_{2_t}\right)$$

$$y_3(x,t)= e^{\sin(t)}\left(\frac{3}{70}x^6+\frac{17}{630}x^8+\varphi(x^{10})\right)$$

$$y_4(x,t)= L^{-1}\left((6+4x^2\text{-}\cos(t))y_3+y_{3_t}\right)$$

$$y_4(x,t)= e^{\sin(t)}(\frac{1}{280}x^8+\varphi(x^{10}))$$

$\vdots$

elde edilir.

Çözüm seri formda yazılırsa;

$$y(x,t)= y_0(x,t)+y_1(x,t)+y_2(x,t)+y_3(x,t)+\ldots$$

$$y(x,t)= e^{\sin(t)}\left(1+x^2+\frac{1}{5}x^4+\frac{3}{10}x^4+\frac{13}{105}x^6+\frac{1}{90}x^8+\frac{3}{70}x^6+\frac{17}{630}x^8+\ldots\right)$$

$$y(x,t)= e^{\sin(t)}\left(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\ldots\right) \qquad (4.42)$$

elde edilir.

(4.42) serisi kapalı formda yazılırsa;

$$y(x,t)= e^{\sin(t)+x^2} \qquad (4.43)$$

şeklinde tam çözüm bulunur.

4.8. Lane-Emden Denkleminin VIM ile Çözümü

Örnek.4.

$$y_{xx}+\frac{2}{x}y_x\text{-}\left(6+4x^2\text{-}\cos(t)\right)y=y_t \qquad (4.44)$$

Başlangıç şartları: $y(0,t)= e^{\sin(t)}$ $\qquad y_x(0,t)= 0$ (4.45)

VIM yardımıyla (4.44) denklemi çözülür. Önce düzeltme fonksiyonunu oluşturalım.

$$y_{n+1}= y_n(x,t)+\int_0^x \lambda(s)[(y_n)_{ss}+\frac{2}{s}(y_n)_s\text{-}\left(6+4s^2\text{-}\cos(t)\right)y_n\text{-}\left(y_n\right)_t\Big]\,ds \quad , n\geq 0 \qquad (4.46)$$

Lagrange çarpanı;

$$\lambda(s)=\frac{s^r}{(r-1)x^r}-\frac{s}{r-1} \tag{4.47}$$

olarak tanımlanır.

Verilen (4.44) denkleminde r=2 olduğu için (4.47)' de yerine yazılırsa;

$$\lambda(s)=\frac{s^2}{(2-1)x^2}-\frac{s}{2-1}=\frac{s^2}{x}-s \tag{4.48}$$

elde edilir.

Lagrange çarpanının (4.48)' deki değeri (4.46)' de kullanılarak iterasyon formülü yazılır.

$$y_{n+1}=y_n(x,t)+\int_0^x (\frac{s^2}{x}-s)[(y_n)_{ss}+\frac{2}{s}(y_n)_s-\left(6+4s^2-\cos(t)\right)y_n-\left(y_n\right)_t\Big]\,ds \quad , n\geq 0 \tag{4.49}$$

Kolaylık olması için, (4.45)' de verilen $y_0=y(0,t)$ başlangıç yaklaşımı olarak alınabilir. Daha sonraki iterasyonlar (4.49)' dan kolaylıkla hesaplanabilir.

$$y_0(0,t)=e^{\sin(t)}$$

$$y_1(x,t)=e^{\sin(t)}+\int_0^x \left(\frac{s^2}{x}-s\right)[(e^{\sin(t)})_{ss}+\frac{2}{s}(e^{\sin(t)})_s-\left(6+4s^2-\cos(t)\right)e^{\sin(t)}-(e^{\sin(t)})_t]ds$$

$$y_1(x,t)=e^{\sin(t)}+\int_0^x \left(\frac{s^2}{x}-s\right)[-6-4s^2+\cos(t)-\cos(t)\,]e^{\sin(t)}\,ds$$

