T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

12. SINIF FEN LİSESİ ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNME BECERİLERİNİN ÖZELLEŞTİRME, TAHMİN, İSPAT VE GENELLEME BASAMAKLARI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RESUL GÖL

HAZİRAN 2017

UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

12. SINIF FEN LİSESİ ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNME BECERİLERİNİN ÖZELLEŞTİRME, TAHMİN, İSPAT VE GENELLEME BASAMAKLARI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RESUL GÖL

UŞAK 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

Resul GÖL tarafından hazırlanan "12. Sınıf Fen Lisesi Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Becerilerinin Özelleştirme, Tahmin, İspat ve Genelleme Basamakları Bağlamında İncelenmesi" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Adem DURU
(Tez Danışmanı, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı) …………………...

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İlköğretim Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat PEKER
(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Afyon Kocatepe Üniversitesi) …………………

Doç. Dr. Adem DURU
(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi) …………………

Prof. Dr. Lütfullah TÜRKMEN
(Fen Bilgisi Eğitimi Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi) ………………….

Doç. Dr. Osman BİRGİN
(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi) ………………….

Yrd. Doç. Dr. Erhan BOZKURT
(Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi) …………………

Tarih: 22 / 06 / 2017

Bu tez ile Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. İsa YEŞİLYURT

………………………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Resul GÖL

12. SINIF FEN LİSESİ ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNME BECERİLERİNİN ÖZELLEŞTİRME, TAHMİN, İSPAT VE GENELLEME BASAMAKLARI BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Resul GÖL

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2017

ÖZET

Bu araştırmanın amacı, 12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemektir. Araştırmada özel durum yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın örneklemini, 2015-2016 eğitim-öğretim yılında, Uşak ili, merkez ilçesinde bulunan bir fen lisesinin 12. sınıfında öğrenim gören toplam 9 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışma grubu belirlenirken amaçsal örnekleme yöntemlerinden biri olan maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Veriler araştırmacı tarafından geliştirilen ve yazılı cevap gerektiren 9 problemden oluşan "Matematiksel Düşünme Ölçeği" ve öğrencilerle sorulara verdikleri yanıt odaklı yapılan mülakatlar yoluyla toplanmıştır. Veriler, betimsel ve içerik analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda, soruların zorluk dereceleri arttıkça öğrencilerin özelleştirme eğilimlerinin arttığı, özellikle genelleme ve ispat basamaklarında başarılarının düştüğü belirlenmiştir. Öğrencilerin gerçekleştirdiği basamaklar en çoktan en aza sırasıyla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat şeklinde sıralanmıştır. Öğrenciler çalışmada konu edilmiş olan beş tahmin türü arasından sadece Sonlu Sayıda Ayrık Durumdan Empirik Tümevarım veya Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminlerde bulunmuşlardır. Araştırma sonuçları, öğrencilerin en başarılı oldukları basamağın özelleştirme basamağı olduğunu ve öğrencilerin en yüksek seviyeye sahip oldukları basamağın ise genelleme basamağı olduğunu açığa çıkarmıştır. Genelleme basamağında başarılı olan öğrencilerin tamamına yakını Radford ve Peirce (2006)

tarafından tanımlanmış genelleme hiyerarşisinde en üst seviye olan Sembolik Genelleme türünden genellemeler sergilemişlerdir.

Bilim Kodu :
Anahtar Kelimeler **:** Matematiksel düşünme, özelleştirme, tahmin, ispat, genelleme
Sayfa Adedi **:** 229
Tez Yöneticisi **:** Doç**.** Dr. Adem DURU

INVESTIGATION OF 12TH GRADE SCIENCE HIGH SCHOOL STUDENTS' MATHEMATICAL THINKING SKILLS WITHIN THE CONTEXTS OF SPECIALIZATION, CONJECTURING, PROVING, AND GENERALIZATION

(M.Sc. Thesis)

Resul GÖL

UŞAK UNIVERSITY
INSTITUE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
2017

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate mathematical thinking skills of 12th grade science high school students within the contexts of specialization, conjecturing, proving, and generalization steps. The sample of the study was 9 twelfth grades students who were studying in a science high school in centre district of Uşak city on 2015-2016 academic years. The study group was identified through one of the purposeful sampling strategies, maximum variation sampling. Data were collected with a "Mathematical Thinking Scale" developed by the researcher, consisting of 9 problems requiring written answers and interviews with the students about their answers to the problems. Data were analyzed with descriptive and content analysis method. At the end of the study, it was determined that as the difficulty levels of the questions increase, students specialization tendency also increased and achievements of the students decreased especially in generalization and proving steps. The steps students performed well were specialization, conjecturing, generalization and proving in decreasing order respectively. Among five types of conjectures mentioned in the study, students used only two types of them; Empirical Induction from a Finite Number of Discrete Cases and Perceptually Based Conjecturing. Results also revealed that students had the best achievement level in specialization step and they had the highest level in generalization step. Almost all of the students who were successful in generalization step, made Symbolic Generalization type generalizations

which is the highest level in generalization hierarchy defined by Radford and Peirce (2006).

Science Code :

KeyWords **:**Mathematical thinking, specialization, conjecturing, proving, generalization

Page number **:**229

Adviser **:** Assoc. Prof. Dr. Adem DURU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Adem DURU'ya, bu çalışmaya dahil olan tüm öğrencilere ve maddi, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışma Uşak Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından 2016/SOSB002 Nolu BAP Projesi ile desteklenmiştir.

çok değerli, saygıdeğer ilkokul öğretmenlerim;

Niyazi TETİK ve Şevket ILGAZ'a ithaf olunur...

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLARIN LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

1. GİRİŞ

Örüntüler ve ilişkiler bilimi olan matematik (Kinard, 2006) bir bilim dalı olmanın ötesinde, yaşamın hemen hemen her alanında rol alan, hayatımızın önemli ve vazgeçilmez bir parçasıdır (Sünkür, İlhan ve Kılıç, 2012). Matematik sadece sayılar ve işlemler içeren bir bilim olmamakla birlikte düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminlerde bulunma ve problem çözme gibi önemli destekler sağlayarak hayatımıza katkıda bulunur (Umay, 2003).

Günlük yaşamda karşılaştığımız sorunların çözümünde etkin bir rol oynayan matematiğin, düşünme becerilerinin gelişimine yaptığı katkı ise görmezden gelinemez bir durumdur (Yenilmez ve Teke, 2008). Matematik öğrenimi yoluyla önemli ve güçlü matematiksel fikirler, bu fikirlerin nasıl oluşturulacağı ve bu fikirlerin doğruluğunun nasıl gösterileceği öğrenilir (Anthony ve Walshaw, 2002). Dolayısıyla matematik öğrenimi sürecinde birey sadece işlemler yapmayı öğrenmez (Tall, 2006) aynı zamanda bir düşünme şekli kazanır. Bu süreçte elde edilen düşünme şekli ise matematiksel düşünme olarak adlandırılmaktadır (Keskin, Dağ ve Altun, 2013).

Matematiksel düşünme, bir düşünme şekli olmanın yanı sıra aynı zamanda bilimsel kültür ve insani kültür gibi insanlığın en büyük miraslarından biri olan matematiksel kültürün de temsilcisidir (Kapur, 1976). Sternberg (1996) matematiksel düşünmenin iyi bir yaşam, Burton (1984) ise fikirleri anlamak ve onları kullanmak için gerekli olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle matematiksel düşünme sadece matematikçilerin değil, zaman zaman herkesin ihtiyaç duyduğu bir düşünme biçimidir ve bu nedenle çok önemlidir (Bukova-Güzel, 2008).

1.1. Araştırmanın Gerekçesi

Matematiksel düşünmeyi gerçekleştirebilme ve problemleri çözmek için matematiksel düşünmeyi kullanabilme, matematik eğitiminin en önemli amaçlarından biridir (Stacey, 2006). Matematik öğretiminin iyi bir seviyede yapılabilmesi için öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine önem verilmesi gerekmektedir (National Research Council [NRC], 2001; MEB, 2005; Hughes, 2006; Stacey, 2006; Öğretmen Yetiştirme ve Geliştirme Genel Müdürlüğü [ÖYEGM], 2009; akt., Öztürk ve Akyüz, 2013). Dolayısıyla ilköğretim ve ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini belirleme amaçlı çalışmaların yararlı olacağı düşünülmektedir (Bukova-Güzel, 2008).

Hayatın hemen her alanında hızlı bir değişimin yaşandığı günümüz dünyasında, matematiksel düşünme becerilerine gereksinim giderek artmakta ve her alanda matematiksel düşünceye sahip olan bireylere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durum, matematiksel düşünme ile ilgili çalışmaların artırılması gerekliliğini ortaya koymakta (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005) ve matematiksel düşünme hakkında daha detaylı bilgi elde etmek için derinlemesine araştırma yapılmasına duyulan ihtiyacı göstermektedir (Viitala, Grevholm ve Nygaard, 2010).

Ülkemizde Milli Eğitim Bakanlığının (MEB) 2005 tarihli Ortaöğretim Matematik Programında, somut olgusal ilişkileri soyut terimlerle ifade edebilme ve genele ulaşabilme olarak tanımlanmış olan matematiksel düşünmenin temelinde keşfetme, mantıksal ilişkileri bulma ve bu ilişkileri matematiksel terimlerle ifade etmenin bulunduğu belirtilmiştir (Öztürk ve Akyüz, 2013). Milli Eğitim Bakanlığının 2013 tarihli 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programında ise günümüzde matematiksel düşünme gücü gelişmiş bireylere her zamankinden daha fazla ihtiyaç duyulduğu ve programın temel amaçlarından birinin, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini kazanmaları olduğu ifade edilmiştir (MEB, 2013a).

İlgili literatür incelendiğinde matematiksel düşünme ile ilgili daha çok matematiksel düşünme kavramı, oluşumu ve doğası (Wiener, 1923; Burton, 1984; Sternberg ve Ben-Zeev, 1996; Dehaene, Spelke, Pinel, Stanescu ve Tsivkin, 1999; Ginsburg, Cannon, Eisenband ve Pappas, 2006; Stacey, 2006; Cardella, 2008; Barwell, 2009; Argyle, 2012), matematiksel düşünmenin gelişimi ve geliştirilmesi (Song ve Ginsburg, 1987; Tall, 1995; Kubinova, Novotna ve Littler, 1998; Ginsburg, Klein ve Starkey, 1998; Faivillig, 2001; Pape, Bell ve Yetkin, 2003; Baker ve Campbell, 2004; Alkan ve Bukova-Güzel, 2005; Cengiz, Kline ve Grant, 2011), matematiksel düşünmede yer alan süreçler (Davis ve McKnight, 1979; Yeşildere ve Türnüklü, 2007; Scusa, 2008; Mason, Stacey ve Burton, 2010; Arslan ve Yıldız, 2010; Lane ve Harkness, 2012; Keskin, Dağ ve Altun, 2013; Yıldırım, 2015), farklı yaş gruplarından öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri (Lutfiyya, 1998; Cai, 2000; Clarke, Cheeseman, Clarke, Gervasoni, Gronn ve Horne, 2001; Cai, 2002; McDonough, Clarke ve Clarke, 2002; Mubark, 2005;

Wood, Williams ve McNeal, 2006; Karakoca, 2011) ve matematiksel düşünmeyi fark etme ve değerlendirme (Ginsburg, Jacobs ve Lopez, 1993; Tanner ve Jones, 2002; Jacobs, Lamb ve Philipp, 2010; Fernández, Llinares ve Valls, 2012; Liu, 2014) odaklı çalışmaların yapılmış olduğu görülmektedir. Bunlara ilaveten tahmin (Tekinkır, 2008; Çilingir ve Türnüklü, 2009; Aslan, 2011), ispat (Arslan, 2007; Basturk, 2010; İmamoğlu, 2010; Çalışkan, 2012; Aylar, 2014) ve genelleme (Yeşildere, 2011; Akkan ve Çakıroğlu, 2012; Yılmaz ve Argün, 2013) süreçlerinin her birini ayrı ayrı ele alan çalışmalara da rastlanmıştır. Bu çalışmalar arasında çalışmamıza benzer şekilde matematiksel düşünmenin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelendiği 3 çalışma (Arslan ve Yıldız, 2010; Lane ve Harkness, 2012; Keskin, Dağ ve Altun, 2013) bulunmaktadır. Lane ve Harkness (2012) çalışmalarını üniversite öğrencileriyle, Arslan ve Yıldız (2010) 11. sınıfta, Keskin, Dağ ve Altun (2013) ise 8. ve 11. sınıfta öğrenim gören öğrenciler ile çalışmalarını gerçekleştirmişlerdir. Söz konusu çalışmalarda özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları ile ilgili olarak süreçten çok sonuç odaklı değerlendirmelerde bulunulduğu, çalışmalarda öğrencilerin matematiksel düşünme becerileri ile ilgili olarak yazılı yanıtları yoluyla yorumlar yapılmış olduğu ve öğrencilerin ikişerli gruplar halinde performans gösterdikleri görülmektedir. Ayrıca yine aynı çalışmalarda benzer problemlerin kullanılmış olması ve öğrencilerin alt sorularla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat süreçlerine yönlendirilmiş olmaları da dikkat çeken bir başka durumdur.

Çalışmada, öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme bağlamında incelenmesi amaçlanmıştır. Ancak yapılan araştırmalar öğrencilerin ispat yapma ve öğrenmede zorluklar yaşadığını göstermektedir (Healy ve Hoyles, 2000; Almeida, 2001; Heinze 2004; Arslan, 2007; Heinze ve Reiss, 2009; Ko ve Knuth, 2009; Varghese, 2011; Çalışkan, 2012; Aylar, 2014). Öyle ki literatürde ispatın ilköğretim (Senk, 1985; Arslan, 2007; Kunimine, Fujita ve Jones, 2009; Çalışkan, 2012; Aylar, 2014; Sen ve Güler, 2015), ortaöğretim (Baker, 1996; Özer ve Arıkan, 2000; Healy ve Hoyles, 2000; Almeida, 2001; Kutluca, 2009; Arslan ve Yıldız, 2010; Köğce, Aydın ve Yıldız, 2010) ve lisans (Baker, 1996; Jones, 2000; Weber, 2001; Ko ve Knuth, 2009; Turker, Alkas, Aylar, Gurel ve Akkuş-İspir, 2010; Varghese, 2011) düzeyinde öğrenim gören öğrencilerin zorlandıkları bir kavram olduğuna dair birçok araştırma yer almaktadır. Sınıf seviyeleri arttıkça öğrencilerin ispat düzeylerinde de bir artış söz konusudur (Csíkos, 1999; Arslan, 2007; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009; İmamoğlu, 2010). Ayrıca lise öğrenimi boyunca öğrencilerin daha üst seviye ispat içeren örneklerle karşılaştıkları, ülkemiz özelinde öğrencilerin ispat düzeyleri ile Seviye Belirleme Sınavı (SBS) başarıları arasında anlamlı bir ilişki olduğu, SBS sınav puanları arttıkça öğrencilerin ispat düzeylerinin de arttığı ifade edilmiştir (Çalışkan, 2012).

Literatür incelemesi sonucu yukarıda belirtilen durumlar tespit edilmiş ve öğrencilerin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında matematiksel düşünme becerilerinin nasıl gerçekleştiği ile ilgili daha ayrıntılı bilgi elde edilebileceği düşünülerek literatürde daha öncesinde ilgili bir araştırma yapılmamış olan 12. sınıf fen lisesi öğrencileriyle çalışmanın gerçekleştirilmesine karar verilmiştir. Bu amaçla çalışmada farklı türden (sözel, geometrik, rutin ve rutin olmayan) problemler içeren bir ölçek kullanılmış ve problemlere verdikleri yanıtlar odaklı öğrencilerle bireysel olarak yapılan mülakatlara yer verilerek öğrencilerin düşünme süreçleri mümkün olduğunca açık bir şekilde sergilenmesi amaçlanmıştır. Bununla birlikte, kullanılan problemlerde herhangi bir yönlendirme yapılmamış ve öğrencilerin söz konusu basamaklar bağlamında matematiksel düşünme becerileri en doğal haliyle açığa çıkarılmaya çalışılmıştır.

1.2. Araştırmanın Problemi

Araştırmanın problemini "12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri nasıldır?" sorusu oluşturmaktadır. Bu problemin çözümü için cevap aranan alt araştırma soruları şunlardır:

- Ortaöğretim 12.sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri özelleştirme basamağı bağlamında nasıldır?
- Ortaöğretim 12.sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri tahmin basamağı bağlamında nasıldır?
- Ortaöğretim 12.sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri ispat basamağı bağlamında nasıldır?
- Ortaöğretim 12.sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri genelleme basamağı bağlamında nasıldır?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, 12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin gerek kendi kişisel yaşamlarında gerekse matematik biliminde gelişimlerine büyük katkıda bulunan ve son yıllarda matematik öğretim programlarında üzerinde önemle durulan matematiksel düşünme becerilerini incelemek, bu süreçle ilgili bilgiyi artırmak ve bu becerilerin geliştirilmesine yardımcı olabilmektir. Ayrıca 12. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında ortaya çıkararak bu yönde yapılacak faaliyetlere katkıda bulunmak da çalışmanın bir diğer amacıdır.

1.4. Araştırmanın Önemi

Öğrencilerin öğrenme düzeylerini artırmak için onların düşünme biçimlerinin gelişim süreçlerini ve mevcut durumunu anlamak gerekmektedir (Cai, 2000). Öğrencilerin matematiksel düşünmeleri ile ilgili bilgi, öğretmenlerin daha etkili ders hazırlamalarına ve öğretimlerine yardımcı olmaktadır (Lee, 2006). Çağdaş yaşamda matematiksel düşünme değeri inkâr edilemeyecek bir araçtır ve bu aracı yeterli seviyede kullanabilmek için matematiksel düşünme biçimini olabildiğince yakından tanımak gerekir (Umay, 1992). Yapılmış çeşitli çalışmalar, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini fark etmeye odaklanmanın, matematik öğrenim ve öğretim sürecinin anlaşılmasına yardımcı olduğunu ve öğrenci başarısını artırdığını göstermiştir (Liu, 2014). Milli Eğitim Bakanlığının 2013 yılında yayınladığı 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programında öğrencilere matematiksel düşünme becerileri kazandırmak, onları matematiksel düşünme gücü gelişmiş iyi birer problem çözücü olarak yetiştirmek, programın amaçları arasında yer almıştır. Yine aynı programda öğrencilerin özel durumlardan genellemelere ulaştığı süreçleri yaşamalarının, matematikle ilgili güçlü ve derin bir anlayış kazanmalarına yardımcı olacağı belirtilmiş, öğrencilerin varsayımda bulunma ve genelleme gibi matematiksel düşünme süreçlerini yaşayabilecekleri ortamlar hazırlanması gerektiği ifade edilmiştir (MEB, 2013a).

Çalışmada kullanılan ölçme aracı yardımıyla 12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerileri, söz konusu basamakları ne seviyede kullandıkları ile ilgili detaylı bilgiler elde edilebilmesi ve daha önce ülkemizde bu şekilde yapılmış herhangi bir çalışmaya rastlanmamış olunması nedeniyle bu çalışmanın önemli olduğu düşünülmektedir.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma;

a) Uşak ili Merkez ilçesinde bulunan bir fen lisesinin 12. sınıfında öğrenim gören 9 öğrenci,

b) Matematiksel düşünme sürecinin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları,

c) 2015-2016 eğitim öğretim yılı,

d) Matematiksel düşünmeyi tespite yönelik yazılı cevap gerektiren 9 soruluk bir ölçek ile sınırlandırılmıştır.

1.6. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada aşağıdaki varsayımlardan hareket edilmiştir:

a) Araştırmaya katılan öğrenciler matematiksel düşünme becerilerini ilgili basamaklar bağlamında temsil edebilecek yeterliliğe sahiptir,

b) Araştırmada öğrencilerin kendileriyle yapılan mülakatlarda ve sorulara yönelik yazılı yanıtlarında gerçek duygu ve düşüncelerini, gerçek güçlerini ortaya koydukları kabul edilmiştir,

c) Öğrencilerin çalışma esnasında herhangi bir dış etkiye maruz kalmadıkları varsayılmıştır,

d) Araştırmada kullanılan ölçme aracının hazırlanması aşamasında alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu düşünülmektedir,

e) Araştırmada kullanılan ölçme aracı araştırılan konu ile ilgili verileri elde etmek için uygundur.

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Kuramsal Çerçeve

Bu bölümde araştırmanın teorik alt yapısını oluşturmak amacıyla çalışmaya konu olan matematiksel düşünme ile özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamaklarından kısaca bahsedilmiştir.

2.1.1. Matematiksel Düşünme

"*Düşünüyorum öyleyse varım*"

(*René Descartes*)

René Descartes tarafından varoluşun aslı sayılan düşünme yeteneği ve düşünme yeteneklerinin gelişmişlik düzeyleri, insanları diğer canlılardan ayıran en önemli özellikler arasında yer almaktadır (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005). Düşünme bireyin doğasında var olan (Mubark, 2005) ve az anlaşılmış, oldukça karmaşık bir süreçtir (Stacey, 2006). Matematik ise düşünmenin önemli bir parçasıdır (Zaman, 2011). Matematik evrenimizde var olan ilişkileri fark etmemize, sınıflandırmamıza ve keşfetmemize olanak sağlar (Blitzer, 2014). Bununla birlikte matematik, sadece işlem veya formüller ezberlemek ya da alıştırmalar yapmaktan ibaret olmayıp hem çözümler aramayı, örüntüler keşfetmeyi ve tahminleri formülüze etmeyi içeren hem de çevremizde var olan örüntüleri anlamaya çabalayan bir bilimdir (National Research Council, 1989).

