T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LEBESGUE DELTA ve LEBESGUE NABLA İNTEGRALİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZİFE ŞAHİN

2013

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LEBESGUE DELTA ve LEBESGUE NABLA İNTEGRALİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZİFE ŞAHİN

UŞAK 2013

Nazife ŞAHİN tarafından hazırlanan **"Lebesgue Delta ve Lebesgue Nabla İntegrali"** adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ……………………………..
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU ……………………………..
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Abdullah YILDIZ ……………………………..
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali DENİZ ……………………………..
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: 03 / 09 / 2013

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet AKTAŞ ……………………………..
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nazife ŞAHİN

LEBESGUE DELTA ve LEBESGUE NABLA İNTEGRALLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Nazife ŞAHİN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2013

ÖZET

Lebesgue delta ve Lebesgue nabla ölçümü ilk olarak Guseinov tarafından 2003' te tanımlanmış, daha geniş bir çalışmayla Guseinov ve Bohner, Lebesgue delta-integral ve Riemann delta-integral arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. 2004' te Cabada delta-ölçümü ve Lebesgue delta-integralini çalışmıştır.

Bu tezde, Burkinshaw'ın "Principles of Real Analysis" adlı kitabında ölçü teorisine ilişkin temel tanım ve özellikleri kullanarak zaman skalasında ölçü inşa ettik. Bu çalışmanın ikinci bölümünde, ölçü kuramıyla ilgili temel tanım ve teoremler, üçüncü bölümde, Merdiven Fonksiyonlar, Üst Fonksiyonlar, İntegrallenebilir Fonksiyonlar, dördüncü bölümde Lebesgue İntegrali ve Riemann İntegrali Arasındaki Bağıntı, beşinci bölümde, Zaman Skalası, Zaman Skalasında Ölçü Teorisi, Δ-Ölçülebilir Fonksiyonlar, Lebesgue Δ-İntegrali ve Lebesgue Δ-İntegrali ile Riemann Δ-İntegrali Arasındaki Bağıntı kavramlarıyla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Bilim Kodu: 403.03.00

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Ölçülebilirlik, Lebesgue Delta İntegrali

Sayfa Adedi: 139

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit SEYYİDOĞLU

LEBESGUE DELTA ve LEBESGUE NABLA INTEGRALS

(M. Sc. Thesis)

Nazife ŞAHİN

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

2013

ABSTRACT

Lebesgue Delta and Lebesgue Nabla Measure was identified by Guseinov first in 2003. Then in a further study relationship between Lebesgue Delta Integral and Riemann Delta Integral were introduced by Guseinov and Bohner, In 2004, Cabada worked the Classical Lebesgue Measure ,the Classical Lebesgue Integral, Lebesgue Delta Measure and Lebesgue Delta Integral.

In this thesis, we have adapted basic concepts of the measure theory to time scales, by using definitions and properties given in the book of Burkinshaw's "Principles of Real Analysis". In the second part of this study; the basic definitions and theorems of the theory of measurement, in the third section; Step Functions, Upper Functions, Integrable Functions, the fourth chapter; Lebesgue Integral and Riemann Integral Relationship Between, the fifth chapter; Time Scales, Measure Theory on Time Scales, Δ-Measurable Functions , Lebesgue Δ -Integral, Relationship Between Lebesgue Δ-Integral of Riemann Δ -Integral the concepts and definitions and theorems are given.

Science Code: 403.03.00

Key Words: Time Scales, Measurability, Lebesgue Delta Integral

Page Number: 139

Adviser: Asst. Prof. M. Seyyit SEYYIDOGLU

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamı yaptığım süre boyunca, büyük fedakârlık göstererek sabır ve dikkatle çalışmalarımda bana rehberlik eden kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Seyyit Seyyidoğlu' na ve her zaman yanımda olan canımdan çok sevdiğim aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathcal{S}$	Yarı halkalar sınıfı
μ	Ölçü fonksiyonu
μ^*	Dış ölçü fonksiyonu
Λ	Ölçülebilir kümelerin sınıfı
$\mathcal{R}$	Halka
λ	Lebesgue ölçü fonksiyonu
λ^*	Lebesgue dış ölçü fonksiyonu
s(A)	*A* kümesinin eleman sayısı
P(X)	*X* kümesinin kuvvet kümesi
H.h.y.	Hemen her yerde
χ_E	E kümesinin karakteristik fonksiyonu
f^+, f^-	*f* fonksiyonunun negatif olmayan parçaları
$f \vee g$	*f* fonksiyonu ile *g* fonksiyonunun maksimumu
$f \wedge g$	*f* fonksiyonu ile *g* fonksiyonunun minimumu
$\mathrm{I}(\phi)$	ϕ merdiven fonksiyonunun Lebesgue integrali

$\mathcal{U}$	Üst fonksiyonların sınıfı
(X,S,μ)	Ölçü uzayı
$[a,b]$	Kapalı aralık
$[a,b)$	Sağdan açık soldan kapalı aralık
$(a,b]$	Sağdan kapalı soldan açık aralık
(a,b)	Açık aralık
P	Bir aralığın parçalanması
$\wp$	Bir aralığın tüm P parçalanmalarının kümesi
M_i	$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
m_i	$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$S_*(f,P)$	Alt Darboux toplamı
$S^*(f,P)$	Üst Darboux toplamı
$I_*(f,P)$	f fonksiyonunun alt darboux integrali
$I^*(f,P)$	f fonksiyonunun üst darboux integrali
T	Zaman Skalası
R	Reel sayılar kümesi
Z	Tam sayılar kümesi
N	Doğal sayılar kümesi
N_0	Negatif olmayan tam sayılar kümesi

σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Sıçrama fonksiyonu
f^{Δ}	*f* fonksiyonunun delta türevi
$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]_{\mathrm{T}}$	Zaman skalasındaki kapalı aralık
μ_{Δ}	Lebesgue delta ölçü fonksiyonu
μ_{∇}	Lebesgue nabla ölçü fonksiyonu
$\mathcal{M}\left(m_1^{*}\right)$	Tüm delta ölçülebilir kümelerin sınıfı
$\mathcal{M}\left(m_2^{*}\right)$	Tüm delta ölçülebilir kümelerin sınıfı
$\Im_1$	$[a,b)_{\mathrm{T}}$ şeklindeki aralıkların oluşturduğu sınıf
$\Im_2$	$(a,b]_{\mathrm{T}}$ şeklindeki aralıkların oluşturduğu sınıf
$\int\limits_{E} S(s)\Delta s$	Basit fonksiyonun Lebesgue delta integrali

1.GİRİŞ

On dokuzuncu yüzyılın sonlarında matematiksel analizin ilgi alanı neredeyse sürekli fonksiyonlar alanı ile sınırlı durumdaydı. Giderek daha sık karşılaşılmaya başlanan alışılmadık fonksiyonlarla başa çıkabilmek için yapay kısıtlamalar koymak zorunluluk haline gelmişti. Riemann'ın integral alma yöntemi, fonksiyonun sürekli, sınırlı salınımlı veya monoton olması gibi ağır bir takım şartlar altında çalışmaktaydı. Emile Borel, Camile Jordan ve başka matematikçilerin geliştirmiş oldukları ölçüm ve kuramından esinlenen Lebesgue, bu teoriyi bir adım daha ileri götürerek bugün kendi adı ile anılan integrali inşa etmiştir. Modern reel analizin en büyük başarılarından biri olarak bakabileceğimiz Lebesgue integral teorisine göre, sınırlı ve ölçülebilen her fonksiyon, Lebesgue ölçüsü sıfır olan kümeler dışında belirsiz integralinin türevine eşittir. Daha açık bir ifadeyle, sınırlı ve ölçülebilir her fonksiyon Lebesgue anlamında integrallenebilir.

Lebesgue integralinin inşası, Riemann integralinin inşa edilişinden daha karmaşıktır ve daha çok emek ister. Bunun için önce Lebesgue ölçü kuramını geliştirmek gerekir. Bu nedenle Lebesgue, önce ölçüm teorisi üzerinde çalışmalar yaparak, reel sayıların altcümlelerinin ve reel değerli fonksiyonların ölçülebilme kavramlarını ortaya atmıştır. Bu konuda hazırladığı teze, jüri üyelerinin önce itiraz ettiği, sonra doktora yöneticisinin ricasıyla, "Bu öğrenci çok zeki ve bana düşündürücü sorular sorar" diyerek onları razı ettiği söylenir. Bu söylenti doğru da olsa yanlışta olsa, Lebesgue tarafından bu çalışma yayınlandığında, bu buluş tüm dünyada bir bomba etkisi yaratmış ve tüm matematikçileri bu konuda çalışmaya ve yeni yeni buluşları gerçekleştirmeye yöneltmiştir. Bu kuramın çok daha geniş bir biçimde meyveleri alınmıştır. Oldukça uygulama alanları bulmuş ve sürekli genelleştirmeleri yapılmıştır. Bunun ötesinde, matematiğin diğer dallarında da yeni ufuklar açarak, gelişmelerine imkan sağlamıştır.

Son zamanlarda dikkat çeken yeni çalışma alanlarından birisi de zaman skalası teorisidir.

Zaman skalası kavramı, kesikli analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Hilger bunun için her iki analizde kullanabileceği kümeleri göz önüne almış ve bu kümelere zaman skalası adını vermiştir.

Bu çalışmada klasik Lebesgue ölçü teorisine ait temel tanım ve teoremler verildi. Özellikle Yarıhalkalar, Yarıhalkalar Üzerine İnşa Edilen Ölçü, Dış Ölçü, Bir Ölçü Tarafından Üretilen Dış Ölçü, Ölçülebilir Küme, Ölçünün Caratheodary Genişlemesi, Ölçülebilir Fonksiyon, İntegrallenebilir Fonksiyon kavramları baz alınarak bunlara ilişkin temel tanım ve teoremler zaman skalasında inşa edildi. Ayrıca zaman skalasına uyarlanan ölçünün, klasik Lebesgue ölçüsünden farklı olduğu gözlemlendi. Klasik Lebesgue ölçüsünde tek nokta kümelerinin ölçüsü sıfır iken zaman skalasında inşa edilen ölçü için tek nokta kümelerinin ölçüsü sıfırdan farklı olabilir. Bu durum zaman skalasındaki noktanın karakterine bağlıdır. Eğer t_0 noktası zaman skalasının maksimum noktası ise $\{t_0\}$ tek nokta kümesinin delta ölçüsü sonsuzdur. t_0 noktası maksimumu çıkarılmış bir zaman skalasının elemanı olduğunda ise $\{t_0\}$ tek nokta kümesinin delta ölçüsü $\mu_\Delta(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0$ olarak tarif edilir. Fakat her iki ölçü teorisinde de $a,b \in \mathbb{T}$ ve $a \leq b$ olmak üzere $[a,b],[a,b),(a,b),(a,b]$ şeklindeki aralıkların ölçüsü bu aralıkların uç noktalarının farkına eşittir.

Bu tezde ele alınan konulardan biri de Riemann delta integrali ile Lebesgue delta integrali arasındaki ilişkidir. Riemann integrallenebilir her fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olduğunu ve sınırlı reel değerli bir f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartın fonksiyonun hemen her yerde sürekli olması durumunu klasik ölçü teorisinden biliyoruz. Bu verilerden faydalanarak zaman skalasında bu durumun nasıl olduğunu görmüş olduk.

2.ÖLÇÜ TEORİSİ

Ölçü teorisi, 20. yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır. Bu zamanda fonksiyonların yapısını en iyi bir şekilde anlamak için Euclidean uzayının altkümelerinde çalışmak gerekliydi. Bu kümelerde çalışmak için klasik alan, hacim ve uzunluk kavramlarının genelleştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur.

Bugün Borel kümeleri olarak bilinen reel sayıların altkümelerinde bir ölçü teorisini ilk olarak E. Borel 1898'de inşa etmiştir. 1902'de H. Lebesgue, Lebesgue ölçüsünü ve ölçü teorisinde integrali çalışmıştır. 1918 yılında C. Caratheodory, dış ölçü kavramını ve dış ölçünün özelliklerini incelemiştir. Özellikle 20. yüzyılın ilk yarısında diğer gelişmeler bu teoriyi takip etmiştir.

Bu bölümde, Kümeler Cebri ve Yarıhalkalar, Yarıhalkalarda Ölçü ve Dış Ölçü, Bir Ölçü Tarafından Üretilen Dış Ölçü, Ölçülebilen Fonksiyon, Basit ve Merdiven Fonksiyon kavramları incelenerek bunlara ait teoremler verilecektir.

2.1. Kümeler Cebri ve Yarıhalkalar

Bu kısımda, kümelerde yarıhalka kavramının ve buna ilişkin teoremlerin ne olduğu üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.1. (Yarıhalka). $X \neq \varnothing$ bir küme ve X'in altkümelerinin bir sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{S}$ sınıfına, X üzerinde yarıhalka denir:

i. $\varnothing \in \mathcal{S}$.

ii. $A, B \in \mathcal{S}$ ise $A \cap B \in \mathcal{S}$.

iii. $A, B \in \mathcal{S}$ ise $A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ sınıfına ait ayrık $C_1, C_2, ..., C_n$ kümeleri vardır [1].

Tanım 2.2. ($\sigma -$ Küme). $\mathcal{S}$ sınıfı, X üzerinde bir yarıhalka olsun. $A \subset X$ kümesi, $\mathcal{S}$ sınıfına ait ayrık bazı kümelerin sayılabilir birleşimleri şeklinde yazılabiliyorsa A'ya $\sigma -$ küme denir [1].

Teorem 2.3. $\mathcal{S}$ bir yarıhalka olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler sağlanır:

i. $A, A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ ise $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ cümlesi $\mathcal{S}$ sınıfına ait ayrık cümlelerin sonlu birleşimi şeklinde yazılabilir. (Yani $\sigma -$ kümedir.)

ii. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S}$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ bir $\sigma -$ kümedir.

iii. $\sigma -$ kümelerin sayılabilir birleşimleri ve sonlu adetteki kesişimleri de bir $\sigma -$kümedir [1]·

İspat. i. İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım. $n = 1$ için $A - A_1$ olur ki bu ise yarıhalka tanımından açıktır. Şimdi, $A, A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$B = A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \quad \left(B_1, B_2, ..., B_k \in \mathcal{S}, B_i \cap B_j = \varnothing, i \neq j\right)$$

olduğunu kabul edelim ve bunun $n+1$ için sağlandığını gösterelim. Buna göre $A_{n+1} \in \mathcal{S}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A - \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i &= A - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) \\
&= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right)^t \\
&= \left(A \cap \bigcap_{i=1}^{n} A_i^t\right) \cap \left(A \cap A_{n+1}^t\right) \\
&= \left(A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(A \cap A_{n+1}^t\right) \\
&= B \cap A \cap A_{n+1}^t \quad (B \subset A) \\
&= B \cap A_{n+1}^t = B - A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} B_i - A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k} \left(B_i - A_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Her bir i için $B_i - A_{n+1}$ kümesini $\mathcal{S}$ sınıfına ait ayrık cümlelerin sonlu birleşimi şeklinde yazabiliriz. Daha açık ifade edecek olursak; her i, j için $C_{ij} \in \mathcal{S}$ ve C_{ij} kümeleri her iki indise göre ayrık olmak üzere

$$B_i - A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak

$$A - \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{m_i} C_{ij}$$

bulunur ki bu ise göstermek istediğimizdir.

ii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$ olmak üzere $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. Önce $n \geq 1$ için

$$B_1 = A_1,\ B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

şeklinde tanımlanan B_n kümelerinin ayrık ve $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A$ olduğunu gösterelim. B_n kümelerinin ayrık olduğunu göstermek için $r \neq s$ olmak üzere $B_r \cap B_s = \emptyset$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için $r > s$ alalım. Bu durumda $r - 1 \geq s$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
B_r \cap B_s &= \left(A_r - \bigcup_{i=1}^{r-1} A_i\right) \cap \left(A_s - \bigcup_{i=1}^{s-1} A_i\right) \\
&= \left(A_r \cap \bigcap_{i=1}^{r-1} A_i^t\right) \cap \left(A_s \cap \bigcap_{i=1}^{s-1} A_i^t\right) \\
&= A_r \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots \cap A_{r-1}^t \cap A_s \cap A_1^t \cap \ldots \cap A_{s-1}^t \\
&= A_r \cap A_1^t \cap A_2^t \cap \ldots \cap A_s^t \cap A_s \cap A_1^t \cap \ldots \cap A_{s-1}^t \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (i) hatırlanacak olursa her bir B_n kümesini

$$B_n = \bigcup_{m=1}^{k_n} C_{mn}$$

biçiminde yazabiliriz. (Her bir m ve n için $C_{mn} \in \mathcal{S}$ ve C_{mn} kümeleri her iki indise göre ayrıktır). Böylece A kümesi $\mathcal{S}$ sınıfına ait ayrık kümelerin sayılabilir birleşimi şeklinde yazılmış oldu. Yani A bir $\sigma-$kümedir.

iii. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S}$ kümelerinin her biri $\sigma-$küme olsun. Bu takdirde $A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{mn}$ olacak şekilde $C_{mn} \in \mathcal{S}$ kümeleri vardır. (Buradaki C_{mn} kümeleri m indisine göre ayrıktır). Böylece,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{mn}$$

yazılabilir. (ii)'de $\mathcal{S}$ sınıfına ait kümelerin sayılabilir birleşimlerinin $\sigma-$küme olduğunu göstermiştik. Öyleyse $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bir σ_kümedir. $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ kümelerinin her biri $\sigma-$küme olsun. $A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{mi}$ olacak şekilde $C_{mi} \in \mathcal{S}$ kümeleri vardır. Buradan

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcup_{m=1}^{\infty} C_{mi} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k} C_{mi}$$

olur ki bu ise $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ kümesinin bir $\sigma-$küme olduğunu gösterir.

Tanım 2.4. (Cebir). $X \neq \emptyset$ bir küme ve X'in altkümelerinin boştan farklı bir sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{S}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{S}$'ye X üzerinde cebir adı verilir:

i. $A, B \in \mathcal{S}$ ise $A \cap B \in \mathcal{S}$.

ii. $A \in \mathcal{S}$ ise $A^t \in \mathcal{S}$ [1].

Teorem 2.5. $X \neq \emptyset$ üzerindeki $\mathcal{S}$ cebri için aşağıdaki durumlar sağlanır:

i. $\emptyset, X \in \mathcal{S}$.

ii. $\mathcal{S}$ cebri sonlu birleşim ve sonlu arakesitler altında kapalıdır.

iii. $\mathcal{S}$ bir yarıhalkadır [1].

İspat. i. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ olduğundan en az bir $A \in \mathcal{A}$ vardır. $\mathcal{A}$ cebir olduğundan $A^t \in \mathcal{A}$ 'dir. Cebrin (i)özelliğinden $\emptyset = A \cap A^t \in \mathcal{A}$ eldeedilir.(ii)özelliğinden $\emptyset^t = X \in \mathcal{A}$ bulunur.

ii. Sonlu arakesit altında kapalılık cebrin (i) özelliğinden kolayca görülebilir.

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesini,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^t\right)^t$$

şeklinde yazabiliriz. Burada her i için $A_i \in \mathcal{A}$ olduğundan cebrin (ii) özelliği gereğince $A_i^t \in \mathcal{A}$ olur. İspatın ilk kısmından $\bigcap_{i=1}^{n} A_i^t \in \mathcal{A}$ ve (ii)' den $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^t\right)^t \in \mathcal{A}$ sonucu çıkar.

Yani $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (sonlu birleşimler altında kapalı) dır.

iii. $\mathcal{A}$'nin yarıhalka olduğu

$$A - B = A \cap B^t$$

eşitliğinden görülebilir. Gerçekten $A, B \in \mathcal{A}$ olduğundan bu eşitlikten $A - B \in \mathcal{A}$ olduğu görülebilir. Ayrıca,

$$A - B = (A - B) \cup \emptyset$$

yazılabileceğinden istenilen gösterilmiş olur.

Örnek 2.6. X bir topolojik uzay olsun.

$\mathcal{A} = \{C \cap O : C \text{ kapalı}, O \text{ açık küme}\} = \{C_1 - C_2 : C_1 \text{ ve } C_2 \text{ kapalı}\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{A}$ sınıfı X'in altkümelerinin bir yarıhalkasıdır.

Çözüm: $\emptyset = \emptyset \cap \emptyset$ ve $X = X \cap X$ olduğundan $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ olur. $A, B \in \mathcal{A}$ olmak üzere $A = C_1 \cap O_1$, $B = C_2 \cap O_2$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A \cap B &= (C_1 \cap O_1) \cap (C_2 \cap O_2) \\ &= (C_1 \cap C_2) \cap (O_1 \cap O_2) \end{aligned}$$

eşitliğinden $A \cap B \in \mathcal{A}$ elde edilir. Yani $\mathcal{A}$ sonlu arakesitler altında kapalıdır.

$$
\begin{aligned}
A-B &= (C_1\cap O_1)-(C_2\cap O_2) \\
&= (C_1\cap O_1)\cap(C_2\cap O_2)^t \\
&= (C_1\cap O_1)\cap\left(C_2^t\cup O_2^t\right) \\
&= (C_1\cap O_1)\cap\left[C_2^t\cup\left(O_2^t\cap C_2\right)\right] \\
&= \left[C_1\cap\left(O_1\cap C_2^t\right)\right]\cup\left[\left(C_1\cap C_2\cap O_2^t\right)\cap O_1\right]
\end{aligned}
$$

olmak üzere $U=C_1\cap\left(O_1\cap C_2^t\right)$ ve $V=\left(C_1\cap C_2\cap O_2^t\right)\cap O_1$ alırsak $U,V\in\mathcal{S}$ ve $U\cap V=\varnothing$ olur. Bu ise $\mathcal{S}$ sınıfının yarıhalka olması demektir.

Örnek 2.7. $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $a\le b$ olsun. $a=b$ ise $\left[a,b\right)=\varnothing$ diyelim. $a<b$ ise $\left[a,b\right)=\left\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\right\}$ aralıklarını göz önüne alalım. $\mathcal{S}=\left\{\left[a,b\right): a,b\in\mathbb{R},\ a\le b\right\}$ sınıfı $\mathbb{R}$ üzerinde bir yarıhalka olup cebir değildir. Çünkü $\left[a,b\right)=\mathbb{R}$ olacak şekilde $a,b\in\mathbb{R}$ yoktur. Örneğin,

$$\left[1,2\right),\left[3,4\right)\in\mathcal{S} \text{ iken } \left[1,2\right)\cup\left[3,4\right)\notin\mathcal{S} \text{ dir.}$$

Örnek 2.8. $X=\left[0,1\right)$ olmak üzere, $\mathcal{S}=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_i,b_i\right):\left[a_i,b_i\right)\subset\left[0,1\right),\ i=1,2,\dots,n\right\}$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{S}$ sınıfının bir cebir olduğunu gösterelim.

Çözüm: i. $A\in\mathcal{S}$ olmak üzere $A=\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_i,b_i\right)$ olsun. Burada özel olarak her bir i için $a_i=b_i$ alınırsa $A=\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_i,b_i\right)=\varnothing\in\mathcal{S}$ olur.

ii. $A,B\in\mathcal{S}$ olmak üzere

$A=\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_i,b_i\right)$, $B=\bigcup_{j=1}^{m}\left[c_j,d_j\right)$ alalım. Buradan,

$$
\begin{aligned}
A\cap B &= \left(\bigcup_{i=1}^{n}\left[a_i,b_i\right)\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}\left[c_j,d_j\right)\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\left(\left[a_i,b_i\right)\cap\left[c_j,d_j\right)\right)
\end{aligned}
$$

olur. Her i,j için $[a_i,b_i)\cap[c_j,d_j)=[\alpha_t,\beta_t)\subset[0,1)$ olacak şekilde $t=1,2,...,k$ sayıları bulabiliriz. Böylece,

$$A\cap B=\bigcup_{t=1}^{k}[\alpha_t,\beta_t)\in\mathcal{S}$$

olduğu görülür. Ayrıca $A\cup B\in\mathcal{S}$ dir. Yani $\mathcal{S}$, sonlu arakesitler ve sonlu birleşimler altında kapalıdır.

iii. $A=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\in\mathcal{S}$ ise

$$\begin{aligned}[0,1)-A&=[0,1)-\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\\&=[0,1)\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\right)^t\\&=[0,1)\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}[a_i,b_i)^t\right)\\&=\bigcap_{i=1}^{n}\left([0,1)\cap[a_i,b_i)^t\right)\\&=\bigcap_{i=1}^{n}\left([0,1)-[a_i,b_i)\right)\end{aligned}$$

olup, her $[0,1)-[a_i,b_i)$; $[a,b)$ şeklindeki kümelerin sonlu birleşimi şeklinde yazılabilir. Daha açık bir ifadeyle her i için

$$[0,1)-[a_i,b_i)=[0,a_i)\cup[b_i,1)$$

olur. Buradan

$$[0,1)-A=\bigcap_{i=1}^{n}\left([0,a_i)\cup[b_i,1)\right)$$

elde edilir. Bu üç şart altında $\mathcal{S}$ sınıfının bir cebir olduğunu görmüş olduk.

Tanım 2.9. (Halka). $X \neq \varnothing$ bir cümle ve X'in altkümelerinin boştan farklı bir sınıfı $\mathcal{R}$ olsun. $\mathcal{R}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu sınıfa X üzerinde halka denir:

i. $A,B \in \mathcal{R}$ ise $A \cup B \in \mathcal{R}$.
ii. $A,B \in \mathcal{R}$ ise $A - B \in \mathcal{R}$ [1].

Eğer $\mathcal{R}$ bir halka ise $\varnothing \in \mathcal{R}$ olmak zorundadır. Gerçekten $\mathcal{R} \neq \varnothing$ olduğundan en az bir $A \in \mathcal{R}$ vardır. Halkanın (ii). özelliğinden $\varnothing = A - A \in \mathcal{R}$ elde edilir. Her cebrin bir halka olduğu açıktır. Her halka da aynı zamanda bir yarıhalkadır. Yarıhalkanın (i) ve (iii) şartlarının sağlandığı açıktır. (ii) ise $A \cap B = A - (A - B)$ eşitliğinden elde edilir.

Tanım 2.10. (σ – cebir). $\mathcal{A}$ sınıfı X üzerinde bir cebir olsun. Eğer $\mathcal{A}$ sınıfından alınan sayılabilir adetteki kümelerin birleşimleri $\mathcal{A}$ sınıfına ait oluyor ise, $\mathcal{A}$ ailesine X üzerinde bir $\sigma-$cebir adı verilir. Daha açık bir ifade ile yazacak olursak,

i. $A,B \in \mathcal{A}$ ise $A \cap B \in \mathcal{A}$,

ii. $A \in \mathcal{A}$ ise $A^t \in \mathcal{A}$,

iii. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^t\right)^t$$

şartlarını sağlayan $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde sigma cebir diyeceğiz [1].

$$\sigma-\text{cebir} \Rightarrow \text{Cebir} \Rightarrow \text{Halka} \Rightarrow \text{Yarıhalka}$$

Tanım 2.11. Bir $X \neq \varnothing$ kümesinin bazı altkümelerinden oluşan $\mathcal{F}$ sınıfını ihtiva eden $\sigma-$cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{F}$ sınıfının ürettiği σ – cebir denir [1].

$X = \{1,2,3\}$ ve $\mathcal{F} = \{\{1\}\}$ alınacak olursa $\mathcal{F}$ sınıfının ürettiği sigma cebir $\mathcal{A} = \{\{1\},\{2,3\},\varnothing,X\}$ olarak karşımıza çıkar.

Tanım 2.12. (Borel σ – cebri). (X,τ) bir topolojik uzay olsun. τ sınıfının ürettiği σ – cebrine Borel σ – cebri denir ve $\mathcal{B}$ ile gösterilir [1].