$$y_1(x,t)=e^{\sin(t)}+\int_0^x \left(-\frac{6}{x}s^2-\frac{4}{x}s^4+6s+4s^3\right)e^{\sin(t)}ds$$

$$y_1(x,t)=e^{\sin(t)}+e^{\sin(t)}\left[-\frac{6x^3}{3x}-\frac{4x^5}{5x}+\frac{6x^2}{2}+\frac{4x^4}{4}\right]$$

$$y_1(x,t)=e^{\sin(t)}\left[1+x^2+\frac{1}{5}x^4\right] \tag{4.50}$$

$\vdots$

$y_n(x,t)$ bileşenleri elde edilir.

Benzer şekilde, kalan diğer bileşenler (4.49)' daki iterasyon formülü yardımıyla Maple programı kullanılarak hesaplanabilir.

$$y(x,t)=\lim_{n\to\infty} y_n(x,t)$$

$$y(x,t)=e^{\sin(t)}\left(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\ldots\right) \tag{4.51}$$

(4.51) serisi kapalı formda yazılırsa,

$$y(x,t)=e^{\sin(t)+x^2} \tag{4.52}$$

tam çözüm bulunur.

ADM ve VIM için $\left|y(x,t)-\emptyset_5(x,t)\right|$ mutlak hataları Çizelge 4.3.' de verilmiştir. Çizelge 4.3.' de görüldüğü gibi bu yöntemlerle elde edilen sonuçların mutlak hataları çok küçüktür.

Çizelge 4.3. $|y(x,t)-\emptyset_5(x,t)|$ için Örnek.4' ün nümerik sonuçları

x	t	ADM Mutlak Hata	VIM Mutlak Hata
0,1	0,1	$0{,}1\text{x}10^{-8}$	$0{,}1\text{x}10^{-8}$
	0,5	$0{,}1\text{x}10^{-8}$	$0{,}1\text{x}10^{-8}$
	1,0	0	$0{,}1\text{x}10^{-8}$
0,5	0,1	$0{,}3\text{x}10^{-8}$	$0{,}3\text{x}10^{-8}$
	0,5	$0{,}5\text{x}10^{-8}$	$0{,}4\text{x}10^{-8}$
	1,0	$0{,}7\text{x}10^{-8}$	$0{,}6\text{x}10^{-8}$
1,0	0,1	0,000026851	0.000026850
	0,5	0,000039247	0.000039247
	1,0	0,000056365	0.000056365

4.9. Dalga Denkleminin ADM ile Çözümü

Örnek.5.

$$y_{xx}+\frac{2}{x}y_x-(5+4x^2)y=y_{tt}+(12x-5x^3-4x^5) \tag{4.53}$$

Başlangıç şartları: $y(0,t)=e^{-t}$, $y_x(0,t)=0$ (4.54)

Operatör formda (4.53) denklemi şu şekilde yazılır,

$$Ly=(12x-5x^3-4x^5)+(5+4x^2)y+y_{tt} \tag{4.55}$$

Başlangıç şartı (4.54) kullanılırsa ve (4.55)' in her iki tarafına L^{-1} operatörü uygulanırsa y(x,t) bulunur.

L^{-1} iki katlı ters integral operatörüdür.

$$L^{-1}(.)=\int_0^x x^{-2}\int_0^x x^2\,(.)dxdx \qquad , \qquad r>0$$

şeklinde tanımlıdır.

$$y(x,t)=e^{-t}+L^{-1}\left((12x-5x^3-4x^5)+(5+4x^2)y+y_{tt}\right) \tag{4.56}$$

y(x,t) için ayrışım serisi

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,t)$$

kullanılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,t)=e^{-t}+L^{-1}\left((12x-5x^3-4x^5)+(5+4x^2)y+y_{tt}\right) \tag{4.57}$$

elde edilir.