Diğer birçok düşünme türünün temelinde olduğu gibi (Bajpai, 1976) matematiğin temelinde de matematiksel düşünme vardır (Zaman, 2011). Matematiksel düşünme en basit anlamda matematik ile ilgilenirken başvurulan düşünme sürecinin bir türüdür (Dreyfus ve Eisenberg, 1996). Matematiksel düşünme sayesinde birey, yaşadığı problemlere çözüm yolları oluşturabilir ve bu çözüm yollarını karşılaştığı diğer problemlere uyarlayabilir (Yavuz, 2006; Bukova-Güzel, 2008). Bu açıdan bakıldığında matematiksel düşünme sadece matematikçilere özgü bir düşünme değil, günümüzde her alandan bireyin kullanması gereken bir düşünme biçimidir (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005). Diğer bir ifadeyle matematiksel düşünme yalnızca matematik ile ilgili değildir, kullanım alanı geneldir. Matematiksel olarak adlandırılmasının nedeni sadece matematikle ilgili bir düşünme oluşu değil, matematiksel düşünme süreçlerinin matematikle ilgilenirken de gerçekleştiriliyor olmasıdır (Burton, 1984). Örneğin, eve girdiğinde lambanın yanmadığını fark eden bir kişinin ampulün yanmış olabileceği, bağlantılarda bir kopukluk olabileceği, sigortanın atmış olabileceği veya elektriklerin kesik olabileceği şeklinde sorunun nedenlerine yönelik tahminler gerçekleştirmesi ve sonrasında bu tahminleri kontrol ederek durumu açıklamaya çalışması şeklinde gerçekleşen düşünme süreci, matematiksel düşünmeye örnek olarak verilebilir (Yıldırım, 2011).

Yine günlük hayatta zaman zaman karşılaştığımız:

Hangi arabayı almalıyım? (Yeşildere, 2006)

"Arabamı bu yıl mı yoksa gelecek yıl mı değiştirmeliyim?

İşimi değiştirmeli miyim?

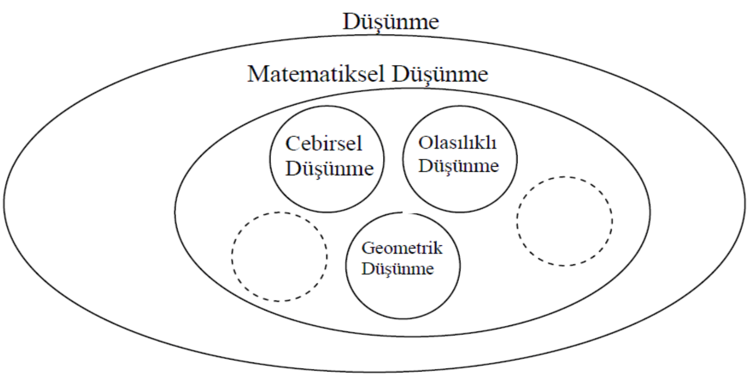
Ev kredimin vadesini uzatsam mı yoksa onu daha mı çabuk ödesem?

Tatilimi nerede geçirsem?

Sokak lambaları arası mesafe ne kadar olmalıdır?"

gibi sorular matematiksel düşünmenin katkıda bulunabileceği sorulardır (Mason, Stacey ve Burton, 2010; s. 127).

Matematiksel düşünme, karşılaşılan matematiksel durumun doğasına bağlı olarak birçok farklı şekil alırken (Carroll, 1996) cebirsel düşünme ve geometrik düşünme gibi düşünme çeşitlerini de kapsamaktadır (Dindyal, 2003). Çelik (2007) Dindyal'in (2003) düşünme ve matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi ifade ettiği modelden yararlanarak düşünme, matematiksel düşünme ve matematiksel düşünmenin farklı biçimleri arasındaki ilişkiyi göstermek için aşağıdaki modeli geliştirmiştir:



Şekil 2. 1. Düşünme ve düşünme biçimleri için bir model (Çelik, 2007)

Burton (1984) matematiksel düşünmenin bireyler için doğal bir süreç olduğunu belirtmiştir. Nitekim çocukların küçük yaşlardan itibaren matematiksel düşünmeye başladıklarını gösteren çalışmaların sayısında günden güne artış vardır (Bobis, Clarke, Clarke, Thomas, Wright, Young-Loveridge ve Gould, 2005). Argyle (2012) ise matematiksel düşünmenin gelişimini insanın yürüme kabiliyetinin gelişimine benzetmektedir. Bazıları doğuştan hızlı iken, diğerleri uzun mesafe yürüyüşlerine daha uygun olabilir. Benzer şekilde insanlar matematiksel düşünürdür ancak biri daha çok cebirsel iken diğeri daha grafiksel olabilir. Krutetskii (1976) matematiksel düşünmeyi öğrencilerin yetenekleriyle ilişkilendirir ve yetenekli öğrencilerin iyi, düşük yeteneğe sahip olan öğrencilerin ise zayıf düzeyde matematiksel düşünmeye sahip olduklarını ifade etmiştir. Dreyfus ve Eisenberg (1996) ise matematiksel düşünmenin sadece pratik ile geliştirilebilen bir yetenek olduğunu, matematiksel düşünmenin herkese öğretilebileceğini ve bunu başarmanın en iyi yolunun da problem çözmek olduğunu ifade etmiştir.

Karmaşık doğası nedeniyle matematiksel düşünmeyi tanımlamak kolay değildir (Zaman, 2011). Matematiksel düşünme ile ne kastedildiği matematikçiler de dâhil olmak üzere kişiden kişiye değişebilmektedir (Lane, 2011). Bu nedenle matematiksel düşünmenin birçok farklı tanım ve yorumuna rastlanabilir (Lutfiyya, 1998; Hwa ve Lim, 2008; Breen ve O'Shea, 2010). En genel anlamda matematiksel düşünme, "matematiksel teknik, kavram ve yöntemleri problem çözme sürecinde dolaylı ya da doğrudan kullanmak " şeklinde tanımlanabilir (Henderson, Fritz, Hamer, Hitcher, Marion, Riedesel ve Scharff, 2002). Zaman'a (2011) göre matematiksel düşünme matematiksel fikirlerin soyutlanması ve genelleştirilmesindeki zihinsel aktivite iken Mason, Stacey ve Burton (2010) matematiksel düşünmeyi, kullanabileceğimiz fikirlerin çeşitliliğini artırma imkânı veren ve bu yolla anlama yeteneğimizi genişleten dinamik bir süreç şeklinde nitelendirmişlerdir.

Matematiksel düşünme, problem çözme süreçlerini ve bu süreç tamamlandığında ortaya çıkan sonucu kapsamaktadır (Umay, 1992). Diğer bir ifadeyle matematiksel düşünmenin özü problem çözmede yatar (Fong, 1997) ve problem çözme kabiliyetine sahip olma, başarılı bir matematiksel düşünürün en önemli özelliklerinden biridir (Scusa, 2008). Henderson vd. (2002) göre ise her bir problem çözme etkinliği matematiksel düşünmenin bir uygulaması olarak görülebilir.

Problem çözme sürecinde matematiksel düşünmeyi kullanabiliyor olma matematik öğretiminin en temel amaçlarından biridir. Ayrıca matematiksel düşünme kabiliyeti ve problem çözümlerinde matematiksel düşünmeyi kullanma, matematik eğitiminin önemli bir hedefidir (Stacey, 2006). Ancak birçok öğrenci matematiksel düşünme stratejilerini kullanamama veya bu noktada yetersiz olma nedeniyle matematiksel problem çözme sürecinde zorluklarla karşılaşmaktadır (Fong, 1997). Matematiksel düşünme, bir probleme verilen cevabın doğru olup olmamasıyla değil bireyin o cevaba gelene kadar kullanmış olduğu stratejilerle tanımlanır (Kaplan, 1987). Bununla birlikte matematiksel düşünme zihinsel bir süreç olduğundan, bu süreci değerlendirmeye yönelik girişimlerde süreçte kullanılan zihne ulaşabilmek ve gerçekleştirilen süreçleri gözlemleyebilmek gerekmektedir (McDougall ve Karadag, 2008).

Öğrencilerin problem çözme süreçleri, onların matematiksel düşünmelerini yansıtır (Cai, 2003), problem çözmede öğrencilerin matematiksel düşünmeleriyle ilgili elde edilen detaylı bilgi ise matematiğin öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiğini anlamamıza yardımcı olabilir (Cai, 2000). Öğrencilerin matematiksel düşünmelerini anlamak için çözüm stratejilerini, matematiksel kavram yanılgıları/hatalarını, matematiksel doğrulamalar ve sunumlar gibi problem çözmenin kritik bilişsel yönlerini incelemek önemlidir (Cai,2002). Bu nedenle öğrencilerin problem çözme süreçlerini takip ederek onların matematiksel düşünmelerine erişim birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur (McDougall ve Karadag, 2008).

Matematiksel düşünme, bir problem çözme etkinliği olarak düşünüldüğünde bu düşünme süreci özünde iki temel aşamada gerçekleşir:

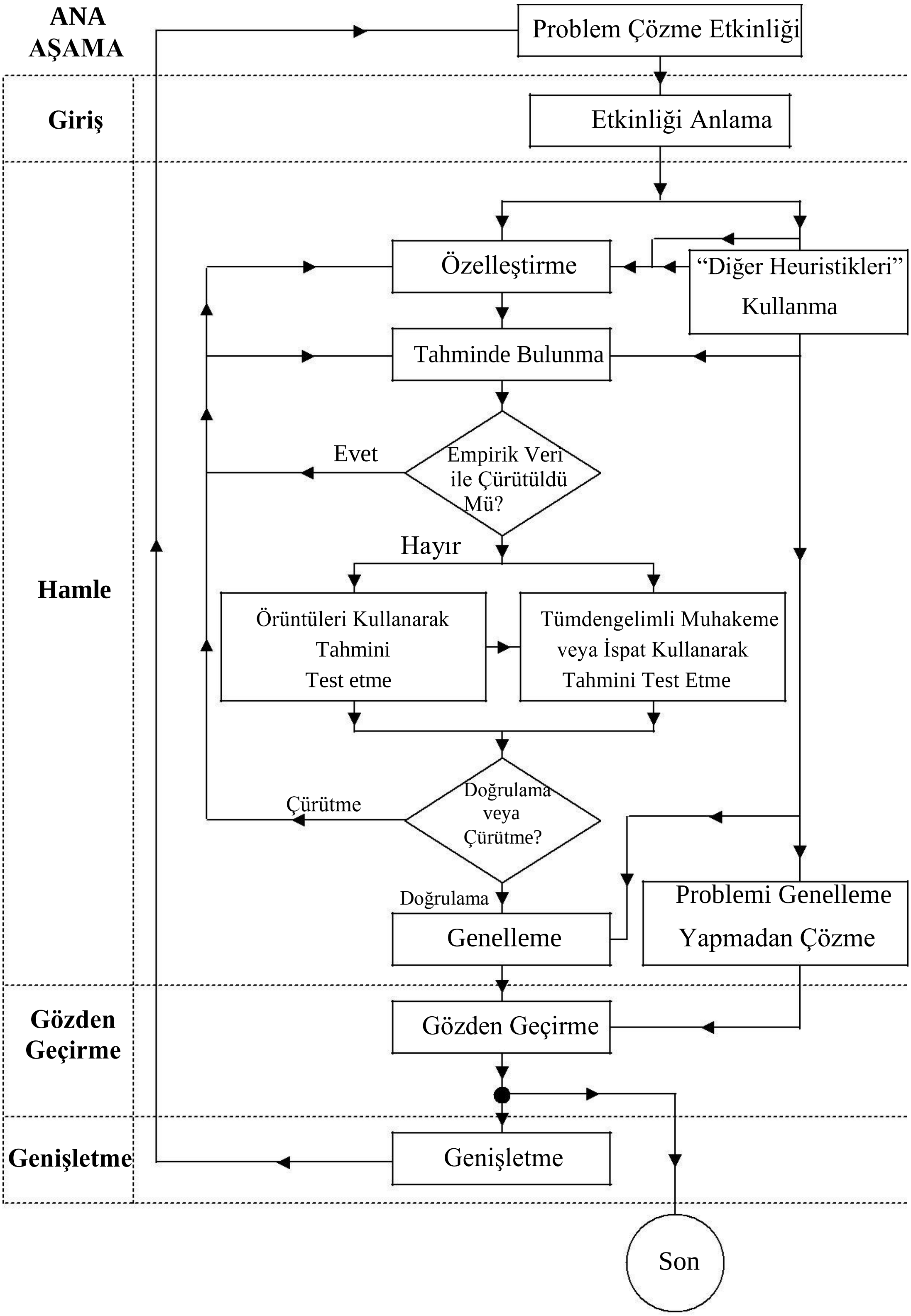
1) Üzerinde düşünülen sorunu anlamaya çalışma ve sorunu giderici çözüm bulma,
2) Bulunan çözümün doğruluğunu yoklama (Kahramaner ve Kahramaner, 2002).

Öğrencilerin belli stratejilere odaklanmalarını, örüntüleri veya ilişkileri görmelerini sağlayan sorular matematiksel düşünmeyi harekete geçiren sorulardır (Way, 2008). Yeşildere ve Türnüklü (2007) özelleştirme, genelleme, tahmin etme, hipotez üretme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektiren problemleri çözüm sürecinde matematiksel düşünmenin gerçekleşeceğini belirtmişlerdir. Mason, Stacey ve Burton (1985) ise özelleştirme, genelleme, tahminde bulunma ve ikna edişin problem çözme sürecinde düşünmenin bileşenleri olduğunu ifade etmişlerdir (Lin, 2006). Dolayısıyla öğrencilerin matematiksel bir problemi çözmeye çalışırken nasıl düşündüklerini ve nasıl çıkarsamada bulunduklarını anlamak, matematiksel düşünmenin bileşenleri hakkında ipucu verebilir (Arslan ve Yıldız, 2010). Fakat öğrencilerin kısa yoldan çözüme ulaştığı sorular, öğrencilerin düşünme süreçlerini anlamak için yeterli olmayacaktır (Yavuz, 2006).

Literatür incelendiğinde öğrencilerin matematiksel düşünmelerini değerlendirmede rutin ve rutin olmayan problemlerin kullanılmış olduğu ancak daha çok rutin olmayan soruların tercih edildiği görülmektedir. Rutin problemler, alt sınıflardan itibaren matematik programlarının önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Rutin problemlerle uzun süre çalışılması ise öğrencilerin problemlere derinlemesine irdelemeden, yüzeysel yaklaşarak çözümler üretmelerine neden olmaktadır (Artut ve Tarım, 2006). Çünkü rutin problemlerde öğrenciler, çözüm için hangi teknikleri kullanmaları gerektiğini kolayca gördüklerinden soruları kendilerine özgü bir yaklaşımla çözmezler (Schoenfeld, 1989). Rutin olmayan problemler ise öğrencilerin çözümleri sürecinde kendi bilgi ve becerilerini farklı yollarla kullanmalarını gerektirir ve rutin problemler ile aralarındaki farklılık da budur (Altun ve Sezgin-Memnun, 2008). Diğer bir ifadeyle rutin olmayan sorular, problem durumunun keşfedilişi ve sonrasında çözümün gerektiği, standart bir algoritma takip edilerek çözülmeyen sorulardır (Cai, 2002). Öğrencinin rutin olmayan problemlerin çözerken sınıfta öğrendiğinden farklı bir algoritma bulmaya ihtiyacı olduğu için bu tür sorular matematiksel düşünmenin ortaya çıkmasını gerektirir (Duran, 2005; Işık ve Kar, 2011).

Herhangi bir problemle karşılaşıldığında probleme cevap bulmanın ötesinde problemin çeşitli yönlerden incelenişi matematiksel düşünme sürecini gerekli kılmaktadır (Yeşildere, 2006). Matematiksel düşünme bir cevabın doğru olup olmamasıyla değil, bireyin o cevaba gelene kadar kullanmış olduğu stratejiler ve süreçler ile tanımlanır (Kaplan, 1987).

Yeo ve Yeap (2010) bu türden bir problem çözme aktivitesinde var olan matematiksel düşünme süreçlerinin birbirleriyle nasıl etkileşimde olduklarını göstermek için aşağıdaki modeli oluşturmuştur:



Şekil 2. 2. Problem çözme aktivitesi modeli: Bilişsel süreçlerin etkileşimi (Yeo ve Yeap, 2010)

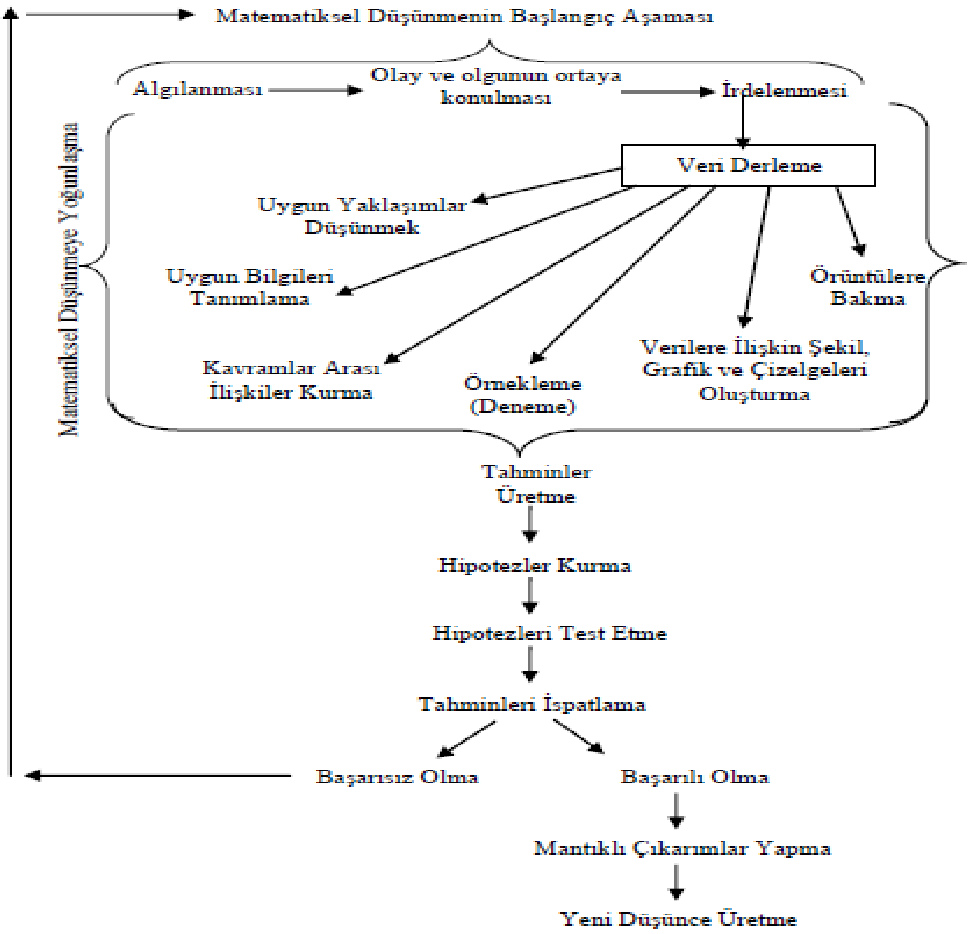
Öğrenciler problem çözme aktivitesi boyunca fikir değiştirdiklerinde, yukarıda ifade edilen aşamalardan herhangi birini atlayabilir veya bir aşamadan diğerine hemen geçiş yapabilirler (Yeo ve Yeap, 2010). Bununla birlikte aynı problem durumunu inceleyen iki bireyden biri söz konusu tüm basamakları gerçekleştirirken, diğeri bazı basamakları atlayarak matematiksel düşünme sürecini tamamlayabilir ya da bir problemde tüm basamakları gerçekleştiren birey diğer bir problemde bazı basamaklara değinmeyebilir (Arslan ve Yıldız, 2010).

İlgili literatürde matematiksel düşünme genel olarak özelleştirme, tahminde bulunma, tümevarım, tümdengelim, genelleme, anoloji, akıl yürütme ve ispatlama gibi karmaşık süreçlerin bir kombinasyonu olarak tanımlanır (Burton, 1984; Mason, Burton, ve Stacey, 1985; Polya, 1945, 1954, 1965; akt., Liu ve Niess, 2006). Bazı araştırmacılar, matematikçiler ve matematik eğitimcileri ise bu süreçlere soyutlama, gösterme ve farklı gösterimler arasında yer değiştirme, görselleştirme, analiz etme, sentezleme, ilişkilendirme gibi zihinsel ve matematikle ilgili işlemleri de dâhil etmişlerdir (Carroll, 1996; Harel, Seldon ve Seldon, 2006; akt., McDougall ve Karadag, 2008).

Isoda ve Katagiri (2012) matematiksel düşünmeyi bir yetenek olarak ele almış ve matematiksel düşünmeyi bilgi ve becerilerin kullanımının gerekliliğini anlayabilmeye, kendi kendine öğrenim için gerekli olan kabiliyetleri elde etmeye olanak sağlayan bir düşünme stili olarak tanımlamışlardır. Ayrıca çocukta bağımsız düşünme ve karar verme yeteneğinin yavaş yavaş oluşturulması için geliştirilmesi gereken en önemli yeteneğin de matematiksel düşünme olduğunu ifade etmişlerdir.