Örnek 2.13. X sayılamayan bir küme olsun.

$\mathcal{A}=\left\{E\subset X: E \text{ veya } E^t \text{ sayılabilir}\right\}$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{A}$ sınıfının, tek nokta kümelerinin ürettiği $\sigma-$ cebir olduğunu gösterelim.

Çözüm : Açıktır ki $\mathcal{A}$ sınıfı X kümesinin tek elemanlı altkümelerini ihtiva eder. Ayrıca $\mathcal{A}$ sınıfının her elemanı tek nokta kümeleri tarafından üretilen $\sigma-$ cebrin bir elemanıdır. Bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfının $\sigma-$ cebir olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\varnothing, X\in\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}$ sınıfının tümleme işlemi altında kapalı olduğu açıktır. $\{A_n\}\in\mathcal{A}$ alalım. Eğer A_n'ler sayılabilir ise sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri de sayılabilir olacağından $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ olur. Bazı k' lar için A_k kümeleri sayılamayan kümeler ise $(A_k)^t$ sayılabilir olup,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)^t\subset(A_k)^t$$

olur ki bu ise $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla buradan $\mathcal{A}$ sınıfının bir $\sigma-$ cebir olduğunu görmüş oluruz.

2.2. Yarıhalkalar Üzerine İnşa Edilen Ölçüler

Tanım 2.14. $X\neq\varnothing$ bir küme ve X üzerinde bir yarıhalka $\mathcal{A}$ olsun. $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{A}$ üzerinde ölçü denir:

i. $\mu(\varnothing)=0$.

ii. $A_1,A_2,...,A_n,...\in\mathcal{A}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ ise

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) \text{ [1].}$$

$(X,\mathcal{A},\mu)$ üçlüsüne ise ölçü uzayı denir [1].

Teorem 2.15. $(X,\mathcal{S},\mu)$ bir ölçü uzayı ise aşağıdaki şartlar sağlanır:

i. $A_1,A_2,...,A_n \in \mathcal{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$ ise,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right).$$ ($\mu-$ fonksiyonu sonlu toplamsaldır).

ii. $A,B\in\mathcal{S}$ ve $A\subset B$ ise, $\mu(A)\leq\mu(B)$. ($\mu-$ fonksiyonu monotondur) [1].

İspat. i. $A_1,A_2,...,A_n \in \mathcal{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$ olsun. $i>n$ için $A_i=\varnothing$ olarak tarif edersek, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ sınıfı $\mathcal{S}$ ailesine ait ayrık kümelerden oluşur. Ayrıca $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)&=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)\\&=\mu(A_1)+\mu(A_2)+...+\mu(A_n)+\mu(\varnothing)+\mu(\varnothing)+...\\&=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)+0+0...\\&=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $A,B\in S$ ve $A\subset B$ olsun. $\mathcal{S}$ sınıfından,

$$B-A=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

eşitliği sağlanacak şekilde ayrık $C_i\in\mathcal{S}$ kümelerini seçelim. $A\subset B$ olduğundan B kümesini,

$$B=A\cup(B-A)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece,

$$B = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \right)$$

$$= A \cup C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$$

olur. Dolayısıyla (i) yardımıyla,

$$\mu(B) = \mu(A \cup C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n)$$

$$= \mu(A) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + ... + \mu(C_n)$$

$$\geq \mu(A)$$

bulunur.

Örnek 2.16. (Sayma ölçüsü). X bir küme ve $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$ olsun. $A \subset X$ olmak üzere

$$\mu(A) = \begin{cases} s(A) & , A \ sonlu \\ \infty & , A \ sonsuz \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ fonksiyonu bir ölçüdür.

Örnek 2.17. (Dirac ölçüsü). $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$ olsun. Sabit bir $a \in X$ için

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & , a \in A \\ 0 & , a \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ fonksiyonu bir ölçüdür.

Teorem 2.18. $\mathcal{S}$ bir yarıhalka ve $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ bir küme fonksiyonu olsun. $\mu -$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde ölçü olması için gerek ve yeter şart;

i. $\mu(\emptyset) = 0$,

ii. $A, A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$ ise,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \le \mu(A),$$

iii. $A, A_1, A_2, ... \in \mathscr{S}$ ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ise,

$$\mu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \; (\mu - \text{fonksiyonu } \sigma - \text{ alttoplamsal})$$

olmasıdır [1].

İspat. $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki μ, $\mathscr{S}$ üzerinde ölçü olsun.

i. Açık

ii. $A, A_1, A_2, ..., A_n \in \mathscr{S}$ ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset A$ olsun. Teorem 2.3.(i) ‘den $A - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ olacak şekilde ayrık $B_i \in \mathscr{S}$ kümeleri vardır.

$$C_1 = A_1, C_2 = A_2, ..., C_n = A_n \text{ ve } C_{n+1} = B_1, C_{n+2} = B_2, ..., C_{n+m} = B_m$$

diyelim. Bu takdirde $C_1, C_2, ..., C_{n+m}$ kümeleri ayrık ve $A = \bigcup_{i=1}^{n+m} C_i$ olur. μ fonksiyonunun sonlu toplamsallık özelliğinden

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+m} C_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+m} \mu(C_i)$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

elde edilir.

iii. $A, A_1, A_2, ... \in \mathscr{S}$ ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ olsun. $B_1 = A_1$ ve $n \ge 1$ için $B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

diyelim. Bu durumda B_n kümeleri ayrık olup $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eşitliği ve her bir n için $B_n \subset A_n$ sağlanır. Teorem 2.3.(i) gereğince her bir B_n kümesi, $B_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n$ şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada $C_1^n, C_2^n, \ldots, C_{k_n}^n \in \mathcal{S}$ olup bu kümeler ayrıktır. Her bir n için $\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n \subset A_n$ olduğu ve (ii) dikkate alınırsa;

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n\right) = \sum_{i=1}^{k_n} \mu\left(C_i^n\right)$$

$$\leq \mu\left(A_n\right)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$A = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A \cap B_n\right)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k_n} C_i^n\right)\right]$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n}\left(A \cap C_i^n\right)$$

eşitliği ve μ fonksiyonunun σ – toplamsal olduğu dikkate alınırsa;

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu\left(A \cap C_i^n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu\left(C_i^n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi de (i), (ii) ve (iii) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Ölçünün ilk şartının sağlandığı açıktır. μ fonksiyonunun $\sigma-$toplamsal olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $A_n \in \mathcal{S}$ kümeleri ayrık olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \in \mathcal{S}$ olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için,

$$\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

olup ,

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

olur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

elde edilir. Eşitsizliğin tersi için (iii)' de $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ yazmak yeterlidir. Bu durumda

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

bulunur. Böylece,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

elde edilir.

Tanım 2.19. $\mathcal{S}$ bir yarıhalka olmak üzere $\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty]$ küme fonksiyonu,

i. $\mu(\varnothing) = 0$,

ii. $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$ 'ler ayrık ve $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$ ise,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i), \ (\mu - \text{sonlu toplamsal})$$

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{S}$ üzerinde sonlu ölçü adı verilir [1].

Teorem 2.20. (Heine-Borel).

$\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$ ve I herhangi bir indis kümesi olmak üzere reel sayıların açık altkümelerinin bir sınıfı $\{G_i\}_{i\in I}$ olsun. Eğer $[a,b]\subset\bigcup_{i\in I}G_i$ ise $\{G_i\}_{i\in I}$ sınıfından sonlu adette öyle $G_{i_1},G_{i_2},...,G_{i_n}$ kümeleri bulabiliriz ki; $[a,b]\subset\bigcup_{k=1}^{n}G_{i_k}$ olur [1].

Örnek 2.21. (Lebesgue Ölçüsü).

Örnek 2.7. deki $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde $\lambda\left(\left[a,b\right)\right)=b-a$ olarak tanımlanan λ fonksiyonu bir ölçüdür. Bu ölçüye Lebesgue ölçüsü denir [1].

Çözüm: λ ‘nın bir ölçü fonksiyonu olduğunu görmek için Teorem 2.18. in şartlarının sağlandığını görmek yeterlidir.

$a=b$ ise,

$$\lambda(\varnothing)=\lambda\left(\left[a,b\right)\right)=\lambda\left(\left[a,a\right)\right)=a-a=0$$

olduğu açıktır.

$[a_1,b_1),[a_2,b_2),...,[a_n,b_n)$ kümeleri ayrık olmak üzere;

$$\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\subset[a,b)$$

olsun. Genellikten bir şey kaybetmeksizin

$$a\le a_1\le b_1\le a_2\le b_2\le...\le a_n\le b_n\le b$$

olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(\left[a_i,b_i\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_{i+1}-b_i\right)$$

$$=b_n-a_1$$

$$\leq b-a=\lambda\left(\left[a,b\right)\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi Teorem 2.18.(iii) nin sağlandığını gösterelim. Bunun için,

$$\left[a,b\right)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[a_i,b_i\right)$$

olsun. $a=b$ olma durumu açıktır. $a<b$ olsun. $b-a>\varepsilon$ olacak şekilde keyfi bir $\varepsilon>0$ seçelim. $\delta>0$ sayısı da keyfi olmak üzere,

$$\left[a,b-\varepsilon\right]\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i-\frac{\delta}{2^i},b_i\right)$$

yazılabilir. Heine-Borel teoremi gereğince,

$$\left[a,b-\varepsilon\right]\subset\bigcup_{i=1}^{k}\left(a_{n_i}-\frac{\delta}{2^{n_i}},b_{n_i}\right)$$

olacak şekilde $\left(a_{n_i}-\dfrac{\delta}{2^{n_i}},b_{n_i}\right)$ aralıkları vardır. $\left(i=1,2,\ldots,k\right)$ Böylece,

$$\lambda\left(\left[a,b\right)\right)-\varepsilon=\left(b-a\right)-\varepsilon$$

$$=\left[a,b-\varepsilon\right] \text{ aralığının boyu}$$

$$<\sum_{i=1}^{k}\left(b_{n_i}-a_{n_i}+\frac{\delta}{2^{n_i}}\right)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left(b_i-a_i+\frac{\delta}{2^i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda([a_i,b_i)) + \delta$$

bulunur. Buradaki ε ve δ keyfi olduğundan,

$$\lambda([a,b)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda([a_i,b_i))$$

elde edilir. λ fonksiyonunun ölçü fonksiyonu olduğu görülür.

Örnek 2.22. X sayılamayan bir küme ve $\mathcal{S} = \{E \subset X : E \text{ veya } E^t \text{ sayılabilir}\}$ $\sigma -$cebrini göz önüne alalım.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & E, \text{sayılabilir} \\ 1 & E^t, \text{sayılabilir} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mu : \mathcal{S} \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ 'de bir ölçüdür.

2.3. Dış Ölçüler ve Ölçülebilir Kümeler

Tanım 2.23. (Dış Ölçü). X bir küme olmak üzere $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ küme fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde dış ölçü denir:

i. $\mu^*(\varnothing) = 0$.

ii. $\forall A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. (μ^*,monotondur.)

iii. X' in altkümelerinin her $\{A_n\}$ dizisi için

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) . \; (\mu^*, \sigma - \text{alttoplamsaldır }) \; [1].$$

Tanım 2.24. (Ölçülebilir Küme). X üzerinde bir dış ölçü μ^* olsun. Her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*\left(A\cap E^t\right)$$

oluyorsa $E\subset X$ kümesine ölçülebilir (μ^* -ölçülebilir) küme denir [1].

$$A=(A\cap E)\cup\left(A\cap E^t\right)$$

eşitliği ve μ^* ‘ın $\sigma-$ alttoplamsallığı göz önüne alındığında

$$\mu^*(A)\le\mu^*(A\cap E)+\mu^*\left(A\cap E^t\right)$$

eşitsizliğinin her zaman sağlandığı görülür. Bu nedenle bir E kümesinin ölçülebilir olduğunu görmek için her $A\subset X$ için

$$\mu^*(A)\ge\mu^*(A\cap E)+\mu^*\left(A\cap E^t\right)$$

olduğunu görmek yeterlidir. Ölçülebilir kümelerin ailesini Λ ile göstereceğiz.

Tanım 2.25. E bir küme olsun. Eğer $\mu^*(E)=0$ ise E kümesine μ^*- boş küme denir[1].

Teorem 2.26. Her μ^*-boş küme ölçülebilirdir [1].

İspat. $\mu^*(E)=0$ olsun. μ^*-fonksiyonu monoton olduğundan her $A\subset X$ için $\mu^*(A\cap E)=0$ olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\mu^*(A)&\le\mu^*(A\cap E)+\mu^*\left(A\cap E^t\right)\\&=0+\mu^*\left(A\cap E^t\right)\\&=\mu^*\left(A\cap E^t\right)\\&\le\mu^*(A)\end{aligned}$$

eşitsizliklerinden E kümesinin ölçülebilir olduğu görülür.

Teorem 2.27. $E_1, E_2, ..., E_n \in \Lambda$ kümeleri ayrık ise her $A \subset X$ için

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n (A \cap E_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) \qquad 2.1$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $n=1$ için, eşitliğin doğru olduğu açıktır.

Ayrık $E_1, E_2, ..., E_n \in \Lambda$ kümeleri için (2.1) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim ve $E_1, E_2, ..., E_n, E_{n+1} \in \Lambda$ kümeleri için

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} (A \cap E_i)\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_i)$$

olduğunu gösterelim.

Her $A \subset X$ için

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1}$$
$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}^t = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)$$

eşitliklerinden, E_{n+1} cümlesinin ölçülebilir olmasından ve (2.1)'den her $A \subset X$ için,

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} (A \cap E_i)\right) = \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right)\right)$$

$$= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap E_{n+1}^t\right)$$

$$= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right)$$

$$= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)\right)$$

$$= \mu^*\left(A\cap E_{n+1}\right) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*\left(A\cap E_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*\left(A\cap E_i\right)$$

elde edilir.

Teorem 2.28. Ölçülebilen kümelerin sınıfı olan Λ bir $\sigma-$cebirdir [1].

İspat. Öncelikle Λ sınıfının cebir olduğunu gösterelim.

i. $E\in\Lambda$ olsun. Bu takdirde her $A\subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*\left(A\cap E^t\right)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte özel olarak $E = E^t$ alırsak;

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(A\cap E^t\right) + \mu^*\left(A\cap\left(E^t\right)^t\right)$$

$$= \mu^*\left(A\cap E^t\right) + \mu^*(A\cap E)$$

ifadesinden $E^t \in \Lambda$ olduğunu görürüz.

ii. $\mu^*(\varnothing) = 0$ olduğundan $\varnothing\in\Lambda$ dır. Ayrıca (i) den $\varnothing^t = X \in \Lambda$ olduğu açıktır.

iii. $E_1, E_2 \in \Lambda$ ve $A\subset X$ olsun.

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup \left(E_1^t \cap E_2\right) \text{ ve } \forall A\subset X \text{ için } A\cap(E_1\cup E_2) = (A\cap E_1)\cup\left(A\cap E_2\cap E_1^t\right)$$

eşitliklerini ve dış ölçünün σ-alttoplamsal özelliğini kullanarak;

$$\mu^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)\right) \le \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*\left(A\cap E_2\cap E_1^t\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $A\subset X$ için,

$$\mu^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)\right)+\mu^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)^t\right)$$

$$\leq \mu^*\left(A\cap E_1\right)+\mu*\left(A\cap E_2\cap E_1^t\right)+\mu^*\left(A\cap E_1^t\cap E_2^t\right) \qquad 2.2$$

olduğundan ve E_2'nin ölçülebilirliğinden

$$\mu^*(A)=\mu^*\left(A\cap E_2^t\right)+\mu^*\left(A\cap E_2\right) \qquad 2.3$$

yazılabilir. E_1'in ölçülebilirliği ve Teorem 2.28. gereğince (2.3) ifadesinde A'yı $A=A\cap E_1^t$ olarak alırsak,

$$\mu^*\left(A\cap E_1^t\right)=\mu*\left(A\cap E_2\cap E_1^t\right)+\mu^*\left(A\cap E_1^t\cap E_2^t\right) \qquad 2.4$$

olur. Bu son eşitlik (2.2) 'de yerine yazılırsa,

$$\mu^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)\right)+\mu^*\left(A\cap(E_1\cup E_2)^t\right)$$

$$\leq \mu^*\left(A\cap E_1^t\right)+\mu*\left(A\cap E_1\right) \quad (E_1\text{-ölçülebilir old. })$$

$$=\mu^*(A)$$

elde edilir. Buradan

$$E_1\cup E_2\in\Lambda$$

bulunur. Bu ise $E_1\cap E_2=\left(E_1^t\cup E_2^t\right)^t$ eşitliği gereğince $E_1\cap E_2\in\Lambda$ olması anlamına gelir. $E_1,E_2\in\Lambda$ ise $E_1-E_2=E_1\cap E_2^t$ olduğundan $E_1-E_2\in\Lambda$ dır. Yani Λ sınıfı bir cebirdir.

iv. Son olarak Λ sınıfının sayılabilir birleşim altında kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için $E_1,E_2,....,\in\Lambda$ olmak üzere $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$ ve $G_1=E_1$, $n\geq 1$ için $G_{n+1}=E_{n+1}-\bigcup_{i=1}^{n}E_i$

alalım. Bu durumda G_n kümeleri ayrık olup ve her bir n için $G_n \in \Lambda$ dır. Çünkü Λ sınıfı fark işlemi altında kapalıdır. Ayrıca,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

olduğunu da biliyoruz. $n \geq 1$ için $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ olsun. Her F_n ölçülebilir bir kümedir öyle ki $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$ dir. F_n ölçülebilir bir küme olduğundan her $A \subset X$ için,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*\left(A \cap F_n^t\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N} \text{ için, } F_n \subset E)$$

$$\geq \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

$$= \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right)\right) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap G_i) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

$$\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

$$\geq \mu^*(A)$$

elde edilir. Böylece Λ sınıfının bir $\sigma -$ cebir olduğu sonucu ortaya çıkar.

Teorem 2.29. μ^*, X 'de bir dış ölçü olsun. Bu durumda $\left(X, \Lambda, \mu^*\right)$ bir ölçü uzayıdır. Diğer bir ifadeyle μ^* fonksiyonunun tanım kümesinin Λ sınıfına kısıtlanması durumunda μ^* bir ölçü olur. Bu ölçüye, μ^* dış ölçüsünün ürettiği ölçü denir [1].

İspat. $E_1, E_2, ..., \in \Lambda$ ayrık kümeler ve $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ olsun. μ^*-fonksiyonunun $\sigma-$ alttoplamsallık özelliğinden,

$$\mu^*(E)=\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_n) \qquad 2.5$$

eşitsizliği mevcuttur. Diğer taraftan (2.1) eşitliği gereğince her bir k doğal sayısı için,

$$\sum_{n=1}^{k}\mu^*(E_n)=\sum_{n=1}^{k}\mu^*(E\cap E_n)=\mu^*\left(E\cap\left(\cup_{n=1}^{k}E_n\right)\right)\leq\mu^*(E)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $k\to\infty$ yapılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)\leq\mu^*(E) \qquad 2.6$$

elde edilir. (2.5) ve (2.6) ifadelerinden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(E)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.30. $A\subset B$ olmak üzere $A,B\in\Lambda$ olsun. Eğer $\mu^*(A)<\infty$ ise,

$$\mu^*(B-A)=\mu^*(B)-\mu^*(A)$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. $B=A\cup(B-A)$ ve $A\cap(B-A)=\varnothing$ eşitlikleri ve μ fınksiyonunun sonlu toplamsal olduğu göz önüne alınırsa

$$\mu^*(B)=\mu^*(A)+\mu^*(B-A)$$

yazılabilir ki bu ise görmek istediğimizdir.

2.4. Bir Küme Fonksiyonundan Dış Ölçü Elde Edilmesi

$\emptyset \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\mathcal{F}$, bir X kümesinin altkümelerinin bir sınıfı olsun. $\mu(\emptyset)=0$ olacak şekilde bir $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ küme fonksiyonu yardımıyla

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n): A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, A_n\in\mathcal{F}\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\mu^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\mathcal{F}$ sınıfında $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olacak şekilde A_n kümeleri yoksa $\mu^*(A)=\infty$ olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan μ^* fonksiyonuna μ küme fonksiyonunun ürettiği dış ölçü denir. Şimdi μ^* fonksiyonunun bir dış ölçü olduğunu gösterelim.

Teorem 2.31. $\mu:\mathcal{F}\to[0,\infty]$ küme fonksiyonunun ürettiği(doğurduğu) $\mu^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ küme fonksiyonu her $A\in\mathcal{F}$ için $\mu^*(A)\le\mu(A)$ eşitsizliğini sağlayan bir dış ölçüdür [1].

İspat. Öncelikle μ^* 'ın dış ölçü olduğunu gösterelim.

i. Her $A\subset X$ için $\mu^*(A)\ge 0$ olduğu açıktır. Eğer her n için $A_n=\emptyset$ ise,

$$0\le\mu^*(\emptyset)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\emptyset)=0$$

eşitsizliğinden $\mu^*(\emptyset)=0$ olduğu görülür.

ii. μ^* 'ın monotonluğu için $A\subset B$ olmak üzere $\{A_n\}\subset\mathcal{F}$, $B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ve $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n): B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, \{A_n\}\subset\mathcal{F}\right\}\subset\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n): A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n, \{A_n\}\subset\mathcal{F}\right\}$$

kapsama bağıntısı vardır. Küme küçüldükçe infimum büyüme eğiliminde olduğundan

$$\mu^*(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}\leq\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n):B\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}=\mu^*(B)$$

elde edilir. Sonuç olarak μ^* - monotondur.

iii. $\{A_n\}$ ‘ler X‘in altkümelerinin keyfi bir dizisi olsun. Eğer, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)=\infty$ ise sonuç

açıktır. Kabul edelim ki $\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)<\infty$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Her i için $\mathscr{F}$’ den $A_i\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^i$

ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n^i\right)\leq\mu^*(A_i)+2^{-i}\varepsilon$ bağıntıları sağlanacak şekilde bir $\left\{A_n^i\right\}$ dizisi seçelim. Her

i, n için $A_n^i\in\mathscr{F}$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^i$ olacağından

$$\begin{aligned}\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)&\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n^i\right)\\&\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_i)+2^{-i}\varepsilon\right)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\varepsilon\end{aligned}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)+\varepsilon$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\varepsilon>0$ sayısının keyfi olması nedeniyle

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla μ^* bir dış ölçüdür.

Diğer taraftan,

$$A = A \cup \varnothing \cup \varnothing \cup ...$$

olduğundan her $A \in \mathscr{F}$ için,

$$\mu^*(A) \le \mu(A) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + ...$$

$$= \mu(A)$$

eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

Teorem 2.32. $\mathscr{F}$, bir X kümesinin altkümelerinin bir sınıfı, $\mu(\varnothing) = 0$ olacak şekilde $\mu : \mathscr{F} \to [0,\infty]$ küme fonksiyonu, Φ de $\mathscr{F} \subset \Phi$ olmak üzere X 'in altkümelerinin bir sınıfı , $\nu : \Phi \to [0,\infty]$ küme fonksiyonu μ^* 'ın Φ 'ye kısıtlaması olsun. (Yani $\forall A \in \Phi$ için $\nu(A) = \mu^*(A)$ olsun). Bu durumda $\forall A \subset X$ için $\nu^*(A) = \mu^*(A)$ sağlanır [1].

İspat. $A \subset X$ olsun. Öncelikle $\mu^*(A) \le \nu^*(A)$ olduğunu gösterelim. Eğer $\nu^*(A) = \infty$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Kabul edelim ki $\nu^*(A) < \infty$ olsun. Bu durumda $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde Φ nin bir $\{A_n\}$ dizisi vardır. μ^* 'ın $\sigma-$ alttoplamsallık özelliğinden

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

$$\mu^*(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

elde edilir. Böylece,

$$\mu^*(A) \le \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) : \{A_n\} \subset \Phi, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} = \nu^*(A)$$

$$\mu^*(A) \le \nu^*(A) \qquad 2.7$$

bulunur.

Şimdi de eşitsizliğin diğer yönünü gösterelim.

$\mu^*(A)=\infty$ ise durum aşikardır. $\mu^*(A)<\infty$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Dolayısıyla,

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\leq\mu^*(A)+\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\{A_n\}\subset\mathscr{F}\subset\Phi$ dizisi vardır. Teorem 2.31. gereğince her *n* için

$$\mu^*(A_n)\leq\mu(A_n)$$

olup, infimumun özelliğinden

$$\nu^*(A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\leq\mu^*(A)+\varepsilon$$

$$\nu^*(A)\leq\mu^*(A)+\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan

$$\nu^*(A)\leq\mu^*(A) \qquad 2.8$$

eşitsizliği sağlanır. (2.7) ve (2.8) ifadelerinden istenilen eşitlik elde edilir.

2.5. Bir Ölçü Tarafından Üretilen Dış Ölçü

Bu kısımda $(X,\mathscr{S},\mu)$ üçlüsünü sabit bir ölçü uzayı olarak dikkate alacağız. Amacımız μ ölçüsü ile bunun ürettiği μ^* dış ölçüsü arasındaki ilişkiyi incelemek olacaktır. Bir küme fonksiyonundan bir dış ölçünün nasıl elde edilebileceğini daha önce görmüştük. $\mu:\mathscr{S}\to[0,\infty]$ ölçü fonksiyonu aynı zamanda bir küme fonksiyonu olduğundan μ ölçüsünün ürettiği μ^* dış ölçüsünden bahsedebiliriz.

Teorem 2.33. μ^* dış ölçüsü μ ölçüsünün bir genişlemesidir. Yani $\forall A\in\mathscr{S}$ için $\mu(A)=\mu^*(A)$ dır [1].

İspat. $A\in\mathscr{S}$ olsun. Teorem 2.31.'dan $\mu^*(A)\leq\mu(A)$ olması gerektiğini biliyoruz. Eşitsizliğin tersi için $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olacak şekilde $A_1,A_2,...\in\mathscr{S}$ alalım. Teorem 2.18.(iii) dikkate alınırsa,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

yazılabilir. Bu ise $\mu(A)$'nın $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ tipindeki elemanlardan oluşan kümenin bir alt sınırı olması demektir. Bu ise,

$$\mu(A) \leq \mu^*(A)$$

olmasını gerektirir.

Sonuç olarak μ^* dış ölçüsü μ ölçüsünün bir genişlemesidir. Bu genişlemeye μ'nün **Carathêodory genişlemesi** adı verilir [1].

Teorem 2.34. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve μ tarafından üretilen dış ölçü μ^* olsun. $E \subset X$ için aşağıdakiler denktir.

i. E cümlesi μ^* - ölçülebilirdir.

ii. $\mu(A) < \infty$ olacak şekilde her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\mu(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

iii. $\mu(A) < \infty$ olacak şekildeki her $A \in \mathcal{S}$ için

$$\mu(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

iv. Her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right) \quad \text{dır [1].}$$

İspat. (i)$\Rightarrow$(ii) ve (ii)$\Rightarrow$(iii) gerektirmeleri barizdir.

(iii)$\Rightarrow$(iv) $A \subset X$ alalım. $\mu^*(A) = \infty$ durumu açıktır.

$\mu^*(A) < \infty$ kabul edelim. $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$$

ve $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S}$ kümelerini bulabiliriz. Öyle ise her bir n için $\mu(A_n) < \infty$ olmalıdır. Kabulümüz gereğince,

$$\mu^*(A_n) \geq \mu^*(A_n \cap E) + \mu^*\left(A_n \cap E^t\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right) &\leq \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E^t\right) \\
&= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=}^{\infty} \left(A_n \cap E^t\right)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n \cap E^t\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mu^*(A_n \cap E) + \mu^*\left(A_n \cap E^t\right)\right] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&< \mu^*(A) + \varepsilon
\end{aligned}$$

olur. $\varepsilon > 0$ sayısının keyfi olması nedeniyle

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

elde edilir.