$y_0(x,t)$ bileşeni, başlangıç değerinden ve $(12x-5x^3-4x^5)$ ifadesinin iki kez integrallenmesinden oluşur.

$y(x,t)$ çözümünün $y_n(x,t)$ bileşenleri aşağıdaki tekrarlı bağıntı kullanılarak hesaplanabilir.

$$y_0(x,t)= e^{-t}+L^{-1}\left((12x-5x^3-4x^5)\right)$$

$$y_{k+1}(x,t)= L^{-1}\left((5+4x^2)y_k+y_{k_{tt}}\right) \quad , \quad k\geq 0 \tag{4.58}$$

Ardışık yakınsamalar,

$$y_0(x,t)= e^{-t}+ \int_0^x x^{-2}\int_0^x x^2\,(12x-5x^3-4x^5)dxdx$$

$$y_0(x,t)=e^{-t}+x^3-\frac{1}{6}x^5-\frac{1}{14}x^7 \tag{4.59}$$

olarak bulunur. (4.58) ve (4.59) kullanılırsa $y_1(x,t)$ bileşeni bulunur.

$$y_1(x,t)= L^{-1}\left((5+4x^2)y_0+y_{0_{tt}}\right)$$

$$y_1(x,t)= x^2e^{-t}+\frac{1}{5}x^4e^{-t}+\frac{1}{6}x^5+\frac{19}{336}x^7+\varphi(x^9)$$

$$y_2(x,t)= L^{-1}\left((5+4x^2)y_1+y_{1_{tt}}\right)$$

$$y_2(x,t)= \frac{3}{10}x^4e^{-t}+\frac{13}{105}x^6e^{-t}+\frac{1}{90}x^8e^{-t}+\frac{5}{336}x^7+\varphi(x^9)$$

$$y_3(x,t)= L^{-1}\left((5+4x^2)y_2+y_{2_{tt}}\right) \tag{4.60}$$

$$y_3(x,t)= \frac{3}{70}x^6e^{-t}+\frac{17}{630}x^8e^{-t}+ \varphi(x^9)$$

$$y_4(x,t)= L^{-1}\left((5+4x^2)y_3+y_{3_{tt}}\right)$$

$$y_4(x,t)= \frac{1}{280}x^8e^{-t}+ \varphi(x^9)$$

$\vdots$

$y_n(x,t)$ bileşenleri elde edilir.

Yukarıdaki çözüm seri formda yazılırsa;

$$y(x,t)= x^3+e^{-t}\left(1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\ldots\right) \tag{4.61}$$

elde edilir.

(4.61) serisinin kapalı formu ise;

$$y(x,t)= x^3+ e^{x^2-t} \tag{4.62}$$

şeklindedir.

4.10. Dalga Denkleminin VIM ile Çözümü

Örnek.5.

$$y_{xx}+\frac{2}{x}y_x-(5+4x^2)y= y_{tt}+(12x-5x^3-4x^5) \tag{4.63}$$

Başlangıç şartları: $y(0,t)= e^{-t}$, $y_x(0,t)= 0$ (4.64)

VIM kullanılarak, (4.63) denklemi için düzeltme fonksiyonu oluşturulur.

$$y_{n+1}(x,t)= y_n(x,t)+ \int_0^x \lambda(s)\ [(y_n)_{ss}+\frac{2}{s}(y_n)_s-(5+4s^2)y_n-(y_n)_{tt}-(12s-5s^3-4s^5)\ ]\ ds\ ,\ \ n\geq 0 \tag{4.65}$$

Lagrange çarpanı (4.47)' deki gibi tanımlanabilir.

Verilen (4.63) denkleminde r=2 olduğu için $\lambda(s)$, (4.48) denklemindeki gibidir.