Lutfiyya (1998) ve Cai'ye (2002) göre ise matematiksel düşünmenin herkes tarafından kabul gören iyi bir tanımı veya açıklanışı yoktur. Bu durum düşünme kavramının tanımının ne kadar karmaşık olduğunu ve farklı bakış açılarına göre birçok farklı şekilde görülebildiğini göstermektedir (Viitala, Grevholm ve Nygaard, 2010).

Bukova'ya (2006) göre bireyin yaşamı boyunca karşılaştığı olayları, olguları, olay ve olguların doğruluklarını araştırma, onlarla ilgili tahminlerde bulunma, hipotezler kurma, kurduğu hipotezleri test etme, sonuçlar çıkarma ve bilgiler üretme sürecine matematiksel düşünme denir. Bu süreçte kullanılan yaklaşımlarda bireysel farklılıklar olabilir. Alkan ve Bukova-Güzel (2005) matematiksel düşünmenin oluşum sürecini şu şekilde göstermişlerdir:



Şekil 2. 3. Matematiksel düşünme oluşum sürecine bir örnek (Alkan ve Bukova-Güzel, 2005)

Görüldüğü gibi matematik eğitimi araştırmalarında matematiksel düşünmeyi tanımlamada genel olarak iki bakış açısı mevcuttur. Araştırmacıların bir kısmı kavramsal gelişim odaklı tanımlamalar yaparken diğerleri daha çok matematiksel süreçler odaklı tanımlamada bulunmuştur (Isoda ve Katagiri, 2012). Genel olarak bakıldığında ise matematiksel düşünmenin kavramsal anlamından çok bu düşünme sürecinde yer alan aşamalarla tanımlandığı görülmektedir.

2.1.2. Matematiksel Düşünme Basamakları

Farklı matematikçiler ve matematik eğitimcileri matematiksel düşünme süreçlerini tanımlamak için yer yer eşanlamlı kelimeler (doğrulama ve ikna etme/doğrulama ve inandırma/ispatlama gibi) (Arslan ve Yıldız, 2010) ve benzer terminolojiler kullanmışlardır. Çalışmalar incelendiğinde, matematiksel düşünmenin aynı bileşeni için tanımlar arasında ortak bir tema görülebilir ve matematiksel düşünme şu kategoriler ile tarif edilebilir: özelleştirme, genelleme, tahmin etme, ikna etme veya ispatlama (Mason, Stacey ve Burton, 2010; Arslan ve Yıldız, 2010; Lane, 2011; Breen ve O'Shea, 2011).

2.1.2.1. Özelleştirme

Özelleştirme matematiksel düşünmenin temelinde yer alır, problem çözümlerinde yaşanan ilk işlemsel süreçtir ve üzerinde bir genellemenin inşa edileceği delilleri elde etmek için kullanılır (Mason, Stacey ve Burton, 2010). Lane (2011) özelleştirmeyi kişinin karşılaştığı soruya daha aşina hale geldiği ve bir tahmin veya genellemeye yol açan süreç olarak ifade etmiştir. Burton'a (1984) göre özelleştirme, bir soru ya da problemle karşılaşıldığında anlatılanı keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemektir. Polya (1957) ise özelleştirmeyi genelden özele doğru düşünmeye geçiş şeklinde tanımlamış ve özelleştirmenin, problem çözümlerinde çoğunlukla yararlı olduğunu belirtmiştir.

Bu basamakta soru ile ilgili bir anlayış elde etme amaçlandığından özelleştirmeye rastgele örneklerle başlanabilir. Soruyla ilgili bir anlayış elde edildiğinde ise özelleştirme sistemli olarak sürdürülürse genelleme ve tahmine götüren ilişkiler ve örüntüler tespit edilebilir (Lane, 2011). Diğer bir ifadeyle, rastgele örnekler seçmek bir soruda ne sorulduğu ile ilgili fikir elde etmede, bir ifade veya tahminin doğru olup olmadığını anlamada kullanılabilecek bir yol olabilir. Ancak örüntüler aranırken özelleştirme sistematik olarak yapılırsa başarılı olma ihtimali daha yüksektir. Herhangi bir örüntünün oluşmadığı durumlarda ise özelleştirme soruyu basitleştirme, onu daha belirli ve özel hale getirme anlamına gelir (Mason, Stacey ve Burton, 2010).

Özelleştirmede bir fikir veya yapının keşfedilişi için önceden edinilmiş beceriler kullanılır (Ng, 2004). Ayrıca birey bu süreçte soyut problemlerin somut örneklerini dikkate alır (Nickerson, 2011).

Isoda ve Katagiri'ye (2012) göre özelleştirme sürecinde aşağıdakiler gerçekleşebilir:

a) Birey problemin genelliğini kaybetmeden herhangi bir değişken veya bir başka faktörü özel bir niceliğe dönüştürerek problemi anlayabilir ve çözümü daha kolay bulunur hale getirebilir,

b) Birey bazen uç bir durumu dikkate alarak problemin genel çözümünü bulmaya yardımcı olacak bir ipucu elde edebilir,

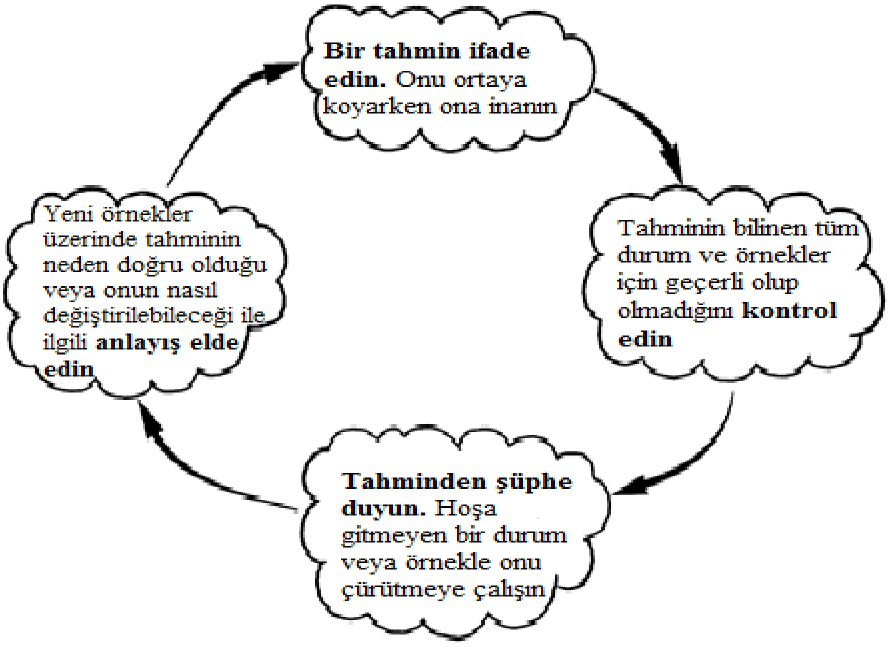
c) Uç durumlar veya özel değerler olası bir çözümün doğru olup olmadığını kontrol etmek için kullanılabilir.

Özelleştirme sadece soruya değil soru ile meşgul olan bireye de bağlı bir süreçtir. Eğer özelleştirmenin amacı soru ile ilgili bir his elde etmek ise belki bazıları için somut bir örnek yeterli olabilirken diğerleri için bu süreçte birden fazla örnek gerekebilir (Lane, 2011).

Özelleştirme sürecinde soruyla ilgili bir veya daha fazla örneği inceleme, tanımlama, gösterme, anlatma, seçme, çizme veya bulma gibi eylemler yer alır (Arslan ve Yıldız, 2010). Ayrıca özelleştirme soruyla ilgili diyagram çizme, tablolar inşa etme, sembol ve düzenlemeler yapma şeklinde de görülebilir (Karakoca, 2011).

2.1.2.2. Tahmin

"Kişinin doğru olduğundan emin olmamasına rağmen doğru olduğunu düşünerek sunduğu ifadeye tahmin denir" (Yerushalmy, 1993; s. 57). Tahmin, belirli bir durumla ilgili genellemeye varırken bireyin o durum üzerine odaklanışı ve bir düzeni veya örüntüyü kavrayışı sonucu ortaya çıkar (Lin, Yang, Lee, Tabach ve Stylianides, 2012). Burton'a (1984) göre yeterli sayıda örnek incelendiği zaman örnekleri birbirine bağlayan ilişkiler hakkında tahminde bulunma neredeyse otomatik olarak meydana gelir. Tahmin süreci ile temelde yatan bir örüntü hissedilir, keşfedilir, ifade edilir ve sonrasında doğruluğu ispat edilir. Mason, Stacey ve Burton (2010) tahmini belirli bir soruda kafa karıştıranın ne olduğunu açıklayabilecek, olası bir örüntü veya düzen hakkında bilgiye dayalı bir varsayım şeklinde tanımlamıştır. Ancak tahmin için sadece örnekleri sistematik olarak biriktirmek ve bir örüntünün ortaya çıkmasını beklemek yeterli değildir. Tahmine ulaşırken soruyla tam olarak meşgul olma, onu içselleştirme gerekir ve tahminde bulunma aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi devir daim eden bir süreç olarak resmedilebilir:



Şekil 2. 4. Tahmin süreci (Mason, Stacey ve Burton, 2010; s. 59)

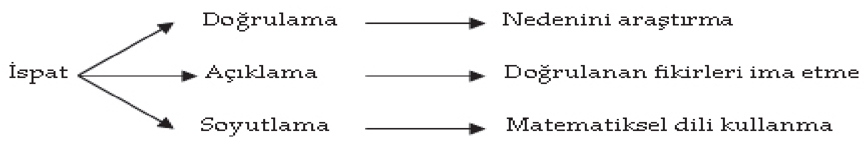
Okul matematiğinde ise öğrenciler tahminlerini çoğunlukla özel durumları örüntüleme işlemleri yoluyla inceleyerek yaparlar (Ellis, 2007). Tahmin tek başına, izole edilmiş bir olay olmamakla birlikte en azından öğrencinin önceki ve yeni bilgileri ile bağlantılıdır (Lin vd., 2012). Diğer bir ifadeyle, burada belirtilen tahminler rastgele varsayımlar değildir (Nickerson, 2011).

2.1.2.3. İspat

Matematiğin gelişmesine ve evrenselleşmesine en büyük katkıyı sağlayan matematiksel ispat, her seviyeden öğrencinin zorlandığı bir kavramdır (Güler ve Dikici, 2012). İspat çoğunlukla sadece matematiğe ait bir kavram olarak görülse de genel olarak ulaşılan bir hüküm veya sonucun doğruluğunun çeşitli delillerle kabul ettirilmesi çabası anlamına gelmektedir (Yıldırım, 2011). Bir kişi veya topluluk için doğruluğu gösteren şey ispattır (Harel ve Sowder, 2007). Bir problem çözme aktivitesi olarak bakıldığında ise ispat, fikirlerin kesin hale getirildiği aktivitenin son aşaması olarak da düşünülebilir (Tall, 1991).

İspat, öğrencilerin kavramları daha iyi anlayıp elde edilen sonuçlara inanmasını sağladığı ve matematiksel düşünce yapısını geliştirdiği için matematiğin temel yapı taşlarından biridir (Gökkurt ve Soylu, 2012). İspat, matematiksel düşünmenin son aşaması olarak da düşünülebilirken bazen ispatlama yerine ikna etme veya doğrulama gibi kavramlar kullanılır (Lane, 2011).

Kayagil (2012) bir ifadenin ispatının, ifadenin doğruluğunun gösterimi ve ifadenin neden doğru olduğunun açıklanması yoluyla iki şekilde yapılacağını belirtmiştir. Ancak matematikçiler, bir ifadenin doğru veya yanlışlığından çok neden doğru olduğuyla ilgilendikleri için matematiksel ispat bir ifadenin niçin doğru olduğunun mantıksal şekilde açıklanışı anlamına gelmektedir (Altıparmak ve Öziş, 2005; Kayagil, 2012). Matematikçiler için ispat sürecinde yeni durumları düşünme, önemli yönlere odaklanma, önceki bilgileri kullanma, ilişkileri göz önünde tutma, tahminler yapma, gerektiğinde tanımlar formülüze etme ve geçerli bir kanıt oluşturma aşamaları yer alır (Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva ve Cheng, 2012). Bunların yanı sıra bir önermeyi açıklama, doğru veya yanlış olma nedenini ifade etme, tümevarımsal ve tümdengelimsel düşünme gibi farklı mantıksal düşünme yollarını ve ispat çeşitlerini seçme, kullanma gibi eylemler söz konusudur (Arslan ve Yıldız, 2010). Baki (2006) ise ispatlama sürecinin doğrulama, açıklama, soyutlama şeklinde üç aşamada gerçekleştiğini belirtmiştir:



Şekil 2. 5. İspatlama süreci (Baki, 2006; akt., Arslan ve Yıldız, 2010)

Matematikte teoriler doğru bir şekilde ispatlandığında sonsuza dek doğru olarak kaldığı için matematiksel ispat oldukça önemlidir (Sultan ve Artzt, 2011). Diğer bir ifadeyle, doğruluğu ispatlanmış matematiksel bilgiler dünyanın hiçbir yerinde değişmediği için matematikte ispatlar çok önemlidir ve bu durum matematik ile diğer bilimler arasındaki en önemli farklılıklardan biridir (Güler ve Dikici, 2012).

Genel olarak ispat kavramının neredeyse sadece lise ve üniversite matematiğiyle ilişkili olduğu düşünülmektedir (Basturk, 2010). Nitekim Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programında ispat kavramına değinilmediği görülmektedir (MEB, 2013b). Dokuzuncu sınıf ve sonraki üç yılı kapsayan lise döneminde ise doğrudan ispat, dolaylı ispat, çelişki ile ispat, tümevarım ile ispat ve geometrik şekiller yardımıyla ispat yöntemleri yer almaktadır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı incelendiğinde ispat kavramına ilk olarak 9. sınıf öğretim programında rastlanmaktadır. İspat yapma becerisiyle ise hem cebir (örn. $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olmadığı ispatlanır) hem de geometri (örn. dik üçgende Pisagor teoremini, üçgende kosinüs teoremini ispatlar) öğrenme alanlarının kazanımları arasında karşılaşılır (MEB, 2013a). İspatın ilk olarak açıkça ifade edildiği yer 11. sınıf öğretim programıdır. Burada "Mantık Öğrenme Alanı" içerisinde, "Açık Önermeler ve İspat Teknikleri" kapsamında ispat kavramına yönelik üç kazanıma rastlanmaktadır. Bunlar:

Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir,

Mantık kurallarını basit teoremlerin ispatlarında kullanır ve

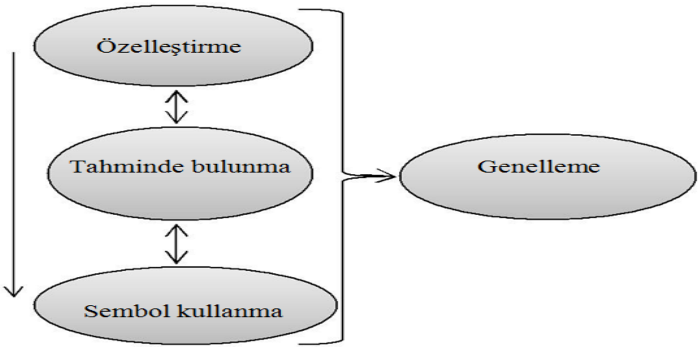
Tümevarım yöntemi ile ispat yapar

kazanımlarıdır (MEB, 2013a). Ayrıca aynı programın 11. sınıf öğretim programı bölümünde öğrencilere aksine örnek verme, karşıt ters, doğrudan ispat ve çelişki yoluyla ispat tekniklerinin öğretilmesi gerektiği de belirtilmektedir.

2.1.2.4. Genelleme

Matematiksel düşünmede matematiksel kavramlar tanımlanarak onlar arasında bir ilişki kurulur, genellemeler ise bu ilişkileri kurmanın sonucunda meydana gelir (Yılmaz ve Argün, 2013). Bu nedenle genelleme süreci matematiksel düşünmenin önemli bir parçasıdır (Sriraman, 2004). Genelleme, matematik öğreniminde temel aktivitelerden biridir ve özelleştirmeden sonraki diğer ana basamaktır (Hashemia, Abua, Kashefia ve Rahimib, 2013) ancak öğrenciler özelleştirme olmadan da genelleme yapabilirler (Yeo ve Yeap, 2010). Mason, Stacey ve Burton (2010) ile Lane (2011) birçok örnekte ortak olan özellikleri fark etme ve diğerlerini görmezden gelmenin genelleme sürecinin bir parçası olduğunu, genellemenin açıkça ifade edilemese de var olan bir örüntünün hissedildiğinde başladığını ve bu hissi ifade etmeye çalışmanın ise genelleme olduğunu belirtmişlerdir. Benzer şekilde Burton (1984) da bir örüntü veya düzenin fark edilmesinin genellemeye neden olduğunu ifade etmiştir. Harel ve Tall (1991) genellemeyi verilmiş bir argümanın daha geniş bir bağlama uygulanması olarak tanımlarken, Dreyfus (1991) genellemeyi geçerlilik alanını genişletme, ortak özellikleri tanımlama, özellerden türetme işlemi veya tümevarım şeklinde nitelendirmiştir. Polya (1957; s. 108) ise genellemeyi "bir nesneyi göz önüne alıştan o nesneyi içeren bir kümeyi düşünme veya daha sınırlı bir kümeyi düşünmekten o kümeyi de kapsayan daha geniş bir kümeyi düşünmeye geçiş" olarak tanımlamıştır. Yerushalmy'e (1993) göre genellemeler tahminin özel türleridir ve özelden genele akıl yürütme ile oluşturulurlar. Argyle (2012) genellemeyi matematiksel düşünürün durumları gözlemden durumları tahmine vardığı süreç olarak ifade ederken Baki (2008) genellemeyi belirli bir durum ve olaydaki örüntüyü bulup bir düşüncede toplama işi olarak tanımlamış ve genellemenin bu şekli ile aynı zamanda bir soyutlama süreci olduğunu ifade etmiştir (akt., Akkan ve Çakıroğlu, 2012). Ancak genelleme sürecinde mutlaka matematiksel gösterim kullanmak gerekli değildir (Lane,2011).

İster sözel isterse sembolik olsun bir tahminin formülleştirilişi genelleme yapıldığına dair uygun bir delil olarak düşünülebilir (Chua, 2013) fakat ulaşılmış olan bu genelleme doğruluğu ispat edilmedikçe bir tahmin olarak kalır (Watson, 1980). Dolayısıyla genelleme, elde edilen ifadenin doğrulanmasından ayrı tutulamaz (Lannin, 2005). Mason, Stacey ve Burton (2010) genellemenin bir kez ifade edildikten sonra doğru olup olmadığı soruşturulması gereken bir tahmine dönüştüğünü ve tüm bu sürecin matematiksel düşünmenin esası olduğunu belirtmişlerdir. Hashemia vd. (2013) ise genelleme ile özelleştirme arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde göstermiştir:



Şekil 2. 6. Genelleme ve özelleştirme arasındaki ilişki (Hashemia vd., 2013)

Genelleme, örüntüler arama ile ilişkilidir (Orton ve Orton, 1999; Mason, Johnston-Wilder ve Graham, 2005; Barbosa ve Vale, 2015) ve matematiksel düşünmenin anahtar bileşenlerinden birini sağlar (Kapur, 1976). Steele ve Johanning (2004) sayılar, boyut ve şekil, artış ve değişimde örüntü bulma gerektiren problemlerin Lee ve Wheeler (1987) tarafından genelleme problemleri olarak adlandırıldığını ve en yaygın olarak kullanılan genelleme probleminin bir toplulukta her kişinin birbiriyle tokalaşması sonucu meydana gelecek tokalaşma sayısını veren formülün istendiği Tokalaşma Problemi olduğunu belirtmiştir. Stacey'e (1989) göre bu tür problemler özel durumların incelenişi, sonuçların sistematik olarak düzenlenmesi, bir örüntünün bulunması ve bu örüntünün cevabın elde edilişinde kullanılması ile çözülebilir. Mason, Graham, Pimm ve Gower (1985), Balacheff (1988) ve Bell (1976) ise bu tür problemleri genellerken öğrencilerin genellemeyi aşağıda gösterildiği gibi 4 aşamalı şekilde yaptıklarını ifade etmişlerdir:

- Birinci aşama sadece birkaç duruma bakarak genelleme hakkında tahminde bulunmayı içerir.
- İkinci aşamada öğrenciler özel örnekler karşısında kendi genellemelerini test ederler.
- Üçüncü aşamada öğrenciler olası tüm durumları gözden geçirme ihtiyacına yönelik bir farkındalık gösterirler.
- Son olarak dördüncü aşamada ise öğrenciler açık genellemeler yaparlar (akt., Steele ve Johanning, 2004).

Mason, Stacey ve Burton (2010) matematiksel bir incelemenin sonucunda bir düzenlilik bulma beklentisinin, matematiksel düşünme sürecinde bireyin içerisinde büyüyen bir his olduğunu ve bunun da bireyi örüntüleri keşfetmeye ve fark etmeye yönlendirdiğini belirtmişlerdir. Watson ve Mason'a (2006) göre ise matematiksel düşünmenin temeli bir örüntüyü veya onda meydana gelen değişimi fark etmedir.