(iv)$\Rightarrow$(i) μ^* 'ın $\sigma -$alttoplamsallığından,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

olduğunu biliyoruz. Hipotez de dikkate alınacak olursa

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*\left(A \cap E^t\right)$$

olur ki, bu eşitlik E cümlesinin μ^{*} - ölçülebilir olduğunu gösterir.

Tanım 2.35. $(X,\mathcal{S},\mu)$ ölçü uzayının bir E altcümlesinin ölçülebilir olması (μ ölçülebilir) μ 'nün ürettiği μ^{*} dış ölçüsüne göre ölçülebilir olması (μ^{*} ölçülebilir) olarak tanımlanır [1].

Teorem 2.36. $\mathcal{S}$ sınıfının her elemanı ölçülebilirdir. Yani $\mathcal{S} \subset \Lambda$ dır [1].

İspat. $E \in \mathcal{S}$ olsun. Her $A \in \mathcal{S}$ için,

$$\mu(A) \geq \mu^{*}(A \cap E) + \mu^{*}\left(A \cap E^{t}\right)$$

olduğunu göstererek Teorem 2.34. yardımıyla $E \in \Lambda$ sonucunu elde edeceğiz. Bunun için $A \in \mathcal{S}$ alalım. Bu durumda yarıhalkanın özelliğinden,

$$A \cap E^{t} = A - E = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

eşitliği sağlanacak şekilde ayrık $B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{S}$ kümelerini bulabiliriz. $A \cap E \in \mathcal{S}$ ile B_i kümeleri ayrık olup $A = (A \cap E) \cup B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$ eşitliği sağlanır. μ^{*} 'ın $\sigma-$ alttoplamsallık özelliği ve Teorem 2.33. gereğince,

$$\begin{aligned}
\mu^{*}(A \cap E) + \mu^{*}\left(A \cap E^{t}\right) &= \mu^{*}(A \cap E) + \mu^{*}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&\leq \mu^{*}(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu^{*}(B_i) \\
&= \mu(A \cap E) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 2.37. $\mathcal{S} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\,,\ a \leq b\}$ sınıfı üzerinde

$$\lambda([a,b)) = b - a$$

olarak tanımlanan Lebesgue ölçüsünün ürettiği dış ölçüyü λ^* olarak gösterelim. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. $\mathbb{R}$ 'nin λ^*-ölçülebilen altcümlelerine Lebesgue ölçülebilen kümeler denir [1].

Teorem 2.38. $\mathbb{R}$ ' nin bütün açık ve kapalı altcümleleri Lebesgue ölçülebilirdir [1].

İspat. Teorem 2.36. gereğince,

$$\mathcal{S} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

sınıfının her elemanı, yani $[a,b)$ formundaki aralıklar Lebesgue ölçülebilirdir.

(a,b) formundaki aralıkların ölçülebilirliğini göstermek için,

$$a + \frac{1}{n_0} < b$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ alalım.

$$(a,b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right)$$

eşitliği ve bir dış ölçüye göre ölçülebilen cümleler sınıfının bir $\sigma-$ cebir olduğu hatırlanacak olursa (a,b) aralığının Lebesgue ölçülebilir olduğu ispatlanmış olur.

$\mathbb{R}$ 'nin açık altcümleleri (a,b) formundaki aralıkların sayılabilir birleşimi şeklinde yazılabileceğinden $\mathbb{R}$ ' nin açık altcümleleri de Lebesgue ölçülebilirdir. Ayrıca ölçülebilen kümelerin sınıfı tümleme işlemi altında kapalı olduğundan C^t'de ölçülebilirdir. Dolayısıyla $\mathbb{R}$ 'nin bütün kapalı altcümleleri de Lebesgue ölçülebilirdir.

X bir cümle, $A, A_1, A_2, ... \subset X$ ve (x_n) reel terimli bir dizi olmak üzere;

i. $A_n \uparrow A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ ve $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

ii. $A_n \downarrow A \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $A_{n+1} \subset A_n$ ve $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

iii. $x_n \uparrow x \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ ve $x = \sup x_n = \lim x_n$

iv. $x_n \downarrow x \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \leq x_n$ ve $x = \inf x_n = \lim x_n$

ifadeleri vardır [1].

Teorem 2.39. $E_1, E_2, \ldots$ ölçülebilir iseler aşağıdaki önermeler sağlanır.

i. $E_n \uparrow E$ ise $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$.

ii. $E_n \downarrow E$ en az bir k için $\mu^*(E_k) < \infty$ ise $\mu^*(E_n) \downarrow \mu^*(E)$ dir [1].

İspat. i. $B_1 = E_1$, $B_n = E_n - E_{n-1}$ $(n \geq 2)$ diyelim. Bu takdirde $B_1, B_2, \ldots$ kümeleri ölçülebilir, ayrık kümelerdir. Ayrıca

$$E_n = \cup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{ve} \quad E = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) = \mu^*\left(\cup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu^*\left(\cup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu^*(E_n)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise $\mu^*(E_n) \uparrow \mu^*(E)$ olması demektir.

ii. $E_n \downarrow E$ ve $\mu^*(E_1) < \infty$ olsun. $E_{n+1} \subset E_n$ kapsama bağıntısı $E_n^t \subset E_{n+1}^t$ olmasını gerektirir. Buradan $E_1 \cap E_n^t \subset E_1 \cap E_{n+1}^t$ olur ki bu ise $E_1 - E_n \subset E_1 - E_{n+1}$ (Artan) olması demektir. Ayrıca

$$\cup_{n=1}^{\infty}(E_1 - E_n) = \cup_{n=1}^{\infty}\left(E_1 \cap E_n^t\right)$$

$$= E_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^t \right) = E_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right)^t$$

$$= E_1 \cap E^t = E_1 - E$$

eşitliklerinden $E_1 - E_n \uparrow E_1 - E$ elde edilir. (i)' den

$$\mu^* \left(E_1 - E_n \right) \uparrow \mu^* \left(E_1 - E \right)$$

olduğu görülür. Son olarak, Teorem 2.30.'den

$$\mu^* \left(E_1 - E_n \right) = \mu * \left(E_1 \right) - \mu * \left(E_n \right) \ , \ \mu^* \left(E_1 - E \right) = \mu^* \left(E_1 \right) - \mu^* \left(E \right)$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\mu * \left(E_1 \right) - \mu * \left(E_n \right) \uparrow \mu^* \left(E_1 \right) - \mu^* \left(E \right)$$

olur ki, bu da bize $\mu * \left(E_n \right) \downarrow \mu^* \left(E \right)$ olduğunu gösterir.

Tanım 2.40. I , $\mathbb{R}$ ' nin sınırlı olması gerekmeyen herhangi bir alt aralığı ve $|\mathrm{I}|$ 'da bu aralığın boyu olsun. $-\infty < a < b < \infty$ olmak üzere $(a,b), [a,b), (a,b]$ ve $[a,b]$ şeklindeki aralıklara sınırlı aralıklar denir. Bu aralıkların boyu ise $b-a$ olarak tanımlanır. Sınırsız aralıkların boyu ise ∞ olarak tarif edilir [1].

Teorem 2.41. $\mathbb{R}$ ' nin her I aralığı Lebesgue ölçülebilirdir [1].

İspat. i. $-\infty < a < b < \infty$ olsun. $[a,b)$ tipindeki aralıklar Lebesgue ölçülebilirdir. Ayrıca Teorem 2.35. gereğince,

$$\lambda^* \left([a,b) \right) = \lambda \left([a,b) \right) = b - a = \left| [a,b) \right|$$

olur.

ii. $\mathrm{I} = [a,b]$ olsun. $n = 1,2,...$ olmak üzere $E_n = \left[a, b + \frac{1}{n} \right)$ alalım. Her bir E_n ölçülebilir ve

$E_n \downarrow \mathrm{I}$ olur. Teorem 2.39.(ii)' den

$$\lambda^*(\mathrm{I}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*(E_n) = \lim_{n\to\infty}\left(b+\frac{1}{n}-a\right) = b-a = |\mathrm{I}|$$

bulunur.

iii. $\mathrm{I}=(a,b)$ aralığının ölçüsü için ($n=1,2,...$) $a+\frac{1}{n}<b$ olacak şekilde $E_n=\left[a+\frac{1}{n},b\right)$ küme lerini seçelim. Dolayısıyla her E_n ölçülebilirdir ve $E_n \uparrow \mathrm{I}$ 'dır. Teorem 2.39.(i)'den ötürü,

$$\lambda^*(\mathrm{I}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*(E_n) = \lim_{n\to\infty}\left(b-\left(a+\frac{1}{n}\right)\right) = b-a = |\mathrm{I}|$$

sonucuna ulaşılır.

iv. $\mathrm{I}=(a,b]$, her bir n için $E_n=\left(a,b+\frac{1}{n}\right)$ biçiminde seçelim. E_n aralıklarının ölçülebilirli-

ği (iii)'den açıktır. $E_n \downarrow \mathrm{I}$ olduğundan I aralığı da ölçülebilirdir. I' nın ölçüsü ise

$$\lambda^*(\mathrm{I}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*(E_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\left(a,b+\frac{1}{n}\right)\right) = b-a = |\mathrm{I}|$$

şeklindedir.

v. $\mathrm{I}=[a,\infty)$ biçiminde ki aralıkları dikkate alalım. Bu şekildeki aralıkların Lebesgue dış

ölçüsünü bulalım.

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $E_n=[a,a+n)$ olsun. Bu durumda her n için E_n ölçülebilir olup, $E_n \subset E_{n+1}$ ve $\mathrm{I}=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ olduğundan $E_n \uparrow \mathrm{I}$ olur. Böylece,

$$\lambda^*(\mathrm{I}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^*(E_n) = \lim_{n\to\infty}(a+n-a) = \infty$$

elde edilir.

vi. $\mathrm{I}=(-\infty,\infty)$ olsun. $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$[a,\infty)\subset(-\infty,\infty)$$

kapsama bağıntısının varlığından söz edebiliriz. Ayrıca $\left[a,\infty\right)$ şeklindeki aralıkların ölçülebilirliğini (v)' de gördük. Buradan dış ölçünün monotonluk özelliğinden,

$$\infty=\left|\left[a,\infty\right)\right|=\lambda^{*}\left(\left[a,\infty\right)\right)\leq\lambda^{*}\left(\left(-\infty,\infty\right)\right)$$

$$\lambda^{*}\left(\left(-\infty,\infty\right)\right)=\infty$$

olduğu görülür.

$\left(a,\infty\right),\left(-\infty,a\right),\left(-\infty,a\right]$ aralıklarının dış ölçüsü de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 2.42. $E\subset\mathbb{R}$ sayılabilir bir cümle ise $\lambda^{*}\left(E\right)=0$ olur [1].

İspat. $\left\{x_0\right\}\subset\mathbb{R}$ cümlesi ve keyfi $\varepsilon>0$ için $\left\{x_0\right\}\subset\left[x_0,x_0+\varepsilon\right)$ olur. λ^{*} ın monotonluk özelliğinden,

$$0\leq\lambda^{*}\left(\left\{x_0\right\}\right)\leq\lambda^{*}\left(\left[x_0,x_0+\varepsilon\right)\right)=\varepsilon$$

bulunur ki bu ise reel sayıların tek elemanlı altkümelerinin Lebesgue dış ölçüsünün sıfır olması anlamına gelir.

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x_n\right\}$$

olsun. Her bir n için $\left\{x_n\right\}\in\Lambda$ olduğundan E cümlesi ölçülebilirdir. Böylece

$$\lambda^{*}\left(E\right)=\lambda^{*}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x_n\right\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{*}\left(\left\{x_n\right\}\right)=0$$

olur.

Tanım 2.43. $\left(X,\mathscr{S},\mu\right)$ bir ölçü uzayı olsun.

i. $\mu^{*}\left(X\right)<\infty$ ise $\left(X,\mathscr{S},\mu\right)$ ölçü uzayına sonlu ölçü uzayı denir.

ii. Her bir n için $\mu^{*}\left(A_n\right)<\infty$ ve $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olacak şekilde X' in altkümelerinin bir

$\{A_n\}$ dizisi var ise $(X,\mathcal{S},\mu)$ ölçü uzayına $\sigma-$ sonlu ölçü uzayı adı verilir [1].

Her sonlu ölçü uzayı aynı zamanda bir $\sigma-$ sonlu ölçü uzayı olduğu kolayca görülebilir. $(\mathbb{R},\mathcal{S},\lambda)$ ölçü uzayı sonlu ölçü uzayı değildir. Çünkü,

$$\lambda^*(\mathbb{R})=\lambda^*((-\infty,\infty))=\infty$$

dır. Fakat $\sigma-$ sonludur. $\mathbb{R}$ ’yi dış ölçüsü sonlu olan kümelerin birleşimi şeklinde yazabiliriz.

$$\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]\ ,\ \lambda^*([-n,n])=2n$$

yazılabilir.

Teorem 2.44. $(X,\mathcal{S},\mu)$ sonlu bir ölçü uzayı ve $E\subset X$ olsun. E kümesinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\mu^*(E)+\mu^*(E^t)=\mu^*(X) \tag{2.9}$$

olmasıdır [1].

İspat. E kümesi ölçülebilir bir küme ise (2.9) eşitliğinin sağlandığı açıktır.

İspatın diğer yönü için (2.9) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. $A\in\mathcal{S}$ alalım. A ölçülebilir olduğundan,

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^t)$$

$$\mu^*(E^t)=\mu^*(E^t\cap A)+\mu^*(E^t\cap A^t)$$

yazılabilir. Bu eşitlikler ve (2.9) yardımıyla

$$\begin{aligned}\mu^*(X)&=\mu^*(E)+\mu^*(E^t)\\&=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^t)+\mu^*(E^t\cap A)+\mu^*(E^t\cap A^t)\\&=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E^t\cap A)+\mu^*(E\cap A^t)+\mu^*(E^t\cap A^t)\\&\geq\mu^*(A)+\mu^*(A^t)\end{aligned}$$

$$\geq \mu^*\left(A \cup A^t\right)$$

$$= \mu^*(X)$$

elde edilir. Böylece,

$$\mu^*(A) + \mu^*\left(A^t\right) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E^t \cap A\right) + \mu^*\left(E \cap A^t\right) + \mu^*\left(E^t \cap A^t\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte $\mu^*\left(A^t\right)$ yerine ondan daha büyük eşit olan

$$\mu^*\left(E \cap A^t\right) + \mu^*\left(E^t \cap A^t\right)$$

ifadesi yazılırsa,

$$\mu^*(A) + \mu^*\left(E \cap A^t\right) + \mu^*\left(E^t \cap A^t\right) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E^t \cap A\right) + \mu^*\left(E \cap A^t\right) + \mu^*\left(E^t \cap A^t\right)$$

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E^t \cap A\right)$$

elde edilir ki, bu da E kümesinin ölçülebilir olduğunu gösterir.

Lemma 2.45. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve μ 'nün ürettiği dış ölçü μ^* olsun.

$$\alpha(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \{A_n\} \text{ ayrık ve } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \quad (\inf \varnothing = \infty)$$

şeklinde tanımlanan $\alpha : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ fonksiyonu için $\alpha = \mu^*$ dır [1].

İspat. $A \subset X$ olsun.

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{S} \text{ ayrık},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \subset \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{S},\ A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}$$

olduğundan ve ayrıca küme büyüdükçe infimum küçüleceğinden,

$$\alpha(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{S} \text{ ayrık}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} \geq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{S}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \mu^*(A)$$

$$\mu^*(A) \leq \alpha(A) \qquad 2.10$$

eşitsizliği açıktır. Bu eşitsizlik gereğince, $\mu^*(A)=\infty$ iken $\alpha(A)=\infty$ olacağından bu durumda $\mu^*(A)=\alpha(A)$ eşitliği sağlanır.

$\mu^*(A)<\infty$ olduğunu kabul edelim. Keyfi bir $\varepsilon>0$ alalım. Bu durumda $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde öyle $A_n \in \mathcal{S}$ kümeleri vardır ki

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon \qquad 2.11$$

olur. Teorem 2.3.(ii) gereğince $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bir $\sigma-$küme olduğundan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

olacak şekilde ayrık $C_n \in \mathcal{S}$ kümeleri vardır. Buradan (2.11) yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n) \\
&= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\
&= \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \\
&< \mu^*(A) + \varepsilon
\end{aligned}$$

yazılabilir. ε keyfi bir sayı olduğundan,

$$\alpha(A) \leq \mu^*(A) \tag{2.12}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (2.10) ve (2.12)'den $\alpha(A) = \mu^*(A)$ elde edilir.

Teorem 2.46. $(X, \mathcal{S}, \mu)$ $\sigma-$sonlu bir ölçü uzayı, (X, Σ, ν) ise $\mathcal{S} \subset \Sigma \subset \Lambda_\mu$ olacak şekilde herhangi bir ölçü uzayı olsun. Eğer $\mathcal{S}$ üzerinde $\mu = \nu$ ise Σ üzerinde $\nu = \mu^*$ olur.

Yani μ ölçüsünün Λ_μ sınıfı üzerine olan genişlemesi tektir [1].

İspat. ν ölçüsünün ürettiği dış ölçü ν^* olsun. $A \subset X$ ve $\mathcal{S}$ sınıfından $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde A_n kümeleri vardır. $\mathcal{S}$ üzerinde μ ve ν aynı olduğundan

$$\nu^*(A) \leq \nu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu^*(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan her $A \subset X$ için $\nu^*(A) \leq \mu^*(A)$ bulunur. Dolayısıyla her $A \in \Sigma$ için $\nu(A) \leq \mu^*(A)$ elde edilir.

Eşitsizliğin diğer tarafını önce $\mu^*(A) < \infty$ olacak şekilde $A \in \Sigma$ kümeleri için gösterelim. $A \in \Sigma$ alalım. $\varepsilon > 0$ sayısı keyfi olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde ayrık $A_n \in \mathcal{S}$ kümeleri vardır. $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ alırsak, $B \in \Lambda_\mu$, $B \in \Lambda_\nu$ ve

$$\mu^*(B) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$$< \mu^*(A) + \varepsilon$$

yazılabilir. Buradan

$$\nu^*(B-A) \leq \mu^*(B-A)$$

$$= \mu^*(B) - \mu^*(A)$$

$$< \varepsilon$$

olur. Böylece,

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \nu^*(B) = \nu^*(A) + \nu^*(B-A) < \nu(A) + \varepsilon$$

bulunur ki bu ise bize $\varepsilon > 0$ sayısının keyfi olması nedeniyle $\mu^*(A) \leq \nu(A)$ eşitsizliğini verir. Demek ki $\mu^*(A) < \infty$ olacak şekilde $A \in \Sigma$ kümeleri için $\nu(A) = \mu^*(A)$ eşitliğinin varlığından söz edebiliriz.

Son olarak uzayın $\sigma -$sonlu olma şartı altında $A \in \Sigma$ için $\nu(A) = \mu^*(A)$ olacağını gösterelim. $\left(\mu^*(A) = \infty \ olabilir\right)$

$(X,\mathcal{S},\mu)$ uzayı $\sigma-$sonlu olduğundan $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ve $\mu^*(X_n)<\infty$ olacak şekilde ayrık $X_n\in\mathcal{S}$ kümeleri vardır. İspatın ilk kısmından her $n\in\mathbb{N}$ için $A\in\Sigma$ ise,

$$\nu(A\cap X_n)=\mu^*(A\cap X_n)$$

olur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\mu^*(A)&=\mu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)\right)\\
&=\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap X_n)\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A\cap X_n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A\cap X_n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\nu^*(A\cap X_n)\\
&=\nu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap X_n)\right)\\
&=\nu^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\right)\right)\\
&=\nu^*(A\cap X)\\
&=\nu^*(A)\\
&=\nu(A)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.47. $(X,\mathcal{S},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $A\subset X$ olsun. Bu takdirde ölçülebilir öyle bir $A\subset E$ cümlesi vardır ki $\mu^*(A)=\mu^*(E)$ olur. Özel olarak $\mathcal{S}$ bir $\sigma-$cebir ise her bir $A\subset X$ için $A\subset E$ ve $\mu^*(A)=\mu^*(E)$ olacak şekilde bir $E\in S$ vardır [1].

İspat. $A\subset X$ olsun. Eğer, $\mu^*(A)=\infty$ ise $E=X$ istenen kümedir. $\mu^*(A)<\infty$ olsun. $\mathcal{S}$ 'ye ait A_n^i kümelerini her bir i için $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^i$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n^i\right)<\mu^*(A)+\frac{1}{i}$ olacak şekilde seçelim. $E_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^i$ alırsak her bir E_i cümlesi ölçülebilir ve $A\subset E_i$ olur.

$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ olsun. Bu takdirde E cümlesi ölçülebilir olup $A\subset E$ kapsama bağıntısını sağlar. ($\mathcal{S}$ bir $\sigma-$cebir ise $E\in\mathcal{S}$ olduğu açıktır.)

$$\mu^*(A)\le\mu^*(E)\le\mu^*(E_i)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(A_n^i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n^i\right)<\mu^*(A)+\frac{1}{i}$$

eşitsizliğinden, $\mu^*(A)=\mu^*(E)$ bulunur

2.6. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Lebesgue integral teorisinde kısaca h.h.y. ile göstereceğimiz " hemen her yerde " kavramı önemli rol oynar. Şimdi bunu izah edelim: X üzerinde bir dış ölçü μ olsun. Eğer bir önerme $\mu(A)=0$ olacak şekildeki X 'in bir A altcümlesinin dışında sağlanıyorsa bu önermeye hemen her yerde sağlanıyor denir. (ya da hemen her X için sağlanıyor denir ve h.h.x. ile gösterilir)

Örneğin, f ve g X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar ise hemen her yerde $f\le g$ demek;

$$\mu\left(\{x\in X : f(x)>g(x)\}\right)=0$$

olması anlamına gelir. Benzer şekilde hemen her yerde (f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna yakınsak olması;

$$\mu\left(\left\{x\in X:\lim_{n\to\infty} f_n(x)\neq f(x)\right\}\right)=0$$

olarak ifade edilir.

Hemen her yerde kavramından $(X,\mathcal{S},\mu)$ ölçü uzayında da söz edilebilir. Burada μ ölçüsünün ürettiği μ^* dış ölçüsü dikkate alınır. Özetleyecek olursak;

$(X,\mathcal{S},\mu)$ bir ölçü uzayı ve f ile g X üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere aşağıdakiler yazılabilir:

i. $f=g$ h.h.y. $\Leftrightarrow$ $\mu^*\left(\left\{x\in X: f(x)\neq g(x)\right\}\right)=0$.

ii. $f\geq g$ h.h.y. $\Leftrightarrow$ $\mu^*\left(\left\{x\in X: f(x)< g(x)\right\}\right)=0$.

iii. $f_n\to f$ h.h.y. $\Leftrightarrow$ $\mu^*\left(\left\{x\in X:\lim_{n\to\infty} f_n(x)\neq f(x)\right\}\right)=0$.

iv. $f_n\uparrow f$ h.h.y. $\Leftrightarrow$ $\forall n$ için $f_n\leq f_{n+1}$ h.h.y. ve $f_n\to f$ h.h.y.

v. $f_n\downarrow f$ h.h.y. $\Leftrightarrow$ $\forall n$ için $f_{n+1}\leq f_n$ h.h.y. ve $f_n\to f$ h.h.y. [1].

Tanım 2.48. $(X,\mathcal{S},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f:X\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}$ ’ nin açık her O altcümlesi için $f^{-1}(O)$ ölçülebilir ise f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon adı verilir [1].

Teorem 2.49. Sabit her fonksiyon ölçülebilirdir [1].

İspat. Her $x\in X$ için $f(x)=c$ $(c,\ sabit)$ ve $O\subset\mathbb{R}$ keyfi bir açık küme olsun. Bu durumda,

i. $c\notin O$ ise,

$$f^{-1}(O)=\left\{x\in X: f(x)\in O\right\}=\varnothing\in\Lambda$$

ii. $c\in O$ olduğunda,

$$f^{-1}(O)=\left\{x\in X: f(x)\in O\right\}=X\in\Lambda$$

olacağından sabit her fonksiyon ölçülebilirdir.

Bir Topolojik uzayın Borel kümeleri açık kümeler tarafından üretilen $\sigma-$cebrin elemanlarıdır.

Örnek 2.50. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ise ölçülebilirdir.

f, sürekli olduğundan her $O\subset\mathbb{R}$ açık kümesi için $f^{-1}(O)$ cümlesi $\mathbb{R}$ 'de açık bir kümedir. $\mathbb{R}$ ' nin açık altkümeleri ölçülebilir olduğundan *f* fonksiyonu ölçülebilirdir.

Teorem 2.51. $f:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

i. *f*, ölçülebilirdir.

ii. Sınırlı ve açık her (a,b) aralığı için $f^{-1}((a,b))$ ölçülebilirdir.

iii. $\mathbb{R}$ ' nin kapalı her C altcümlesi için $f^{-1}(C)$ ölçülebilirdir.

iv. Her $a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}([a,\infty))$ cümlesi ölçülebilirdir.

v. Her $a\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}((-\infty,a])$ kümesi ölçülebilirdir.

vi. $\mathbb{R}$ ' nin her $\mathcal{B}$ Borel altcümlesi için $f^{-1}(\mathcal{B})$ ölçülebilirdir [1].

İspat. $(\text{i})\Rightarrow(\text{ii})$ Açık.

$(\text{ii})\Rightarrow(\text{iii})$ $C\subset\mathbb{R}$ kapalı bir cümle olsun. Bu durumda C^t açık olur. Dolayısıyla C^t kümesi,

$$C^t=\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$$

şeklinde yazılabilir.

$$f^{-1}(C)=\left[f^{-1}\left(C^t\right)\right]^t$$

$$=\left[f^{-1}\left(\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\right)\right]^t$$

$$=\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(a_n,b_n\right)\right)\right]^t$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[f^{-1}\left(\left(a_n,b_n\right)\right)\right]^t$$

eşitliklerinden $f^{-1}(C)$ cümlesinin ölçülebilir olduğu kolayca görülebilir.

$(\text{iii})\Rightarrow(\text{iv})$ Açık.

$(\text{iv})\Rightarrow(\text{v})$ Öncelikle belirtelim ki

$$f^{-1}\left((-\infty,a)\right)=\left[f^{-1}\left([a,\infty)\right)\right]^t$$

olduğundan $f^{-1}\left((-\infty,a)\right)$ ölçülebilirdir.

$$f^{-1}\left((-\infty,a]\right)=f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(-\infty,a+\frac{1}{n}\right)\right)$$

yazılabileceğinden $f^{-1}\left((-\infty,a]\right)$ ölçülebilirdir.

$(\text{v})\Rightarrow(\text{vi})$ $\mathcal{V}=\left\{A\subset\mathbb{R} : f^{-1}(A)\ \text{ölçülebilir}\right\}$ olsun.

Hipotez gereğince her $a\in\mathbb{R}$ için $(-\infty,a]\in\mathcal{V}$ olur. Buradan ise sırayla,

$$(a,\infty)=(-\infty,a]^t\ ,\ (a,b]=(-\infty,b]\cap(a,\infty),\ (a,b)=\bigcup_{n=n_0}^{\infty}\left(a,b-\frac{1}{n}\right)$$

biçimindeki aralıkların dolayısıyla bütün açık kümelerin $\mathcal{V}$ sınıfına ait olduğu görülür. Bu ise $\mathcal{B}\subset\mathcal{V}$ olması anlamına gelir ki ispat sonlanır.

$(\text{vi})\Rightarrow(\text{i})$ Açık.

Örnek 2.52. $A \subset X$ ölçülebilir bir küme olsun.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilirliğini inceleyelim.