Lagrange çarpanının (4.48)' deki değeri (4.65)' de kullanılarak iterasyon formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$y_{n+1}(x,t)=y_n(x,t)+ \int_0^x (\frac{s^2}{x}-s)[(y_n)_{ss}+\frac{2}{s}(y_n)_s-(5+4s^2)y_n-(y_n)_{tt}-(12s-5s^3-4s^5)]ds,\ \ n\geq 0\ , \tag{4.66}$$

Kolaylık olması için, (4.64)' de verilen $y_0= y(0,t)$ başlangıç yaklaşımı olarak alınır. Daha sonraki iterasyonlar ise (4.66)' dan kolaylıkla hesaplanabilir.

$$y_1(x,t)= e^{-t}+ \int_0^x (\ \frac{s^2}{x}-s\ )\ [(e^{-t})_{ss}+\frac{2}{s}(e^{-t})_s-(5+4s^2)e^{-t}-(e^{-t})_{tt}-(12s-5s^3-4s^5\ )\ ]ds$$

$$y_1(x,t)=e^{-t}+\int_0^x \left(\frac{s^2}{x}-s\right)\left[-6e^{-t}-4s^2e^{-t}+4s^5+5s^3-12s\right] ds$$

$$y_1(x,t)=e^{-t}+\left[-2x^2e^{-t}-\frac{4}{5}x^5e^{-t}+\frac{1}{2}x^7+\frac{5}{6}x^5-3x^3+3x^2e^{-t}+x^4e^{-t}-\frac{4}{7}x^7-x^5+6x^2\right]$$

$$y_1(x,t)=e^{-t}-\frac{1}{14}x^7+\frac{5}{6}x^5+x^5\left(-\frac{4}{5}e^{-t}-1\right)+x^2e^{-t}-3x^3+6x^2+x^4e^{-t}$$

$$\vdots \tag{4.67}$$

$y_n(x,t)$ bileşenleri elde edilir.

Benzer şekilde, kalan diğer bileşenler (4.66)' daki iterasyon formülü yardımıyla Maple programı kullanılarak hesaplanabilir.

$$y(x,t)=\lim_{n\to\infty} y_n(x,t)$$

çözümü seri formda yazılırsa,

$$y(x,t)=x^3+e^{-t}\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots\right)$$

elde edilir. Bu seri kapalı formda düzenlenirse,

$$y(x,t)=x^3+e^{-t}e^{x^2}$$

$$y(x,t)=x^3+e^{x^2-t}$$

şeklinde tam çözüm bulunur.

ADM ve VIM için $|y(x,t)-\emptyset_5(x,t)|$ mutlak hataları Çizelge 4.4.' de verilmiştir. Çizelge 4.4.' de görüldüğü gibi bu yöntemlerle elde edilen sonuçların mutlak hataları çok küçüktür.

Çizelge 4.4. $|y(x,t)-\emptyset_5(x,t)|$ için Örnek.5' in nümerik sonuçları

x	t	ADM Mutlak Hata	VIM Mutlak Hata
0,1	0,1	0	$0,1x10^{-9}$
	0,5	0	0
	1,0	$0,1x10^{-9}$	$0,1x10^{-9}$
0,5	0,1	$0,3x10^{-8}$	$0,3x10^{-8}$
	0,5	$0,16x10^{-8}$	$0,17x10^{-8}$
	1,0	$0,9x10^{-9}$	$0,10x10^{-8}$
1,0	0,1	0,000022077	0,000025481
	0,5	0,000014829	0,000018233
	1,0	$0,9029x10^{-5}$	0,000012434

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada zamana bağlı kısmi türevli denklemlerin yaklaşık çözümleri için Adomian Ayrışım Yöntemi, Modifiye Ayrışım Yöntemi ve Varyasyonel İterasyon Yöntemi anlatıldı. Bu yöntemlerle elde edilen sonuçlar karşılaştırmalı olarak 4. bölümde tablolarla verildi. Tablolarda kullanılan sonuçlar hesaplanırken Maple programı kullanıldı.