Genelleme süreci, özelleştirme sırasında incelenmiş olan örneklerdeki ilişki ve örüntüleri fark etmeyi içerir (Lane, 2011). Ek olarak genellemeyi aramanın en ilginç ve belki en değerli metotlarından birisi onu genişleyen fiziki örüntülerle elde etmeye çalışmaktır (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2010). Örüntü araştırmak, genelleme yöntemlerinden biridir (bu aslında genellemeden önce gelir) ve örüntü bulmak, öğrencilerin kendi matematiksel düşünmelerini geliştirmelerine yardımcı olur (May, 1996; akt., Mubark, 2005). Jones (1993) örüntü aramayı genelleme oluşumu için gerekli bir adım olarak nitelendirirken Hargreaves, Shorrocks-Taylor ve Threlfall'a (1998) göre sayılar arasındaki ilişkileri keşfetmeye yardımcı olan örüntülerle uğraşmak, öğrencileri genelleme yapmaya teşvik eder. Ayrıca öğrencilerin sayı veya şekillerdeki örüntüler arasında bağlantı kurmaları, matematiksel konular arasındaki ilişkileri anlamalarına yardımcı olacak ve onların matematiksel düşünmelerini geliştirecektir (NCTM, 1989). Dolayısıyla matematiksel düşünme becerilerinin gelişiminin örüntülere dayandığı söylenebilir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2006). Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) öğrencilerin erken yaşlardan itibaren örüntüleme aktivitelerinde yer alarak geometrik veya sayısal örüntüler hakkında genellemeler yapmalarına, tahminlerini doğrulamalarına, örüntü ve fonksiyonları sözcüklerde, tablolarda ve grafiklerde göstermelerine olanak sağlanması gerektiğini ifade etmiştir (NCTM, 2000).

Ülkemizde de matematik eğitiminde bir şekil, resim ya da sayı örüntüsünde eksik olan bir adımı bulma ile başlayan genelleme becerisi oluşturma süreci sonraki yıllarda örüntünün genel terimini bulma, bileşenleri arasındaki ilişkileri formüle etme şeklinde devam etmektedir (Bağdat, 2013). Bu süreçte, 1-5. sınıflarda önce tekrarlı örüntülerle tanışan öğrenciler ilerleyen yıllarda ise genişleyen örüntülerle karşılaşmaktadırlar (Bağdat ve Saban, 2014).

Matematikte sırasıyla örüntüler tahminlerin, tahminler de ispatların gelişimine neden olabilir. Bu nedenle örüntüler belirleme ve tahminlerde bulunma, matematiksel genellemenin bir parçasıdır (Stylianides, 2009). Öğrencilerden herhangi bir örüntünün kuralını oluşturmalarının istendiği etkinlikler, onları genelleme inşa etmeye teşvik eder (Kenney, Zawojewski ve Silver, 1998; Stacey, 1989; Swafford ve Langrall, 2000; Lannin, 2005). Ayrıca matematiksel düşünme sürecinin temelinde genelleme yer alırken genelleme yeteneğinin temelinde ise örüntüler vardır (Tanışlı, 2013). Dolayısıyla genelleme kavramının içinin doldurulmasında özellikle üzerinde durulması gereken asıl kavram örüntüdür (Bağdat, 2013).

2.1.3. Örüntü

“Hayatın olduğu her yerde örüntüler, örüntünün olduğu yerde de matematik vardır” (Barrow, 2005; s. 271). Öyleki bir ayçiçeğinden bir leoparın beneklerine, suyun akışından bir zarın yuvarlanmasına, hava tahminlerinden bir bilgisayarın çalışmasına, yaşamamızın neredeyse hemen her alanında bir örüntü mevcuttur (Yaman ve Umay, 2013). Matematikte ise örüntüler, sayı ya da şekillerin bir ilişkisi şeklinde karşımıza çıkmaktadır (Kabael ve Tanışlı, 2010).

Örüntüler “matematiğin kalbi ve ruhudur” (Zazkis ve Liljedahk, 2002; s. 379). Matematik genelde sayı ve şekil bilimi olarak tanımlanır ancak daha geniş açıdan bakıldığında matematiğin sadece sayı ve şekillerle ilgili olmadığı, aynı zamanda her türden örüntü ve düzenle ilgili olduğu da görülmektedir (Steen, 1990). Matematikçiler sayılarda, uzayda, bilimde örüntüler arar ve matematiksel teoriler yoluyla bu örüntüler arasındaki ilişkileri açıklar. Dolayısıyla matematik aynı zamanda bir örüntü bilimidir (Steen, 1988).

Matematiksel olarak örüntü ve genelleme kavramları tanımlanacak olursa nesne, şekil veya sayıların rastgele değil, matematiksel bir fonksiyon ile ifade edilebilen düzenli dizisine örüntü, bu dizideki düzeni ifade etmeye ise genelleme adı verilmektedir (Yaman, 2010).

Örüntüler, öğrencilerin sadece genelleme yapmalarına imkân vermez aynı zamanda genellemeye yönelik çeşitli yaklaşımlarda bulunmalarını da sağlar (Walkowiak, 2014). Matematikte örüntülerin oynadığı ana rollerden bir diğeri de öğrencilerin tahmin yapmalarına olanak sağlamasıdır. Bundan dolayı örüntüleri tanımlama ve tahminlerde bulunma genellemenin bir parçası olarak görülebilir (Stylianides, 2009).

Örüntüler şekil (görsel, geometrik şekil), tablo veya grafik, sayı dizisi, sözel problem biçiminde sunulabilirken (Yaman, 2010) genel olarak tekrarlı örüntüler ve genişleyen örüntüler şeklinde iki ana kategoride incelenmektedir (Yaman ve Umay, 2013).

2.1.3.1. Tekrarlı Örüntüler

Tekrarlı örüntüler fark edilebilir bir tekrar birimi içeren örüntülerdir (Papic, 2007). Tekrarlı örüntülerde örüntü genişlerken ABABABAB… AABAABAABAABAAB… ABCCABCC… örneğinde olduğu gibi bir grup eleman tekrar etmektedir (Warren ve Cooper, 2006).

2.1.3.2. Genişleyen Örüntüler

Takip eden terimleri sistematik bir şekilde artan ya da azalan örüntülere genişleyen örüntüler denir (Papic, 2007). Genişleyen örüntüler dört farklı şekilde gruplandırılabilir (Tanışlı ve Olkun, 2009):

I. Doğrusal (Lineer) Genişleyen Örüntüler

Bir önceki terime sabit bir sayı eklenerek bir sonraki terimin elde edildiği örüntüler doğrusal (lineer) genişleyen örüntüler olarak adlandırılmaktadır (Yaman, 2010). Bu türden örüntülerde kural ya da terimler arasındaki ilişki $f(n) = a \cdot n \mp b$ şeklinde doğrusal bir denklemle açıklanabilmektedir (Akkan ve Çakıroğlu, 2012).

II. Geometrik Genişleyen Örüntüler

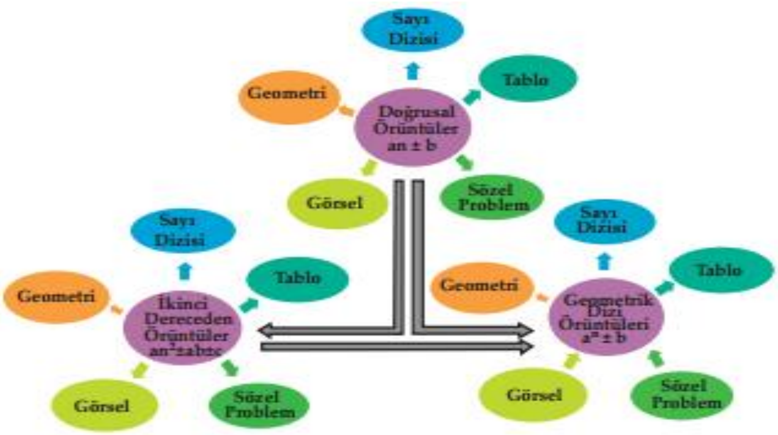
Ardışık terimleri arasında sabit bir oran bulunan örüntülerdir (Dundar, 2015). Bu tür örüntülerdeki kural ya da ilişki, üslü nicelikli $f(n) = a^n \mp b$ şeklinde açıklanabilir (Akkan ve Çakıroğlu, 2012).

III. Artarak Genişleyen Örüntüler

Terimleri arasında sabit farkların olmadığı, ardışık terimleri arasındaki farkların arttığı ya da azaldığı örüntülerdir. Bu tür örüntülerin kuralları $f(n) = a \cdot n^2 \mp b \cdot n \mp c$ şeklinde ikinci ya da $f(n) = a \cdot n^3 \mp b \cdot n^2 \mp c \cdot n \mp d$ şeklinde üçüncü dereceden fonksiyonlarla açıklanabilir (Yaman, 2010).

IV. Diğer Örüntüler

Terimleri bir düzen içinde değişmesine rağmen doğrusal, geometrik veya artarak genişleyen örüntüler sınıfına girmeyen örüntülerdir. Bu örüntü tipine örnek olarak Fibonacci sayıları, Pascal üçgeni gibi oldukça bilinen sayı dizileri verilebilir (Yaman, 2010).

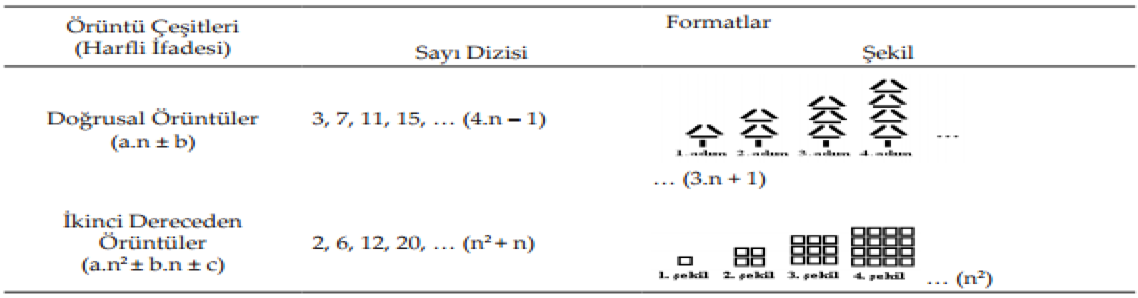


Şekil 2. 7. Farklı örüntü çeşitlerini içeren formatlar (Akkan ve Çakıroğlu, 2012)

Örüntü bulmak insanın doğasında vardır. Örneğin küçük çocuklar örüntüler üzerine çalışmayı severken büyükler örüntüleri keşfetme ve onları manipüle etmekten hoşlanırlar (Beatty ve Bruce, 2012). Tekrarlı ve genişleyen örüntüler ise çocukların erken yaşta öğrendikleri iki baskın örüntü türüdür (Warren ve Cooper, 2006).

Türkiye'de örüntüler konusu, ilk olarak 2005 tarihli İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programında yer almıştır (MEB, 2005). 2015 yılında yenilenen İlkokul Matematik Dersi (1, 2, 3 ve 4. Sınıflar) Öğretim Programında ise 1. sınıfta terimleri şekiller veya cisimler olan bir örüntüdeki ilişkinin belirlenmesine ve eksik bırakılan öğenin bulunmasına yönelik kazanımlar, 2. sınıfta tekrarlayan bir örüntüde eksik bırakılan öğeleri belirleyerek tamamlama kazanımları bulunmaktadır. Öğrenciler 3. sınıfta tek işlemli kuralı olan bir örüntü oluştururken, 4. sınıfta ise en çok iki farklı işlemli kuralı olansayı örüntüsünün kuralını belirler ve örüntüyü genişletir, tekrarlayan, büyüyen ve küçülen sayı örüntülerini oluşturur ve tarif ederler (MEB, 2015). Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programında kuralı verilen sayı veya şekil örüntülerinin istenen adımlarını oluşturma 5. sınıf kazanımları arasında yer almaktadır. Öğrencilerin günlük yaşam durumlarında veya şekil örüntülerindeki ilişkileri aritmetik diziye dönüştürerek, dizinin kuralını harfle ifade etmesi ve kuralı harfle ifade edilen dizinin istenen terimini bulması ise 6. sınıf kazanımları arasında belirtilmektedir (MEB, 2013b).

Akkan ve Çakıroğlu (2012) MEB'in 6-8. sınıf ile ilgili öğretim programından ve ülkemizdeki araştırmalardan, genellikle doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerin sayı dizisi ve şekil (geometrik ve görsel) formatında sunulan çeşitlerinin daha çok yer aldığını belirtmiş ve bunu aşağıdaki şekilde göstermişlerdir:



Örüntü Çeşitleri (Harfli İfadesi)	Formatlar: Sayı Dizisi	Formatlar: Şekil
Doğrusal Örüntüler $(a.n \pm b)$	3, 7, 11, 15, … $(4.n - 1)$	… $(3.n + 1)$
İkinci Dereceden Örüntüler $(a.n^2 \pm b.n \pm c)$	2, 6, 12, 20, … $(n^2 + n)$	1. şekil 2. şekil 3. şekil 4. şekil … (n^2)

Şekil 2. 8. Doğrusal ve ikinci dereceden örüntü çeşitleri ve örnekleri (Akkan ve Çakıroğlu, 2012)

2.2. İlgili Araştırmalar

İlgili literatür incelendiğinde genel anlamda matematiksel düşünme ile ilgili ulusal veya uluslararası düzeyde yapılmış birçok araştırmaya rastlanmıştır. Çalışmamızın problem konusu özelinde ilköğretim, ortaöğretim ve lisans düzeyinde matematiksel düşünme süreçlerini ele alan araştırmalara bu başlıklar halinde sırasıyla yer verilmiştir.

2.2.1. İlköğretim Düzeyinde Yapılmış Çalışmalar

Cai (2000) çalışmasında, ABD ve Çin'de öğrenim gören 6. sınıf öğrencilerinin 6 adet açık uçlu ve 6 adet açık uçlu olmayan problem çözümlerinde sergiledikleri matematiksel düşünme ve muhakemelerini incelemiştir. Bu problemlerin çözümünde kullanılan matematiksel düşünme ve muhakemeleri anlamak için öğrencilerin yanıtlarını nitel yolla analiz etmiştir. Çalışma sonucunda açık uçlu olmayan sorularda Çin örnekleminin ortalama skorlarının dikkate değer oranda daha yüksek olduğu, ABD'li öğrencilerin ise açık uçlu sorularda Çin örneklemine göre önemli oranda daha yüksek ortalama skorlar elde ettikleri görülmüştür. ABD'li öğrenciler tablo çizme, liste oluşturma gibi daha somut stratejileri, Çinli öğrenciler ise problemlerde genel kuralı bularak bir kuralı ifade etme yolunu daha çok tercih etmişlerdir. Çinli öğrencilerin rutin algoritma ve sembolik gösterimleri, ABD'li öğrencilerin ise somut görsel gösterimleri kullanmayı tercih ettikleri belirlenmiştir. Buna bağlı olarak Çinli öğrencilerin genelleme becerilerinin ABD'li öğrencilerden daha ileri düzeyde olduğu ifade edilmiştir.

Yeşildere (2006) farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerini incelemiştir. Nicel ve nitel araştırma yöntemleri kullanılarak hazırlanan, örnek olay araştırma stratejili çalışmada veri toplama aracı olarak açık uçlu problemler kullanılmıştır. Araştırma sonucunda farklı matematiksel güce sahip öğrencilerin, matematiksel düşünme ve bilgi oluşturma süreçlerinde izledikleri yollar arasında bir takım farklılıkların olduğu, düşük matematiksel güce sahip öğrencilerin bilgi oluşturmada yavaş ve sorunlu bir süreçten geçerken yüksek matematiksel güce sahip öğrencilerin önceden oluşturulan bilgileri tanımada, kullanmada ve oluşturmada daha başarılı olduğu görülmüştür.

Yeşildere ve Türnüklü'nün (2007) ilköğretim 8. sınıftan mezun öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini konu alan araştırmasında, veri toplama aracı olarak on tane açık uçlu problem kullanılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin problem çözmede, matematiksel bilgileri ile ilişkilendirme yapmada ve mantıksal akıl yürütmede sorun yaşadıkları belirlenmiştir. Bu duruma, öğrencilerin verilenlerden hareketle değil de öznel görüşlerine dayanarak akıl yürütmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak ve açıklamalar yaparak ifade edememeleri, problemleri verilenler arasında ilişkilendirme yaparak çözememelerinin neden olduğuna işaret edilmiştir.

Taşdemir (2008) ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin fen ve teknoloji dersindeki akademik başarılarına, problem çözme becerilerine ve tutumlarına etkilerini araştırmıştır. Araştırmada elde edilen bulgular, matematiksel düşünme etkinlikleri içeren öğretimin öğrencilerin akademik başarılarını, tutumlarını ve problem çözme becerilerini geliştirmede ve bunun sürekliliği üzerinde önemli bir etkisinin olduğunu ortaya çıkarmıştır. Matematiksel süreçleri orta ve düşük seviyede sergileyen öğrenciler problemi kısmen tanıyıp belirlerken, sundukları çözümlerdeki kavram ve hesaplamalarda büyük hatalar yapmışlar, sonucu matematiksel akıl yürütme ve formül kullanmadan sezgisel yolla elde etmişlerdir.

Scusa (2008) yaptığı çalışmada, 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmelerini problem çözme, muhakeme ve ispat yapma, iletişim kurma, problem ve çözümünü sunma ve ilişki kurma süreçleri bağlamında incelemiştir. Öğrencilere bu süreçlerin öğretimi ve bu süreçleri kullanan örnek öğrenci çözümlerini değerlendirme fırsatı sağlamış, bu durumun öğrencilerin matematiksel düşünme ve çözümlerini yazmaları üzerine etkisini araştırmıştır. Çalışma sonucunda yazılı ya da sözel olarak söz konusu süreçleri vurguladıkça öğrencilerin muhakemelerinin geliştiği görülmüştür.

Taylor (2008) matematiksel olarak üstün yetenekli öğrencilerin dört açık uçlu soru üzerinde sergiledikleri matematiksel düşünme ve matematik yapma yollarını incelemiştir. Çalışmaya 8. sınıfta öğrenim gören 15 üstün yetenekli öğrenci katılmıştır. çalışma sonucunda elde edilen bulgular, öğrenciler arasındaki sosyal etkileşimin öğrencilerin matematiksel kavram ve ilişkileri anlamalarına, daha karmaşık anlamlar inşa etmelerine ve matematik yoluyla konuşmalarına olanak sağladığını vurgulamıştır.

Karakoca (2011) çalışmasında 6. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde matematiksel düşünmeyi kullanma durumlarını, bu durumların öğrencinin cinsiyeti, okul öncesi eğitim alıp almama durumu ve öğrencinin matematik başarısı açısından farklılaşıp farklılaşmadığını araştırmıştır. Bulgular, öğrencilerin problem çözme sürecindeki matematiksel düşünme durumlarında cinsiyete bağlı bir farklılığın olmadığını, okul öncesi eğitim alma ve matematik başarısı arasında anlamlı derecede bir ilişkinin olduğunu göstermiştir. Bunun yanında öğrencilerin rutin sorulardaki ortalamalarının rutin olmayan sorulara göre daha yüksek olduğu görülmüştür.

Limjap (2011) ilkokul 1. ve 2. sınıfta öğrenim gören öğrencilerin matematiksel düşünmelerini araştırmıştır. Çalışmada 19 öğrencinin her birinden 6 problemi çözmeleri istenmiştir. Çalışma sonucunda, öğrencilerin formal öğretim olmadan da problemleri canlandırabildikleri, modelleyebildikleri ve çözümlerinde sayma stratejilerini kullanabildikleri belirlenmiştir.

Sarpkaya, Karamık ve Bulut (2011) nitel araştırma yöntemi kullandıkları özel durum çalışmasında, 6. sınıf matematik dersinde öğrencilerle birlikte yapılan aktiviteleri matematiksel düşünmenin gelişimi bağlamında incelemeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda 6. sınıf matematik öğretmeninin 120 dakikalık ders video kayıtları incelenmiştir. Sonuçlar öğrenme ve öğretme süreçlerinde öğrenciler ve öğretmenin "matematiksel düşünmelerini iletişim yoluyla düzenle" kategorisine ait 8 alt kategoriyi gerçekleştirdiğini göstermiştir. Ancak öğrenciden öğrenciye herhangi bir iletişim gözlenmemiştir.

Yıldırım (2015) nitel araştırma yöntemi kullandığı çalışmasında ortaokul 8. sınıf öğrencilerinin geometri problemlerine ait özelleştirme ve genelleme süreçlerini incelemiştir. Araştırmanın sonucunda, problemlere bağlı olarak öğrencilerin genelleme yapabilme durumlarının değiştiği tespit edilmiştir. Özelleştirme sürecinde başarılı olan öğrencilerin genelleme sürecinde zorlansalar dahi genel olarak beklenen genellemeye ulaşabildikleri gözlemlenmiştir. Genellemeyi sözel olarak ifade edebilen ya da geometrik olarak problemlere açıklama getirebilen öğrencilerden bazılarının, ulaştıkları genellemeleri cebirsel olarak ifade etmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerin ise farklı şekillerde genellemeye ulaşabildikleri saptanmıştır.