Çözüm. χ_A fonksiyonunun ölçülebilirliği için, (a,∞) şeklindeki aralığın ters görüntüsünün ölçülebilirliğine bakmamız yeterlidir.

$a<0$ ise,

$$\chi_A^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = X \in \Lambda$$

$0 \leq a < 1$ ise,

$$\chi_A^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = A \in \Lambda$$

$a \geq 1$ ise,

$$\chi_A^{-1}((a,\infty)) = \{x \in X : \chi_A(x) > a\} = \varnothing \in \Lambda$$

olduğundan χ_A fonksiyonu ölçülebilirdir.

Teorem 2.53. $f, g : X \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Eğer f ölçülebilir ve $f = g$ h.h.y. ise g fonksiyonu da ölçülebilirdir [1].

İspat. $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ diyelim. Hipotezden $\mu^*(A) = 0$ olacağından A cümlesi ölçülebilirdir. $O \subset \mathbb{R}$ açık bir küme olsun. f ölçülebilir olduğundan $f^{-1}(O)$ ölçülebilirdir.

$$A^t \cap g^{-1}(O) = A^t \cap f^{-1}(O)$$

eşitliğinden $A^t \cap g^{-1}(O)$ kümesinin ölçülebilir olduğu görülür. Ayrıca $A \cap g^{-1}(O)$ cümlesinin dış ölçüsü sıfır olması nedeniyle bu cümle de ölçülebilirdir. Böylece,

$$g^{-1}(O)=\left[A\cap g^{-1}(O)\right]\cup\left[A^t\cap g^{-1}(O)\right]$$

olduğu dikkate alınırsa $g^{-1}(O)'$ nin ölçülebilirliği ortaya çıkar. $g^{-1}(O)$ ölçülebilir olması g' nin ölçülebilirliğini kanıtlar.

Teorem 2.54. $f,g:X\to\mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar ise aşağıdaki kümeler ölçülebilirdir:

i. $\{x\in X : f(x)>g(x)\}$.

ii. $\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}$.

iii. $\{x\in X : f(x)=g(x)\}$ [1].

İspat. i. $\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,...\}$ olsun. Ölçülebilir kümelerin arakesitleri, birleşimleri ölçülebilir olduğundan ve

$$\{x\in X : f(x)>g(x)\}=\cup_{n=1}^{\infty}\left[\{x\in X : f(x)>r_n\}\cap\{x\in X : g(x)<r_n\}\right]$$

eşitliğinden $\{x\in X : f(x)>g(x)\}$ kümesinin ölçülebilir olduğu görülür.

ii. $\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}=\{x\in X : f(x)<g(x)\}^t$ eşitliğinden ve (i) den sonuç açıktır.

iii. $\{x\in X : f(x)=g(x)\}=\{x\in X : f(x)\geq g(x)\}\cap\{x\in X : f(x)\leq g(x)\}$ eşitliğinden ve (ii) den istenilen sonuç elde edilir.

Tanım 2.55. $f,g:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonları yardımıyla

$$(f\vee g)(x)=\text{maks}\big(f(x),g(x)\big)$$

$$(f\wedge g)(x)=\min\big(f(x),g(x)\big)$$

şeklinde tarif edilen $f\vee g, f\wedge g:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarına sırasıyla f ile g 'nin maksimum ve minimum fonksiyonları denir [1].

$$f^{+}(x)=\text{maks}\left(f(x),0\right)$$

$$f^{-}(x)=\text{maks}\left(-f(x),0\right)$$

biçiminde tarif edilen $f^{+},f^{-}:X\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarına ise sırasıyla *f'* in pozitif ve negatif parçaları adı verilir. Bu kavramlara ilişkin aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla ispat edilebilir.

$$f^{+}=\frac{1}{2}\left(|f|+f\right),\ f^{-}=\frac{1}{2}\left(|f|-f\right),\ f\vee g=\frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right),\ f\wedge g=\frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right)\ [1].$$

Teorem 2.56. $f,g:X\to\mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonlar ise,

i. $f+g$, ölçülebilirdir.

ii. fg, ölçülebilirdir.

iii. $|f|$, f^{+} ve f^{-}, ölçülebilirdir.

iv. $f\vee g$ ve $f\wedge g$ ölçülebilirdir [1].

İspat. i. Öncelikle belirtelim ki c sabit sayı olmak üzere her $a\in\mathbb{R}$ için

$$\left\{x\in X:c-g(x)\geq a\right\}=\left\{x\in X:g(x)\leq c-a\right\}$$

olduğundan $c-g$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Diğer taraftan her $a\in\mathbb{R}$ için,

$$(f+g)^{-1}\left([a,\infty)\right)=\left\{x\in X:f(x)+g(x)\geq a\right\}=\left\{x\in X:f(x)\geq a-g(x)\right\}$$

olup eşitliğin sağındaki küme ölçülebilir olduğundan $f+g$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

ii. $a\in\mathbb{R}$ alalım. $a<0$ ise,

$$\left\{x\in X:f^{2}(x)\leq a\right\}=\varnothing$$

ve $a\geq 0$ için

$$\left\{x\in X:f^{2}(x)\leq a\right\}=f^{-1}\left(\left[-\sqrt{a},\sqrt{a}\right]\right)$$

olacağından f^2 fonksiyonu ölçülebilirdir. Ayrıca, c sabit olmak üzere cf fonksiyonu da ölçülebilirdir. Çünkü,

$c>0$ olduğunda

$$\{x\in X:(cf)(x)\geq a\}=\left\{x\in X:f(x)\geq \frac{a}{c}\right\}\in\Lambda$$

$c<0$ ise

$$\{x\in X:(cf)(x)\geq a\}=\left\{x\in X:f(x)\leq \frac{a}{c}\right\}\in\Lambda$$

olur. Son olarak, $c=0$ olursa fonksiyon sabit olduğundan ölçülebilirdir.

$$fg=\frac{1}{2}\left[(f+g)^2-f^2-g^2\right]$$

eşitliği ve (i) dikkate alındığında fg fonksiyonunun ölçülebilir olduğu ispatlanmış olur.

iii. $a<0$ ise,

$$\{x\in X:|f(x)|\leq a\}=\varnothing$$

ve $a\geq 0$ ise,

$$\{x\in X:|f(x)|\leq a\}=\{x\in X:f(x)\leq a\}\cap\{x\in X:f(x)\geq -a\}$$

olduğundan $|f|$ fonksiyonu ölçülebilirdir. f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilirliği ise,

$$f^+=\frac{1}{2}(|f|+f)\quad \text{ve}\quad f^-=\frac{1}{2}(|f|-f)$$

eşitliklerinden açıktır.

iv. $f\vee g$ ve $f\wedge g$ fonksiyonlarının ölçülebilir oldukları da

$$f\vee g=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)\quad \text{ile}\quad f\wedge g=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

ifadelerinden elde edilir.

Teorem 2.57. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları ölçülebilir ise, aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. $f_n \to f$ h.h.y. ise f ölçülebilirdir.

ii. Her bir x için $\left(f_n(x)\right)$ dizisi sınırlı ise $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ ölçülebilir fonksiyonlardır [1].

İspat. i. $A=\left\{x\in X : \lim f_n(x)=f(x)\right\}$ olsun. $f_n \to f$ h.h.y. olduğundan $\mu^*\left(A^t\right)=0$ olup, A^t cümlesi dolayısıyla A cümlesi ölçülebilirdir.

Şimdi $a\in\mathbb{R}$ için,

$$A\cap f^{-1}\left((a,\infty)\right)=A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{n},\infty\right)\right)\right]$$

eşitliğini ispat edelim.

$$x_0\in A\cap f^{-1}\left((a,\infty)\right)=A\cap\left\{x\in X : f(x)>a\right\}$$

olsun. $x_0\in A$ ve $x_0\in\left\{x\in X : f(x)>a\right\}$ olur. Buradan $f(x_0)>a$ yazılabilir. A üzerinde $f_n \to f$ olduğundan $n_0\in\mathbb{N}$ sayısını her $i\geq n_0$ için,

$$f_i(x_0)>a+\frac{1}{n_0}$$

olacak şekilde seçebiliriz. Bu ise,

$$x_0\in\bigcap_{i=n_0}^{\infty}\left\{x\in X : f_i(x)>a+\frac{1}{n_0}\right\}=\bigcap_{i=n_0}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{n_0},\infty\right)\right)$$

olmasını gerektirir. Öyle ise,

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{n},\infty\right)\right)$$

olup,

$$x_0 \in A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{n},\infty\right)\right)\right]$$

elde edilir. Bu da

$$A \cap f^{-1}\left((a,\infty)\right) \subset A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{n},\infty\right)\right)\right]$$

olduğunu gösterir. Kapsama bağıntısının diğer yönü için

$$x_0 \in A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a+\frac{1}{n},\infty\right)\right)\right] = A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{x \in X : f_i(x) > a+\frac{1}{n}\right\}\right]$$

alalım. Bu durumda $x_0 \in A$ ve

$$x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} \left\{x \in X : f_i(x) > a+\frac{1}{n}\right\}$$

olur. En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$x_0 \in \bigcap_{i=n_0}^{\infty} \left\{x \in X : f_i(x) > a+\frac{1}{n_0}\right\}$$

olacağından her $i \geq n_0$ için

$$f_i(x_0) > a + \frac{1}{n_0}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $i \to \infty$ yapılırsa

$$f(x_0) \geq a + \frac{1}{n_0}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan $f(x_0) > a$ bulunur. Dolayısıyla,

$$x_0 \in \{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a,\infty))$$

olup,

$$x_0 \in A \cap f^{-1}((a,\infty))$$

olmalıdır. Böylece,

$$A \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} f_i^{-1}\left(\left(a + \frac{1}{n}, \infty\right)\right)\right] \subset A \cap f^{-1}((a,\infty))$$

bulunur ki, bu iki kapsama bağıntısı yukarıdaki eşitliğin varlığını ispat eder.

f_i fonksiyonlarının ölçülebilir olduğu gözönüne alındığında her $a \in \mathbb{R}$ için

$$A \cap f^{-1}((a,\infty))$$

kümesinin de ölçülebilir olması gerekir. Ayrıca,

$$A^t \cap f^{-1}((a,\infty)) \subset A^t$$

olduğundan $A^t \cap f^{-1}((a,\infty))$ cümlesi ölçülebilirdir. O halde

$$f^{-1}((a,\infty)) = \left[A \cap f^{-1}((a,\infty))\right] \cup \left[A^t \cap f^{-1}((a,\infty))\right]$$

eşitliğinden f fonksiyonunun ölçülebilir olduğu ortaya çıkar.

ii. $\sup f_n$ ve $\inf f_n$ fonksiyonlarının ölçülebilirliği, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\{x \in X : \sup f_n(x) \le a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \le a\}$$

$$\{x \in X : \inf f_n(x) \ge a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \ge a\}$$

eşitliklerinden görülür.

Diğer taraftan,

$$\limsup(f_n) = \inf_{m\geq 1} \sup_{n\geq m} f_n$$

olduğunu biliyoruz.

$$g_m = \sup_{n\geq m} f_n$$

alırsak, her bir $m\in\mathbb{N}$ için g_m fonksiyonları dolayısıyla

$$\limsup(f_n) = \inf_{m\geq 1} g_m$$

fonksiyonu ölçülebilirdir.

$\liminf(f_n) = \sup_{m\geq 1} \inf_{n\geq m} g_m$ fonksiyonunun ölçülebilirliği de benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 2.58. (Egorov). (f_n), $f_n \to f$ h.h.y. olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların dizisi ve $E\subset X$ kümesi de $\mu^*(E)<\infty$ şartını sağlayan ölçülebilir bir küme olsun. Bu takdirde her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $\mu^*(F)<\varepsilon$ olacak şekilde öyle bir ölçülebilir $F\subset E$ kümesi vardır ki $E-F$ kümesi üzerinde (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar [1].

İspat. İspata öncelikle her $x\in X$ için $\lim f_n(x) = f(x)$ olduğunu kabul ederek başlayalım. $E\subset X$ kümesi $\mu^*(E)<\infty$ şeklinde ölçülebilir bir cümle ve

$$E_{n,k} = \bigcap_{m=k}^{\infty}\left\{x\in E : \left|f_m(x)-f(x)\right|<2^{-n}\right\}$$

olsun. Her bir $E_{n,k}$ cümlesi ölçülebilirdir ve bu kümeler her *n* ve *k* doğal sayıları için

$$E_{n,k} \subset E_{n,k+1} \qquad 2.13$$

kapsama bağıntısını sağlarlar. Her bir $n\in\mathbb{N}$ için

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{n,k} \qquad 2.14$$

eşitliğini ispat edelim. Her $n,k\in\mathbb{N}$ için $E_{n,k}\subset E$ olduğundan $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{n,k}\subset E$ olur. $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{n,k}$ ifadesini göstermek için ise $x_0\in E$ alalım. Kabulümüz gereğince her $x\in X$ için $f_n(x)\to f(x)$ olduğundan x_0 noktası için de $f_n(x_0)\to f(x_0)$ olur. Dolayısıyla sabit bir n doğal sayısı için öyle bir $k\in\mathbb{N}$ mevcuttur ki $\forall m\geq k$ için

$$\left|f_m(x_0)-f(x_0)\right|<2^{-n}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise her $m\geq k$ için $x_0\in\left\{x\in E:\left|f_m(x)-f(x)\right|<2^{-n}\right\}$ olması anlamına gelir. Buradan $x_0\in\bigcap_{m=k}^{\infty}\left\{x\in E:\left|f_m(x)-f(x)\right|<2^{-n}\right\}=E_{n,k}$ bulunur. Böylelikle (2.14) eşitliği gösterilmiş olur. Bu durumda (2.13) ve (2.14) ifadelerinden her n için $E_{n,k}\uparrow_k E$ ve Teorem 2.39.(i) den $\mu^*\left(E_{n,k}\right)\uparrow_k\mu^*(E)$ bağıntısı elde edilir. $\varepsilon>0$ verilmiş olsun. $\mu^*(E)<\infty$ olduğundan her bir n için öyle bir $k_n\in\mathbb{N}$ vardır ki

$$\mu^*\left(E-E_{n,k_n}\right)=\mu^*(E)-\mu^*\left(E_{n,k_n}\right)<2^{-n}\varepsilon$$

kalır. $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E-E_{n,k_n}\right)$ diyelim. F ölçülebilir bir küme olup, $F\subset E$ ve

$$\begin{aligned}\mu^*(F)&\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(E-E_{n,k_n}\right)\\&<\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\varepsilon\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $x \in E - F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n,k_n}$ ve $m \geq k_n$ olacak şekilde her m için $|f_m(x) - f(x)| < 2^{-n}$ olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $E - F$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaktır.

Şimdi $f_n \to f$ h.h.y. olduğunu kabul edelim. $A = \{x \in X : f_n(x) \to f(x)\}$ olsun. Bu durumda $\mu^*\left(A^t\right) = 0$ olup A^t cümlesi ölçülebilirdir. Her $x \in X$ için $f_n(x)\chi_A(x) \to f(x)\chi_A(x)$ olması nedeniyle, verilen $\varepsilon > 0$ sayısı ve $\mu^*(E) < \infty$ olacak şekilde verilen ölçülebilir bir E cümlesi için öyle bir ölçülebilir $F \subset E$ cümlesi bulabiliriz ki $\mu^*(F) < \varepsilon$ ve $E - F$ üzerinde $(f_n \chi_A)$ fonksiyon dizisi $f\chi_A$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olur. Bu ise (f_n) fonksiyon dizisinin $(E - F) \cap A$ kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması demektir. Son olarak

$$\left(A^t \cap E\right) \cup F \subset E$$

$$(E - F) \cap A = E - \left[\left(A^t \cap E\right) \cup F\right]$$

olduğu ve

$$\mu^*\left(\left(A^t \cap E\right) \cup F\right) \leq \mu^*\left(\left(A^t \cap E\right)\right) + \mu^*(F) \leq \mu^*\left(A^t\right) + \mu^*(F) < \varepsilon$$

eşitsizliği dikkate alınırsa ispat sona ermiş olur.

3. LEBESGUE İNTEGRAL TEORİSİ

3.1. Merdiven Fonksiyonlar ve İntegralleri

Bu bölümde $(X,\mathcal{S},\mu)$ sabit bir ölçü uzayı olarak dikkate alınıp, Karakteristik Fonksiyon, Basit Fonksiyon, Merdiven Fonksion, Merdiven Fonksiyonun İntegrali, Üst Fonksiyon ve İntegrali, İntegrallenebilir Fonksiyon kavramlarına ilişkin temel tanım ve teoremler üzerinde duruldu.

Tanım 3.1. Bir $E\subset X$ kümesi için

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\chi_E : X\to \mathbb{R}$ fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu adı verilir [1].

Lemma 3.2. Bir X kümesinin A ve B altkümeleri için aşağıdaki durumlar sağlanır.

i. $\chi_\varnothing=0$ ve $\chi_X=1$.

ii. $A\subset B \iff \chi_A\le\chi_B$.

iii. $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$.

iv. $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$.

v. $\chi_{A-B}=\chi_A-\chi_{A\cap B}$.

vi. $\{A_n\}$, $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ olacak şekilde X 'in altkümelerinin ayrık bir dizisi ise

$$\chi_A=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{A_n}$$

olur.

vii. $\chi_{A\times B}=\chi_A\cdot\chi_B$ $(A\subset X, B\subset Y)$ [1].

Tanım 3.3. (Basit Fonksiyon). Görüntü kümesi sonlu sayıda elemandan oluşan $\phi : X\to\mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonuna basit fonksiyon denir [1].

Bir reel değerli basit ϕ fonksiyonu, $a_i \in \mathbb{R}$ ve χ_{A_i}'de A_i cümlesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ biçiminde yazılabilir. Eğer $a_1, a_2, ..., a_n$ sayıları ϕ 'nin X üzerinde aldığı sıfırdan farklı değerler ve $A_i = \{x \in X : \phi(x) = a_i\}$ olarak seçilen A_i kümeleri de ayrık ölçülebilir ise bu durumda $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ gösterimine ϕ 'nin standart gösterimi adı verilir. Sıfır fonksiyonunun standart gösterimi $\chi_{\varnothing}$ olarak kabul edilir. X üzerinde tanımlı basit bir ϕ fonksiyonunda, A_i kümelerinin seçilişi tek olmadığından ϕ' nin gösterimi tek değildir. Örneğin $\phi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ biçimindeki gösterim de ϕ' nin standart gösterimidir. Her b_j sıfırdan farklı reel sayı olup, B_j kümelerinin her biri ölçülebilir ayrık kümelerdir.

Tanım 3.4 (Merdiven Fonksiyon). ϕ, standart gösterimi

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

şeklinde olan basit bir fonksiyon olsun. A_i kümelerinin her biri $\mu^*(A_i) < \infty$ olacak şekilde kümeler ise ϕ basit fonksiyonuna merdiven fonksiyonu denir [1].

Tanım 3.5. (Merdiven Fonksiyonunun İntegrali). $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ standart gösterimine sahip ϕ merdiven fonksiyonu için

$$\mathrm{I}(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$$

biçiminde tanımlanan $\mathrm{I}(\phi)$ reel sayısına ϕ' nin Lebesgue integrali adı verilir [1].

ϕ'nin integral sembolü genelde $\int_X \phi d\mu$ veya $\int \phi \, d\mu$ şeklindedir. Fakat bu kısımda işlemlerin kolaylığı açısından $\mathrm{I}(\phi)$ olarak ele alınacaktır.

Teorem 3.6. (Merdiven Fonksiyonun İntegralinin Lineerliği). ϕ ve φ merdiven fonksiyonu olmak üzere her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{I}(\alpha\phi + \beta\varphi) = \alpha \mathrm{I}(\phi) + \beta \mathrm{I}(\varphi)$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. İlk olarak $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her ϕ merdiven fonksiyonu için

$$\mathrm{I}(\alpha \phi) = \alpha \mathrm{I}(\phi)$$

olduğunu gösterelim.

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ merdiven fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\mathrm{I}(\alpha\phi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \mu^*(A_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i)$$

$$= \alpha \mathrm{I}(\phi)$$

bulunur.

Şimdi de ϕ, φ merdiven fonksiyonları için

$$\mathrm{I}(\phi + \varphi) = \mathrm{I}(\phi) + \mathrm{I}(\varphi)$$

eşitliğini gösterelim. Bunun için $\phi=\sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}, \varphi=\sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$ sırasıyla ϕ ve φ merdiven fonksiyonlarının standart gösterimleri olmak üzere $E=\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right)$ kümesini alalım. Ayrıca $A_0=E-\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B_0=E-\bigcup_{j=1}^{m} B_j$ ve $a_0=b_0=0$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=0}^{n} A_i=\bigcup_{j=0}^{m} B_j=E$ olur. $\phi+\varphi$'nin standart gösterimini $\phi+\varphi=\sum_{k=1}^{r} c_k\chi_{C_k}$ şeklinde tanımlayalım. $\phi(x)+\varphi(x)\neq 0$ olması $\phi(x)\neq 0$ veya $\varphi(x)\neq 0$ olmasını gerektireceğinden $\bigcup_{k=1}^{r} C_k\subset E$ kapsama bağıntısı vardır. $C_0=E-\bigcup_{k=1}^{r} C_k$ ve $c_0=0$ alalım. Burada $0\leq k\leq r$ için C_k' lar ayrık ve $C_k=\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{j=0}^{m}\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)$ olur. Böylece,

$$\mu^*(C_k)=\mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{j=0}^{m}\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)$$

elde edilir. Üstelik her *i, j, k* için

$$c_k\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)=\left(a_i+b_j\right)\mu^*\left(C_k\cap A_i\cap B_j\right)$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten $C_k\cap A_i\cap B_j=\varnothing$ ise eşitlik açıktır. Eğer $x\in C_k\cap A_i\cap B_j$ olursa

$$c_k=\phi(x)+\varphi(x)=a_i+b_j$$

olduğundan durum yine aşikardır.

Yukarıda ki ifadelerden ve μ^*' ın Λ 'da sonlu toplamsal özelliğinden faydalanarak,

$$\mathrm{I}(\phi+\varphi)=\sum_{k=1}^{r} c_k\mu^*(C_k)=\sum_{k=0}^{r} c_k\mu^*(C_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_k \mu^* \left(C_k \cap A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{r} \left(a_i + b_j \right) \mu^* \left(C_k \cap A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_i + b_j \right) \mu^* \left(\bigcup_{k=0}^{r} \left(C_k \cap A_i \cap B_j \right) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_i + b_j \right) \mu^* \left(\left(\bigcup_{k=0}^{r} C_k \right) \cap A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_i + b_j \right) \mu^* \left(E \cap A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \left(a_i + b_j \right) \mu^* \left(A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \mu^* \left(A_i \cap B_j \right) + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_j \mu^* \left(A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{m} \mu^* \left(A_i \cap B_j \right) + \sum_{j=0}^{m} b_j \sum_{i=0}^{n} \mu^* \left(A_i \cap B_j \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu^* \left(\bigcup_{j=0}^{m} \left(A_i \cap B_j \right) \right) + \sum_{j=0}^{m} b_j \mu^* \left(\bigcup_{i=0}^{n} \left(A_i \cap B_j \right) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu^* \left(A_i \cap \left(\bigcup_{j=0}^{m} B_i \right) \right) + \sum_{j=0}^{m} b_j \mu^* \left(B_j \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i \right) \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu^* \left(A_i \cap E \right) + \sum_{j=0}^{m} b_j \mu^* \left(B_j \cap E \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \mu^*(A_i) + \sum_{j=0}^{m} b_j \mu^*(B_j)$$

$$= \mathrm{I}(\phi) + \mathrm{I}(\varphi)$$

sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.7. (Merdiven Fonksiyonun İntegralinin Monotonluğu). ϕ ve φ merdiven fonksiyonları için,

i. $\phi \geq 0$ h.h.y. ise $\mathrm{I}(\phi) \geq 0$

ii. $\phi \geq \varphi$ h.h.y. ise $\mathrm{I}(\phi) \geq \mathrm{I}(\varphi)$

iii. $\phi = 0$ h.h.y. ise $\mathrm{I}(\phi) = 0$

iv. $\phi = \varphi$ h.h.y. ise $\mathrm{I}(\phi) = \mathrm{I}(\varphi)$

durumları sağlanır [1].

İspat. i. ϕ merdiven fonksiyonunun standart gösterimi $\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ olsun. Eğer bir i için $a_i < 0$ ise $\mu^*(A_i) = 0$ olacağından

$$\mathrm{I}(\phi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^*(A_i) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. $\phi \geq \varphi$ h.h.y. ise $\phi - \varphi \geq 0$ h.h.y. dır. (i) ve Teorem 3.6. gereğince

$$\mathrm{I}(\phi) - \mathrm{I}(\varphi) = \mathrm{I}(\phi - \varphi) \geq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise göstermek istediğimizdir.

iii. $\phi = 0$ h.h.y. ve $A = \{x \in X : \phi(x) \neq 0\}$ olsun. Bu durumda

$$\phi \geq 0 \text{ h.h.y. ve } -\phi \geq 0 \text{ h.h.y.}$$

olur ki, (i) ve Teorem 3.6. 'dan

$$\mathrm{I}(\phi)\geq 0 \text{ ve } -\mathrm{I}(\phi)=\mathrm{I}(-\phi)\geq 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\mathrm{I}(\phi)=0$ olmalıdır.

iv. $\phi=\varphi$ h.h.y. olması $\phi-\varphi=0$ olmasını gerektireceğinden

$$\mathrm{I}(\phi)-\mathrm{I}(\varphi)=\mathrm{I}(\phi-\varphi)=0$$

elde edilir.

Teorem 3.8. $\phi,\phi_1,\phi_2,...$ merdiven fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler sağlanır:

i. $\phi_n\downarrow 0$ h.h.y. ise $\mathrm{I}(\phi_n)\downarrow 0$.

ii. $\phi_n\uparrow\phi$ h.h.y ise $\mathrm{I}(\phi_n)\uparrow\mathrm{I}(\phi)$ [1].

İspat. i. Kabul edelim ki $\phi_n\downarrow 0$ h.h.y. ,

$$A_n=\{x\in X:\phi_{n+1}(x)>\phi_n(x)\} \text{ ve } A_0=\{x\in X:\lim\phi_n(x)\neq 0\}$$

olsun. Hipotez gereğince $n=0,1,2,...$ için $\mu^*(A_n)=0$ dır. A cümlesini

$$A=\cup_{n=0}^{\infty}A_n$$

şeklinde tarif edelim. $\mu^*(A)=0$ olacağı açıktır. Her $x\in A^t$ için $\phi_{n+1}(x)\leq\phi_n(x)$ ve $\phi_n(x)\downarrow 0$ dır. Ayrıca $\varphi_n=\phi_n\chi_{A^t}$ olarak tanımlanırsa her bir n için $\varphi_n=\phi_n$ h.h.y. ve her $x\in X$ için $\varphi_n(x)\downarrow 0$ özellikleri sağlanır. Teorem 3.7. (iv) dikkate alınırsa her n için $\mathrm{I}(\varphi_n)=\mathrm{I}(\phi_n)$ bulunur.