Kısmi diferansiyel denklemler fizik ve mühendislik alanında birçok problemin ifade edilmesi için yaygın olarak kullanılmıştır. Kısmi diferansiyel denklemler ve çözüm metodları uygulamalı bilimlerde birçok araştırmacının ilgi odağı olmuş, farklı çözüm yöntemleri literatürde yer almıştır. Zamana bağlı kısmi türevli denklemler ise mühendisliğin hemen hemen bütün dallarında kullanılmıştır. Çünkü zaman değişkeni, durumun hareket halinde olduğunu belirttiği için bu alandaki problemleri ifade etmede yararlanılmıştır. Bu denklemlerin analitik çözümlerinin çok zor hesaplandığı ve analitik çözümünün bulunamadığı durumlarda, sayısal yöntemler tercih edilmiştir. Bu çalışmada kullanılan Adomian Ayrışım Yöntemi ve Varyasyonel İterasyon Yöntemi, zamana bağlı kısmi türevli denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için kullanabileceğimiz en etkili yöntemlerdendir.

Adomian Ayrışım Yöntemi, incelenen denklemler için hassas sonuçlar vermiştir ve hesaplama süresi Varyasyonel İterasyon Yöntemine göre daha kısa olmuştur. Bu yöntemde karşılaşılan zorluk, Adomian polinomlarının çokluğu ve Maple programında ifade edilmesidir.

Varyasyonel iterasyon yöntemi ise ADM' ye göre daha hassas sonuçlar vermiştir. Burada ise sonuçları hesaplama süresi daha uzundur. Bundan dolayı tablolarda bulduğumuz sonuçları hesaplamada iterasyon adımları çok fazla değildir.

Sonuç olarak uygulanan yöntemler ve elde edilen çözümler incelendiğinde, zamana bağlı kısmi türevli denklemleri çözmek için bu yöntemlerin etkili ve kolay olduğu, ayrıca hassas sonuçlar verdiği söylenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Koca, K. , 1995, " Kısmi Türevli Denklemler (Temel Bilimler ve Mühendislik İçin)" , Ankara, 7.

[2] Sezer, M. , 2001, " Diferansiyel Denklemler ve Çözümlü Problemler- 1" , İzmir, 3-5.

[3] Wazwaz, A. M. , 2007, " A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method" , *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 207: 129- 136.

[4] Wazwaz, A. M. , 2005, " Analytical solution for the time- dependent Emden- Fowler type of equations by Adomian decomposition method" , *Appl. Math. Comput.* , 166: 638- 651.

[5] Wazwaz, A. M. , 2000, " A new algoritm for calculating adomian polynomials for nonlinear operators" , *Appl. Math. Comput.* , 111: 53- 69.

[6] Pamuk, S. , 2005, " An application for linear and nonlinear heat equations by Adomian' s decomposition method" , *Appl. Math. Comput.* , 163: 89- 96.

[7] Wazwaz, A. M. ve El- Sayed, S. M. , 2001, " A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators" , *Appl. Math. Comput.* , 122: 393- 405.

[8] Luo, X. G. , 2005, " A two- step Adomian decomposition method" *Appl. Math. Comput.* , 170: 570-583.

[9] Chen, W. ve Lu, Z. , 2004, " An algorthm for Adomian decomposition method" , *Appl. Math. Comput.* , 159: 221- 235.

[10] El- Sayed, S. M. , 2003, " The decomposition method for studying the Klein- Gordon equation" , *Chaos, Solitons and Fractals,* 18: 1025- 1030.

[11] Maghimi, M. Ve Hejazi, F. S. A. , 2007, " Variational iteration method for solving generalized Burger- Fisher and Burger equations" , *Chaos, Solitons and Fractals,* 33: 1756- 1761.

[12] Wazwaz, A. M. , 2007, " The variation method for exact solutions of Laplace equation" , *Pyhsics Letters A,* 363: 260- 262.

[13] Yusufoğlu, E. , 2008, " The variational iteration method for studying the Klein- Gordon equation" , *Applied Mathematics Letters,* 21: 669- 674.