2.2.2. Ortaöğretim Düzeyinde Yapılmış Çalışmalar

Umay (1992) lise 2. sınıf öğrencileriyle yapmış olduğu çalışmasında matematik problemlerini çözmede, süreci izlemeye yönelik hazırlanmış testler ile doğrudan sonucun yoklandığı testleri karşılaştırarak, süreç ve sonuç arasında farklılıklar olup olmadığını, varsa bunların neler olduğunu belirlemeyi amaçlamıştır. Çalışmada, biri bir problemi süreç aşamasında diğeri aynı problemi sonuç aşamasında yoklayan iki test kullanılmıştır. Matematiksel düşünme anlamında öğrencilerin süreç odaklı testte sonuç odaklı teste göre daha çok zorlandığı belirlenmiştir. Matematikte yalnızca sonucun değil sürecin de ölçülmesinin problem çözme becerisine katkı sağlayabileceği ifade edilmiş, matematiksel düşünme sürecinin çoktan seçmeli testlerle de ölçülebileceği, geçerliği ve güvenilirliği yüksek bir test geliştirilerek gösterilmiştir.

Lutfiyya (1998) Nebraska'da lise 9-12. sınıf öğrencileriyle yaptığı çalışmada, lise öğrencilerinin matematiksel düşünmelerini ölçen bir ölçek geliştirmeyi amaçlamış, sınıf seviyesi ve cinsiyetin öğrencilerinin matematiksel düşünmeleri üzerine etkisini araştırmıştır. Geliştirdiği matematiksel düşünme ölçeğini 9-12. sınıflarda okuyan 239 lise öğrencisine uygulamıştır. Verilerin analizi 11. ve 12. sınıflar dışında tüm durumlarda sınıf seviyesi arttıkça matematiksel düşünmedeki farklılıkların da arttığını göstermiştir. 11. sınıf öğrencilerinin ortalama skorları, 12. sınıf öğrencilerinin ortalama skorlarından daha yüksek çıkmıştır. Kız ve erkek öğrenciler arasında genelleme, tümdengelim, tümevarım, sembol kullanımı, mantıksal düşünme ve matematiksel ispat bağlamında dikkate değer bir farklılık elde edilmemiştir.

Mubark (2005) Ürdün'de 11. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdiği çalışmada öncelikli olarak matematiksel düşünmenin 6 önemli yönünü (genelleme, tümevarım, tümdengelim, sembol kullanımı, mantıksal düşünme ve matematiksel ispat) tanımlamış ve matematiksel düşünme ile matematik başarısı arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Buna ek olarak matematiksel düşünme ve matematik başarısı ile ilişkili cinsiyet ve okul yerleşimine (şehir, varoş, kırsal) bağlı farklılıkları incelemiştir. Çalışmada matematiksel başarı testinde kız öğrenciler erkek öğrencilerden daha yüksek başarı elde etmişlerdir. Matematiksel düşünme ile ilgili olarak matematiksel ispatın en zor, mantıksal düşünmenin ise en kolay boyut olduğu belirlenmiştir. Mantıksal düşünme, matematiksel ispat ve toplam matematiksel düşünme puanlarında kız öğrencilerin erkek öğrencilere göre önemli oranda daha yüksek puan aldığı görülmüş, genelleme, tümevarım, tümdengelim ve sembol kullanımında kız ve erkek öğrenciler arasında anlamlı herhangi bir fark tespit edilmemiştir. Sembol kullanımı ve toplam matematiksel düşünme puanlarında varoş okullarında okuyan öğrenciler, şehir ve kırsaldaki öğrencilere göre daha başarılı olmuşlardır. Çoklu regresyon analizi sonucunda matematiksel düşünme basamakları ile matematik başarısı arasında anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Matematiksel ispat ve genelleme en önemli basamaklar olarak ortaya çıkarken, bunları önem sırasına göre sırasıyla sembol kullanımı, mantıksal düşünme, tümdengelim ve tümevarım takip etmiştir.

Duran (2005) çalışmasında 15 yaş grubu öğrencilere matematiksel düşünme bağlamında PİSA (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı) kapsamında uygulanan bazı değişkenlerin, matematiksel düşünme becerileri başarısını etkileme gücünü katılımcı diğer ülkelerle karşılaştırmalı bir şekilde incelemiştir. Sonuçlar, okul öncesi eğitim alan öğrencilerin okul öncesi eğitim almayan öğrencilere göre daha başarılı, erkek öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin kız öğrencilerden daha iyi ve öğrencilerin matematiksel düşünme başarısını en çok etkileyen değişkenin matematik kaygısı olduğunu göstermiştir.

Arslan ve Yıldız (2010) çalışmalarında, nitel araştırma yaklaşımı kullanarak 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili durumlarını ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Bu amaçla her biri dokuzar sorudan oluşan çalışma yaprakları geliştirmiş ve pilot çalışmadan sonra 24 lise öğrencisine uygulamışlardır. Çalışmanın sonuçları matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının düştüğünü, öğrencilerin özelleştirmede iyi performans gösterirken ispatlamada ise oldukça zorlandıklarını göstermiştir. Ayrıca öğrencilerin genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarındaki cevaplarının sözel ve cebirsel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel olarak ayrıldığı tespit edilmiştir.

Zaman (2011) Pakistan'da 9. sınıfta öğrenim gören öğrenciler ile yapmış olduğu çalışmada matematik başarısı ile matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışma sonucunda elde edilen bulgular, matematiksel düşünmenin matematiksel başarı ile kısmen ilişkili ve en ilişkili yönün ise ispat olduğunu göstermiştir. Erkek öğrenciler kızlardan daha üstün performans gösterirken, matematiksel düşünme ve matematiksel başarının tüm basamaklarında özel okul öğrencileri devlet okulundaki öğrencilerden daha yüksek puanlar elde etmişlerdir. Öğretmenlerle yapılan mülakatlar ise öğretmenlerin problem çözme, tümdengelim, tümevarım, mantıksal düşünme ve ispatın matematiksel düşünmenin en önemli basamakları olduğunu, genelleme en kolay basamak iken ispatlamanın en zor basamak olduğunu düşündüklerini açığa çıkarmıştır.

Keskin, Dağ ve Altun (2013) ise matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarında 8. ve 11. sınıf öğrencileri arasındaki farklılıkları incelemişlerdir. Çalışmada, matematiksel düşünmenin üzerinde durulan aşamalarını içeren 2 çalışma yaprağını 8. sınıfta öğrenim gören 14 öğrenciye ve 11. sınıfta öğrenim gören 11 öğrenciye uygulamışlardır. Çalışma sonucunda öğrencilerin özelleştirme basamağında problem yaşamadıkları, 11. sınıf öğrencilerinin genelleme ve varsayımda bulunma basamaklarında daha başarılı oldukları, ispat aşamasına doğru ilerledikçe 8. sınıf öğrencilerinde daha çok olmak üzere her iki gruptan öğrencilerin kendilerini hem matematiksel hem de sözel olarak ifade etmekte zorlandıkları belirlenmiştir.

Kocaman (2017) 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini, matematiksel düşünme becerileri ile matematiğe yönelik tutumları ve başarıları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışmada matematiksel düşünmenin alt boyutları genelleme, tümevarım, tümdengelim, mantıksal düşünme, sembollerin kullanımı ve matematiksel ispat şeklinde tanımlanmıştır. Veri toplama aracı olarak 12 sorudan oluşan matematiksel düşünme testi ve 25 sorudan oluşan matematik tutum ölçeği kullanılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin matematiksel düşünme testinden ve matematiğe yönelik tutum ölçeğinden oldukça yüksek puanlar aldıkları görülmüştür. Matematiksel düşünme ile matematiğe yönelik tutumları, başarı ve liseye giriş puanları arasında pozitif yönde ve anlamlı bir ilişki bulunmuştur. Öğrencilerin matematiksel düşünme puanları cinsiyet ve yaş gruplarına göre anlamlı bir farklılık göstermemiş, öğrencilerin öğrenim gördükleri okullara göre farklılaşmış ve en yüksek matematiksel düşünme puanları fen lisesinde ortaya çıkmıştır.

2.2.3. Lisans Düzeyinde Yapılmış Çalışmalar

Alkan ve Bukova-Güzel (2005) yaptıkları araştırmada, matematik öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimini ölçmeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla, matematiksel düşünme gelişimini ölçmek için oluşturulan ölçme aracı katılımcı öğretmen adaylarına uygulanmış ve onların çözüm yaklaşımları, matematiksel düşünme ölçütlerine uygun biçimde sınıflandırılarak değerlendirilmiştir. Elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme gelişmişliğinin düşük düzeyde olduğunu ve matematiksel düşünme seviyesi bakımından ÖSS başarı puanlarına göre belirlenmiş olan gruplar arasında, puanı daha yüksek olanlar lehine anlamlı bir farklılığın olduğunu göstermiştir. Öğretmen adaylarının ÖSS sınavında elde ettikleri matematik netleri ile matematiksel düşünme düzeyleri arasında doğrusal bir ilişki saptanmamıştır.

Bukova-Güzel (2008) yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine olan etkisini incelemiştir. Çalışmasında kontrol gruplu ön test-son test modeline dayalı yarı deneysel yöntem, katılımcıların matematiksel düşünme süreçlerinin karşılaştırılmasında ise açık-uçlu sorular kullanmıştır. Araştırma sonucunda, yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematiksel düşünme süreçlerine daha fazla katkı sağladığı, deney grubunda yer alan katılımcıların tahmin etme, genellemeleri ve hipotezleri doğrulamak için matematiksel modeller oluşturma ve bu modeller arasında ilişki kurmada kontrol grubunda yer alan katılımcılara göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir.

Kargar, Tarmizi ve Bayat (2010) lisans öğrencilerinde matematik kaygısı, matematiğe yönelik tutum ve matematiksel düşünme arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Farklı fakültelerden 203 öğrenci ile yapılan çalışmanın sonuçları, matematiksel düşünme ve matematik tutumu arasında anlamlı pozitif bir ilişkinin olduğunu, matematiksel düşünme ve matematik kaygısı arasında kısmen negatif, matematik kaygısı ve matematik tutumu arasında ise negatif bir ilişkinin olduğunu ortaya koymuştur. Sonuç olarak bu bulgulara göre matematik kaygısı seviyesinin matematiksel düşünme ve matematiğe yönelik tutuma bağlı olduğu ifade edilmiştir. Diğer yandan öğrencilerin branşlarının matematik kaygısı, matematiğe yönelik tutum ve matematiksel düşünme üzerinde bir etkisinin olmadığı görülmüştür.

Lane (2011) lisans öğrencilerinin matematiksel düşünmeyi nasıl algıladıklarını ve özelleştirme (L. Burton, 1984) ile ilgili öğretimin, öğrencilerin problemlere yaklaşımlarını nasıl etkilediğini araştırmıştır. Çalışmada öğrencilerin matematiksel düşünmeleri özelleştirme, tahmin, genelleme ve ikna etme süreçleri bağlamında incelenmiştir. Öğrencilerin en başarılı oldukları süreçlerin en çoktan en aza sırasıyla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ikna etme olduğu tespit edilmiştir. Öğrenciler, matematiksel düşünme ile ilgili olarak Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyinin (NCTM, 2009) tanımıyla uyuşmayan bir görüş ifade etmişlerdir. Özelleştirme ile ilgili birkaç farklı strateji öğrencilere modellenmiş, sistematik tahmin ve kontrol metodunun öğrenciler tarafından en çok kullanılan yöntem olduğu belirlenmiştir. Çalışma sürecinde sadece kısa süreli bir öğretimin ardından öğrencilerin çoğu özelleştirme seviyelerinde küçük bir gelişim göstermişlerdir.

Alkan ve Taşdan (2011) ise matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ile ilgili görüşlerini belirlemeyi ve farklı sınıf düzeylerindeki öğretmen adaylarının görüşlerini karşılaştırmayı amaçlamışlardır. Araştırma sonucunda, matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünmenin çok boyutlu yapısını genel hatlarıyla ortaya koyabildikleri, problem çözme ile matematiksel düşünme ilişkisini kurabildikleri ancak problem çözmeyi çoğunlukla sıradan işlemler yaparak bir sonuca ulaşma olarak ifade ettikleri saptanmıştır. Sınıflar arası karşılaştırma, matematiksel düşünmenin tanımına ve problem çözme ile ilişkisine yönelik görüşlerde 4. sınıftaki öğretmen adaylarının diğer sınıflara kıyasla daha olumlu, problem çözme basamaklarına ve muhakeme etme tanımına ilişkin görüşlerde ise 5. sınıftaki adayların beklenene daha yakın görüşlere sahip olduğunu göstermiştir.

Coşkun (2012) matematik öğretmen adaylarının üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinin ne düzeyde gerçekleştiğini belirleme amacıyla yapmış olduğu çalışmada, Sorgulayıcı Problem Çözme ve Öğrenme (SPÇÖ) modeline göre tasarlanmış çalışma yapraklarını kullanmıştır. Bulgular, öğretmen adaylarının en başarılı oldukları sürecin genelleme süreci olduğunu göstermiştir. Sentezleme ve soyutlama süreçlerinin yüksek düzeyde gerçekleştirilmesinde ise sorun yaşandığı gözlenmiştir. Genel anlamda SPÇÖ modelinin üst düzey matematiksel düşünmeyi desteklediği sonucu elde edilmiştir.

Öztürk (2013) tarafından yapılan çalışmada, matematiksel düşünme odaklı öğretimin, öğretmen adaylarının matematik öğretimini planlama becerilerine etkisi ve bununla ilgili görüşlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma sonucunda matematiksel düşünme odaklı öğretimin, öğretmen adaylarının öğrencilerin matematiksel düşünmelerini dikkate alan planlar yapma becerilerine olumlu etkisinin olduğu, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme odaklı dersler planlamada önemli olan özellikleri vurgulayan görüşler belirttikleri ve öğretim uygulaması hakkındaki görüşlerinin olumlu olduğu belirlenmiştir.

Taşdan, Çelik ve Erduran (2013) matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi hakkındaki görüşlerini incelemişlerdir. Araştırma, bir eğitim fakültesinin son sınıfında öğrenim gören 4 matematik öğretmen adayının katılımıyla gerçekleştirilmiş ve veriler 5 sorudan oluşan yarı yapılandırılmış görüşme formu aracılığıyla toplanmıştır. Araştırma sonucunda elde edilen bulgular, öğretmen adaylarının matematiksel düşünmenin geliştirilmesi için günlük hayatla ilişkilendirme, problem çözme ve etkili soru sorma gibi konulara özen gösterilmesinin gerekli olduğu görüşünde olduklarını göstermiştir.

Aydin ve Ubuz (2014) yaptıkları çalışmada lisans öğrencilerinde matematiksel düşünme durumunun etkenlerini sınıf içi seviyesi ve sınıf seviyelerine bağlı olarak incelemişlerdir. Çalışma sonuçları öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin öncelikle cinsiyet, sınıf içi seviye ve sınıf seviyelerine bağlı olarak değiştiğini göstermiştir. Kız öğrenciler sözel/mantıksal görevler içeren problemlerde erkek öğrencilere göre daha üstün başarı göstermiş, erkek öğrenciler ise görsel/uzamsal beceri gerektiren problemlerde daha başarılı olmuşlardır. Ebeveynlerinin eğitim durumu ile öğrencilerin modelleme, değerlendirme, manipüle etme ve ispatlama içeren problemlerdeki başarıları arasında pozitif bir ilişki tespit edilmiştir. Ders başarıları yüksek olan öğrencilerin rutin işlemsel süreçleri gerçekleştirmede ve ispat veya doğrulama içeren problemlerde daha başarılı oldukları görülmüştür. Sınıf seviyeleri arttıkça öğrencilerin zihinsel görselleştirme ve işlemsel süreçleri gerçekleştirmede daha başarılı oldukları ifade edilmiştir.

Aljaberi (2014) ilkokul öğretmen adaylarının matematiksel düşünmelerini, matematiğe yönelik tutumlarını ve matematik tutumları ile matematiksel düşünmeleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Seksen kız öğrenci ile gerçekleştirilen çalışmada Matematiğe Yönelik Tutum Envanteri ve Matematiksel Düşünme Testi kullanılmıştır. Çalışma sonucunda, öğrencilerin matematik tutumları ve matematiksel düşünmeleri arasında pozitif bir ilişki olduğu, öğrencilerin matematiksel düşünme testinde orta düzeyde başarılı oldukları, öğrencilerin performansının en iyi modelleme ve tümevarım yönlerinde iken ortalamanın matematiksel ispat ve genellemede düştüğü, öğrencilerin matematiğe yönelik pozitif tutumlarının olduğu belirlenmiştir.

Ersoy ve Güner (2015) problem çözme becerilerinin gelişimi ve problem çözme stratejilerinin öğretimi için verilmiş olan problem çözme dersinin, ilkokul matematik öğretmen adaylarının problem çözme basamaklarını kullanma kabiliyetleri ile onların matematiksel düşünme seviyelerine olan etkisini araştırmışlardır. 13 hafta (26 saat) süreyle yürütülmüş olan çalışma sürecinde öğrencilere problem çözme becerilerini geliştirmek için Polya'nın (1945) dört basamaktan oluşan problem çözme basamakları öğretilmiştir. Elde edilen bulgular problem çözme dersinin, matematik öğretmen adaylarının problem çözme, uygun stratejiyi seçme ve uygulama becerilerinin gelişimi üzerine pozitif etkisinin olduğunu göstermiştir. Ayrıca problem çözme dersinin matematiksel düşünme üzerine olumlu etkisi olduğu sonucuna varılmıştır.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın modeli, çalışma grubu, verilerin toplanması ve verilerin analizi hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Bu çalışmada, nitel araştırma yaklaşımı benimsenmiştir. Nitel araştırmalar, araştırma yapılan kişilerin edinmiş oldukları kazanımların sistemli bir şekilde incelenebilmesinde tercih edilen bir yöntemdir (Ekiz, 2003). "Nitel araştırmalarda araştırmacılar bir olay veya olgunun ne sıklıkla meydana geldiğini araştırmak yerine belli bir etkinliğin niteliği üzerine odaklanırlar" (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2008;s. 234). Nitel araştırma yöntemlerinde gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama araçları kullanılır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Ele alınan konunun derinlemesine ve ayrıntılı olarak çalışılması olanağı sağladığı için nitel araştırmalar, bireylerin düşünme süreçlerini incelemede nicel araştırmalara göre daha fazla fırsat sunmaktadır (Patton, 2002; akt., Sarı, 2011).

Araştırmanın deseni olarak nitel araştırma desenlerinden özel durum çalışması kullanılmıştır. Bir olay, aktivite veya sürecin keşfedildiği özel durum çalışmaları (Creswell, 2014), daha çok nitel araştırma yaklaşımlarına yakın bir araştırma yöntemi olarak bilinir. Bu yöntemin en önemli avantajı araştırmacıya çok özel bir konu ya da durum odaklı çalışma imkânı sağlamasıdır (Çepni, 2009).

3.2. Çalışma Grubu

Çalışmada, 2015-2016 eğitim-öğretim yılında Uşak ili Merkez ilçesinde bir fen lisesinin sınıf ve seviye olarak en başarılı 12. sınıfında öğrenim gören 19 öğrenci arasından seçilen 9 öğrenci çalışma grubu olarak belirlenmiştir. Çalışma grubunun belirlenmesinde amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi kullanılmıştır. Maksimum çeşitlilik örnekleme yöntemi kendi içinde benzer ancak farklı özelliklere sahip örneklemi seçerken kullanılan bir yöntemdir (Büyüköztürk vd., 2008). Öğrencilerin seçiminde sorulara verdikleri cevaplar, kendini ifade etme becerileri, ölçekte elde ettikleri matematiksel başarıları ve matematik öğretmenlerinin görüşleri belirleyici etken olmuştur.

Uygulamada yöneltilen açık uçlu sorulara vermiş oldukları yanıtların değerlendirilmesi neticesi öğrenciler 2 ila 7 arasında puanlar elde etmişlerdir. Bu öğrenciler arasından toplam puanları 7 olan öğrenciler iyi, toplam puanları 5 olan öğrenciler orta ve toplam puanları 2-3 arasında olan öğrenciler düşük düzey şeklinde kategorilere ayrılmıştır. Kategoriler oluşturulduktan sonra matematik öğretmeniyle yapılan görüşme ile bu kategorilere uygun düştüğü hem fikir olunan öğrenciler belirlenmiş, herbir kategoriden üçer öğrenci seçilmiştir. Araştırmada matematik dersinde farklı başarı düzeylerinden öğrencilerin ölçüt olarak alınma sebebi öğrenci çeşitliliğini artırarak matematiksel düşünme becerileri ile ilgili daha kapsamlı bilgi elde etmektir.

Bu çalışmada öğrenciler $Ö_1$, $Ö_2$, $Ö_3$, $Ö_4$, $Ö_5$, $Ö_6$, $Ö_7$, $Ö_8$ ve $Ö_9$ parametreleriyle kodlanmıştır. Bu öğrencilerden $Ö_1$, $Ö_2$ ve $Ö_3$ matematik başarısı iyi, $Ö_4$, $Ö_5$ ve $Ö_6$ matematik başarısı orta, $Ö_7$, $Ö_8$ ve $Ö_9$ ise matematik başarısı düşük düzeyde olan öğrencileri belirtmektedir. Çalışma grubunu oluşturan öğrencilerden $Ö_1$ ve $Ö_3$ erkek, diğer öğrenciler ise kız öğrencilerdir.