Şimdi genellikten bir şey kaybetmeksizin her $x\in X$ için $\phi_n(x)\downarrow 0$ olsun. $\varepsilon>0$ sayısına karşılık M ve B cümlelerini

$$M = \max\left\{\phi_1(x) : x \in X\right\},\ B = \left\{x \in X : \phi_1(x) > 0\right\}$$

olarak tanımlayalım. $\mu^*(B) < \infty$ olduğu aşikardır. Her bir n için E_n

$$E_n = \left\{x \in X : \phi_n(x) \geq \varepsilon\right\}$$

olarak tanımlanırsa $\mu^*(E_1) < \infty$ ve her bir E_n cümlesi ölçülebilir olur. Her $x \in X$ için $\phi_n(x) \downarrow 0$ olması nedeniyle $E_n \downarrow \varnothing$ sağlanır. Buradan $\mu^*(E_n) \downarrow 0$ elde edilir. $\mu^*(E_k) < \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ alalım. Her $x \in B - E_k$ için $\phi_k(x) < \varepsilon$ olduğu hesaba katılırsa $n \geq k$ iken

$$0 \leq \phi_n \leq \phi_k = \phi_k \chi_{E_k} + \phi_k \chi_{B - E_k}$$

$$\leq M \chi_{E_k} + \varepsilon \chi_B$$

eşitsizliği yazılabilir. Son eşitsizlikten her $n \geq k$ için

$$0 \leq \mathrm{I}(\phi_n) \leq M\mu^*(E_k) + \varepsilon\mu^*(B) < \varepsilon\left[M + \mu^*(B)\right]$$

olur ki, buradan $\lim \mathrm{I}(\phi_n) = 0$ sonucuna varılır.

ii. $\phi_n \uparrow \phi$ h.h.y. ise bu durumda $\phi_n - \phi \uparrow 0$ h.h.y. olur ki bu ise $\phi_n - \phi \leq \phi_{n+1} - \phi$ h.h.y. ve $\lim(\phi_n - \phi) = 0$ h.h.y. olmasını gerektirir. $\phi - \phi_n \geq \phi - \phi_{n+1}$ h.h.y. ve $\lim(\phi - \phi_n) = 0$ h.h.y. olduğundan $\phi - \phi_n \downarrow 0$ h.h.y. yazılabilir. $\phi - \phi_n \downarrow 0$ h.h.y. olacağından ve ispatın ilk kısmından

$$\mathrm{I}(\phi) - \mathrm{I}(\phi_n) = \mathrm{I}(\phi - \phi_n) \downarrow 0$$

yazılabilir. Bu ise $\mathrm{I}(\phi_n) \uparrow \mathrm{I}(\phi)$ olması demektir.

Teorem 3.9. $f : X \to \mathbb{R}^*$ bir fonksiyon olsun. $\phi_n \uparrow f$ h.h.y. ve $\varphi_n \uparrow f$ h.h.y. olacak şekilde $\{\phi_n\}, \{\varphi_n\}$ merdiven fonksiyon dizileri varsa

$$\lim \mathrm{I}(\phi_n) = \lim \mathrm{I}(\varphi_n)$$

eşitliği mevcuttur [1].

İspat. $\varphi_n \uparrow_n f$ h.h.y. olsun. Bu ifadenin ise $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ h.h.y. ve $\lim \varphi_n = f$ h.h.y. olmasını gerektirdiğini daha önceki bilgilerimizden biliyoruz. Bu terimlerden faydalanarak sabit her m sayısı için

$$\phi_m \wedge \varphi_n \uparrow \phi_m \wedge f = \phi_m \quad \text{h.h.y.}$$

olduğu kolayca görülebilir. Teorem 3.8. yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\phi_m \wedge \varphi_n) = \mathrm{I}(\phi_m)$$

yazabiliriz. Buradan her m,n için $\phi_m \Lambda \varphi_n \leq \varphi_n$ ve integralin monotonluk özelliğinden her m için

$$\mathrm{I}(\phi_m) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\phi_m \Lambda \varphi_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\varphi_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\phi_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\varphi_n) \qquad 3.1$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\varphi_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{I}(\phi_n) \qquad 3.2$$

olduğu da benzer şekilde ispatlanabilir. (3.1) ve (3.2) dan istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.10. $\{\varphi_n\}$, merdiven fonksiyonlarının bir dizisi ve $A \subset X$ olsun. $\varphi_n \uparrow \chi_A$ h.h.y. ise A ölçülebilir bir küme olup

$$\lim \mathrm{I}(\varphi_n) = \mu^*(A)$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. χ_A fonksiyonunun ölçülebilirliği Teorem 2.57.(i) den açıktır. Dolayısıyla A kümesi de ölçülebilirdir. Her $x \in X$ için $\varphi_n(x) \uparrow \chi_A(x)$ olduğunu kabul ederek ispata başlayalım.

Her bir n için

$$A_n = \{x \in X : \varphi_n(x) > 0\}$$

kümesi sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir kümedir. Ayrıca $A_n \uparrow A$ olduğundan $\chi_{A_n} \uparrow \chi_A$ dır. Teorem 3.9. ve Teorem 2.45.(i) göz önüne alınırsa

$$\lim \mathrm{I}(\varphi_n) = \lim \mathrm{I}(\chi_{A_n}) = \lim \mu^*(A_n) = \mu^*(A)$$

elde edilir.

$\varphi_n \uparrow \chi_A$ h.h.y. olduğunu kabul edelim.

$$B_0 = \{x \in X : \lim \varphi_n(x) \neq \chi_A\} \quad \text{ve} \quad B_n = \{x \in X : \varphi_n(x) > \varphi_{n+1}(x)\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

olmak üzere $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ şeklinde tanımlanan B kümesi için $\mu^*(B) = 0$ olur. Buradan $\varphi_n = \varphi_n \chi_{B^t}$ h.h.y. ve her $x \in X$ için $\varphi_n(x)\chi_{B^t}(x) \uparrow \chi_A(x)\chi_{B^t}(x) = \chi_{A-B}(x)$ yazılabilir. Hemen her yerde eşit olan merdiven fonksiyonların integralleri eşit olacağından ispatın ilk kısmı da dikkate alındığında

$$\lim \mathrm{I}(\varphi_n) = \lim \mathrm{I}(\varphi_n \chi_{B^t}) = \mu^*(A-B) = \mu^*(A)$$

bulunur. Burada $\mu^*(A-B) = \mu^*(A)$ olduğu

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\leq \mu^*\left((A \cap B^t) \cup (A \cap B)\right) \\
&\leq \mu^*(A-B) + \mu^*(A \cap B) \\
&= \mu^*(A-B)
\end{aligned}$$

$$\leq \mu^*(A)$$

eşitsizliklerinden görülebilir.

Teorem 3.11. $f: X \to \mathbb{R}$, her bir x için $f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $0 \leq \varphi_n(x) \uparrow_n f(x)$ olacak şekilde $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ basit fonksiyonları vardır [1].

İspat. Her bir n için $A_{n,i}$ kümelerini

$$A_{n,i} = \left\{ x \in X : (i-1)2^{-n} \leq f(x) < i2^{-n} \right\} \quad \left(i = 1,2,\ldots,n2^n \right)$$

şeklinde tanımlayalım. $i \neq j$ için $A_{n,i} \cap A_{n,j} = \varnothing$ dir. f ölçülebilir olduğundan $A_{n,i}$ kümelerinin her biri ölçülebilirdir.

Şimdi her bir n için φ_n fonksiyonlarını

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n2^n} 2^{-n} (i-1) \chi_{A_{n,i}}$$

biçiminde tanımlayalım. Buradan her $x \in X$ ve $n \in N$ için

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik x sabit bir sayı ise yeterince büyük n' ler için

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq 2^{-n}$$

olur. Dolayısıyla her bir x için $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$ bulunur.

Örnek 3.12. $(X, \mathcal{S}, \mu)$, sonlu ölçü uzayı olsun. Bu takdirde her basit fonksiyon bir merdiven fonksiyonudur. Hakikaten, φ basit fonksiyon olmak üzere X' in bir E alt cümlesini

$$E=\{x\in X:\varphi(x)\neq 0\}$$

şeklinde tanımlarsak, μ^{*}' ın monotonluk özelliğinden

$$\mu^{*}(E)\leq \mu^{*}(X)<\infty$$

bulunur ki bu da E kümesinin sonlu dış ölçüye sahip olduğunu ve dolayısıyla φ basit fonksiyonunun merdiven fonksiyon olduğu sonucunu doğurur.

Örnek 3.13. Her φ merdiven fonksiyonu için $|\mathrm{I}(\varphi)|\leq \mathrm{I}(|\varphi|)$ eşitsizliği sağlanır. φ merdiven fonksiyonu reel değerli bir fonksiyon olduğundan dolayı

$$-|\varphi|\leq \varphi\leq |\varphi|$$

eşitsizliğinden söz edebiliriz. Diğer taraftan integralin monotonluk ve lineerlik özelliğinden

$$-\mathrm{I}(|\varphi|)=\mathrm{I}(-|\varphi|)\leq \mathrm{I}(\varphi)\leq \mathrm{I}(|\varphi|)$$

$$|\mathrm{I}(\varphi)|\leq \mathrm{I}(|\varphi|)$$

olur.

3.2. Üst Fonksiyonlar

Lebesgue integral teorisinde önemli bir rol oynayan merdiven fonksiyonlarını daha önce belirtmiştik. Bu kısımda merdiven fonksiyonları yardımıyla oluşturulan üst fonksiyonları ve Lebesgue integrallerini ele alıp, ϕ fonksiyonunun integralini ifade ederken

$$\int_X \phi\, d\mu \quad \text{veya} \quad \int \phi\, d\mu$$

şeklindeki gösterim şekillerini kullanacağız. Burada ϕ merdiven fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$\int \phi\, d\mu=\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu^{*}(A_i)$$

biçiminde tanımlanır [1].

Teorem 3.14. Tüm merdiven fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf bir fonksiyon uzayıdır [1].

Tanım 3.15. (Üst Fonksiyon). $\{\phi_n\}$ merdiven fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu durumda f fonksiyonuna üst fonksiyon adı verilir.

i. $\phi_n \uparrow f$ h.h.y.

ii. $\lim \int \phi_n \, d\mu < \infty$.

Bu tanımdaki $\{\phi_n\}$ dizisi, f fonksiyonunun üreteci olarak adlandırılır. Her üst fonksiyonun ölçülebilir olduğu Teorem 2.57. gereğince aşikardır. Tüm üst fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{U}$ ile gösterilir [1].

Teorem 3.16. Her merdiven fonksiyonu bir üst fonksiyondur [1].

İspat. ϕ bir merdiven fonksiyonu, $\{\phi_n\} = \{\phi, \phi, ...\}$ dizisi de merdiven fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $\phi_n \uparrow \phi$ h.h.y. olur. Diğer taraftan

$$\lim \int \phi_n d\mu = \int \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu^* \left(A_i\right) < \infty$$

olması nedeniyle, ϕ' nin bir üst fonksiyon olduğu gösterilmiş olur.

Kolayca görüleceği gibi; $\{\phi_n\}$, f' yi üreten bir dizi, $\{\varphi_n\}$ dizisi de merdiven fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere $\varphi_n \uparrow f$ h.h.y. olsun. Bu takdirde

$$\lim \int \phi_n d\mu = \lim \int \varphi_n d\mu$$

eşitliği vardır.

Tanım 3.17. f bir üst fonksiyon ve ϕ_n merdiven fonksiyonları için $\phi_n \uparrow f$ h.h.y. olsun. f fonkiyonunun Lebesgue integrali

$$\int f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int \phi_n\,d\mu$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 3.18. f ve g üst fonksiyonları için aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. $f+g$ bir üst fonksiyondur ve $\int(f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu$ dır.

ii. Her $\alpha\geq 0$ için αf bir üst fonksiyon olup, $\int(\alpha f)\,d\mu=\alpha\int f\,d\mu$ dır.

iii. $f\vee g$ ve $f\wedge g$ fonksiyonları da bir üst fonksiyondur [1].

İspat. i. $\{\phi_n\}$ ve $\{\varphi_n\}$ sırasıyla f ve g' yi üreten diziler olsun. Bu durumda $\{\phi_n+\varphi_n\}$ merdiven fonksiyonların bir dizisi ve $\phi_n+\varphi_n\uparrow f+g$ h.h.y. olur. Dolayısıyla $f+g$ fonksiyonu bir üst fonksiyondur. Üstelik,

$$\begin{aligned}\int(f+g)\,d\mu &= \lim\int(\phi_n+\varphi_n)\,d\mu = \lim\left(\int\phi_n d\mu+\int\varphi_n d\mu\right)\\ &= \lim\int\phi_n d\mu+\lim\int\varphi_n d\mu\\ &= \int f\,d\mu+\int g\,d\mu\end{aligned}$$

eşitliklerinden $\int(f+g)\,d\mu=\int f\,d\mu+\int g\,d\mu$ elde edilir.

ii. f bir üst fonksiyon ve $\alpha\geq 0$ olsun. O halde $\phi_n\uparrow f$ h.h.y. olacak şekilde bir $\{\phi_n\}$ merdiven fonksiyon dizisi vardır. Merdiven fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf fonksiyon uzayı olduğundan $\{\alpha\phi_n\}$ dizisi de merdiven fonksiyon dizisidir ve

$$\alpha\,\phi_n\uparrow\alpha\,f \quad \text{h.h.y.}$$

olur. Diğer taraftan $\lim\limits_{n\to\infty}\int(\alpha\phi_n)d\mu<\infty$ olur ki bu ise her $\alpha\geq 0$ için αf fonksiyonunun bir üst fonksiyon olduğunu gösterir ve

$$\int(\alpha f)\,d\mu=\lim\int\alpha\phi_n d\mu=\alpha\lim\int\phi_n d\mu=\alpha\int f\,d\mu$$

olur.

iii. $\{\phi_n \vee \varphi_n\}$ ve $\{\phi_n \wedge \varphi_n\}$ dizileri merdiven fonksiyonlarının dizileri olmak üzere;

$$\phi_n \wedge \varphi_n \uparrow f \wedge g \text{ h.h.y. ve } \lim \int (\phi_n \wedge \varphi_n) d\mu \leq \lim \int \phi_n d\mu < \infty$$

olduğundan $f \wedge g$ bir üst fonksiyondur.

$f \vee g$' nin bir üst fonksiyon olduğunu görmek için ilk olarak $\phi_n \vee \varphi_n \uparrow f \vee g$ h.h.y. gözlemlemeliyiz. Bunun için

$$\phi_n \vee \varphi_n \leq \phi_{n+1} \vee \varphi_{n+1} \text{ h.h.y. ve } \lim(\phi_n \vee \varphi_n) = f \vee g \text{ h.h.y.}$$

ifadelerini görmek yeterlidir. (ϕ_n) ve (φ_n) dizileri monoton artan olması sebebiyle birinci durum açıktır. $\lim(\phi_n \vee \varphi_n) = f \vee g$ ifadesi

$$\phi_n \vee \varphi_n = \frac{1}{2}\left(\phi_n + \varphi_n + |\phi_n - \varphi_n|\right)$$

eşitliğinden kolayca görülebilir. Dolayısıyla $\phi_n \vee \varphi_n \uparrow f \vee g$ h.h.y. olur.

$$\phi_n \vee \varphi_n = \phi_n + \varphi_n - \phi_n \wedge \varphi_n$$

eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim \int (\phi_n \vee \varphi_n) d\mu &= \lim \int (\phi_n + \varphi_n - \phi_n \wedge \varphi_n) d\mu \\
&= \lim \int \phi_n d\mu + \lim \int \varphi_n d\mu - \lim \int (\phi_n \wedge \varphi_n) d\mu \\
&= \int f\, d\mu + \int g\, d\mu - \int (f \wedge g) d\mu < \infty
\end{aligned}$$

olur ki, bu ise göstermek istediğimizdir.

.**Teorem 3.19.** f ve g üst fonksiyonları için aşağıdaki durumlar sağlanır:

i. $f \geq g$ h.h.y. ise $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

ii. $f \in U$, $f \geq 0$ h.h.y. ise $\int f d\mu \geq 0$ [1].

İspat. i. (ϕ_n) ve (φ_n) dizileri sırasıyla f ve g fonksiyonlarının üreteci olsun. Buradan $\phi_n \wedge \varphi_n \leq \phi_{n+1} \wedge \varphi_{n+1}$ h.h.y., $\phi_n \wedge \varphi_n \leq \varphi_n$ h.h.y., $\lim \phi_n \wedge \varphi_n \leq \lim \varphi_n = g$ h.h.y. ve $\phi_n \wedge \varphi_n \uparrow g$ h.h.y. olur ki $\{\phi_n \wedge \varphi_n\}$ dizisi g' yi üreten bir dizidir. Üstelik her bir n için $\phi_n \wedge \varphi_n \leq \phi_n$ h.h.y. olup Teorem 3.7. den her n için

$$\int \phi_n d\mu \geq \int (\phi_n \wedge \varphi_n) d\mu$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla

$$\int f d\mu = \lim \int \phi_n d\mu \geq \lim \int (\phi_n \wedge \varphi_n) d\mu = \int g d\mu$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. İspatın ilk kısmında g' nin $g = \chi_{\varnothing} = 0 \in U$ olarak alınması yeterlidir.

Teorem 3.20. $f : X \to \square$ bir fonksiyon olsun. $f_n \uparrow f$ h.h.y. ve $\lim \int f_n d\mu < \infty$ olacak şekilde bir $\{f_n\}$ üst fonksiyon dizisi varsa f fonksiyonu da bir üst fonksiyondur. İntegrali

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

şeklinde tanımlanır [1].

İspat. Her bir i için $\{\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots\}$ merdiven fonksiyon dizisini $\varphi_{in} \uparrow_n f_i$ h.h.y. olacak şekilde seçelim. Her bir n için ϕ_n fonksiyonlarını

$$\phi_n = \sup\{\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots, \varphi_{nn}\}$$

olarak tarif edelim. Bu durumda her $n \in \square$ için ϕ_n merdiven fonksiyonu olur ve $\phi_n \uparrow f$ h.h.y. sağlanır. Gerçekten φ_{ij} fonksiyonlarının her bir i için j' ye göre hemen her yerde artan olması sebebiyle $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ h.h.y. olduğu açıktır.

$$\begin{array}{cccccc} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \cdots & \uparrow & f_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \cdots & \uparrow & f_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \cdots & \uparrow & f_3 \\ \vdots & \vdots & & & & \end{array}$$

Yukarıdaki tablo yardımıyla kolaylıkla görülebilir ki $i, j = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$\varphi_{ij} \leq \phi_n \text{ h.h.y.}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte sırasıyla n, j, ve i indislerine göre limit alınacak olursa $f \leq \lim \phi_n$ h.h.y. elde edilir. Öte yandan her n doğal sayısı için

$$\phi_n \leq f_n \text{ h.h.y.}$$

olması nedeniyle $\lim \phi_n \leq f$ h.h.y. eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $\lim \phi_n = f$ h.h.y. olmalıdır. Yine $\phi_n \leq f_n$ h.h.y. eşitsizliği, Teorem 3.19. ve hipotez gereğince

$$\lim \int \phi_n d\mu \leq \lim \int f_n d\mu < \infty$$

yazılabilir ki bu ise f fonksiyonunun bir üst fonksiyon olması anlamına gelir.

Şimdi $i = 1, 2,..., n$ olmak üzere

$$\varphi_{in} \leq \phi_n \text{ h.h.y.}$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. Buradan her i doğal sayısı için

$$\int f_i d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_{in} d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int \phi_n d\mu = \int f d\mu$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n d\mu = \int f d\mu$$

olduğu görülür.

Teorem 3.21. Her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n \in U$ olmak üzere $f_n \downarrow 0$ h.h.y. olsun. Bu takdirde $\int f_n d\mu \downarrow 0$ dır [1].

İspat. $\varepsilon > 0$ keyfi bir reel sayı olsun. Her bir n için ϕ_n merdiven fonksiyonlarını $0 \le \phi_n \le f_n$ h.h.y. ve

$$\int (f_n - \phi_n) d\mu = \int f_n d\mu - \int \phi_n d\mu < \varepsilon 2^{-n}$$

olacak şekilde seçelim. Her n doğal sayısı için φ_n fonksiyonlarını $\varphi_n = \inf\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ olarak tarif edelim. Bu durumda φ_n fonksiyonları merdiven fonksiyonu olup, $0 \le \varphi_{n+1} \le \varphi_n$ eşitsizliği sağlanır. Her bir n için $\varphi_n \le f_n$ h.h.y. ve $f_n \downarrow 0$ h.h.y. olması nedeniyle $\varphi_n \downarrow 0$ h.h.y. olur. Buradan

$$\lim \int \varphi_n d\mu = 0$$

olacağından öyle bir k doğal sayısı bulabiliriz ki her $n \ge k$ için $\int \varphi_n d\mu < \varepsilon$ kalır.

$$\begin{aligned} 0 \le f_n - \varphi_n &= f_n - \inf\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\} \\ &= f_n + \sup\{-\phi_1, -\phi_2, ..., -\phi_n\} \\ &= \sup\{f_n - \phi_1, f_n - \phi_2, ..., f_n - \phi_n\} \\ &\le \sup\{f_1 - \phi_1, f_2 - \phi_2, ..., f_n - \phi_n\} \\ &\le \sum_{i=1}^{n} (f_i - \phi_i) \end{aligned}$$

eşitsizliğinin hemen her yerde sağlanması sebebiyle

$$\begin{aligned} 0 \le \int f_n d\mu - \int \varphi_n d\mu &= \int (f_n - \varphi_n) d\mu \\ &\le \int \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i - \phi_i) \right) d\mu \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int (f_i - \varphi_i)\, d\mu$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon 2^{-i}$$

$$< \varepsilon$$

olur. Böylece her $n \geq k$ için

$$0 \leq \int f_n d\mu < \varepsilon + \int \varphi_n d\mu < 2\varepsilon$$

elde edilir. Üst fonksiyonun integralinin monotonluğu dikkate alındığında $\int f_n d\mu \downarrow 0$ bulunur.

Son olarak şunu söylemeliyiz ki tüm üst fonksiyonların sınıfı olan $\mathcal{U}$, negatif reel sayılarla çarpma işlemi altında kapalı olmadığından dolayı vektör uzayı değildir. Bunu bir örnekle ifade edelim.

Örnek 3.22. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1] \\ \sqrt{n}, & x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu üst fonksiyon iken $-f$ fonksiyonu bir üst fonksiyon değildir. Gerçekten,

$A_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ olursa

$$\lambda(A_k) = \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

olur. ϕ_n ' yi

$$\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\, \chi_{A_k}$$

şeklinde tanımlarsak, (ϕ_n) dizisi her bir x için $\phi_n(x)\uparrow f(x)$ olacak şekilde bir merdiven fonksiyon dizisidir. Dolayısıyla

$$\int \phi_n d_\lambda = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\cdot \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} < \infty$$

olur ki bu ise f fonksiyonunun bir üst fonksiyon olduğunu gösterir. Diğer taraftan, $-f$ fonksiyonu alttan sınırlı olmadığından $\phi \leq -f$ olacak şekilde merdiven fonksiyonu mevcut değildir. Bu da demektir ki $-f$ fonksiyonu bir üst fonksiyon değildir.

3.3. İntegrallenebilir Fonksiyonlar

Tüm üst fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{U}$ sınıfının vektör uzayı olmadığını bir önceki bölümde gözlemledik. Buna rağmen $\mathcal{U}$ sınıfının hemen her yerde iki üst fonksiyonun farkı şeklinde ifade edilebileceğini düşünürsek o zaman bu sınıf bir fonksiyon uzayı olur ki bu durumda bu sınıfın elemanları Lebesgue integrallenebilir olur.

Tanım 3.23. $f : X \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $f = u - v$ h.h.y. olacak şekilde u ve v üst fonksiyonları varsa f fonksiyonuna Lebesgue integrallenebilir veya kısaca integrallenebilir fonksiyon denir ve fonksiyonun integrali

$$\int f d\mu = \int u\, d\mu - \int v\, d\mu$$

olarak tarif edilir [1].

İntegralin değeri iki üst fonksiyonun farkı olarak ifade edilen f fonksiyonundan bağımsızdır. Daha açık bir şekilde ifade edecek olursak, f fonksiyonu hemen her yerde ya $f = u - v$ ya da $f = u_1 - v_1$ şeklinde yazılsın f' in integrali değişmez. Hakikaten, $f = u - v = u_1 - v_1$ h.h.y. olursa $f = u + v_1 = u_1 + v$ h.h.y. olur ki Teorem 3.18.(i) gereğince

$$\int u d\mu + \int v_1 d\mu = \int u_1 d\mu + \int v\, d\mu$$

$$\int u d\mu - \int v\, d\mu = \int u_1 d\mu - \int v_1 d\mu$$

olduğu görülür.

Her üst fonksiyon integrallenebilirdir. Ayrıca integrallenebilir fonksiyonlar aynı zamanda ölçülebilir fonksiyonlardır.

Kolayca görüleceği gibi f, Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon g' de $f = g$ h.h.y. olacak şekilde herhangi bir fonksiyon ise g fonksiyonu Lebesgue intagrallenebilirdir [1].

Teorem 3.24. Tüm integrallenebilir fonksiyonların sınıfı bir fonksiyon uzayıdır [1].

İspat. f, g fonksiyonları,

$$f = u - v \text{ h.h.y. ve } g = u_1 - v_1 \text{ h.h.y.}$$

olacak şekilde integrallenebilir fonksiyonlar ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

i. $f + g = (u - v) + (u_1 - v_1) = (u + u_1) - (v + v_1)$ h.h.y.

ii. $\alpha \geq 0$ olsun.

$$\alpha f = \alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v \text{ h.h.y.}$$

$\alpha < 0$ ise,

$$\alpha f = (-\alpha)(u - v) = \alpha v - \alpha u \text{ h.h.y.}$$

iii. $f^{+} = (u - v)^{+} = (u \vee v) - v$ h.h.y.

iv. $f^{-} = (u - v)^{-} = (v \vee u) - u$ h.h.y.

olacak şekilde $f + g, \alpha f, f^{+}, f^{-}$ fonksiyonları hemen her yerde iki üst fonksiyonun farkı olarak ifade edildiklerinden Lebesgue integrallenebilirdirler. Ayrıca,

$$|f| = f^{+} + f^{-} \text{ h.h.y.}$$

olduğundan $|f|$ fonksiyonu da integrallenebilirdir. Böylece tüm integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu sınıfın bir fonksiyon uzayı olduğunu görmüş olduk.

Sonuç 3.25. $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f^{+}, f^{-} fonksiyonlarının integrallenebilir olmasıdır [1].

Örnek 3.26. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < x < 1 \\ -3 & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad \textit{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir midir?

Çözüm. f fonksiyonunun integrallenebilir olup olmadığını görmek için f in negatif olmayan f^{+}, f^{-} parçaların Lebesgue integrallerine bakmamız yeterlidir.

$$f^{+} = \max\{f, 0\}, \quad f^{-} = \max\{-f, 0\}$$

$$f^{+} = 2\chi_{(0,1)}, \quad f^{-} = 3\chi_{[1,\infty)}$$

$$\int f^{+} d\lambda = 2, \quad \int f^{-} d\lambda = \infty$$

$\int f^{-} d\lambda < \infty$ olmadığından dolayı f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir değildir.

Teorem 3.27. (Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonların İntegralinin Lineerliği) f ve g fonksiyonları Lebesgue integrallenebilir olsun. Bu durumda

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. f ve g fonksiyonları integrallenebilir olduklarından,

$$f = u - v \ \text{ h.h.y. ve } \ g = u_1 - v_1 \ \text{ h.h.y.}$$

olacak şekilde u, v, u_1, v_1 üst fonksiyonları vardır. Teorem 3.24 'ten $\alpha f, \beta g, \alpha f + \beta g$ fonksiyonları da integrallenebilirdir. $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g &= \alpha(u - v) + \beta(u_1 - v_1) \\ &= \alpha u - \alpha v + \beta u_1 - \beta v_1 \\ &= (\alpha u + \beta u_1) - (\alpha v + \beta v_1) \end{aligned}$$

şeklinde hemen her yerde iki üst fonksiyonun farkı olarak ifade edilebileceğinden integrali

$$\begin{aligned} \int(\alpha f + \beta g) d\mu &= \int(\alpha u + \beta u_1) d\mu - \int(\alpha v + \beta v_1) d\mu \\ &= \int \alpha u d\mu + \int \beta u_1 d\mu - \int \alpha v d\mu - \int \beta v_1 d\mu \\ &= \alpha\left(\int u d\mu - \int v d\mu\right) + \beta\left(\int u_1 d\mu - \int v_1 d\mu\right) \\ &= \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3.28. Hemen her yerde negatif olmayan, integrallenebilir bir f fonksiyonu aynı zamanda bir üst fonksiyondur [1].