[14] Batiha, B. , Noorani, M. S. M. Ve Hashim, I. , “ Application of variational iteration method to heat- and wave- like equations” , *Pyhsics Letters A,* 369: 55- 61.

[15] Lesnic, D. , 2006, “ The decomposition method for linear, one- dimensional, time dependent partial differential equations” , *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* Article 42389, pages 1- 29.

[16] Cavlak, E. , 2008, “ Genelleştirilmiş Korteweg- de Vries(GKdV) Denkleminin Yar- Analitik Metodlarla Elde Edilen Sayısal Çözümlerinin Karşılaştırılması” , Yüksek Lisans Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Elazığ, 10-15.

[17] Toker, M. M., 2008, “ Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Diferansiyel Yöntemlerle Karşılaştırılması” , Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Konya, 10- 15.

[18] Zhou, X. Ve Yao, L. , 2010, “ The variational iteration method for Cauchy problems” , *Computers and Mathematics with Applications,* 60: 756- 760.

[19] El- Wakil, S. A. ve Abdou, M. A. , 2007, “ New applications of Adomian decomposition method” , *Chaos, Solitons and Fractals,* 33: 513- 522.

[20] Yıldırım, A. ve Öziş, T. , 2009, “ Solutions of singular IVPs of Lane- Emden type by the variational iteration method” , *Nonlinear Analysis,* 70: 2480- 2484.

EKLER

EK-1. Zamana Bağlı Isı Denklemi Örneği

Örnek.1' in ADM için Maple Programı

```
> restart;
> y(0):=cos(Pi*x);
```

$$y(0) := \cos(\pi\, x)$$

```
> b(0):=y(0);
```

$$b(0) := \cos(\pi\, x)$$

```
> for n from 0 by 1 to 30 do
> denk(n):=(diff(y(n),x,x)+y(n));
> int1:=int(denk(n),t=0..t);
> b(n+1):=(b(n)+int1);
> y(n+1):=int1;
> y(n+1):=simplify(y(n+1)):
> end do;
```

Örnek.1' in VIM için Maple Programı

```
> restart;
> y(0):=cos(Pi*x);
```

$$y(0) := \cos(\pi\, x)$$

```
> for n from 0 by 1 to 30 do
>
> b(n):=y(n);
> y(n):=subs(t=s,y(n));
> y(n);
> denk(n):=(diff(y(n),s)-diff(y(n),x,x)-y(n));
> b(n);
> y(n+1):=b(n)-int(denk(n),s=0..t):
> y(n+1):=simplify(y(n+1)):
```

```
> end do;
```

Örnek.1’ in ADM ve VIM karşılaştırmalı Maple Programı

```
> restart;
> x1:=0.1;t1:=0.3;
```

$$x1 := 0.1$$

$$t1 := 0.3$$

```
> t:=t1;
```

$$t := 0.3$$

```
> x:=x1;
```

$$x := 0.1$$

```
> b(30):=
```

$$\mathrm{b}(30) := 0.06646610701$$

```
> y(30):=
```

$$\mathrm{y}(30) := 0.06646610184$$

```
> y(x,t):=evalf(exp(-(Pi^2-1)*t)*cos(Pi*x));
```

$$\mathrm{y}(0.1, 0.3) := 0.06646610830$$

```
> hata1:=abs(y(x,t)-b(30));
```

$$hata1 := 0.129\ 10^{-8}$$

```
> hata2:=abs(y(x,t)-y(30));
```

$$hata2 := 0.646\ 10^{-8}$$

EK-2. Zamana Bağlı Klein-Gordon Denklemi Örneği

Örnek.3' ün VIM için Maple Programı

```
> restart;
> y(0):=1+sin(x);
for n from 0 by 1 to 4 do
> L(n):=(s-t);
> b(n):=y(n);
> y(n):=subs(t=s,y(n));
> y(n);
> denk(n):=(diff(y(n),s,s)-diff(y(n),x,x)+(y(n))^2);
> b(n);
> y(n+1):=b(n)+int(L(n)*denk(n),s=0..t):
> y(n+1):=simplify(y(n+1)):
> end do;
> x:=0.1;t1:=0.3;
```