3.3. Veri Toplama Araçları

İlgili literatür araştırılmış ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemek amacıyla 9 problemden oluşan bir ölçek hazırlanmıştır. Soruların hazırlanma aşamasından sonra konu alanındaki iki uzman ve iki matematik öğretmeninden sorulan soruların sınıf seviyesine uygunluğunun, açık ve anlaşılır olduklarının ve incelenen konuyu içerdiklerinin teyidi alınmıştır. Kullanılan problemler, Arslan ve Yıldız'ın (2010) yapmış oldukları çalışma paralelinde, literatürdeki mevcut çalışmalarda (Szetela, 1986; Santos-Trigo, 1998; Vogel, 2005; Liu ve Niess, 2006; Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid ve Yevdokimov, 2007; Scusa, 2008; Mason, Burton ve Stacey, 2010; Keskin, Dağ ve Altun 2013) kullanılmış sorulardan uyarlanmış, 2 adet rutin ve 7 adet rutin olmayan problemlerdir. Problemlerin diğer bir özelliği de öğrencileri her bir problemde yapacakları özelleştirme ile problemin bileşenleri arasındaki mevcut ilişkileri keşfedip bu ilişkiler aracılığıyla genel bir formülü tahmin edebilecekleri, tahmin ettikleri formülü ifade edebilecekleri ve en sonunda formülle ilgili bu tahminin doğruluğunun ispatını yaparak problem çözümünü tamamlayabilecekleri sorular olmalarıdır.

Uygulama sonrası seçilen her bir öğrenci ile problemlere verdikleri yanıtlar odaklı bireysel mülakatlar yapılmıştır. Mülakatlar sırasında öğrencilerden:

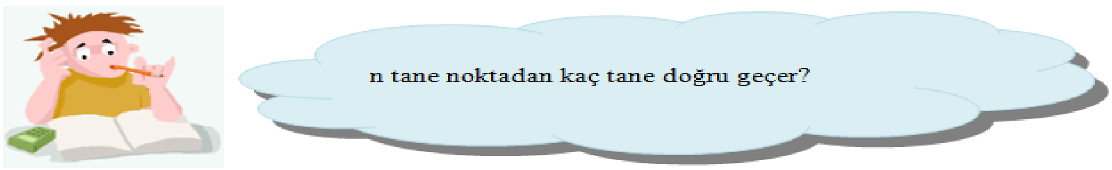
- Her bir problem için çözümü nasıl elde ettiklerini açıklamaları,
- İhtiyaç duyulan ek soruları cevaplamaları (“Bu problemi nasıl çözdün?”, “Nasıl düşündün?”, “Bu soruda neler yaptın?” gibi soruların yanında problemin içeriği ile ilgili sorular)

istenmiştir.

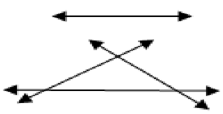
Problemlerin uzman görüşü de alınarak yeniden düzenlenmiş son halleri aşağıda verilmiştir:

1. Problem

NOKTA ve DOĞRU



Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



İki noktadan tek bir doğru geçer.

Üç noktadan üç doğru geçer.

Bu durumda doğrusal olmayan n tane noktadan geçen doğru sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 1. Matematiksel düşünme ölçeği 1. problem

1. problem öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış geometri problemlerinden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme

sonucunda nokta sayıları ve doğru sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

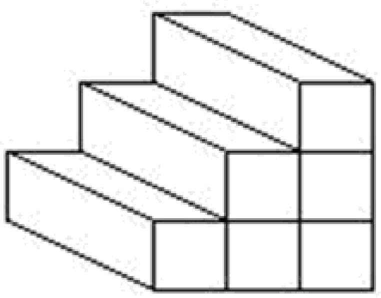
1. problemde doğrusal olmayan nokta sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ifadesi olan ve artarak genişleyen bir örüntü, geometrik olarak modellenmiştir. Müfredat açısından değerlendirildiğinde bu problem, öğrencilerin mevcut bilgi birikimiyle çözebilecekleri rutin bir problemdir.

2. Problem

MERDİVEN PROBLEMİ

Yapacağınız etkinlikler sonunda aşağıdaki soruya cevap bulacaksınız.

Ali şekildeki gibi 3 basamaklı bir merdiven yapmak için 6 blok kullanmaktadır.



Buna göre n basamaklı bir merdiven yapmak isteyen birisinin kullanacağı blok sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 2. Matematiksel düşünme ölçeği 2. problem

2. problem öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış şekil problemlerinden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda basamak sayıları

ve kullanılan blok sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

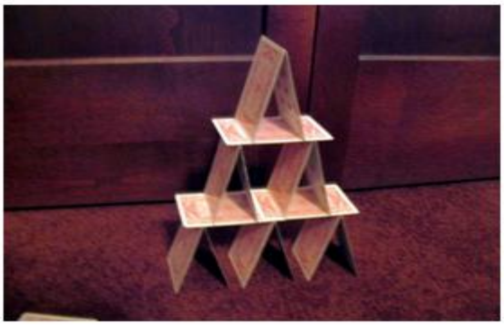
2. problemde basamak sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ifadesi olan ve artarak genişleyen bir örüntü, şekilsel olarak modellenmiştir.

3. Problem

KAĞIT EV

n katlı bir kağıt ev için gerekli olan kart sayısı kaçtır?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



Bu 3 katlı bir kağıt evdir.

En üst kat birbirine yaslanmış iki kart ve altlarındaki bir karttan meydana getirilmiştir. Bir sonraki kat ise 4 karttan meydana gelmiş (birbirine yaslanmış 2'şer kart kümesi) ve tabanlarında yine birer kart vardır. Bu şekilde yapılan n katlı bir kağıt ev için gerekli olan kart sayısı kaçtır? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 3. Matematiksel düşünme ölçeği 3. problem

3. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış rutin olmayan, şekil problemlerinden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni

keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda kat sayıları ve kullanılan kart sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

3. problemde kâğıt evin kat sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\frac{n \cdot (3 \cdot n+1)}{2}$ ifadesi olan ve artarak genişleyen bir örüntü, şekilsel olarak modellenmiştir.

4. Problem

TOKALAŞMA

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Yapılan bir toplantıda bulunan herkesin toplantı öncesi orada bulunan herkesle tokalaştıklarını hayal edin. 2 kişi kendi aralarında tokalaştığında 1 tokalaşma meydana gelir. 3 kişi kendi arasında tokalaştığında ise 3 tokalaşma meydana gelecektir. Bu şekilde düşündüğümüzde toplantıda n kişi olduğunu ve her birinin birbirleriyle tokalaştığını varsayarsak meydana gelecek tokalaşma sayısını bir formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 4. Matematiksel düşünme ölçeği 4. problem

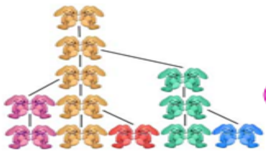
4. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış ve artarak genişleyen bir örüntü içeren sözel, rutin problemlerden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda kişi sayısı ile tokalaşma sayıları arasında var olan

ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

4. problemde kişi sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ ifadesi olan bir örüntü, sözel olarak sunulmuştur.

5. Problem

TAVŞANLAR



Biri erkek, diğeri dişi olan bir çift yavru tavşan bir ayda erginleşiyor. Her çift tavşanın bir çift yavru tavşan doğurabilmesi için, erginleştikten sonra bir ay geçmesi gerekiyor. Hiçbir tavşanın ölmediğini ve her dişi tavşanın ayda bir erkek ve bir dişi tavşan doğurduğunu düşünürsek, bir yılın sonunda kaç çift tavşan olur?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Doğumlarından sonraki ilk ay tavşanlar yavrudur ve üremezler. İkinci aydan itibaren ise artık yetişkin hale gelirler ve her tavşan çifti ayda bir çift yavru (erkek ve dişi) dünyaya getirmeye başlarlar. İlk ay yeni doğmuş bir çift tavşanımız olsun.

1. İlk ayın sonunda, sadece bir çift vardır.

2. İkinci ayda (45. günde, 50. günde..) bu tavşanlar henüz yavrulamadıkları için hala bir çift tavşanımız var.

3. Üçüncü ay bunlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşanımız olacak.

4. Yeni doğan çift dördüncü ay doğurmayacak, oysa ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşanımız olacak (Tavşanlardan hiçbirinin ölmediği varsayılacaktır.).

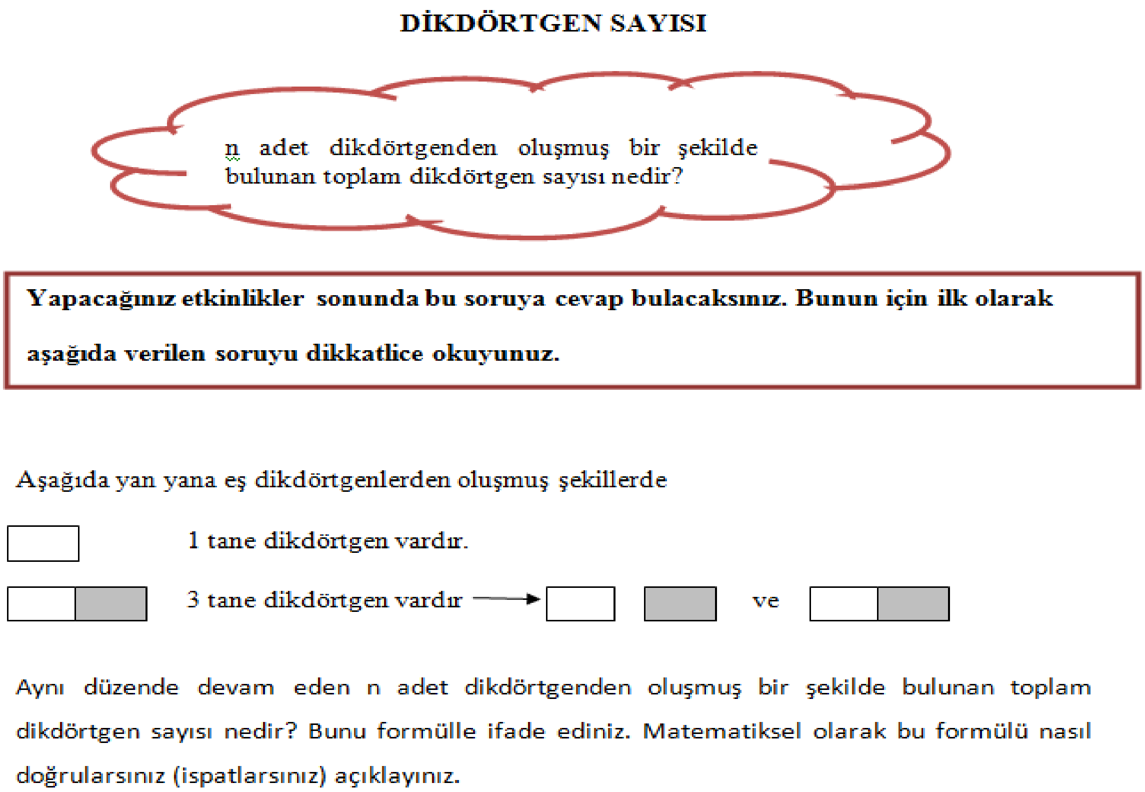
a_n, n. ayda mevcut bulunan tavşan çifti sayısını belirtiyor olsun. Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 5. Matematiksel düşünme ölçeği 5. problem

5. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında ortaya çıkarmaya yönelik hazırlanmış, diğer türden örüntü içeren ve rutin olmayan, sözel problemlerden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda her aydaki tavşan sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

5. problemde n. ayda mevcut tavşan çifti sayısı a_n ile sembolize edilmek üzere formülü $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ifadesi olan bir örüntü mevcuttur.

6. Problem

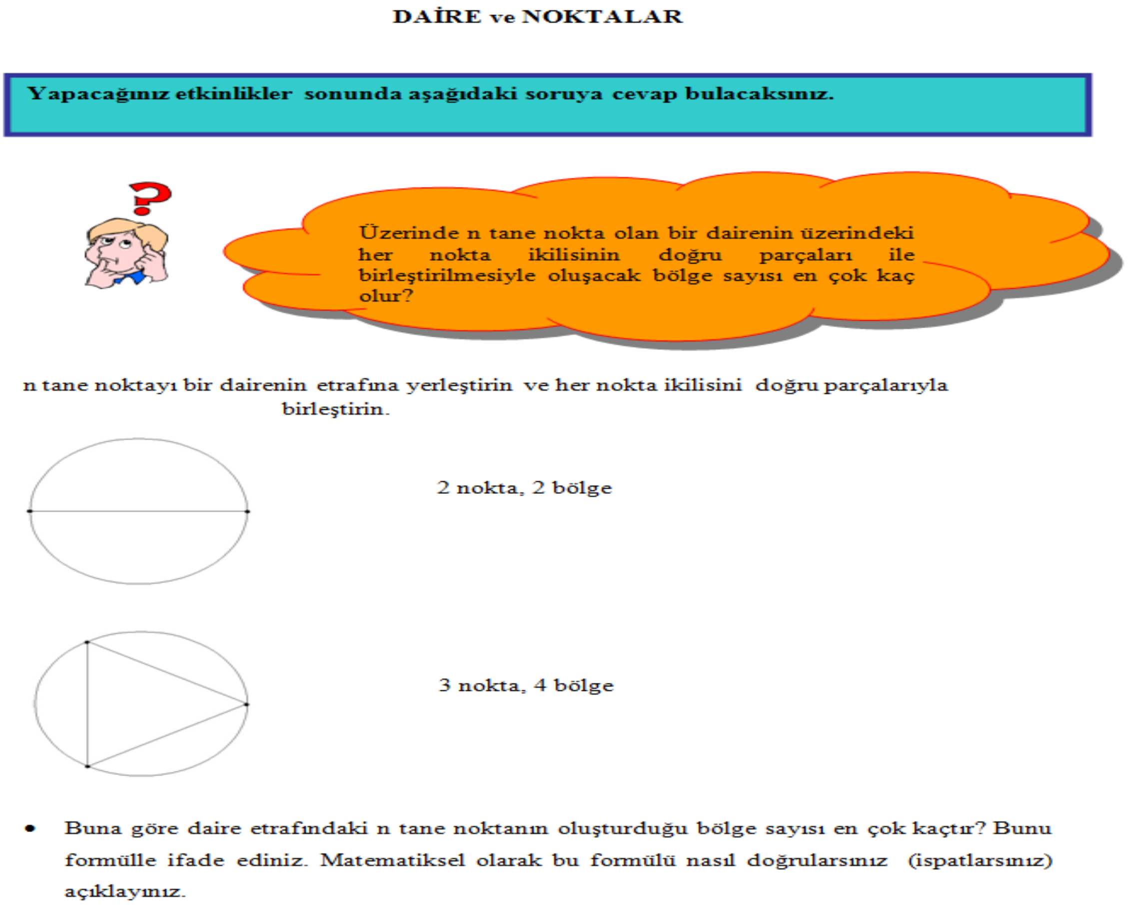


Şekil 3. 6. Matematiksel düşünme ölçeği 6. problem

6. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında ortaya çıkarmaya yönelik hazırlanmış ve artarak genişleyen bir örüntü içeren, rutin olmayan, geometri problemlerinden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda yan yana dikdörtgen sayıları ve toplam dikdörtgen sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleriformülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

6. problemde yan yana dikdörtgen sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ifadesi olan bir örüntü, geometrik olarak modellenmiştir.

7. Problem



Şekil 3. 7. Matematiksel düşünme ölçeği 7. problem

7. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış, rutin olmayan geometri problemlerinin bir diğeridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda nokta sayıları ve oluşan bölge sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

7. problemde daire etrafına yerleştirilen nokta sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü $n = 6$ değerine kadar öncelikle 2^{n-1} olarak görülebilen fakat n=6 ve sonrası için bu formülün örüntünün genel formülü olmadığı, asıl formülün $\binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$ olduğu anlaşılan bir örüntü yer almaktadır. Müfredat açısından değerlendirildiğinde bu soruda

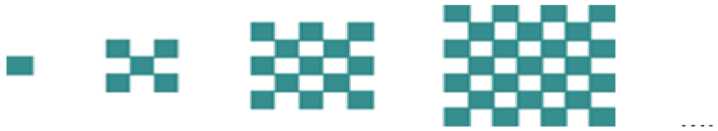
öğrencilerin formülü bulma sürecinde zorlanmaları oldukça normal karşılanmaktadır. Ancak matematiksel düşünme, cevabın doğruluğundan çok öğrencinin o cevaba gelene kadar sergilemiş olduğu süreçler üzerinden değerlendirildiği için soru mevcut haliyle kullanılmıştır.

8. Problem

DESEN

Aşağıdaki örüntüde görüldüğü gibi küçük karelerden kare şeklinde daha büyük bir yapı oluşturulmaktadır. Kullanılan turkuaz kare sayısı nedir?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



Yukarıdaki modellere göre n. adımda oluşan yapıda kullanılan turkuaz kare sayısı değeri nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 8. Matematiksel düşünme ölçeği 8. problem

8. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış, rutin olmayan şekil problemlerinden biridir. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda adım sayıları ve turkuaz kare sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

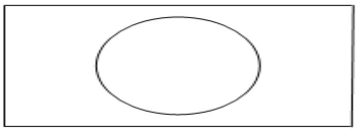
8. problemde adım sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\mathrm{n}^2 + (\mathrm{n} - 1)^2$ ifadesi olan ve artarak genişleyen bir örüntü, geometrik olarak modellenmiştir.

9. Problem

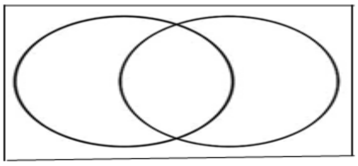
DAİRE ve BÖLGE

n tane dairenin kesişimiyle oluşacak olan bölge sayısının en büyük değeri nedir?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



Bir daire bir düzlemi 2 bölgeye ayırır.



Kesişen iki daire ise düzlemi 4 bölgeye ayırır.

Buna göre n tane dairenin kesişimi ile oluşacak olan bölge sayısının en büyük değeri nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 3. 9. Matematiksel düşünme ölçeği 9. problem

9. problem, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemeye yönelik hazırlanmış, rutin olmayan ve artarak genişleyen bir örüntü içeren geometri problemlerinin sonuncusudur. Bu problemde öğrencilerin a) soruda anlatılanı ve istenileni keşfetmek için soruyla ilgili özel örnekleri incelemeleri (özelleştirme), b) özelleştirme sonucunda kesişen daire sayıları ve oluşan bölge sayıları arasında var olan ilişkiyi fark ederek bir formül tahmin etmeleri (tahmin), c) bu formülü ifade etmeleri (genelleme), d) ifade ettikleri formülün doğruluğunu ispat etmeleri (ispat) ve böylece problemi çözme sürecini tamamlamaları beklenmektedir.

9. problemde birbiriyle kesişen daire sayısı n ile sembolize edilmek üzere formülü ikinci dereceden $\mathrm{n}^2 - \mathrm{n} + 2$ ifadesi olan bir örüntü geometrik olarak modellenmiştir.

3.4. Verilerin Toplanması

Bu çalışmada veriler, 9 problemden oluşan matematiksel düşünme ölçeği ve uygulama sonrasında öğrenciler ile yanıtları hakkında yapılan mülakatlar yoluyla elde edilen bilgilerden oluşmaktadır.

Araştırmada uygulanan matematiksel düşünme ölçeği yeteri kadar çoğaltılarak bizzat araştırmacı tarafından, Uşak il merkezinde bulunan bir fen lisesinin 12. sınıfında öğrenim gören 19 öğrencisine 90 dakika süre verilerek uygulanmıştır.

Uygulama sonrasında seçilen 9 öğrenci ile sorulara verdikleri yanıtlar odaklı, ayrı ayrı mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere mülakatlar öncesinde kayıtların gizli tutulacağı belirtilerek sorulara daha iyi odaklanmaları ve kendilerini rahat hissetmeleri sağlanmaya çalışılmıştır. Tüm görüşmeler okulun boş bir sınıfında, öğrencilerle bireysel olarak gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerin tamamında öğrencilerin izniyle ses kaydı yapılmıştır. Mülakatlar sonrasında elde edilen kayıtlar çözümlenmiş ve öğrencilerin ifadeleri birebir yazılmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Çalışmada elde edilen verilerin analizine başlamadan önce öğrencilerin soru çözümleri ve yapılan mülakatların ses kayıtları incelenmiş, düzgün bir şekilde not edilmiş ve görüşme kayıtlarının çözümlenmesi gerçekleştirilmiştir.

Çalışmanın konusu gereği veriler çeşitli alt konular açısından inceleneceğinden bu konulara yönelik değerlendirme kriterleri, ilgili literatürün araştırılmasının ardından sırasıyla şu şekilde oluşturulmuştur:

3.5.1. Özelleştirme Basamağı Değerlendirme Kriteri

İlgili literatür incelendiğinde özelleştirme basamağı bağlamında çalışma ile uyumlu bir değerlendirme kriterine ve sınıflandırmaya rastlanmamıştır. Ancak çalışmada, öğrencilerin problemlere vermiş olduğu yanıtlar ve kendileriyle yapılmış olan mülakatlar sonucu elde edilen veriler doğrultusunda çeşitli özelleştirme türleri tespit edilmiş ve aşağıdaki tablo ile verilmiştir:

Tablo 3. 1. Özelleştirme türleri

<table>
<tr><td colspan="3">Özelleştirme</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Yeterli Özelleştirme</td><td colspan="2">Yetersiz Özelleştirme</td></tr>
<tr><td>Kısmi (Eksik) Özelleştirme</td><td>Hatalı Özelleştirme</td></tr>
</table>

Yeterli Özelleştirme

Öğrencinin soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı, ifade ettiği özelleştirme çeşididir. Bu seviyede öğrenci soruyu kendi çizimleri veya ifadeleriyle inceler, örnekler verir ve soruda istenilene yönelik bilinçli hamlelerde bulunur.