İspat. f integrallenebilir bir fonksiyon ve $f \geq 0$ h.h.y. olsun. f'’in integrallenebilir bir fonksiyon olması nedeniyle

$$f = u - v \quad \text{h.h.y.}$$

olacak şekilde *u*, *v* üst fonksiyonların varlığından söz edebiliriz. Öte yandan her *u*, *v* fonksiyonu merdiven fonksiyon dizilerinin limiti olduğundan

$$\varphi_n \to f \ \text{h.h.y.} \quad \text{ve} \quad \varphi_n^+ \to f \ \text{h.h.y.}$$

biçiminde bir $\{\varphi_n\}, \{\varphi_n^+\}$, merdiven fonksiyon dizileri vardır. Teorem 3.11 gereğince $0 \le S_n \uparrow f$ h.h.y. olacak şekilde $\{S_n\}$ dizisinin basit bir fonksiyon dizisi olduğu açıktır. Her bir n için

$$\phi_n = S_n \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i^+ \right)$$

olsun. Buradan $\{\phi_n\}$, $0 \le \phi_n \uparrow f$ h.h.y. şartını sağlayan merdiven fonksiyon dizisi olur.

Şimdi $\int \phi_n d\mu < \infty$ olduğunu gösterelim.

Her bir n için $\phi_n + v \le f + v \le u$ h.h.y. eşitsizliğini yazabiliriz. İntegralin monotonluk özelliğinden

$$\int \phi_n d\mu + \int v d\mu \le \int u d\mu$$

olup,

$$\int \phi_n d\mu \le \int u d\mu - \int v d\mu < \infty$$

elde edilir ki bu ise görmek istediğimizdir.

Bu teoremden şunu ifade edebiliriz ki; f integrallenebilir bir fonksiyon ise f^+, f^- fonksiyonları üst fonksiyondur. Ayrıca f fonksiyonu $f = f^+ - f^-$ şeklinde ifade edildiğinden dolayı f fonksiyonunun Lebesgue integrali,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.29. *f*, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{x \in X : |f(x)| \ge \varepsilon\}$$

kümesi sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir kümedir [1].

İspat. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$A = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

olsun. Buradan $\varepsilon \chi_A \leq |f|$ olur. Ayrıca $\frac{1}{\varepsilon}|f|$, integrallenebilirdir. Teorem 3.28 gereğince üst fonksiyon olduğundan

$$\phi_n \uparrow \frac{1}{\varepsilon}|f| \text{ h.h.y.}$$

olacak şekilde merdiven fonksiyonlarının bir $\{\phi_n\}$ dizisi vardır. Bu durumda $\{\phi_n \wedge \chi_A\}$ dizisi de merdiven fonksiyon dizisi olup, $\phi_n \wedge \chi_A \uparrow \chi_A$ h.h.y. olur. Teorem 3.10 dikkate alınarak

$$\mu^*(A) = \lim \int (\phi_n \wedge \chi_A) d\mu \leq \lim \int \phi_n d\mu = \frac{1}{\varepsilon} \int |f| d\mu < \infty$$

şeklinde istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 3.30. *f*, ölçülebilir bir fonksiyon, *h* ve *g* fonksiyonları integrallenebilir olmak üzere $h \leq f \leq g$ h.h.y. olsun. Bu takdirde f fonksiyonu da integrallenebilirdir [1].

İspat. $h \leq f \leq g$ h.h.y. ise $0 \leq f - h \leq g - h$ h.h.y. olur. Buradan kabul edebiliriz ki $0 \leq f \leq g$ h.h.y. dır. g fonksiyonunun bir üst fonksiyon olduğunu Teorem 3.28'den söyleyebiliriz. Dolayısıyla $0 \leq \phi_n \uparrow g$ h.h.y. olacak şekilde $\{\phi_n\}$ merdiven fonksiyonu vardır. Basit fonksiyonların bir $\{\varphi_n\}$ dizisi vardır ki $0 \leq \varphi_n \uparrow f$ h.h.y. (Teorem 3.11) olur. Ayrıca $\{\phi_n \wedge \varphi_n\}$, merdiven fonksiyon dizisi hemen her yerde *f* fonksiyonuna artarak yakınsayan bir dizidir. Her bir *n* için

$$\int (\phi_n \wedge \varphi_n) d\mu \leq \int \phi_n d\mu$$

eşitsizliği sağlanır. $n \to \infty$ için

$$\int f d\mu = \lim \int (\phi_n \wedge \varphi_n) d\mu \leq \lim \int \phi_n d\mu = \int g d\mu < \infty$$

olur. f, $\mathcal{U}$ sınıfının bir elemanıdır. Dolayısıyla f, integrallenebilirdir.

Teorem 3.31. f ve g integrallenebilir fonksiyonları için aşağıdaki önermeler doğrudur:

i. $\int |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

ii. $f \geq g$ h.h.y. ise $\int f d\mu \geq \int g d\mu$.

iii. $\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$ [1].

İspat. i. $(\Leftarrow)$ $f = 0$ h.h.y. ise $\int |f| d\mu = 0$ olduğu açıktır.

$(\Rightarrow)$ $\int |f| d\mu = 0$ olsun. Bu durumda $|f|$, bir üst fonksiyondur. Dolayısıyla $0 \leq \phi_n \uparrow_n f$ h.h.y. olacak şekilde merdiven fonksiyonlarının bir $\{\phi_n\}$ dizisi vardır. Buradan,

$$0 \leq \lim \int \phi_n d\mu = \int |f| d\mu$$

olur ki, bu ise her n için $\int \phi_n d\mu = 0$ ve $f = 0$ h.h.y. olması anlamına gelir.

ii. $f \geq g$ h.h.y. olması $f - g \geq 0$ h.h.y. olmasını gerektireceğinden $f - g$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğu Teorem 3.24 'ten aşikardır. İntegrallenebilir fonksiyonların integralinin lineerlik özelliği ve hemen her yerde negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonların aynı zamanda bir üst fonksiyon olması dikkate alınarak

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f - g) d\mu \geq 0$$

elde edilir. Buradan istenilen sonuca ulaşılır.

iii. Reel değerli bir f fonksiyonu için, $-|f| \leq f \leq |f|$ eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlik ve integralin monotonluk, lineerlik özellikleri hesaba katılarak,

$$-\int (|f|) d\mu \leq \int f d\mu \leq \int (|f|) d\mu$$

bulunur. Bu ise bizim görmek istediğimizdir.

Şimdiye kadar reel değerli fonksiyonların integrallerini gözlemledik. Eğer fonksiyonun tüm noktalarının kümesi ∞ veya $-\infty$ olursa bu takdirde kümeyi boş küme olarak kabul ederiz. Bunun sebebi ne integrallenebilirlik karakteri ne bir boş kümedeki fonksiyonun değerleriyle fonksiyonun integral değeri arasındaki değişimle alakalıdır. Üstelik $\infty-\infty$ formundaki noktalarda herhangi iki fonksiyonun toplamının değeri, fonksiyonların toplamının integral değerini ve integrallenebilirliğini etkilemez. Söz konusu bu olay fonksiyon değerinin sonsuz olduğu tüm noktalarının kümesinin ölçüsü sıfır olduğu sürece gerçekleşir. Sonsuz değerli fonksiyonlarla karşılaşmak istenilmezse integrallenebilirlikten herhangi bir şey kaybetmeksizin fonksiyonların değeri sonlu olarak değiştirilebilir. Örneğin sonsuz değerlerin tümü sıfır olarak alınır.

O halde genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyonunun integrallenebilmesinden fonksiyonun bir boş kümede sonsuz değerlere sahip olduğunu anlamalıyız. Ayrıca sonlu değerler bu noktalardan seçilirse fonksiyon integrallenebilir olur.

Örnek 3.32. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases}\infty, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$$

tanımlanan f fonksiyonu integrallenebilir midir?

Çözüm. Genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyonunun integrallenebilmesi için fonksiyonu sonsuz yapan noktaların kümesinin ölçüsü sıfır olmalıdır. Fakat f fonksiyonunun sonsuz yapan noktalarının ölçüsü sıfırdan farklı olduğundan integrallenemez.

Teorem 3.33. (Levi). $\{f_n\}$ integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi, her n için $f_n \le f_{n+1}$ h.h.y. ve $\lim\int f_n d\mu<\infty$ şartları sağlansın. Bu takdirde öyle bir integrallenebilir f fonksiyonu vardır ki $f_n \uparrow f$ h.h.y. ve $\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$ dır [1].

İspat. $\{f_n\}$ integrallenebilir fonksiyon dizisini $f_n\ge 0$ h.h.y. olacak şekilde alalım. Her $x\in X$ için

$0 \leq f_n(x) \uparrow f(x), g(x) = \lim f_n(x) \in \mathbb{R}^*$, $E = \{x \in X : g(x) = \infty\}$ ve $\mathrm{I} = \lim \int f_n d\mu < \infty$ olsun. Bu durumda

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) > i\}$$

eşitliği mevcut olup, E kümesi ölçülebilirdir. $\mu^*(E) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Her bir n için f_n nin bir üst fonksiyon olduğu Teorem 3.28' den kolayca görülebilir. O halde $\phi_{in} \uparrow_n f_i$ h.h.y. olacak şekilde bir $\{\phi_{i1}, \phi_{i2}, ...\}$ merdiven fonksiyon dizisi vardır. Her $n \in N$ için φ_n fonksiyonlarını,

$$\varphi_n = \sup\{\phi_{1n}, \phi_{2n}, ..., \phi_{nn}\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda φ_n, merdiven fonksiyonu olup $\varphi_n \uparrow g$ h.h.y. olur. Gerçekten ϕ_{ij} fonksiyonlarının her bir i için j'ye göre hemen her yerde artan olması sebebiyle $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ h.h.y. olduğu açıktır.

$$\begin{array}{llll} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \cdots & \uparrow f_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \cdots & \uparrow f_2 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \cdots & \uparrow f_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Yukarıda ki tablo yardımıyla kolaylıkla görülebilir ki $i, j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere hemen her yerde $\phi_{ij} \leq \varphi_n$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte sırasıyla n, j ve i indislerine göre limit alınacak olursa, $g \leq \lim \varphi_n$ h.h.y. elde edilir. Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n \leq f_n$ h.h.y. olması sebebiyle $\lim \varphi_n \leq g$ h.h.y. eşitsizlikleri sağlanır. Buradan $\lim \varphi_n = g$ h.h.y. olur. Her $x \in X$ için $f_n(x) \uparrow g(x)$ ve $\varphi_n \uparrow g$ h.h.y. olduğundan her n için $f_n \uparrow g$ h.h.y. ve $\varphi_n \uparrow g$ h.h.y. olup Teorem 3.22 'den,

$$\lim \int \varphi_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \mathrm{I}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca her bir k için $\{\varphi_n \wedge k\chi_E\}$ dizisi, $\varphi_n \wedge k\chi_E \uparrow k\chi_E$ h.h.y. şeklinde bir merdiven fonksiyon dizisidir. Teorem 3.10 gereğince $\mu^*(E) < \infty$ ve her bir k için

$$k\mu^*(E) \leq \lim \int \varphi_n \, d\mu = \mathrm{I}$$

olur ki, bu ise $\mu^*(E) = 0$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi $f : X \to \square$ fonksiyonunu,

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = g(x), & x \in E \\ 0 & , x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $f_n \uparrow f$ h.h.y. olur ki Teorem 3.22 itibariyle,

$$\int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$$

bulunur.

Teorem 3.34. $\{f_n\}$ negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu < \infty$ olsun. Bu takdirde, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ fonksiyonu integrallenebilirdir ve integrali,

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

şeklindedir [1].

İspat. Her $n \in N$ için, $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ olsun. Burada her bir g_n fonksiyonu integrallenebilir olup, $g_n \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ h.h.y. dır. Levi teoreminden, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ toplamının da integrallenebilir olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla her n için,

$$\int g_n d\mu = \int \sum_{i=1}^{n} f_i d\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int f_i d\mu$$

eşitliği sağlanır. $n \to \infty$ yapılırsa

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i d\mu = \lim \int g_n d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i d\mu$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.35. (Fatou Lemması). $\{f_n\}$ integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi, $f_n \geq 0$ h.h.y. ve $\liminf \int f_n d\mu < \infty$ olsun. Bu durumda $\liminf f_n$, integrallenebilirdir. Ayrıca,

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

eşitsizliği sağlanır [1].

İspat. Kabul edelim ki her $x \in X$ ve her bir n için $f_n(x) \geq 0$, $g_n = \inf\{f_i(x) : i \geq n\}$ olsun. Bu durumda her g_n ölçülebilirdir. Diğer taraftan her bir n için $0 \leq g_n \leq f_n$ eşitsizliği, Teorem 3.30 aracılığıyla da her g_n ' nin integrallenebilir olduğu açıktır.

Şimdi $g_n \uparrow g$ h.h.y. ve $\lim \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu < \infty$ olduğunu gözlemleyelim.

Levi teoremi gereğince integrallenebilir bir g fonksiyonu vardır ki $g_n \uparrow g$ h.h.y. sağlanır. Buradan takip edilirse, $g = \liminf f_n$ h.h.y. ve $\liminf f_n$, integrallenebilirdir. Üstelik,

$$\int \liminf f_n d\mu = \int g d\mu = \lim \int g_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.36. (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi). $\{f_n\}$ integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi g 'de integrallenebilir sabit bir fonksiyon olmak üzere her n için $|f_n| \leq g$ h.h.y. olsun. Eğer $f_n \to f$ h.h.y. ise f, fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f d\mu$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. Her bir n için $|f_n| \leq g$ h.h.y. ise $|f| \leq g$ h.h.y. dır. Ayrıca f'in integrallenebilir olduğu Teorem 3.33 'den aşikardır. $|f_n| \leq g$ h.h.y. ise $-g \leq f_n \leq g$ h.h.y. olur. Buradan kabul edebiliriz ki $0 \leq g - f_n$ h.h.y. ve $0 \leq g + f_n$ h.h.y.dır. Dolayısıyla $\{g - f_n\}$ dizisi Fatou Lemmasının hipotezini sağlar. Üstelik,

$$\liminf (g - f_n) = g - f \quad \text{h.h.y.}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g - f) d\mu \\
&= \int \liminf (g - f_n) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g - f_n) d\mu \\
&= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu
\end{aligned}$$

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

elde edilir. Benzer şekilde $\{g + f_n\}$ dizisine de Fatou Lemmasını uygularsak;

$$\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g + f) d\mu \\
&= \int \liminf (g + f_n) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g + f_n) d\mu
\end{aligned}$$

$$= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu$$

ifadelerinden

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $\lim \int f_n d\mu$, $\mathbb{R}$ ’de mevcuttur ve $\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu$ dır.

Lebesgue integrallenebilir olmayan fakat herhangi bir fonksiyon dizisinin hemen her yerde yakınsadığı bir fonksiyonu bulmak mümkündür. Aşağıdaki örnek bu durumu ifade eder.

Örnek 3.37. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n & , x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & , x \notin \left(0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$$

fonksiyon dizisi için $f_n \to f = 0$ h.h.y. dır. Gerçekten,

$$\lim f_n(x) = \lim \begin{cases} n & , x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & , x \notin \left(0, \frac{1}{n}\right) \end{cases} = \begin{cases} \infty & , x = 0 \\ 0 & , x \neq 0 \end{cases}$$

olup, $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi $f = 0$ fonksiyonuna $x = 0$ noktası dışında yakınsaktır. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\int f_n d\lambda = n\lambda\left(\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) = n.\frac{1}{n} = 1$ olur. Dolayısıyla $\lim \int f_n d_\lambda = 1$ dir. Fakat $\lim \int f_n d\lambda = 1 \neq 0 = \int \lim f_n d\lambda$ olduğundan f fonksiyonu integrallenemez.

Her $E \subset X$ için

$$\mathcal{S}_E = \{E \cap A : A \in \mathcal{S}\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{S}_E$ sınıfı E’nin altkümelerinin bir yarı halkasıdır. Üstelik E kümesi X’in ölçülebilir bir altkümesi ise bu durumda $\mathcal{S}_E$’ye kısıtlanan μ^* bir ölçüdür. Yani, $\left(E, \mathcal{S}_E, \mu^*\right)$, her $E \subset X$ için bir ölçü uzayı olur.

Eğer $E \subset X$ kümesi ölçülebilir bir küme ise bu durumda $f : E \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonu E kümesi üzerinde integrallenebilirdir. Eğer $f\chi_E$ fonksiyonu X üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon veya E'ye kısıtlı f fonksiyonu $\left(E, \mathcal{S}_E, \mu^*\right)$ ölçü uzayına göre integrallenebilir ise $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X'in ölçülebilir E altkümesi üzerinde integrallenebilirdir. Böylece,

$$\int f\chi_E d\mu = \int_E f d\mu$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 3.38. İntegrallenebilir her f fonksiyon X'in ölçülebilir her altkümesi üzerinden integrallenebilirdir. Üstelik her $E \subset X$ kümesi için,

$$\int_E f d\mu + \int_{E^+} f d\mu = \int_X f d\mu$$

sağlanır [1].

İspat. $E \subset X$ ölçülebilir bir küme, f fonksiyonu integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Şunu rahatlıkla söyleyebiliriz ki; E^t kümesi de ölçülebilirdir. Ayrıca

$$0 \le f\chi_E \le f, \quad 0 \le f\chi_{E^t} \le f$$

eşitsizliklerinden $f\chi_E, f\chi_{E^t}$ fonksiyonlarının integrallenebilir olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\int_E f d\mu + \int_{E^t} f d\mu &= \int f\chi_E d\mu + \int f\chi_{E^t} d\mu \\
&= \int \left(f\chi_E + f\chi_{E^t}\right) d\mu \\
&= \int f\chi_{E \cup E^t} d\mu \\
&= \int f\chi_X d\mu \\
&= \int_X f d\mu
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eğer,

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

ifadesi pozitif basit bir ϕ fonksiyonunun standart gösterimi ise bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^* (A_i)$$

toplamı negatif olmayan genişletilmiş bir reel sayıdır.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu^* (A_i) = \infty$$

olması durumunda ϕ 'nin Lebesgue integrali sonsuz olur.(yani $\int \phi \, d_{\mu} = \infty$)

Kabul edelim ki $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ bir fonksiyon, $\phi_n \uparrow f$ h.h.y. olacak şekilde $\{\phi_n\}$, pozitif basit fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu takdirde $\int \phi_n d\mu$ genişletilmiş bir reel sayıdır.Kolayca görülür ki $\lim \int \phi_n d\mu$, $\{\phi_n\}$ dizisinin seçiminden bağımsızdır. $\lim \int \phi_n d\mu = \infty$ durumunda $\int f d\mu = \infty$ olur ki f'in Lebesgue integrali sonsuzdur. Fakat fonksiyon integrallenebilir değildir.

Her pozitif, ölçülebilir f fonksiyonu sonlu veya sonsuz bir Lebesgue integraline sahiptir. Çünkü Teorem 3.11 aracılığıyla pozitif basit fonksiyonların bir $\{\phi_n\}$ dizisi vardır ki $\phi_n \uparrow f$ h.h.y. dır.

Eğer $f : X \to \mathbb{R}^*$ fonksiyonu ölçülebilir ise $f = f^+ - f^-$ olup, $\int f^+ d\mu$ ve $\int f^- d\mu$ integralleri negatif olmayan genişletilmiş reel sayılardır. Eğer bu integrallerden biri reel sayı ise o zaman f fonksiyonunun integrali genişletilmiş reel sayıdır ve integrali,

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

şeklindedir.

4. LEBESGUE İNTEGRALİ İLE RİEMANN İNTEGRALİ ARASINDAKİ BAĞINTI

Bu kısımda Lebesgue integralinin, Riemann integralinin bir genelleştirilmesi olduğunu göstereceğiz. İlk olarak Riemann integralinin tanımını verelim.

f, $\mathbb{R}$ ’nin $[a,b]$ aralığında sınırlı reel değerli sabit bir fonksiyon, $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ ’de $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ olacak şekilde $[a,b]$ ’nin bir parçalanması olsun.

Her $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ parçalanması $[a,b]$ ’yi

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$$

şeklinde kapalı alt aralıklara böler. Bu alt aralıkların en büyük uzunluğuna *P*’nin normu denir ve $|P|$ ile gösterilip,

$$|P|=\max\{x_i-x_{i-1}:i=1,...,n\}$$

biçiminde tanımlanır [1].

$[a,b]$ aralığının iki parçalanması *Q* ve *P* olsun. Eğer $Q\subset P$ ise *P* parçalanması *Q*’dan daha ince veya daha sıktır [1].

Tanım 4.1. $[a,b]$ ‘nin bir $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ parçalanması ve $i=1,...,n$ için,

$$m_i=\inf\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\} \quad \text{ve} \quad M_i=\sup\{f(x):x\in[x_{i-1},x_i]\}$$

olsun. Bu durumda,

$$S_*(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \quad \text{ve} \quad S^*(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

toplamlarına sırası ile *f* fonksiyonunun *P* parçalanmasına karşılık gelen Alt Darboux toplamı ve Üst Darboux toplamı denir [1].

$[a,b]$'nin her P parçalanması için, $S_*(f,P) \leq S^*(f,P)$ olduğu Tanım 4.1'den açıktır.

Lemma 4.2. P ve Q, $[a,b]$'nin $Q \subset P$ olacak şekilde parçalanmaları olsun. Bu takdirde,

$$S_*(f,Q) \leq S_*(f,P) \text{ ve } S^*(f,P) \leq S^*(f,Q)$$

eşitsizlikleri sağlanır [1].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Lemma 4.3. P ve Q, $[a,b]$ aralığının parçalanmaları olmak üzere $Q \subset P$ olsun. Bu durumda,

$$S_*(f,P) \leq S^*(f,Q)$$

olur [1].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Tanım 4.4. *f*, $[a,b]$ üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\mathrm{I}_*(f) = \sup\left\{S_*(f,P) : P,[a,b]\text{'nin bir parçalanması}\right\}$$

$$\mathrm{I}^*(f) = \inf\left\{S^*(f,P) : P,[a,b]\text{'nin bir parçalanması}\right\}$$

sayılarına sırası ile *f*'in Alt Darboux integrali ve Üst Darboux integrali denir [1].

Buradan $[a,b]$ 'nin her $Q \subset P$ parçalanmaları için,

$$S_*(f,P) \leq \mathrm{I}_*(f) \leq \mathrm{I}^*(f) \leq S^*(f,P)$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Tanım 4.5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\mathrm{I}_*(f)=\mathrm{I}^*(f)$ ise bu durumda f fonksiyonuna Riemann integrallenebilir bir fonksiyon denir. f 'in Riemann integrali, $\int_a^b f(x)d_x$ olarak tanımlanır [1].

Teorem4.6. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon>0$ için

$$S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$$

olacak şekilde $[a,b]$ 'nin bir P parçalanması var olmasıdır [1].

İspat. *f*, integrallenebilir bir fonksiyon, $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)d_x$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda $[a,b]$ 'nin P_1 ve P_2 parçalanmaları vardır öyle ki

$$\mathrm{I}-S_*(f,P_1)<\varepsilon \text{ ve } S^*(f,P_2)-\mathrm{I}<\varepsilon$$

olur. Bu durumda Lemma 4.2 deki gibi $P=P_1\cup P_2$ parçalanması,

$$\begin{aligned} S^*(f,P)-S_*(f,P) &\le S^*(f,P_2)-S_*(f,P_1) \\ &=\left[S^*(f,P_2)-\mathrm{I}\right]+\left[\mathrm{I}-S_*(f,P_1)\right] \\ &<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar.

Kabul edelim ki $\forall\varepsilon>0$ için $S^*(f,P)-S_*(f,P)<\varepsilon$ olacak şekilde $[a,b]$'nin bir P parçalanması bulunsun. Bu durumda $[a,b]$ 'nin her P parçalanması için

$$0\le \mathrm{I}^*(f)-\mathrm{I}_*(f)\le S^*(f,P)-S_*(f,P)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan $\forall\varepsilon > 0$ için $0 \leq \mathrm{I}^*(f) - \mathrm{I}_*(f) < \varepsilon$ olur ki bu ise

$$\mathrm{I}^*(f) - \mathrm{I}_*(f) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{I}^*(f) = \mathrm{I}_*(f)$$

olması demektir. Bu da f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olduğunu gösterir.

$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[a,b]$'nin bir parçalanması olsun. $i = 1,...,n$ için $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ ise

$$T = \{t_1, ..., t_n\}$$

sınıfına P'nin noktalarının bir seçilişi denir [1].

f' in P parçalanmasına karşılık gelen Riemann toplamı,

$$R_f(P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

şeklinde tanımlanır [1].

Teorem 4.7. (Darboux). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Riemann integrallenebilir ve $\{P_n\}$'de $[a,b]$'nin parçalanmalarının bir dizisi olmak üzere $\lim |P_n| = 0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} S_*(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S^*(f, P_n) = \int_a^b f(x)dx$$

olur [1].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 4.8. Riemann integrallenebilir her *f* fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir olup,

$$\int f d\lambda = \int_a^b f(x)dx$$

eşitliği sağlanır [1].

İspat. Her bir n için $P_n = \left\{x_0, x_1, ..., x_{2^n}\right\}$, $[a,b]$'nin $(b-a)2^{-n}$ uzunluktaki alt aralıklarına bölünen bir parçalanması olsun.(Yani, $x_i = a + i(b-a)2^{-n}$ olacak şekilde)

$$m_i = \inf\left\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}, \ M_i = \sup\left\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$$

olmak üzere,

$$\phi_n = \sum_{i=1}^{2^n} m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}, \varphi_n = \sum_{i=1}^{2^n} M_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}$$

tanımlayalım. Burada $\{\phi_n\}$ ve $\{\varphi_n\}$ dizileri, her $x \in [a,b)$ için $\phi_n(x) \uparrow f(x)$ ve $\varphi_n(x) \downarrow f(x)$ olacak şekilde merdiven fonksiyon dizileridir.

Eğer $\phi_n(x) \uparrow g(x)$ ve $\varphi_n(x) \downarrow h(x)$ ise bu takdirde Teorem 3.33 gereğince g ve h fonksiyonları Lebesgue integrallenebilirdir ve her $x \in [a,b)$ için

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca,

$$\int \phi_n d\lambda = S_*(f, P_n) \quad \text{ve} \quad \int \varphi_n d\lambda = S^*(f, P_n)$$

olur. Diğer taraftan,

$$\varphi_n(x) - \phi_n(x) \downarrow h(x) - g(x) \geq 0$$

olması nedeniyle,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int (h-g) d\lambda &= \lim \int (\varphi_n - \phi_n) d\lambda \\ &= \lim \int \varphi_n d\lambda - \lim \int \phi_n d\lambda \\ &= \lim S^*(f, P_n) - \lim S_*(f, P_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan hemen her yerde $h-g=0$ olur ki, $h=g=f$ h.h.y. sağlanır. Özellikle, $\phi_n \uparrow f$ h.h.y. ve $\varphi_n \uparrow f$ h.h.y. olduğundan *f*, Lebesgue integrallenebilirdir. Ayrıca f fonksiyonu bir üst fonksiyondur. Sonuç olarak,

$$\int f d\lambda = \lim \int \varphi_n d\lambda = \lim S_*\left(f, P_n\right) = \int_a^b f(x) dx$$

dır.

Teorem 4.9. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart fonksiyonun hemen her yerde sürekli olmasıdır [1].