$$x := 0.1$$

$$t1 := 0.3$$

```
> t:=t1;
```

$$t := 0.3$$

```
> y(5):=
```

$$y(5) := 1.041329310$$

EK-3. Zamana Bağlı Lane-Emden Denklemi Örneği

```
> restart;
> y(0):=exp(sin(t));
y1(0):=y(0);
r:=2;
b1(0):=y1(0);
```

$$y(0) := e^{\sin(t)}$$

$$y1(0) := e^{\sin(t)}$$

$$r := 2$$

$$b1(0) := e^{\sin(t)}$$

Örnek.4' ün VIM için Maple Programı

```
> for n from 0 by 1 to 4 do
L(n):=(s^2/x-s);
b(n):=y(n);
y(n):=subs(x=s, y(n));
y(n);
denk(n):=(diff(y(n),s,s)+2/s*diff(y(n),s)-(6+4*s^2-cos(t))*y(n)-diff(y(n),t));
b(n);
y(n+1):=b(n)+int(L(n)*denk(n),s=0..x):
y(n+1):=simplify(y(n+1)):
end do;
```

Örnek.4' ün ADM için Maple Programı

```
> for n from 0 by 1 to 4 do
denk1(n):=(6+4*x^2-cos(t))*y1(n)+diff(y1(n),t);
int1:=int(x^(-r)*int(x^r*denk1(n),x=0..x),x=0..x);
b1(n+1):=b1(n)+int1;
b1(n+1):=expand(b1(n+1)):
```

```
b1(n+1):=collect((b1(n+1),exp(sin(t)))):
y1(n+1):=int1;
y1(n+1):=simplify(y1(n+1)):
end do;
```

Örnek.4’ ün ADM ve VIM karşılaştırmalı Maple Programı

```
> x:=0.5;t1:=1.0;
```

$$x := 0.5$$

$$t1 := 1.0$$

```
> t:=t1;
```

$$t := 1.0$$

```
>
y(5):=evalf(1/549972423000*exp(sin(t))*(549972423000+274986211500*x^4+54997242
3000*x^2+22915517625*x^8+91662070500*x^6+759729915*x^12+4583103525*x^10+
103692690*x^14+10768383*x^16+718657*x^18+21945*x^20));
```

$$y(5) := 2.978652399$$

```
>
b1(5):=evalf((1+1/2*x^4+x^2+1/24*x^8+1/6*x^6+2489/1801800*x^12+1/120*x^10+11
89/6306300*x^14+6997/357357000*x^16+718657/549972423000*x^18+1/25061400*x^
20)*exp(sin(t)));
```

$$b1(5) := 2.978652398$$

```
> y(x,t):=evalf(exp(x^2+sin(t)));
```

$$y(0.5, 1.0) := 2.978652405$$

```
> hata:=abs(y(x,t)-y(5));
```

$$hata := 0.6\ 10^{-8}$$

```
> hata1:=abs(y(x,t)-b1(5));
```

$$hata1 := 0.7\ 10^{-8}$$

EK-4. Zamana Bağlı Dalga Denklemi Örneği

Örnek.5' in ADM için Maple Programı

```
> restart;
>
> r:=2;
```

$$r := 2$$

$$b(0) := 0$$

```
>
> y(0):=exp(-t)+int(x^(-r)*int(x^r*(12*x-5*x^3-4*x^5),x=0..x),x=0..x);
```

$$y(0) := e^{(-t)} - \frac{x^7}{14} - \frac{x^5}{6} + x^3$$

```
> b(0):=y(0);
```

$$b(0) := e^{(-t)} - \frac{x^7}{14} - \frac{x^5}{6} + x^3$$

```
> for n from 0 by 1 to 4 do
> denk(n):=((5+4*x^2)*y(n)+diff(y(n),t,t));
> int1:=int(x^(-r)*int(x^r*denk(n),x=0..x),x=0..x);
b(n+1):=b(n)+int1;
> y(n+1):=int1;
> y(n+1):=simplify(y(n+1)):
> end do;
```