Yetersiz Özelleştirme

Soruda ifade edilen ve/veya istenilen durumların öğrenci tarafından tam olarak anlaşılmadığı ve/veya çözüme aktarılmadığı özelleştirme türüdür. Öğrencilerin soruyla ilgili çizimlerinde, ifadelerinde, verdikleri örneklerde eksiklikler veya hatalar gözlenir. Kısmi (Eksik) Özelleştirme ve Hatalı Özelleştirme olarak iki alt gruba ayrılır.

a) Kısmi (Eksik) Özelleştirme

Öğrencinin soruyla ilgili tam bir özelleştirme gerçekleştirmediği özelleştirme türüdür. Öğrenci soruda anlatılanın tümünü değil, bir kısmını göz önünde bulundurur. Soruda verilen yönergelerin çözüme tam olarak aktarılmadığı, unutulduğu ya da gözden kaçtığı, küçük ama sonucu etkileyen durumlar söz konusudur. Bununla birlikte, soruda istenilen büyük oranda anlaşılmış olmasına rağmen cevaba yönelik hamlelerde eksik bırakılan kısımlar mevcuttur.

b) Hatalı Özelleştirme

Soruda istenilenin tam olarak anlaşılmamış olduğu, soruyla ilgili belirtilen ifadelerin üzerinde çok durulmadığı, bir nevi sorunun detaylarına inilmeden akla ilk gelen haliyle özelleştirildiği durumdur. Bu tür özelleştirme sürecinde, soruda ifade edilenlerin tam olarak çözüme aktarılmayışı, aktarılan kısımlarda ise soruda istenilene göre büyük sapmalar söz konusudur.

3.5.2. Tahmin Basamağı Değerlendirme Kriteri

Cañadas vd. (2007) yapmış oldukları araştırma sonucunda 5 tahmin türünü belirlemişler ve bu tahmin türleri ile ilişkili aşamaları aşağıda belirtildiği şekilde tanımlamışlardır:

a) Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım

Bu tahmin türünde düzenli bir örüntünün mevcut olduğu sonlu sayıdaki ayrık durumun gözlemlenmesi ve kritik şekilde incelenmesi söz konusudur. Sayılar içeren problemlerde sıklıkla kullanılır.

n tane dairenin birbiriyle kesişimi sonucu oluşacak bölge sayısının en büyük değeri istenildiğinde $n = 1, 2, 3$ değerleri için oluşan bölge sayılarını elde eden bir öğrencinin formülü 2^n olarak ifade etmesi bu türden tahmine örnek olarak verilebilir.

Bu tür tahminlerde ilerlenirken:

- Durumlar gözlemlenir,
- Durumlar düzenlenir,
- Örüntüler aranır ve onlarla ilgili tahminlerde bulunulur,
- Bir tahmin formülüze edilir,
- Tahmin onaylanır,
- Tahmin genellenir,
- Tahmin doğrulanır.

b) Dinamik Durumlardan Empirik Tümevarım

Birbiriyle ilişkili olayları tarif eden genel bir kuraldan meydana gelen tahmin çeşididir. Bu tür tahminler, tahmin edilen genel kuralın nitelediği, görünürde sonsuz sayıda olan, birbiriyle ilişkili olayların bir alt kümesine dayanır. Örneğin herhangi bir ABC üçgeninin içerisinde, kenarortaylarının kesişim noktası X olsun. Bu noktanın kenarortayların kesişim noktası olduğunu bilmeyen bir öğrencinin, ABC üçgenini manipüle etmesi ve X noktasını gözlemlemesi sonucu, X noktasının hiçbir zaman üçgenin dışarısına çıkmayacağını tahmin etmesi, Dinamik Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmine örnektir.

Bu tahmin türünde görülebilecek olan aşamalar şunlardır:

- Durumların sürekliliği yoluyla bir durumu dinamik olarak manipüle etme,

- Durumdaki değişmeyen bir özelliği gözlemleme,
- Özelliğin diğer durumlarda da mevcut olduğu bir tahmini formülüze etme,
- Tahmini onaylama,
- Tahmini genelleme,
- Tahmini doğrulama.

c) Anoloji

Doğru olduğu bilinen bir duruma benzetim ile yapılan tahmindir. Bu tür tahminlerde genel bir kuralın, bilinen diğer bir genel kural temelinde tahmin edilişi söz konusudur. Örneğin bir üçgenin köşelerinden çizilen ve üçgenin içinde belirlenen bir noktadan geçen üç doğrunun herhangi ikisinin kenarları orta noktada kestiği bilindiğinde üçüncü doğrunun da karşısındaki kenarı orta noktasında keseceği tahmin edilirse Anoloji türünden tahmin yapılmış olur.

Bu tahmin türünde görülebilecek olan aşamalar şunlardır:

- İki durumu gözlemleme,
- Durumlar arasında benzerlikleri araştırma,
- Benzerliğe dayalı bir tahmini formülüze etme,
- Tahmini onaylama,
- Tahmini genelleme,
- Tahmini doğrulama.

d) Abdüksiyon

Diğer türlü açıklanamayacak olan bir olayda, genel bir kurala dayalı olarak yapılan tahmindir. Örneğin 3, 7, 13, 21… şeklinde devam eden bir dizinin kuralı istenildiğinde daha önceden aritmetik dizilerle uğraşmış olan bir öğrencinin her ne kadar yanlış da olsa dizinin kuralını $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ şeklinde tahmin etmesi, bu türden tahmine bir örnektir. Bu tür tahminlerde kural tek bir durum, örnek veya olaya dayalı tahmin edilir.

Bu tahmin türünde görülebilecek olan aşamalar şunlardır:

- Bir durumu gözlemleme,
- Durumda ilgi çekici veya önemli bir özelliği gözlemleme,
- Özelliğin diğer durumlarda da geçerli olduğuna yönelik bir tahmini formülüze etme,

- Tahmini onaylama,
- Tahmini genelleme,
- Tahmini doğrulama.

e) Algıya Dayalı Tahmin

Bir problemin algıya yönelik dönüşümü veya görsel sunumuna dayalı olarak yapılan tahmindir. Bu türden tahminlerin temelinde, problem içeriğinin somut olarak veya zihinsel imaj şeklinde dikkatlice sunumu yer almaktadır.

Bu tahmin türünde görülebilecek olan aşamalar şunlardır:

- Problemi algısal bir gösterime dönüştürme,
- İçerilen matematiksel bileşenlerin kişisel zihni temsillerini oluşturma,
- Gösterimin spesifik özelliklerini algısal olarak gözlemleme,
- Gösterimin spesifik özelliklerine dayanan bir tahmini formülleştirme,
- Dönüşümü doğrulama veya resmi hale getirme,
- Tahmini genelleme,
- Tahmini doğrulama.

Örneğin öğrenci sözel olarak verilen bir geometri problemini çizimler yoluyla görselleştirerek kuralla ilgili tahminde bulunduğunda, Algıya Dayalı Tahmin yapması beklenir (Canadas vd., 2007).

3.5.3. İspat Basamağı Değerlendirme Kriteri

Öğrenciler, ilk ve ortaöğretim düzeyinde yaygın bir şekilde deneysel veriler sunarak genellemeye ulaşma eğilimindedirler. Öğrencilerin bu uygulamalarının ispat olarak değerlendirilip değerlendirilmeyeceği tartışmalı bir konu olsa da (Aylar, 2014) literatürde öğrencilerin onları bir genellemeye götüren soru çözümlerindeki açıklamalarını ispat olarak nitelendiren çalışmalar da mevcuttur. Bunlardan en bilinenleri ve itibar görenleri Balacheff (1988, 1991), Harel ve Sowder (1998) ile Miyazaki'nin (2000) çalışmalarıdır. Gerek Harel ve Sowder'in (1998) yapmış olduğu çalışmaya son yıllarda literatürde itirazların geliyor olması (Aylar, 2014) gerekse Miyazaki'nin de çalışmasında Balacheff'in (1988) çalışmasını referans almış olması ve Balacheff'in (1988).ispat türlerininin çalışma açısından daha uygun görülmesi nedeniyle bu çalışmada Balacheff'in (1988) ispat ile ilgili kriterlerine göre değerlendirme yapılmıştır.

Balacheff'in (1988) ispatla ilgili taksonomisi öğrenciler tarafından yapılan çoğu ispat yöntemlerini kapsayan ve ispatı hiyerarşik basamakları ile niteleyen (Knapp ve Zandieh, 2004), en popüler ispat şemalarından biridir (Maher ve Martino, 1996; akt., Varghese, 2011). Bu taksonomi ile cevaplarının doğruluğunu ispatlamaları istenilen öğrencilerden beklenebilecek çok çeşitli sayıda ispatın detaylı olarak anlaşılması mümkündür (Varghese, 2011). Ancak Balacheff'in "ispat" ile kastettiği şey matematiksel bir ispat olmayıp, bir tahminin doğruluğunu ortaya koymayı amaçlayan ifadedir (Balacheff, 1991).

Balacheff (1988) ispatı gerçekçi (pragmatic) ve kavramsal (conceptual) olmak üzere başlıca iki kategoriye ayırmıştır. Örneklerin kullanımına dayanan gerçekçi ispatlar (Taştepe, 2012; Ören, 2007) işlem ve gösterimler içerirken, kavramsal ispatlar ise işlem içermez, sorudaki özelliklerin formülasyonuna ve onlar arasındaki ilişkilere bağlı olarak gerçekleştirilir (Balacheff, 1988).

Balacheff (1988) gerçekçi ve kavramsal ispatların çeşitli türleri arasından ispatın bilişsel gelişiminde öncelikli yeri ve hiyerarşik bir yapısı olan dört ana ispat türünü belirlemiştir: Saf Deneycilik (Naive Empricism), Kritik Deney (The Crucial Experiment), Genel Örnek (The Generic Example) ve Düşünce Deneyi (The Thought Experiment). Burada ilk iki ispat türünde esasında tam olarak bir ispat yapılmıyor olsa da Balacheff (1988) soruyu çözenler tarafından ispat olarak nitelendirildikleri için bu iki türü ispat olarak isimlendirdiğini belirtmektedir. Bu ispat türleri aşağıda açıklanmıştır:

Saf deneycilik (Naive empiricism)

Saf deneycilik, Balacheff'in taksonomisinin ilk basamağıdır ve öğrencinin problemi çözerken az sayıda birkaç durumu gözlemlemesi sonucu bir tahmine ulaşması anlamına gelmektedir (Balacheff, 1991). Öğrenci burada sadece az sayıda birkaç örneğe bakarak bir iddianın doğru olduğu sonucuna varır (Varghese, 2011) ve birkaç örnek üzerinden genellemeye ulaşır (Aylar, 2014).

Kritik deney (The Crucial Experiment)

"Eğer burada doğru ise her zaman doğrudur" düşüncesiyle herhangi bir iddianın rastgele olmayan bir örnek yoluyla doğrulanmasıdır (Balacheff, 1988). Öğrenci özel bir örneği inceler ve bu (sıradışı) örnek için doğruysa elde edilen önermenin de doğru olduğu yargısına varır (Cabassut, Conner, İşçimen, Furinghetti, Jahnke ve Morselli, 2012). Diğer bir ifadeyle, bu türden ispat sürecinde öğrencinin bilinçli olarak seçtiği sıradışı bir örnek üzerinden genellemeye varması söz konusudur (Simon ve Blume, 1996; Aylar, 2014). Burada öğrencinin genellikle dikkatlice seçilmiş, sıra dışı bir örnek kullanıyor olması Kritik Deney türünden ispatı Saf Deneycilik türünden ispattan ayıran en önemli faktördür. Eğer tahmin bu seçilen örnekte doğrulanıyor ise o zaman diğer tüm durumlarda da doğru olduğu düşünülür (Varghese, 2011). Diğer bir fark ise burada öğrencinin genelleme problemini açıkça belirtmesi ve bunun çözümünü de tümüyle özel bir durumun sonucuna bağlamasıdır (Balacheff, 1988).

Genel Örnek (The Generic Example)

Bir iddianın doğruluğu ile ilgili nedenlerin, bir sınıfın karakteristik özelliklerini ve yapısını temsil eden bir örneğin incelenişi yoluyla elde edildiği ispat türüdür (Balacheff, 1988). Balacheff'in taksonomisinin üçüncü basamağını oluşturan bu ispat türü özelliklere dayanır. Burada özel bir örneğe odaklanılsa da kullanılan örnek, özel bir durum değil bir sınıfın örneklendirilişi olarak ele alınır. Genel Örnek türünden ispat sürecinde öğrenci bir sınıfın temsilcisi olarak bir örneği ele alır, ispata varmak için bu örnek üzerinde işlemler/dönüşümler gerçekleştirir ve sonrasında bu işlem veya dönüşümleri tüm sınıfa uygular (Varghese, 2011).

Düşünce Deneyi (The Thought Experiment)

Bu türden ispat sürecinde işlemler içselleştirilir ve özel olarak seçilmiş herhangi bir örnekten soyutlanır (Balacheff, 1988). Öğrenciler, kendilerini işlemlerden uzak tutabilir ve sadece özellikler ile ilişkilere dayalı olarak mantık temelinde sonuçlara varabilirler (Varghese, 2011). İspat, objeler üzerinde yapılan işlemlerin sonuçlarına göre değil, sorunun bileşenlerinin sahip oldukları özelliklere bakılarak ifade edilir (Ören, 2007).

Genel Örnek ve Düşünce Deneyi türünden ispatlarda ulaşılan sonucun doğruluğunun örnekler yoluyla gösterilişi değil, nedenler vererek ulaşılan sonucun açıklanışı söz konusudur (Balacheff, 1988). Ancak Genel Örnek türünden ispat sürecinde özelden genele doğru bir gidiş yer almaktadır. Bu da Genel Örnek türünden ispatı Düşünce Deneyi türünden ispattan ayıran farktır (Varghese, 2011).

İlk üç ispat türü (Saf Deneycilik, Kritik Deney ve Genel Örnek) Balacheff'in taksonomisinde gerçekçi ispatların alt basamakları iken Düşünce Deneyi ise kavramsal ispatların alt basamağıdır. Sadece bu basamakta öğrenciler gerçekçi ispatlardan kavramsal ispatlara geçiş yapmaktadırlar (Varghese, 2011).

Örneğin bir öğrenci "köşe sayısını bildiğiniz bir çokgenin köşegen sayısını veren bir formül ifade edin" şeklinde bir soruyla karşılaştığında dikdörtgen, beşgen gibi rastgele birkaç çokgen üzerinden bir kural oluşturursa "Saf Deneycilik" türünden ispat yapmış olur (Varghese, 2011). Aynı kuralı daha spesifik bir örnekle (örn. 20-gen) bir çokgen üzerinde test eder ve burada doğru ise diğerlerinde de doğrudur şeklinde düşünürse bu yöntem "Kritik Deney" türünden ispat ifade eder (Balacheff, 1987, s. 30; akt., Miyazaki, 2000). Eğer kural beşgen gibi çokgenlerin karakteristik özelliklerini taşıyan spesifik bir örneğin incelenişiyle elde edilir ve bu örnekten köşe sayısı ile köşegen sayısı arasında bir ilişki kurulup kuralın doğruluğu ispat edilmeye çalışılırsa bu defa "Genel Örnek" türünden ispat yapmış olur (Varghese, 2011). Yine $\frac{\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-3)}{2}$ şeklindeki aynı kural için öğrenci herhangi bir örnek kullanmadan, neden her köşenin $(n-3)$ adet köşegeni olması gerektiğini ve $n\cdot(n-3)$ ifadesinin neden 2 ile bölündüğünü açıklar ise bu ispat yöntemi "Düşünce Deneyi" adını alır (Balacheff, 1987, s. 30; akt., Miyazaki, 2000).

3.5.4. Genelleme Basamağı Değerlendirme Kriteri

Radford ve Peirce (2006) örüntü aktivitelerinde öğrencilerin kullandıkları stratejileri aşağıdaki tablo ile göstermiş ve burada mevcut olan cebirsel genelleme türlerini ise genelleme seviyelerine göre alt bölümlere ayırmışlardır.

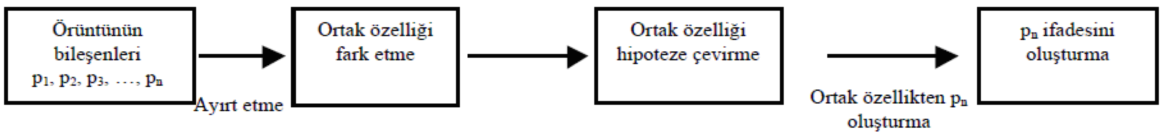
Tablo 3. 2. Örüntü aktivitelerinde öğrencilerin kullandığı stratejiler ve genelleme seviyelerine göre cebirsel genellemenin alt bölümleri (Radford ve Peirce, 2006)

<table>
<tr><td>Olgunlaşmamış Tümevarım</td><td colspan="4">Genelleme</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tahmin (Deneme ve Yanılma)</td><td>Aritmetik</td><td colspan="3">Cebirsel</td></tr>
<tr><td></td><td>Olgusal</td><td>Bağlamsal</td><td>Sembolik</td></tr>
</table>

Radford ve Peirce'a (2006) göre örüntü aktivitelerinde öğrencilerin yapmış oldukları genellemeler Cebirsel Genelleme ve Aritmetik Genelleme olmak üzere ikiye ayrılır. Bu genelleme türleri ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir:

Cebirsel Genelleme

Bir örüntüyü cebirsel olarak genellemek, onun bazı terimlerinde ortak olan bir özelliğin kavranabilmesine, bu özelliğin örüntünün tüm terimlerinde geçerli olduğunun farkına varılmasına ve örüntünün herhangi bir terimini direkt olarak ifade etmek için aynı özelliği kullanabilmeye bağlıdır (Radford ve Peirce, 2006). Cebirsel Genelleme sürecinde örüntü terimlerini elde etmede kullanılabilecek genel bir kurala varılır ve bu süreç şu şekilde gösterilebilir:



Şekil 3. 10. Cebirsel genelleme sürecinin yapısı (Radford, 2008; akt., Yeşildere, 2011)

Cebirsel Genelleme; Olgusal, Bağlamsal ve Sembolik Genelleme olmak üzere üçe ayrılır. Bu genelleme türleri ile ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir:

a) Olgusal Genelleme

Genelleme sürecinin başlangıç aşamasında oluştuğunu belirtmek amacıyla bu türden genellemeye Olgusal Genelleme adı verilmiştir (Radford, 2010). Sayısal alan ile sınırlı olan Olgusal Genelleme bu özelliği ile Bağlamsal ve Sembolik Genelleme türlerinden ayrılır (Sabena, Radford ve Bardini, 2005). Bir başka ifadeyle Olgusal Genelleme sürecinde şekillerden çok terimler arasındaki nümerik ilişkilere odaklı genelleme söz konusudur (Radford, 2002). Bu tür genellemeler, sayılar üzerinde gerçekleştirilen eylemlerle ifade edilir (Radford, 2010) ve genellikle "sonraki" veya "her zaman" gibi ifadeler içerir (Rivera, 2013).

b) Bağlamsal Genelleme

İkinci tür genellemeler Bağlamsal Genelleme olarak adlandırılır. Olgusal Genelleme'nin aksine Bağlamsal Genelleme sürecinde sadece sayısal eylemler değil, eylemlerin nesneleri de genellenir ve spesifik şekillerden (örn. beşinci, altıncı şekil) değil de şeklin "kendisi" veya "sonraki" şekilden bahsedilir. Bu yeni genelleme, işlemler ve spesifik şekillerden soyutlanmayı içerir (Radford, 2003). Olgusal Genelleme sürecinde yer alan "$1 + 2$" gibi somut işlemler yerini "şekle bir sonraki şekli ilave edersin" gibi daha belirsiz işlemlere bırakır (Radford, 2010). Diğer bir ifadeyle Bağlamsal Genelleme sürecinde "şekil", "bir sonraki şekil", "ekle" gibi ifadeler, içeriğe oldukça bağlı olan olgusal eylemler yerine geçer (Rivera, 2013).

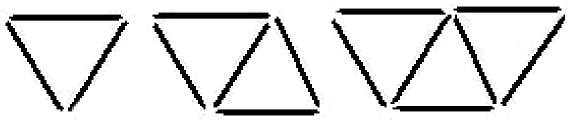
c) Sembolik Genelleme

Sembolik Genelleme, öğrencilerin harflerin anlamları hakkında karar vermelerini gerektiren karmaşık bir süreci içerir (Radford ve Peirce, 2006). Bağlamsal Genelleme'de nesneler, şekillendirilmiş ve konumsal tanımları yoluyla adlandırılırken (örn. "sonraki şekil", "üst sıra" vb.) Sembolik Genelleme sürecinde nesneler ve onlarla yapılan işlemler, cebirin harf ve rakam (alfanümerik) sisteminde ifade edilir (Radford, 2010).