İspat. Her n için P_n, ϕ_n ve φ_n Teorem 4.8 deki gibi tanımlansın. İlk olarak f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Bir önceki teoremin ispatı; her $x \notin A$ için

$$\phi_n(x) \uparrow f(x) \text{ ve } \varphi_n(x) \downarrow f(x)$$

olacak şekilde $[a,b]$'nin μ^*-boş A altkümesinin olmasını garanti eder. Buradan açıktır ki $D = A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right)$ kümesinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır. Ayrıca *f* fonksiyonu $[a,b]-D$ de süreklidir. Bunu görmek için $\varepsilon > 0$ ve $s \in [a,b]-D$ alalım. Bazı n' ler için

$$f(s) - \phi_n(s) < \varepsilon \quad \text{ve} \quad \varphi_n(s) - f(s) < \varepsilon$$

olsun. Bu durumda $s \in \left(x_{i-1}, x_i\right)$ olacak şekilde P_n parçalanmasının bazı $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ alt aralıkları vardır. Üstelik

$$\phi_n(s) = m_i \quad \text{ve} \quad \varphi_n(s) = M_i$$

olur. Eğer $x \in \left(x_{i-1}, x_i\right)$ olursa,

$$-\varepsilon < m_i - f(s) \le f(x) - f(s) \le M_i - f(s) < \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. $\left(x_{i-1}, x_i\right)$, s' nin bir komşuluğu olduğundan son eşitsizlik f fonksiyonunun s' de sürekli olduğunu gösterir. Bu da f' in hemen her yerde sürekli olması anlamına gelir.

Şimdi f fonksiyonu h.h.y. sürekli ve $s \neq b$ noktası f fonksiyonunun süreklilik noktası olsun.

Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta > 0$ sayısı bulunur ki her $x \in [a,b]$ için $|x-s| < \delta$ olduğunda

$$f(s) - \varepsilon < f(x) < f(s) + \varepsilon$$

olur. Bazı k' lar için $|P_k| < \delta$ olursa P_k'nın bazı $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralıkları için de $s \in [x_{i-1}, x_i)$ dir. Özellikle her $x \in [x_{i-1}, x_i]$ için $|x-s| < \delta$ eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$f(s) - \varepsilon \leq m_i = \phi_k(s) < f(s) + \varepsilon$$

eşitsizliğini elde ederiz. Diğer taraftan

$$\phi_n(s) \uparrow f(s) \text{ ve } \varphi_n(s) \downarrow f(s)$$

elde edilir. Hemen her yerde f fonksiyonu sürekli olduğunda

$$\phi_n \uparrow f \text{ h.h.y. ve } \varphi_n \downarrow f \text{ h.h.y.}$$

olur. Bu ise f foksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösterir. Ayrıca Lebesgue yakınsaklık teoreminden,

$$S_*(f, P_n) = \int \phi_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda \quad \text{ve } S^*(f, P_n) = \int \varphi_n d\lambda \downarrow \int f d\lambda$$

eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla

$$\lim\left(S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n)\right) = 0$$

olur ki Teorem 4.8 aracılığıyla f fonksiyonu Riemann integrallenebilir bir fonksiyon olur.

Örnek 4.10. $f:[0,1]\to[0,\infty)$ fonksiyonu, $(0,1]$'in her kapalı alt aralığında Riemann integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart ' de

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$$

limitinin var olmasıdır. Ayrıca

$$\int fd\lambda=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$$

eşitliği mevcuttur.

Çözüm. Kabul edelim ki *f*, Lebesgue integrallenebilir , $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ olacak şekilde $(0,1]$ 'in keyfi bir dizisi ve her bir *n* için, $g_n=f\chi_{[\varepsilon_n,1]}$ üst fonksiyon olsun. Bu durumda $g_n\uparrow f$ h.h.y. ve teorem 3.22 ' den f fonksiyonunun da bir üst fonksiyon olduğunu ve ayrıca,

$$\int fd\lambda=\lim_{n\to\infty}\int g_n d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int f\chi_{[\varepsilon_n,1]}d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^{1} f(x)d\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^{1} f(x)dx$$

eşitliğini, f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olmasından ve teorem 3.22 aracılığıyla yazabiliriz. Bu ise $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx$ ifadesinin varlığını ve

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx=\int fd\lambda$$

eşitliğini gösterir.

Şimdi R'de limit mevcut olsun. $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ ve g_n fonksiyonu da her bir *n* için yine yukarıdaki gibi üst fonksiyon olmak üzere hemen her yerde $g_n\uparrow f$ dır. Diğer taraftan

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon_n}^{1} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon}^{1} f(x)dx < \infty$$

olduğundan f fonsiyonu bir üst fonksiyon olup, Lebesgue integrallenebilirdir.

Örnek 4.11. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\le 1\\ 0, & \text{diğer}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun Riemann ve Lebesgue integrallenebilirliğine bakalım.

Çözüm. 0 ve 1 noktaları f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalardır. Bu noktalarının kümesinin ölçüsü sıfırdır. Fakat f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı olmadığından bu aralıkta Riemann integrallenemez. Buna rağmen bu f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olduğunu gözlemleyelim. $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

$$f_n = \chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]} f$$

olsun. bu durumda f_n, $[0,1]$ aralığında Riemann integrallenebilirdir. Aynı zamanda f_n Teorem 4.8' den Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\int_{[0,1]} f_n(x)d\lambda(x) = \int_0^1 f_n(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2-2\sqrt{n^{-1}}$$

eşitliği vardır. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, negatif olmayan Lebesgue ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere $f_n\to f$ dir.

$$\int_{[0,1]} f(x)d\lambda(x) = \lim \int_{[0,1]} f_n(x)d\lambda(x) = \lim 2-2\sqrt{n^{-1}} = 2<\infty$$

olduğundan dolayı, f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir.

5. LEBESGUE DELTA VE LEBESGUE NABLA İNTEGRALLERİ

5.1 Zaman Skalasında Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 5.1. Reel sayıların boştan farklı keyfi kapalı bir altkümesine zaman skalası denir [2]. $\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}_0$, yani reel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar ve negatif olmayan tamsayılar birer zaman skalası örneği iken, $\mathbb{Q},\mathbb{R}-\mathbb{Q},\mathbb{C}$ yani rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve komplex sayılar zaman skalası örneği değildir. Zaman skalası genel olarak T ile gösterilir.

Tanım 5.2. T bir zaman skalası olsun. $t \in \mathrm{T}$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma : \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ olmak üzere,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathrm{T} : s > t\}$$

ve geri sıçrama operatörü $\rho : \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ olmak üzere,

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathrm{T} : s < t\}$$

şeklinde tanımlanır [2]. Eğer t noktası, T zaman skalasının maksimum noktası ise $\sigma(t) = t$, t noktası T'nin minimum noktası ise $\rho(t) = t$ olarak tanımlanır. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına sağ saçılmış nokta, eğer $\rho(t) < t$ ise t noktasına sol saçılmış nokta denir [2]. t noktası hem sağ saçılmış hem de sol saçılmış nokta ise t' ye izole nokta denir [2]. $t < \sup \mathrm{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına sağ yoğun nokta, eğer $t > \inf \mathrm{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t' ye sol yoğun nokta denir [2]. Hem sağ yoğun hem de sol yoğun noktalara yoğun nokta adı verilir. $\mu(t) = \sigma(t) - t$ şeklinde tanımlanan $\mu : \mathrm{T} \to [0,\infty)$ fonksiyonuna sıçrama fonksiyonu denir [2]. T zaman skalası, m sol saçılmış maksimum noktasına sahip ise $\mathrm{T}^{\kappa} = \mathrm{T} - \{m\}$ olarak aksi halde $\mathrm{T}^{\kappa} = \mathrm{T}$ olarak tanımlanır. $f^{\sigma} : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathrm{T}$ için

$$f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$$

biçiminde tanımlanır [2].

Noktaların sınıflandırılması,

t sağ saçılmış nokta ise $t < \sigma(t)$

t sağ yoğun nokta ise $\sigma(t) = t$

t sol saçılmış nokta ise $\rho(t) < t$

t sol yoğun nokta ise $\rho(t) = t$

t izole nokta ise $\rho(t) < t < \sigma(t)$

t yoğun nokta ise $\rho(t) = t = \sigma(t)$

olarak tanımlanır [2].

Tanım 5.3. T zaman skalasındaki a ve b noktaları için $a \le b$ olsun. $[a,b]_{\mathrm{T}}$ ve $[a,b)_{\mathrm{T}}$ aralıkları sırası ile

$$[a,b]_{\mathrm{T}} = [a,b] \cap \mathrm{T} = \{t \in \mathrm{T} : a \le t \le b\}$$

$$[a,b)_{\mathrm{T}} = [a,b) \cap \mathrm{T} = \{t \in \mathrm{T} : a \le t < b\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki $[a,b]$, $[a,b)$ aralıkları $\mathbb{R}$ 'deki kapalı ve yarı kapalı aralıklardır [2].

Tanım 5.4. $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu tüm sağ yoğun noktalarda sürekli ve tüm sol yoğun noktalarda sol limiti varsa f fonksiyonuna $\mathrm{rd}-$sürekli denir [2].

Tanım 5.5. $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f' in T' deki tüm sağ yoğun noktalarda sağ limiti, tüm sol yoğun noktalarda sol limiti varsa f fonksiyonuna regüle fonksiyon adı verilir [2].

Teorem 5.6. Kompakt bir aralıkta her regüle fonksiyonu sınırlıdır [2].

İspat. Kabul edelim ki $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olmasın. Yani her $n\in\mathbb{N}$ için $\left|f(t_n)\right|>n$ olacak şekilde $t_n\in[a,b]$ olsun.

$$\{t_n : n\in\mathbb{N}\}\subset[a,b]$$

olduğundan $\left\{t_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ şeklinde $\{t_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani bazı $t_0\in[a,b]$ için

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k}=t_0$$

olur. $\left\{t_{n_k} : k\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathrm{T}$ ve T kapalı olduğundan $t_0\in\mathrm{T}$ dır. Yukarıdaki eşitlik nedeniyle t_0 noktası izole nokta olamaz. Çünkü t_0 noktasına üstten ya da alttan yakınsayan bir alt dizi vardır. Yani her iki durumda da *f* fonksiyonunun limiti regüleliğe göre sonlu olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir.

5.2. Zaman Skalasında Ölçü Teorisi

T' nin $[a,b)=\{t\in\mathrm{T} : a\le t<b;\quad a,b\in\mathrm{T}\}$ şeklindeki tüm sağdan açık soldan kapalı aralıklarının ailesini $\Im_1$ ile tanımlayalım. Burada $a=b$ olduğunda $[a,b)=[a,a)$ olur ki bu ise $[a,b)$ aralığının boş küme olduğu anlamına gelir.

Teorem5.7 $\Im_1=\{[a,b) : a\le t<b;\quad a,b\in\mathrm{T}, a\le b\}$ şeklindeki $\Im_1$ sınıfı T'nin altkümelerinin bir yarıhalkasıdır [7].

Tanım 5.8. $\Im_1$,T'nin altkümelerinin bir yarıhalkası olsun. Bu durumda $m_1:\Im_1\to[0,\infty]$ fonksiyonuna $\Im_1$ sınıfına ait her $[a,b)$ aralığının görüntüsünü o aralığın uzunluğuna karşılık getiren küme fonksiyonu denir [7].

Yani, $m_1:\Im_1\to[0,\infty]$ küme fonksiyonu her $[a,b)\in\Im_1$ için

$$m_1([a,b))=b-a$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.9. $[a,b)_{\mathrm{T}},[a_1,b_1)_{\mathrm{T}},\ldots\in\Im_1$ için $[a,b)_{\mathrm{T}}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}$ olması için gerek ve yeter şart $[a,b),[a_1,b_1),\ldots\in S$ olmak üzere $[a,b)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)$ olmasıdır. Yani,

$$[a,b)_{\mathrm{T}}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}\ \Leftrightarrow\ [a,b)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)$$

dır.

İspat. $(\Leftarrow)$ Kabul edelim ki $[a,b),[a_1,b_1),\ldots\in S$ olmak üzere $[a,b)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)$ olsun. Kapsama bağıntısının her iki tarafının T ile arakesiti alınırsa;

$$\mathrm{T}\cap[a,b)\subset\mathrm{T}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left([a_i,b_i)\cap\mathrm{T}\right)$$

$$[a,b)_{\mathrm{T}}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}$$

elde edilir.

$(\Rightarrow)$ $[a,b)_{\mathrm{T}}\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}$ olacak şekilde $[a,b)_{\mathrm{T}},[a_1,b_1)_{\mathrm{T}},\ldots\in\Im_1$ olsun. Bu durumda $[a,b)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $t_0\in[a,b)$ olsun. Eğer $t_0\in\mathrm{T}$ olursa $t_0\in[a,b)_{\mathrm{T}}$ olur ki bu ise hipotezden $t_0\in\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}$ olmasını gerektirir. Buradan

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}=\mathrm{T}\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\right)$$

olduğundan, $t_0\in\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)$ elde edilir.

Şimdi $t_0\in[a,b)$ ve $t_0\notin\mathrm{T}$ olsun. Bu durumda $t_0\notin[a,b)_{\mathrm{T}}$ dır. Kabul gereğince $t_0\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)_{\mathrm{T}}$ olur ki bu da $t_0\notin\mathrm{T}$ ve $\begin{cases}t_0\in\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\\ t_0\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i)\end{cases}$ olması demektir.

Fakat zaman skalasına yönelik yapılan araştırmalar sonucunda şunu söyleyebiliriz ki; en az bir $i \in \mathbb{N}$ için $t_0 \in [a_i, b_i)_{\mathbb{T}}$ dır. Diğer taraftan $\exists i \in \mathbb{N}$ için,

$$[a_i, b_i)_{\mathbb{T}} \subset [a_i, b_i)$$

olduğundan $t_0 \in [a_i, b_i)$ olur. Buradan, $t_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i)$ bulunur.

Teorem 5.10. Tanım 5.13' deki $\mathfrak{I}_1$ sınıfı üzerinde $m_1([a,b)) = b - a$ olarak tanımlanan m_1 küme fonksiyonu sayılabilen toplamsal bir ölçüdür [7].

İspat. m_1 küme fonksiyonunun ölçü olması için Teorem 2.18' in şartlarının sağlandığını görmek yeterlidir.

i. $b = a$ alınırsa

$$m_1(\varnothing) = m_1([a,a)) = a - a = 0$$

olduğu açıktır.

ii. $[a,b)_{\mathbb{T}}, [a_1,b_1)_{\mathbb{T}}, \ldots, [a_n,b_n)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{I}_1$ olmak üzere $\bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)_{\mathbb{T}} \subset [a,b)_{\mathbb{T}}$

olsun. Genellikten bir şey kaybetmeksizin

$$a \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le \ldots \le a_n \le b_n \le b$$

olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} m_1\left([a_i, b_i)_{\mathbb{T}}\right) &= \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - b_i) \\
&= b_n - a_1 \\
&\le b - a = m_1\left([a,b)_{\mathbb{T}}\right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_1\left(\left[a_i,b_i\right)_{\mathrm{T}}\right) \le m_1\left(\left[a,b\right)_{\mathrm{T}}\right)$$

elde edilir.

iii. $\left[a,b\right)_{\mathrm{T}}, \left[a_1,b_1\right)_{\mathrm{T}}, \ldots \in \Im_1$ olmak üzere $\left[a,b\right)_{\mathrm{T}} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[a_i,b_i\right)_{\mathrm{T}}$ olsun. Bu

durumda $\left[a,b\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[a_i,b_i\right)$ olması gerektiğini Teorem 5.14' ten söyleyebiliriz.

$a=b$ durumu açıktır.

$a<b$ olsun. $\varepsilon>0$ sayısını $\varepsilon<b-a$ olacak şekilde seçelim. $\delta>0$ sayısı da keyfi olmak üzere

$$\left[a,b-\varepsilon\right] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i-\frac{\delta}{2^i}, b_i\right)$$

yazılabilir.

$$\left[a,b-\varepsilon\right] \subset \left[a,b\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left[a_i,b_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(a_i-\frac{\delta}{2^i}, b_i\right)$$

Heine – Borel teoremi gereğince

$$\left[a,b-\varepsilon\right] \subset \bigcup_{i=1}^{k}\left(a_{n_i}-\frac{\delta}{2^{n_i}}, b_{n_i}\right)$$

olacak şekilde $\left(a_{n_i}-\frac{\delta}{2^{n_i}}, b_{n_i}\right)$ aralıkları vardır. $\left(i=1,2,\ldots,k\right)$

Böylece

$$m_1\left(\left[a,b\right)_{\mathrm{T}}\right)-\varepsilon = b-a-\varepsilon$$

$$= \left[a,b-\varepsilon\right] \text{ aralığının boyu}$$

$$< \sum_{i=1}^{k} \left(b_{n_i} - a_{n_i} + \frac{\delta}{2^{n_i}} \right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(b_i - a_i + \frac{\delta}{2^i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(b_i - a_i \right) + \delta$$

bulunur. ε ve δ keyfi olduğundan

$$m_1\left([a,b)_{\mathrm{T}}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_1\left([a_i,b_i)_{\mathrm{T}}\right)$$

elde edilir.

Tanım 5.11. $\Im_1$ ailesinde tanımlı m_1 küme fonksiyonunun Carathêodary genişlemesi μ_Δ olarak tanımlanır. μ_Δ' ya T' de Lebesgue Delta ölçüsü adı verilir [7].

Tanım 5.12. E, T' nin herhangi bir altkümesi olsun. $m_1(\varnothing) = 0$ olacak biçimde bir $m_1 : \Im_1 \to [0,\infty]$ ölçü fonksiyonu yardımıyla

$$m_1^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} m_1(V_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i;\ V_i \in \Im_1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan $m_1^* : P(\mathrm{T}) \to [0,\infty]$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $\Im_1$ sınıfında $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ olacak şekilde V_i kümeleri yoksa $m_1^*(E) = \infty$ tanımlayalım.

Bu şekilde tanımlanan m_1^* fonksiyonuna m_1 ölçü fonksiyonunun ürettiği (doğurduğu) **dış ölçü** denir [7].

Tanım 5.13. E, T' nin bir altkümesi olsun. Eğer her $A \subset \mathrm{T}$ için ,

$$m_1^*(A) = m_1^*(A \cap E) + m_1^*\left(A \cap E^t\right)$$

eşitliği sağlanıyorsa E kümesine m_1^*-ölçülebilir veya $\Delta-$ölçülebilir küme denir [7]. $\left(E^t = \mathrm{T} - \mathrm{E}\right)$

Tüm delta ölçülebilir kümelerin sınıfı $\mathcal{M}\left(m_1^*\right)$ ile gösterilir.

Teorem 5.14. T' nin tüm m_1^* -ölçülebilir alt kümelerinin sınıfı olan $\mathcal{M}\left(m_1^*\right)$ bir $\sigma-$ cebirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.15. m_1^* dış ölçüsünün $\mathcal{M}\left(m_1^*\right)$'a kısıtlaması olan μ_Δ, $\mathcal{M}\left(m_1^*\right)$'da sayılabilen toplamsal bir ölçüdür [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.16. $\Im_1$ sınıfının tüm elemanları $\Delta-$ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.17. m_1^* dış ölçüsü m_1 ' in bir genişlemesidir.

Yani $\forall A \in \Im_1$ için $m_1(A) = m_1^*(A)$ dır [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

m_1 ölçüsü tarafından üretilen m_1^* dış ölçüsü yukarıdaki teorem gereğince m_1'in bir genişlemesidir. Bu genişlemeye m_1'in **Carathêodary** genişlemesi adı verilir [7].

Tanım 5.18. Zaman skalasındaki bir önerme ölçüsü sıfır olan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise bu önermeye $\Delta-$h.h.y. sağlanır denir [7].

Teorem 5.19. $\{E_n\}$, T' deki kümelerin artan bir dizisi ise

$$\mu_\Delta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_\Delta\left(E_n\right)$$

, eğer azalan bir dizisi ise

$$\mu_\Delta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_\Delta\left(E_n\right)$$

eşitliği mevcuttur [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.20. Herhangi bir $\{t_0\} \subset \mathrm{T}$ tek nokta kümesi $m_1^* -$ölçülebilirdir.

İspat. $\forall A \subset \mathrm{T}$ için

$$m_1^*(A) = m_1^*\left(A \cap \{t_0\}\right) + m_1^*\left(A - \{t_0\}\right)$$

eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz [8].

$t_0 \notin A$ olursa sonuç açıktır. $t_0 \in A$ olsun. Eğer $\max \mathrm{T} \in A$ ise yukarıdaki eşitlik sağlanır. Kabul edelim ki $A \subset \mathrm{T} - \{\max \mathrm{T}\}$ olsun. Bu durumda

$$m_1^*(A) \leq m_1^*\left(A \cap \{t_0\}\right) + m_1^*\left(A - \{t_0\}\right)$$

eşitsizliği daima doğrudur. Eşitsizliğin diğer yönünü göstermek bizim için yeterli olacaktır. $\bigcup_{i \in \mathrm{I}}[a_i, b_i), \mathrm{I} \subset \mathbb{N}$

$$m_1^*(A) = \inf\left\{\sum_{i\in\mathrm{I}}\left(b_i - a_i\right) : A \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}}[a_i, b_i); a_i, b_i \in \mathrm{T}, a_i < b_i, \mathrm{I} \subset \mathrm{N}\right\}$$

olacak şekilde A kümesini kapsayan aralıkların sayılabilir birleşimi olsun. $\mathrm{A} - \{t_0\}$ ve $\{t_0\}$'ı kapsayan aralıkları tanımlayalım. Eğer en az $i \in \mathbb{N}$ için $t_0 \notin [a_i, b_i)$ olursa, $\mathrm{A} - \{t_0\}$ bu aralık tarafından kapsanır. Eğer en az $i \in \mathbb{N}$ için $t_0 \in [a_i, b_i)$ olması durumunda ise $[a_i, b_i)$ aralığının $\{t_0\}$'ı ihtiva eden $[t_0, \sigma(t_0))$ alt aralığını bulmak mümkündür. Buradan $\left[a_i,b_i\right)-\left[t_0,\sigma(t_0)\right)=\left[a_i,t_0\right)\cup\left[\sigma(t_0),b_i\right)$ olur ki $\left[a_i,t_0\right)$ veya $\left[\sigma(t_0),b_i\right)$ aralıklarından herhangi biri boştan farklı olursa bu durumda o aralık $A-\{t_0\}$ kümesini kapsar.Tüm $\left[a_i,b_i\right)$ aralıklarını gözönünde bulundurarak gerekli iki kapsamayıda elde ederiz. Üstelik her iki kapsama durumunda aralıkların uzunlukları toplamı $\sum_{i\in\mathrm{I}}(b_i-a_i)$ toplamına eşittir. Sonuç olarak

$$m_1^*(A)\geq m_1^*\left(A\cap\{t_0\}\right)+m_1^*\left(A-\{t_0\}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kabul edelim ki T sonlu maximum t_0 noktasına sahip olsun. Eğer t_0 noktası sol yoğun nokta olursa bu durumda

$$X=\mathrm{T}-\{t_0\}=\cup_{i=1}^{\infty}\left[a_i,b_i\right)$$

olacak şekilde $\left[a_i,b_i\right)\in\Im_1$ aralıkları vardır. Dolayısıyla X kümesi $\Delta-$ölçülebilirdir . t_0 noktası sol saçılmış nokta olsun. Bu durumda $X=\mathrm{T}-\{\rho(t_0)\}=\cup_{i=1}^{\infty}\left[a_i,b_i\right)$ şeklinde yine $\Im_1$ sınıfına ait aralıklar mevcut olduğundan X , $\Delta-$ölçülebilir bir küme olur. Diğer taraftan $\{t_0\}$ tek nokta kümesi

$$\{t_0\}=\mathrm{T}-X$$

biçiminde $\Delta-$ölçülebilir iki kümenin farkı olarak ifade edildiğinden dolayı $\Delta-$ölçülebilir bir kümedir. Fakat $\{t_0\}$ tek nokta kümesi $\Im_1$ ailesinin aralıklarının sonlu veya sayılabilir birleşimleri cinsinden ifade edilemez. Dolayısıyla $\{t_0\}$ tek nokta kümesinin ve $\{t_0\}$'ı ihtiva eden T' nin Δ ölçülebilir altkümelerinin Δ ölçüsü sonsuza eşittir.

Teorem 5.21. $\mathrm{T}-\{\max\mathrm{T}\}$ ' deki her t_0 için $\{t_0\}$ tek nokta kümesi $\Delta-$ölçülebilirdir ve $\Delta-$ölçüsü

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \sigma(t_0) - t_0$$

şeklinde tanımlanır [7].

İspat. Eğer t_0 noktası sağ saçılmış nokta ise $\{t_0\} = [t_0, \sigma(t_0)) \in \Im_1$ olur ki $\Im_1$ sınıfının tüm elemanları $\Delta-$ölçülebilir olduğundan $\{t_0\}$ $\Delta-$ölçülebilirdir ve ölçüsü

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = m_1(\{t_0\}) = m_1([t_0, \sigma(t_0))) = \sigma(t_0) - t_0$$

şeklindedir.

Şimdi de t_0 noktasının sağ yoğun nokta olduğunu kabul edelim. Bu durumda T' nin noktalarının azalan bir $\{t_k\}$ dizisi vardır öyle ki $t_k > t_0$ ve $t_k \to t_0$ ' dır. Dolayısıyla

$$[t_0, t_1) \supset [t_0, t_2) \supset \ldots \text{ ve } \{t_0\} = \cap_{k=1}^{\infty} [t_0, t_k)$$

olur. Ayrıca $\{t_0\}$ tek nokta kümesi $\Delta-$ölçülebilir kümelerin sayılabilir arakesitleri olarak ifade edildiğinden $\Delta-$ölçülebilirdir . Teorem 5.24 yardımıyla ölçüsü

$$\mu_\Delta(\{t_0\}) = \mu_\Delta\left(\cap_{k=1}^{\infty} [t_0, t_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu_\Delta([t_0, t_k)) = \lim_{k\to\infty} (t_k - t_0) = 0$$

olarak bulunur.

Teorem 5.22. $a, b \in \mathrm{T}$ olmak üzere $a \le b$ ise

i. $\mu_\Delta([a,b)) = b - a$

ii. $\mu_\Delta((a,b)) = b - \sigma(a)$

$a, b \in \mathrm{T} - \{\max \mathrm{T}\}$ olmak üzere $a \le b$ olduğunda

iii. $\mu_\Delta((a,b]) = \sigma(b) - \sigma(a)$

iv. $\mu_\Delta([a,b]) = \sigma(b) - a$

eşitlikleri vardır [7].

İspat. i. $\mu_\Delta([a,b)) = m_1([a,b)) = b - a$ olduğundan i durumu açıktır.

ii. $[a,b) = \{a\} \cup (a,b)$ şeklinde ifade edebiliriz. Bu eşitliğin Δ-ölçüsü alınırsa;

$$\mu_\Delta([a,b)) = \mu_\Delta(\{a\}) + \mu_\Delta((a,b))$$

$$b - a = \sigma(a) - a + \mu_\Delta((a,b))$$

elde edilir ki bu ise bizi istenilen sonuca götürür.

iii. $(a,b]$ aralığı $(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\mu_\Delta((a,b]) = \mu_\Delta((a,b)) + \mu_\Delta(\{b\})$$

olup (ii) ve teorem 5.26 yardımıyla

$$\mu_\Delta((a,b]) = b - \sigma(a) + \sigma(b) - b = \sigma(b) - \sigma(a)$$

bulunur.

iv. Benzer şekilde $[a,b]$ aralığı da $[a,b] = \{a\} \cup (a,b]$ biçiminde ifade edilir. Dolayısıyla bu aralığın ölçüsü,

$$\mu_\Delta([a,b]) = \sigma(b) - a \text{ olur.}$$

Şimdi kısaca, zaman skalasında Lebesgue $\nabla-$ölçü kavramını verelim.