Örnek.5' in VIM için Maple Programı

```
> restart;
> y(0):=exp(-t);
```

$$y(0) := e^{(-t)}$$

```
> for n from 0 by 1 to 4 do
L(n):=(s^2/x-s);
```

```
b(n):=y(n);
y(n):=subs(x=s, y(n));
y(n);

> denk(n):=(diff(y(n),s,s)+2/s*diff(y(n),s)-(5+4*s^2)*y(n)-diff(y(n),t,t)-(12*s-5*s^3-
4*s^5));
>
> b(n);
>
> y(n+1):=b(n)+int(L(n)*denk(n),s=0..x):
y(n+1):=simplify(y(n+1)):
end do;
```

Örnek.5’ in ADM ve VIM karşılaştırmalı Maple Programı

```
> restart;
> x:=0.5;t1:=1.0;
> t:=t1;
```

$$x := 0.5$$

$$t1 := 1.0$$

$$t := 1.0$$

```
> b(5):=evalf(-125/6974263296*x^15+2489/1801800*exp(-t)*x^12+1/120*exp(-
t)*x^10-33743/1267136462592*x^19-9125/266765571072*x^17+exp(-
t)+x^3+6997/357357000*exp(-t)*x^16+1189/6306300*exp(-t)*x^14+1/25061400*exp(-
t)*x^20+718657/549972423000*exp(-t)*x^18+1/24*exp(-t)*x^8+1/6*exp(-t)*x^6-
68880157/28051233440630400*x^23-248309/22867853348340*x^21+1/2*exp(-
t)*x^4+exp(-t)*x^2-1/68684338800*x^27-44581529/1519441811136748000*x^25);
```

$$b(5) := 0.5973665518$$

```
> y(5):=evalf(1/24*x^8*exp(-t)+1/6*x^6*exp(-t)+2489/1801800*x^12*exp(-
t)+1/120*x^10*exp(-t)+1/2*x^4*exp(-t)+exp(-t)*x^2-125/145297152*x^13-
```

25/17791488*x^15+1189/6306300*x^14*exp(-t)+6997/357357000*x^16*exp(-t)-1/363409200*x^23-449623/10163490377040*x^21+718657/549972423000*x^18*exp(-t)-30001/33345696384*x^17+x^3+exp(-t)+1/25061400*x^20*exp(-t)-457/1611640800*x^19);

$$y(5) := 0.5973665517$$

> **y(x,t):=evalf(x^3+exp(x^2-t));**

$$y(0.5, 1.0) := 0.5973665527$$

> **hata1:=abs(y(x,t)-b(5));**

$$hata1 := 0.9\ 10^{-9}$$

> **hata2:=abs(y(x,t)-y(5));**

$$hata2 := 0.10\ 10^{-8}$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı	: BATTAL Emel
Uyruğu	: T.C
Doğum Tarihi ve Yeri	: 16.10.1986 Uşak
Medeni Hali	: Bekar
Telefon	: 0535 719 70 09
e-mail	: emel_bttl@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Tezli Yüksek Lisans	Uşak Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2012
Tezsiz Yüksek Lisans	Muğla Üniversitesi/ Matematik Öğretmenliği	2009
Lisans	Muğla Üniversitesi / Matematik Bölümü	2008
Lise	İzzettin Çalışlar Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2012	Seçkin Grup Dershanesi	Matematik Öğretmenliği

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Resim yapmak, kitap okumak, bisiklete binmek, yürüyüş yapmak, müzik dinlemek.