$\Im_2$ sınıfı T' nin $(a,b] = \{a < t \le b; \quad a,b \in \mathrm{T}, a \le b\}$ şeklindeki tüm soldan açık sağdan kapalı aralıkların bir sınıfı olsun. Bu aralıklar sisteminde $b = a$ alınırsa $(a,a] = \varnothing$ olur. bu şekilde tarif edilen $\Im_2$ sınıfı T' nin altkümelerinin bi yarıhalkasıdır [7].

$m_2 : \Im_2 \to [0,\infty]$ fonksiyonu her $(a,b] \in \Im_2$ için

$$m_2\left((a,b]\right) = b - a$$

şeklinde tanımlanan bir küme fonksiyonu olsun. Bu küme fonksiyonu $\Im_2$ sınıfında sayılabilen toplamsal bir ölçüdür ve aşağıdaki durumları sağlar.

i. $m_2\left((a,b]\right) = b - a \geq 0$ olduğundan $b \geq a$ olur.

ii. Herhangi bir $a \in \mathrm{T}$ için $m_2(\varnothing) = m_2\left((a,a]\right) = 0$ dır.

iii. $(a_1,b_1],(a_2,b_2],... \in \Im_2$ olmak üzere $i \neq j$ için $(a_i,b_i] \cap (a_j,b_j] = \varnothing$ olsun.

Bu durumda

$$m_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i]\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m_2\left((a_i,b_i]\right)$$

olur [7].

$\Im_2$ ailesinde tanımlı m_2 küme fonksiyonunun **Carathêodary genişlemesi** μ_∇ ile tanımlanır [7]. μ_∇ ‘ ya T’ de **Lebesgue Nabla** ölçüsü adı verilir. Tüm nabla ölçülebilir kümelerin sınıfı $\mathcal{M}^*\left(m_2^*\right)$ ile gösterilir.

$E \subset \mathrm{T}$ bir küme olsun. $m_2(\varnothing) = 0$ olacak şekilde bir $m_2 : \Im_2 \to [0,\infty]$ ölçü fonksiyonu yardımıyla ,

$$m_2^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} m_2(V_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, V_i \in \Im_2\right\}$$

şeklinde tanımlanan $m_2^* : P(\mathrm{T}) \to [0,\infty]$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $\Im_2$ sınıfında $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ olacak şekilde V_i kümeleri yoksa $m_2^*(E) = \infty$ tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan m_2^* fonksiyonuna m_2 ölçü fonksiyonunun ürettiği dış ölçü denir [7].

Teorem 5.23. $\mathrm{T}-\{min\mathrm{T}\}$ ‘deki her t_0 için $\{t_0\}$ tek nokta kümesi $\nabla-$ölçülebilirdir ve ölçüsü $\mu_\nabla(\{t_0\}) = t_0 - \rho(t_0)$ olarak tanımlanır [7].

Teorem 5.24. $a,b \in \mathrm{T}$ olmak üzere $a \le b$ ise,

$$\mu_\nabla((a,b]) = b - a \quad \text{ve} \quad \mu_\nabla((a,b)) = \rho(b) - a$$

$a,b \in \mathrm{T}-\{min\mathrm{T}\}$ o.ü. $a \le b$ olduğunda ise

$$\mu_\nabla([a,b)) = \rho(b) - \rho(a) \quad \text{ve} \quad \mu_\nabla([a,b]) = b - \rho(a) \quad \text{olur [7].}$$

5.3. $\Delta-$Ölçülebilir Fonksiyolar

Tanım 5.25. $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}^*$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{t \in \mathrm{T} : f(t) < a\}$$

kümesi $\Delta-$ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonuna $\Delta-$ölçülebilir fonksiyon denir [7].

Teorem5.26. $E \subset \mathrm{T}$ kümesi $\Delta-$ölçülebilir bir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}^*$ fonksiyonu için aşağıdaki durumlar denktir:

i. $\forall a \in \mathbb{R}$ için $A_a = \{t \in E : f(t) < a\}$ kümesi $\Delta-$ölçülebilirdir.

ii. $\forall a \in \mathbb{R}$ için $B_a = \{t \in E : f(t) \ge a\}$ kümesi $\Delta-$ölçülebilirdir.

iii. $\forall a \in \mathbb{R}$ için $C_a = \{t \in E : f(t) \le a\}$ kümesi $\Delta-$ölçülebilirdir.

iv. $\forall a \in \mathbb{R}$ için $D_a = \{t \in E : f(t) > a\}$ kümesi $\Delta-$ölçülebilirdir.

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.27. f fonksiyonu, $E \subset \mathrm{T}$ ’ de $\Delta-$ölçülebilir bir fonksiyon ve $f = g$ Δ-h.h.y. ise g fonksiyonu da $\Delta-$ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.28. f ve g, $E \subset \mathrm{T}$ kümesinde tanımlı reel değerli $\Delta-$ölçülebilir fonksiyonlar ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu takdirde

$$cf, f+g, f-g, fg, \sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n \text{ ve } \frac{f}{g}$$

fonksiyonları da ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.29. $\{f_n(t)\}$, $E \subset \mathrm{T}$ kümesindeki $\Delta-$ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere $f_n(t) \to f(t)$ olsun. Bu durumda $f(t)$ fonksiyonu da $\Delta-$ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.30. $f_1(t), f_2(t)$ fonksiyonları T zaman skalasının ölçülebilir altkümelerinde tanımlı $\Delta-$ölçülebilir fonksiyonlar ise

$$\max\{f_1(t), f_2(t)\} \text{ ve } \min\{f_1(t), f_2(t)\}$$

$\Delta-$ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.31. $\Delta-$ölçülebilir bir E kümesinde tanımlı sabit her fonksiyon Δ-ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.32. $f_1, f_2 : E \subset \mathrm{T} \to \mathbb{R}^*$ fonksiyonları Δ-ölçülebilir ise, $\{t : f_1(t) < f_2(t)\}$ kümesi de $\Delta-$ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw)

Tanım 5.33. $f : \mathrm{T} \to \mathbb{R}^*$ bir fonksiyon olmak üzere;

$$f^+(t) = \max\{f(t), 0\} \quad , \quad f^-(t) = \max\{-f(t), 0\}$$

şeklinde tanımlanan f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarına T üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonlar denir [7]. Ayrıca

$$f^{+}=\frac{1}{2}\left(|f|+f\right) \text{ ve } f^{-}=\frac{1}{2}\left(|f|-f\right)$$

eşitlikleri vardır.

Teorem 5.34. $f:E\subset \mathrm{T}\to \mathbb{R}^{*}$ fonksiyonu $\Delta-$ölçülebilir ise $|f|$ ‘ de $\Delta-$ölçülebilirdir [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.35. $f:E\subset \mathrm{T}\to \mathbb{R}^{*}$ fonksiyonunun $\Delta-$ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^{+} ve f^{-} fonksiyonlarının $\Delta-$ölçülebilir olmasıdır [7].

Kolaylık açısından Δ-ölçülebilirlik tanımını aşağıdaki gibi verebiliriz.

Tanım 5.36. $f:\mathrm{T}\to\mathrm{T}$ bir fonksiyon olsun. her $\mathrm{I}\subset\mathrm{T}$ açık aralığı için $f^{-1}(\mathrm{I})$, Δ-ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonuna Δ-ölçülebilir fonksiyon adı verilir [8].

Teorem 5.37. Tam olarak ayrık bir T zaman skalasında tanımlı bir f fonksiyonu Δ-ölçülebilirdir [8].

İspat. Önceki bilgilerimizden söyleyebiliriz ki tek nokta kümesi ve herhangi tek nokta kümelerinin sayılabilir birleşimleri Δ-ölçülebilirdir. Bu durumda T zaman skalası tek nokta kümelerinin sayılabilir birleşimleri cinsinden ifade edilebilir. Böylece T, Δ-ölçülebilirdir. Diğer taraftan bu zaman skalasında tanımlı f fonksiyonu için $f^{-1}(\mathrm{I})$, yani f altında herhangi bir açık aralığın ters görüntüsü

$$f^{-1}(\mathrm{I})=\cup_{i=1}^{\infty}\{t_i\}$$

şeklinde tek nokta kümelerinin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla $f^{-1}(\mathrm{I})$ Δ-ölçülebilir olur ki bu ise ölçülebilirlik tanımından f fonksiyonunun ölçülebilir olması anlamına gelir.

Bu teorem bir zaman skalasında tanımlı herhangi bir fonksiyonun Δ-ölçülebilirliğinin izole noktalara sahip olduğunu ifade eder. Zaman skalasını yoğun noktalar olarak değil izole noktalara sahip olarak dikkate almalıyız. Aksi halde bu gerçeği diğer zaman skalalarında tanımlı tüm fonksiyonlar için genelleştiremeyiz. Çünkü sağ yoğun noktalarda bir fonksiyonun karakterini ve herhangi bir açık aralığın ters görüntüsünün Δ-ölçülebilir olup olmadığını bilemeyiz.

Şimdi de $\nabla-$ölçülebilir fonksiyon kavramını kısaca ifade edelim.

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^*$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\left((a,\infty]\right) = \{t \in \mathbb{T} : f(t) > a\}$$

kümesi $\nabla-$ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonuna $\nabla-$ölçülebilir fonksiyon denir [7]. Ayrıca delta ölçülebilir fonksiyonlarına ait teoremler benzer şekilde nabla ölçülebilir fonksiyonlar için de inşa edilebilir.

5.4. Lebesgue Δ - integrali

Tanım 5.38. $E \subset \mathbb{T}$, Δ-ölçülebilir bir küme, $S : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ fonksiyonu $A_i = \{t : S(t) = a_i\}$ olmak üzere $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ olacak şekilde Δ-ölçülebilir basit bir fonksiyon olsun. Bu durumda *S*' nin *E* üzerinde Lebesgue Δ- integrali,

$$\int_E S(s)\Delta s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\Delta (A_i \cap E)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Teorem 5.39. $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, Δ-ölçülebilir kümelerin artan bir dizisi, *S*, $E = \lim_{j\to\infty} E_j$ kümesinde negatif olmayan Δ-ölçülebilir basit bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_E S(s)\Delta s = \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} S(s)\Delta s$$

eşitliği sağlanır [7].

İspat. *S*, Δ-ölçülebilir her A_i kümesinde a_i değerini alsın. Bu durumda

$$\int\limits_{E_j} S(s)\Delta s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\Delta\left(A_i \cap E_j\right)$$

olur ki, bu eşitliğin her iki tarafının *j* üzerinden limiti alınırsa,

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} S(s)\Delta s = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\Delta\left(A_i \cap E_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \lim_{j\to\infty} \mu_\Delta\left(A_i \cap E_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\Delta\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(A_i \cap E_j\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\Delta\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \cap A_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\Delta\left(E \cap A_i\right) = \int\limits_{E} S(s)\Delta s$$

bulunur.

Tanım 5.40. $E \subset \mathrm{T}$ kümesi Δ-ölçülebilir bir küme, $f : \mathrm{T} \to [0, \infty]$,Δ-ölçülebilir bir fonksiyon ise f fonksiyonunun *E* üzerinden Lebesgue-Δ integrali,

$$\int\limits_{E} f(s)\Delta s = \sup \int\limits_{E} S(s)\Delta s$$

olarak tanımlanır [7].

Teorem 5.41. (Beppo Levi). $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, Δ-ölçülebilir bir *E* kümesinde Δ-integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_n(t) \le f_{n+1}(t) \ \Delta\text{-h.h.y. ve } \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(s)\Delta s < \infty$$

olsun. Bu takdirde $f_n \uparrow f$ ve $\int_E f_n(s)\Delta s \uparrow \int_E f(s)\Delta s$ olacak şekilde Δ-integrallenebilir bir f fonksiyonu vardır [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.42. (Fatou Lemması). $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, her n için $f_n(t) \ge 0$ Δ-h.h.y. ve $\liminf \int_E f_n(s)\Delta s < \infty$ şartları altında Δ-integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $\liminf f_n(t)$ Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_E \liminf f_n(s)\Delta s \le \liminf < \int_E f_n(s)\Delta s$$

eşitsizliği sağlanır [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Teorem 5.43. (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi). E kümesi Δ-ölçülebilir bir küme, $g, f_1, f_2, \ldots$ fonksiyonları Δ-integrallenebilir, her bir n için $|f_n| \le g$ Δ-h.h.y. olsun. Eğer $f_n \to f$ Δ-h.h.y. ise bu durumda f fonksiyonuda Δ-integrallenebilir olup,

$$\lim \int_E f_n(s)\Delta s = \int_E \lim f_n(s)\Delta s = \int_E f(s)\Delta s$$

eşitliği vardır [7].

İspat. (Aliprantis and Burkinshaw 1998)

Şimdi de kısaca Lebesgue ∇ – integral kavramını tanımlayalım.

$E \subset \mathrm{T}$, $\nabla-$ölçülebilir bir küme, $S : \mathrm{T} \to (a,\infty]$ fonksiyonu $A_i = \{t : S(t) = a_i\}$ olmak üzere $S = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ şeklinde $\nabla-$ölçülebilir basit bir fonksiyon olsun. Buradan S fonksiyonunun E kümesi üzerinden Lebesgue $\nabla-$integrali,

$$\int_E S(s)\nabla s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_\nabla (A_i \cap E)$$

biçiminde tanımlanır [7].

$E \subset \mathrm{T}$ kümesi nabla ölçülebilir bir küme olmak üzere $f : E \to R$ fonksiyonu nabla ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun E kümesi üzerinden Lebesgue nabla integrali $\int_E f(s)\nabla s$ şeklindedir [7].

5.5. Lebesgue $\Delta-$integrali ile Riemann $\Delta-$integrali Arasındaki Bağıntı

Teorem 5.44. $[a,b)$, T' de yarı kapalı sınırlı bir aralık, f fonksiyonu $[a,b)$ aralığında reel değerli sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu a'dan b' ye Riemann Δ-integrallenebilir ise bu takdirde f fonksiyonu $[a,b)$' de Lebesgue delta integrallenebilirdir. Ayrıca,

$$R\int_a^b f(t)\Delta t = L \int_{[a,b)} f(t)\Delta t$$

olur. Burada R ve L sırasıyla Riemann ve Lebesgue integralleridir [7].

İspat. Kabul edelim ki f fonksiyonu a' dan b' ye Riemann delta integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\delta_k > 0$ olmak üzere $[a,b)$ aralığının

$$P_k : a = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{n(k)}^{(k)} = b \qquad (k \to \infty, \delta_k \to 0)$$

olacak şekilde bir P_k parçalanması vardır ki

$$P_k \in \wp_{\delta_k} \text{ ve } U(f,P_k) - L(f,P_k) < \frac{1}{k}$$

olur. Ayrıca hipotez gereğince

$$\lim_{k\to\infty} U(f,P_k) = \lim_{k\to\infty} L(f,P_k) = R\int_a^b f(t)\Delta t \qquad 5.1$$

eşitliğinin varlığından söz edebiliriz.

$i = 1,2,...,n(k)$ ve $t \in \left[t_{i-1}^{(k)}, t_i^{(k)}\right)$ için

$$M_i^{(k)} = \sup\left\{f(t) : t \in \left[t_{i-1}^{(k)}, t_i^{(k)}\right)\right\}, \quad m_i^{(k)} = \inf\left\{f(t) : t \in \left[t_{i-1}^{(k)}, t_i^{(k)}\right)\right\}$$

$$\varphi_k(t) = m_i^{(k)},\ \phi_k(t) = M_i^{(k)}$$

olacak şekilde fonksiyon dizilerini alalım. Bu durumda $(\varphi_k),(\phi_k)$ dizileri sırasıyla Δ-ölçülebilir basit fonksiyonların azalmayan ve artmayan dizileridir. Dolayısıyla her k için

$$\varphi_k \le \varphi_{k+1}, \quad \phi_{k+1} \le \phi_k \qquad 5.2$$

$$\varphi_k \le f \le \phi_k \qquad 5.3$$

$$L\int_{[a,b)} \varphi_k(t)\Delta t = L(f,P_k), \quad L\int_{[a,b)} \phi_k(t)\Delta t = U(f,P_k) \qquad 5.4$$

ifadeleri yazılabilir. f fonksiyonu sınırlı olduğundan $(\varphi_k),(\phi_k)$ dizileri de sınırlı olup monotondurlar. Buradan

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(t) \quad \text{ve} \quad \phi(t) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(t) \qquad 5.5$$

limit fonksiyonları vardır. (5.3) ifadesinde $k\to\infty$ olursa,

$$\varphi(t) \le f(t) \le \phi(t) \qquad 5.6$$

eşitsizliği elde edilir. Burada φ ve ϕ fonksiyonları, Δ-ölçülebilir φ_k, ϕ_k fonksiyonlarının limitleri olarak Δ-ölçülebilirdir. Lebesgue yakınsaklık teoremi yardımıyla (5.4) eşitliğinden,

$$L\int_{[a,b)} \varphi(t)\Delta t = \lim_{k\to\infty} L\int_{[a,b)} \varphi_k(t)\Delta t, \quad L\int_{[a,b)} \phi(t)\Delta t = \lim_{k\to\infty} L\int_{[a,b)} \phi_k(t)\Delta t \qquad 5.7$$

bulunur. Diğer taraftan (5.4) eşitliklerinde $k \to \infty$ için

$$\lim_{k\to\infty} L\int_{[a,b)} \varphi_k(t)\Delta t = \lim_{k\to\infty} L(f, P_k), \quad \lim_{k\to\infty} L\int_{[a,b)} \phi_k(t)\Delta t = \lim_{k\to\infty} U(f, P_k) \qquad 5.8$$

olur. (5.7) ve (5.8) eşitliklerinden

$$\lim_{k\to\infty} L\int_{[a,b)} \varphi_k(t)\Delta t = \lim_{k\to\infty} L\int_{[a,b)} \phi_k(t)\Delta t = R\int_a^b f(t)\Delta t \qquad 5.9$$

$$L\int_{[a,b)} \varphi(t)\Delta t = L\int_{[a,b)} \phi(t)\Delta t = R\int_a^b f(t)\Delta t \qquad 5.10$$

olur ki buradan

$$L\int_{[a,b)} \big(\phi(t) - \varphi(t)\big)\Delta t = 0 \qquad 5.11$$

eşitliği yazılabilir. $[a,b)$ aralığındaki her t için $\phi(t) - \varphi(t) \geq 0$ olduğundan

$$\phi(t) - \varphi(t) = 0 \quad \Delta\text{-h.h.y.} \qquad 5.12$$

olur. (5.12) ve (5.6) ‘ den $[a,b)$ aralığında delta hemen her yerde

$$f(t) = \varphi(t) \qquad 5.13$$

eşitliği sağlanır. Buradan takip edilir ki f fonksiyonu $[a,b)$ aralığında Lebesgue Δ-integrallenebilirdir.

Teorem 5.45. *f*, T zaman skalasının yarı kapalı sınırlı $[a,b)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu *f* fonksiyonunun Riemann delta integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart *f*' in süreksiz olduğu $[a,b)$ ' nin tüm sağ yoğun noktaların kümesinin delta ölçüsü sıfır olmalıdır [7].

İspat. Kabul edelim ki *f* fonksiyonu *a*' dan *b*' ye Riemann Δ-integrallenebilir olsun. Her pozitif *k* tamsayısı için P_k, $[a,b)$ ' nin bir parçalanması, $\varphi_k, \phi_k, \varphi, \phi$ fonksiyonları da Teorem 5.50' nin ispatındaki gibi tanımlansın. Ayrıca,

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad \Lambda_{rd} = \{t \in [a,b) : t \in \Lambda \text{ ve } t \text{ sağ yoğun}\} \qquad 5.14$$

$$G = \{t \in [a,b) : f, t\text{'de süreksiz}\}, \quad G_{rd} = \{t \in G : t, \text{sağ yoğun}\} \qquad 5.15$$

$$A = \{t \in [a,b) : \varphi(t) \neq \phi(t)\} \qquad 5.16$$

kümeleri verilsin. $[a,b)$ aralığından bir *t* noktası alalım öyle ki

$$\varphi(t) = f(t) = \phi(t) \quad ve \quad t \notin \Lambda$$

5.17

olsun. Bu takdirde *f* fonksiyonu *t* noktasında sürekli olur. Aksi halde $\varepsilon > 0$ ve $\lim t_j = t$ olacak şekilde bir (t_j) dizisi vardır ki her *j* için $\left|f(t_j) - f(t)\right| \geq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Ancak $\phi(t) \geq \varphi(t) + \varepsilon$ eşitsizliği (5.17) durumuyla çelişir. Yani *f* fonksiyonu *t*' de süreklidir. $[a,b)$ ' nin tüm *t* sağ yayılmış noktaları için (5.17) eşitliği sağlanır. Hakikaten $[a,b)$ ' nin tüm sağ yayılmış noktaları Λ ' nın elemanıdır. Yani bu noktalar parçalanma noktalarıdır. Böylece $[a,b)$ ' nin tüm *t* sağ yayılmış noktaları ve yeterince büyük *k'* lar için

$$\phi_k(t) = \varphi_k(t) = f(t)$$

olur ki buradan $\phi(t) = \varphi(t)$ olur. Ayrıca

$$G_{rd} \subset \left(A \cup \Lambda_{rd}\right) \tag{5.18}$$

kapsama bağıntısı vardır. Teorem 5.50' nin ispatındaki (5.12) eşitliği aracılığıyla $\mu_\Delta\left(A\right)=0$ olup, $A \subset \Lambda$ ve $\Lambda_{rd} \subset \Lambda$ kapsama bağıntılarından $\mu_\Delta\left(\Lambda_{rd}\right)=0$ olduğu açıktır. Diğer taraftan (5.18) 'den $\mu_\Delta\left(G_{rd}\right)=0$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun süreksiz olduğu tüm sağ yoğun noktalarının delta ölçüsünün sıfır olması anlamına gelir.

Şimdi de f fonksiyonunun süreksiz olduğu $\left[a,b\right)$ aralığının tüm sağ yoğun noktalarının kümesinin delta ölçüsünün sıfır olduğunu kabul edelim ($\mu_\Delta\left(G_{rd}\right)=0$). Her pozitif k için $\left(k \to \infty, \delta_k \to 0\right)$ o.ş. $\delta_k > 0$ ve $P_k \in \wp_{\delta_k}$ ' da

$$P_k : a = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{n(k)}^{(k)} = b$$

şeklinde $\left[a,b\right]$ aralığının bir parçalanması, $\varphi_k, \phi_k, \varphi, \phi$ fonksiyonları yukarıda ki gibi olsun. Burada her k ve $t \in \left[a,b\right)$ için

$$\varphi_k \le \varphi_{k+1}, \quad \phi_{k+1} \le \phi_k, \quad \varphi_k \le f \le \phi_k$$

$$\phi\left(t\right) = \lim_{k\to\infty} \phi_k\left(t\right), \quad \varphi\left(t\right) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k\left(t\right), \quad \varphi\left(t\right) \le f\left(t\right) \le \phi\left(t\right)$$

bağıntılarını yazabiliriz. Eğer $t \in \left[a,b\right)$ sağ yoğun nokta ve f fonksiyonu t noktasında sürekli ise bu durumda verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $\sup f - \inf f < \varepsilon$ kalır. Burada supremum ve infimum

$$\left(t-\delta, t+\delta\right) = \left\{s \in \left[a,b\right) : t-\delta < s < t+\delta\right\}$$

üzerinden alınır. Yeterince büyük k' lar için t' yi içeren P_k 'nın bir alt aralığı $\left(t-\delta, t+\delta\right)$ aralığının içindedir. Dolayısıyla $\phi_k\left(t\right) - \varphi_k\left(t\right) < \varepsilon$ olur. Ancak ε sayısı keyfi olduğundan $\phi\left(t\right) = \varphi\left(t\right)$ olur. $t \in \left[a,b\right)$ noktası sağ yayılmış nokta olursa ispatın ilk kısmından yine $\phi\left(t\right) = \varphi\left(t\right)$ olduğunu söyleyebiliriz. Yani t noktasının her iki durumu için eşitlik sağlanır.

O halde $A \subset G_{rd}$ kapsama bağıntısı vardır. Kabul gereğince $\mu_\Delta(G_{rd}) = 0$ olduğundan $\mu_\Delta(A) = 0$ olur ki bu ise $[a,b)$ aralığında

$$\phi(t) = \varphi(t) \ \Delta\text{-h.h.y.}$$

olması demektir. Delta hemen her yerde eşit olan fonksiyonların Lebesgue delta integralleri de eşit olacağından

$$L \int_{[a,b)} \varphi(t)\Delta t = L \int_{[a,b)} \phi(t)\Delta t$$

olup, (5.4) ve (5.7) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} U(f,P_k) = \lim_{k\to\infty} L(f,P_k)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikten şunu ifade edebiliriz ki, f fonksiyonu $[a,b)$ aralığında Riemann delta integrallenebilirdir.

$\mathbb{T}$ 'deki her sağ yoğun noktanın Δ-ölçüsü sıfırdır (Teorem 5.26). Ayrıca Δ-ölçüsünün sayılabilir toplamsallık özelliğinden, sonlu ya da sayılabilir her sağ yoğun noktalarının Δ-ölçüsünün de sıfır olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz. Bir önceki teoremin ifadesini gözönünde bulundurursak, sınırlı her $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu *a*' dan *b*' ye Riemann Δ-integrallenebilirdir.

Özellikle $[a,b)$ aralığında sınırlı ve sürekli olan her fonksiyon integrallenebilirdir.

Teorem 5.46. $(a,b]$ aralığı $\mathbb{T}$ zaman skalasında yarı kapalı sınırlı bir aralık, *f* fonksiyonu da bu aralıkta reel değerli sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer *f* fonksiyonu *a'* dan *b*'ye Riemann $\nabla-$ integrallenebilir ise, *f* fonksiyonu $(a,b]$ 'da Lebesgue - ∇ integrallenebilir olup,

$$R\int_a^b f(t)\nabla t = L \int_{(a,b]} f(t)\nabla t$$

eşitliği mevcuttur [7].

Teorem 5.47. f, T' nin sınırlı yarı kapalı $\left(a,b\right]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun Riemann $\nabla-$integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun süreksiz olduğu $\left(a,b\right]$'nin tüm sol yoğun noktalarının kümesinin ∇ ölçüsünün sıfır olmasıdır [7].

KAYNAKLAR

[1] Charalambos D. Aliprantis, Owen Burkinshaw, 1998, “ Principles of Real Analysis”, California ,USA.

[2] Bohner, M. and Peterson, A. , 2001, “ Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications” , Birkhauser, Boston.

[3] John Wiley, 1999, “ Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications”, New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.

[4] John N. Mcdonald, Neil A. Weiss, 2005, “ A Course in Real Analysis”, Singapore.

[5] Sterling K. Berberian, 1926, “ Fundamentals of Real Analysis”, New York, Berlin, Milan, Tokyo.

[6] Royden, H. L. , 1988, “ Real Analysis”, Macmillan, New York.

[7] Gusein Sh. Guseinov, 2003, “ Integration on Time Scales”, Elseiver Academic Press, No. 285, pp. 107-127.

[8] Rzezuchowski, T., 2005. “A Note on Measures on Time Scales”, Demonstratio Mathematica, Vol.38, No. 1 pp. 79-84.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı: ŞAHİN, Nazife

Uyruğu: T.C.

Doğum tarihi ve yeri: 18. 12. 1988 Burdur / Ağlasun

Medeni hali: Bekar

Telefon: 0 507 751 21 56

e-mail: nazfe.sahin@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü	2013
Lisans	Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü	2010
Lise	Isparta Gazi Lisesi	2005

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap, Spor yapmak, Müzik