Olgusal ve Bağlamsal Genelleme'de öğrenciler "şeklin sayısı" yerine daha çok "şeklin kendisinden" bahseder. Bu türden genellemelerde nesnelerin şekilsel ve metonimik (bir kavramın ilgili veya bağlantılı olduğu başka bir kavram vasıtasıyla anlatılması) gösterim biçimleri nedeniyle öğrencilerin genellemeleri çoğunlukla biraz belirsizlik içerirken Sembolik Genelleme'de öğrenciler problem içeriği ile ilişkili formüller sunarlar (Radford, 2010). Olgusal Genelleme sürecinde nümerik eylemlerin genellenişi söz konusu iken Bağlamsal Genelleme sürecinde nesnelere dayalı genelleme yapılır. Sembolik Genelleme ise cebirsel dili anlamayı ve kullanmayı içerir (Zazkis, Liljedahl ve Chernoff, 2008).

Aritmetik Genelleme

Aritmetik Genelleme sürecinde, yukarıda Şekil 3. 11. ile gösterilmiş olan Cebirsel Genelleme sürecindeki son ok yoktur. Aritmetik Genelleme sonucunda elde edilen kural herhangi bir varsayımın doğru olarak kabul edilişinden ortaya çıkmaz ve bu süreçte belirsiz sayılarla hesaplama gerçekleşmez (Radford, 2008). Bu tür genellemelerde terimler arasında ortak bir ilişki genellenir. Ancak bu özellik, örüntünün herhangi bir terimini elde etmeyi sağlayan bir ifadeyi oluşturmada kullanılamaz (Radford ve Peirce, 2006). Diğer bir ifadeyle Cebirsel Genelleme sonucunda herhangi bir terimi elde etmeyi sağlayacak bir kurala ulaşılabilirken Aritmetik Genelleme sürecinde bu türden bir kurala ulaşılamaz (Radford, 2008).



Şekil 3. 11. Genelleme türleri örnek soru

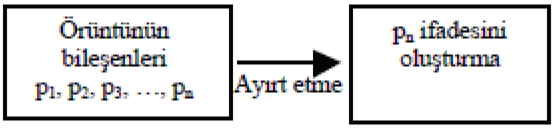
Örneğin kibrit çöpleriyle oluşturulmuş yukarıdaki örüntüde n. şekilde kullanılan kibrit çöpü sayısını veren formül istenildiğinde cevabı bulmaya çalışan bir öğrenci, şekillerde kullanılan kibrit çöpü sayısı için formülü:

- Şekil numarası ile şekil numarasının bir fazlasının toplamı olarak tahmin ettiğinde Olgusal Genelleme (örn. 3. şekil için 3+4),
- Şekil ve kendisinden sonra gelen şeklin numarasının toplamı şeklinde tahminde bulunduğunda Bağlamsal Genelleme (burada sayılardan çok şekil ve sonraki şekil türünden kavramlar kullanılmaya başlar, örn. 3. şekil için; 3. şeklin numarası olan 3 + bir sonraki şeklin numarası olan 4),
- $n + (n + 1)$ olarak tahminde bulunduğunda Sembolik Genelleme (ifade artık tamamen sembolik yapıya dönüşür),
- "Her defasında kibrit çöpü sayısı iki artar" şeklinde ifade ettiğinde ise Aritmetik Genelleme (örn. 2. şekil için 1. şeklin kibrit sayısı + 2, 3. şekil için 2. şeklin kibrit sayısı+2 vb.)

yapmış olur (Radford, 2001).

Olgunlaşmamış Tümevarım (Naive Induction)

Radford ve Pierce'a (2006) göre öğrenciler örüntüler ile ilgili uğraşılarında Aritmetik Genelleme ve Cebirsel Genelleme dışında Olgunlaşmamış Tümevarım adı verilen ancak bir genelleme türü olmayan, üçüncü bir stratejiyi de kullanırlar. Olgunlaşmamış Tümevarım sürecinde örüntünün bileşenleri arasındaki ortak bir özelliğin ortaya çıkarılışı, örüntünün genellenişi gibi aşamalar gerçekleşmez. Bunların yerine örüntünün bileşenleri üzerinden genel kurala yönelik tahminlerde bulunulur ve yapısı aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi oldukça basittir (Radford, 2008):



Şekil 3. 12. Olgunlaşmamış tümevarımın yapısı (Radford, 2008; akt., Yeşildere, 2011)

3.6. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Nitel araştırmada geçerlik kavramı inandırıcılık (iç geçerlilik) ve aktarılabilirlik (dış geçerlilik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

İnandırıcılık, bireyin bilişsel yapısı ve düşünme süreçlerinin ve gözlemlenen olayların doğru bir şekilde açıklanması (Clement, 2000; Miles ve Huberman, 1994; akt. Tanışlı, 2008), aktarılabilirlik ise araştırma sonuçlarının benzer ortam ve durumlara uygulanabilirliliğine ilişkin geçici yargılara ulaşılması anlamına gelmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu bağlamda çalışmada iç geçerliliği sağlamak için öğrencilerle yapılan mülakatlar ve öğrencilerin problemlere yönelik yazılı yanıtları yoluyla veri toplama araçlarında çeşitlemeye ve uzman incelemesine başvurulmuştur (Merriam, 2009). Ayrıca söz konusu durum çalışmasında iç geçerliği artırmak için bulunan sonuçlara nasıl varıldığı açık bir şekilde ortaya konulmuş ve bunlarla ilgili kanıtlar diğer kişilerin ulaşabileceği şekilde sunulmuştur (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Çalışmada aktarılabilirliği sağlamak için ise ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen ham veri, çalışmada ele alınan kavramlara göre düzenlenerek yorum katmadan ve verinin doğasına sadık kalınarak ayrıntılı olarak aktarılmış, sonuçlar doğrudan alıntılarla desteklenmiş, katılımcıları belirleme ölçütleri belirtilmiştir (Merriam, 2009).

Nitel araştırmalarda güvenirlik amacıyla aynı olgunun birden fazla araştırmacı tarafından değerlendirilmesi, veri toplama ve analizi gibi araştırma sürecinde yapılan işlemlerin detaylarının verilmesi, verilerin doğrudan aktarılması gibi durumlar söz konusudur (Büyüköztürk vd., 2008). Güvenirlik ilkesi nitel araştırmalarda tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

Tutarlık, araştırma yaklaşımı ve araştırmanın çeşitli aşamalarında (veri toplama, analiz gibi) yapılan kontroller hakkında bilgi verilmesidir. Teyit edilebilirlik ise araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtması ve araştırmacının nesnel bir yaklaşımla verileri ortaya koyması anlamına gelmektedir. Bu araştırmada veriler, veri toplama ve analizi ile ilgili aşamalar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Tutarlılık ve teyit edilebilirliği sağlamak için çalışmada betimsel bir yolla veriler sunulmuş, doğrudan alıntılar yapılarak öğrencilerin verdiği cevaplara yer verilmiş, verilerin teyit edilmesi için farklı veri toplama araçları kullanılmış, verilerin analizinde uzman görüşüne başvurulmuş ve veri analizi önceden belirlenmiş bir kavramsal çerçeveye göre yapılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Ayrıca araştırmada verilerin tanımlanma ve yorumlanma sürecinde nesnel davranılmaya çalışılmış, verilerin ve sonuçların doğruluğu için farklı araştırmacılar kullanılmıştır. Bu amaçla çalışmada veri analizinin güvenirliğini sağlamak için öğrenci kâğıtlarından biri rastgele seçilmiş, araştırmacının kendisi ve matematik eğitiminde uzman olan iki kişi tarafından belirlenen kriterler ışığında ayrı ayrı incelenmiş, değerlendirme sonuçlarının benzer olduğu görüldükten sonra bütün sorular araştırmacı tarafından analiz edilmiştir. Yapılan her bir analiz daha sonra araştırmacı ve danışman tarafından tekrar gözden geçirilmiştir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, toplanmış olan verilerin üçüncü bölümde belirtilen yöntem ve teknikler kullanılarak yapılan analizleri sonucunda elde edilen bulgular, matematiksel düşünmenin özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında her bir problem odaklı olarak aşağıda sırasıyla sunulmuştur. Ayrıca araştırmacı ile her bir öğrenci arasında ayrı ayrı yapılan mülakatlarda geçen karşılıklı diyaloglardan doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Bu diyaloglarda, araştırmacıya ait konuşmaları temsil etmek için "A" harfi, öğrencilere ait konuşmaları temsil etmek için ise o öğrenci için belirlenen kod kullanılmıştır. Diyalogların daha anlaşılır olması amacıyla diyaloglarda gerekli görülen yerlerde parantez içerisinde açıklayıcı ifadelerde bulunulmuştur.

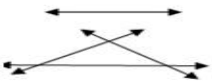
4.1. Nokta ve Doğru Problemine İlişkin Bulgular

1. problem olan Nokta ve Doğru problemi, öğrencilerin çoğunlukla daha öncesinden karşılaşmış oldukları bir soru olması nedeniyle genel olarak bu soruda öğrencilerin özelleştirme, tahmin ve genelleme gerçekleştirdikleri söylenemez. Bu nedenle bu basamaklar değerlendirilmeye alınmamıştır. Bunun yanı sıra öğrencilerin ispat basamağında kendilerine özgü yöntemler kullanmaları ihtimalinden dolayı yanıtları sadece ispat basamağı bağlamında değerlendirilmiştir. Ancak yapılan mülakatlarda bazı öğrenciler her ne kadar soruyu daha önceden görmüş olsalar da çözüm aşamasında çözümü hatırlamadıklarını ifade etmişler ve bu nedenle bu öğrencilerin ilgili basamaklardaki durumları değerlendirmeye alınmıştır.

NOKTA ve DOĞRU

n tane noktadan kaç tane doğru geçer?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



İki noktadan tek bir doğru geçer.

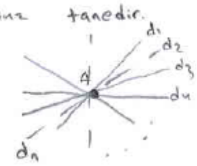
Üç noktadan üç doğru geçer.

Bu durumda doğrusal olmayan n tane noktadan geçen doğru sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 4. 1. Nokta ve Doğru Problemi

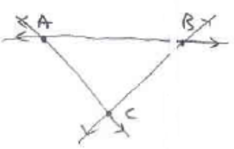
İlk olarak $Ö_1$'in yanıtı incelenmiştir. $Ö_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir:

1) Elimizde 1 tane noktamız olsun. Bu noktadan geçirebileceğimiz doğru sayısı sonsuz tanedir.



2) Bu A noktasından başka bir B noktası daha olsun. Bu iki noktadan geçmesi şartıyla yalnız bir doğru çizebiliriz.

3) Eğer bu noktaların yanına bir nokta daha eklersek, doğrusal olmayan 3 noktamızdan 3 doğru geçecektir.



4) Buradan çıkarmamız gereken sonuç "tek bir doğru" tanımlamak için 2 noktaya ihtiyacımız olduğudur. Yani bizim toplam nokta sayımız n olursa, bizim bu n noktadan ikişerli seçimler yapmamız gerekmektedir. Seçme yapmak matematik dilinde kombinasyon anlamına gelir. Sonuç olarak n noktadan $\binom{n}{2}$'li kombinasyonu kadar doğru geçer.

Şekil 4. 2. $Ö_1$'in Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

$Ö_1$ yanıtında problemi 4 aşamalı olarak çözmüştür. Önce 1, sonra 2 ve son olarak 3 noktalı durumları düşünmüş, herbir durumla ilgili açıklama yapmış ve ardından örnekleri çizerek göstermiştir. Kendisiyle yapılan görüşmede ise problem ve vermiş olduğu yanıtı ile ilgili şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Bu soruyu daha önceden biliyor muydun?

$Ö_1$: Evet.

A: Nasıl düşündün bu soruda?

$Ö_1$: Burada mantık, doğru belirtme şartı üzerineydi.

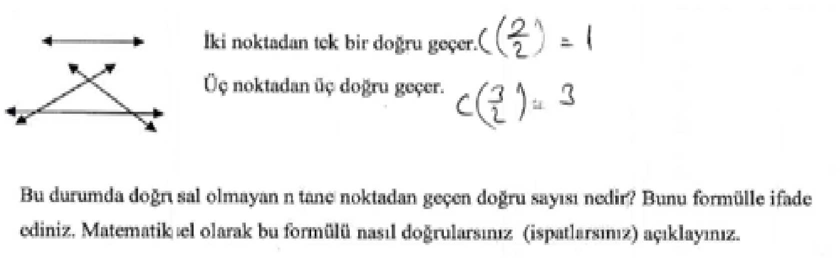
A: Evet.

$Ö_1$: Bildiğimiz üzere bir doğru belirtebilmemiz için en az iki noktaya ihtiyacımız var ve bu mantıkla da n noktadan n'nin ikili kombinasyonu şeklinde… İki noktaya ihtiyacımız olduğu için ikili noktalar seçmemiz gerekiyor.

Soru öğrencinin daha önceden bildiği bir soru olduğundan $Ö_1$'in özelleştirme, formüle yönelik tahmin ve genellemede bulunduğu söylenemez. Ancak kendine özgü bir yöntem kullanabilme ihtimalinden dolayı yanıtı ispat bağlamında değerlendirilecektir.

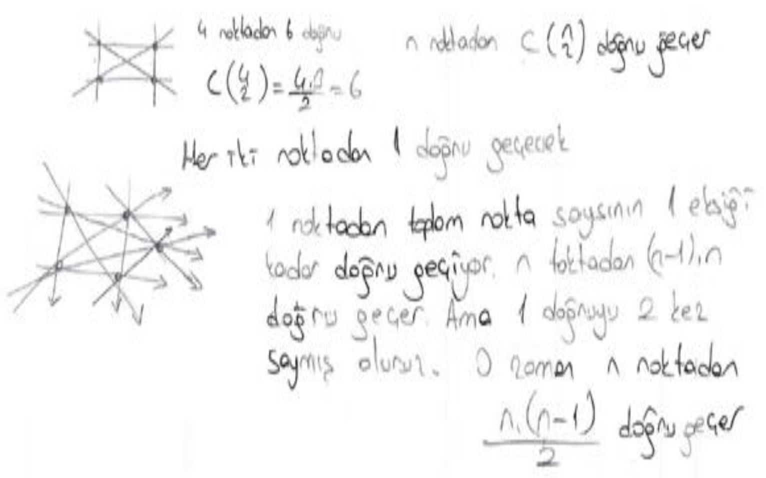
$Ö_1$ yanıtında öncelikle açıklamalarda bulunmuş, sonrasında ise açıklamalarıyla tutarlı örnekler sunmuştur. Burada örneklendirmeler öncesinde herhangi bir örneği referans göstermeden açıklamalarda bulunması, ayrıca bir doğru tanımlanabilmesi için neden iki noktaya ihtiyaç duyulduğunu ifade etmiş olması nedeniyle $Ö_1$'in yanıtında Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_2$'nin Nokta ve Doğru problemi ile ilgili yanıtı ise aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 3a. $Ö_2$'nin Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt 1

$Ö_2$'nin yanıtı Nokta ve Doğru problemini daha önceden bildiğini açıkça göstermektedir. Çünkü yukarıda da görüldüğü üzere 2 noktalı, 3 noktalı durumlar için herhangi bir açıklama yapmadan doğrudan kombinasyon kullanmıştır. Nitekim kendisiyle yapılan görüşmede de bu problem ile daha önceden karşılaştığını ifade etmiştir.

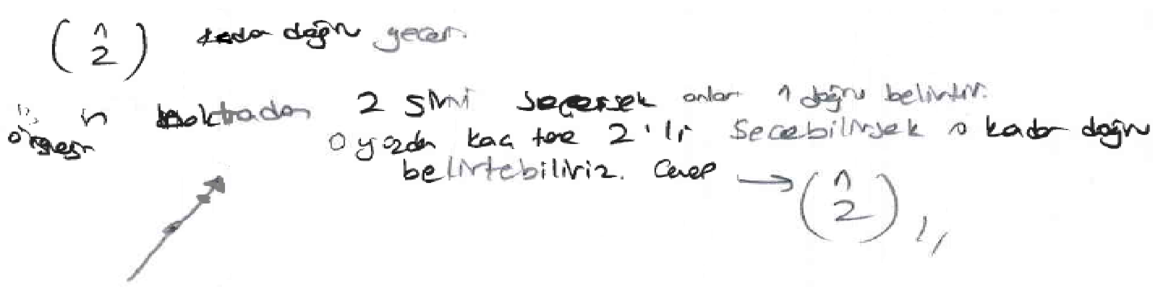


Şekil 4. 3b. Ö$_2$'nin Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt 2

Ö$_2$ yukarıda da görüldüğü gibi yanıtının devamında 4 ve 5 noktalı örneklerle çözümünü açıklamaya çalışmıştır. Bir noktadan toplam doğru sayısının bir eksiği kadar doğrunun geçtiğini ifade etmiş ve bu mantık temelinde çözüme ulaşmıştır.

Soruyu daha önceden bildiği için Ö$_2$ de burada soruya yönelik herhangi bir özelleştirme, formüle yönelik herhangi bir tahmin ve genellemede bulunmuş değildir. Ö$_2$'nin verdiği yanıt ispat açısından değerlendirildiğinde ise Genel Örnek türünden ispat yapmış olduğu söylenebilir. Çünkü 5 noktalı durumu örnek vererek n tane noktadan neden $n \cdot (n-1)$ tane doğru geçtiğini ve sonrasında bunun neden 2 ile bölündüğünü ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır.

Ö$_3$'ün aynı problem ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 4. Ö$_3$'ün Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

Ö$_3$'ün çözümü problemin cevabını daha önceden bildiğini düşündürmektedir. Çünkü problem ile ilgili herhangi bir örneklendirmede bulunmadan doğrudan formülü ifade etmiş, sonrasında da formülünü bir örnek yoluyla açıklamayı tercih etmiştir. Kendisiyle yapılan mülakatta ise çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Burada soruyu nasıl çözdün?

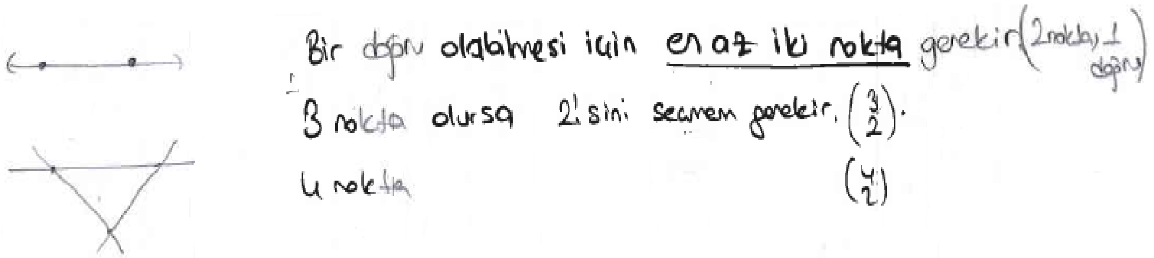
$Ö_3$: Ya bildiğim bilgi olaraktan iki noktadan bir doğru geçtiğini biliyordum. Ona göre hani herhangi iki noktayı seçersek oradan bir doğru geçecekti. Seçme işlemi de kombinasyon olduğu için…

A: Anladım.

$Ö_3$: Yani mesela iki noktadan ikinin ikili kombinasyonu, bir doğru geçer. Dolayısıyla n (tane) noktadan n'nin ikili kombinasyonu kadar doğru geçer.

$Ö_3$ problemi daha önceden bildiğinden burada herhangi bir özelleştirme, tahmin ve genellemeden bahsedilemez. Ancak ispat noktasında soru ele alındığında, cevabın doğru olduğunu göstermek için sorunun bileşenleri (nokta ve doğru) arasında herhangi bir ilişki açıklanmayarak (örn. bir doğru belirtilmesi için neden iki noktanın gerektiği vb.) örnek olarak sadece iki noktalı durum gösterilmiştir. Bu nedenle $Ö_3$'ün Kritik Deney türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_4$'ün 1. probleme verdiği yanıt şu şekildedir:



Şekil 4. 5. $Ö_4$'ün Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

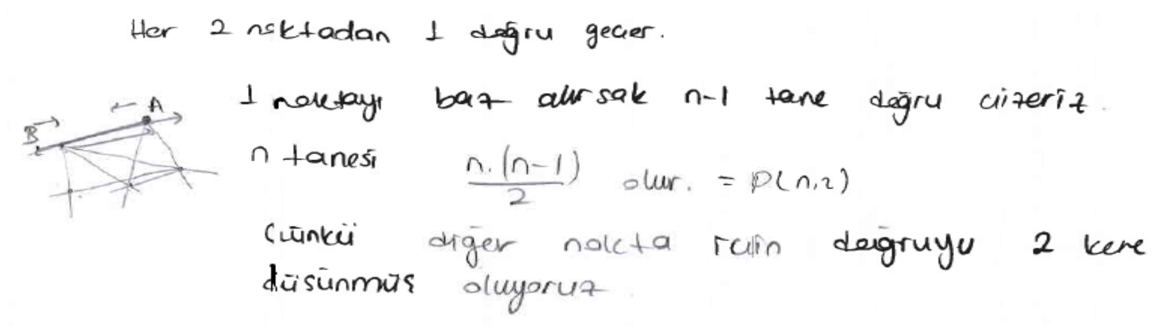
$Ö_4$ yanıtında 2 ve 3 noktalı durumları çizerek örneklendirmiş, *"bir doğru olabilmesi için en az iki nokta gerekir"* şeklinde daha önceden öğrendiği bilgiyi doğrudan ifade etmiş ama bunun nedenine dair herhangi bir açıklama yapmamıştır. Kendisiyle yapılan mülakatta ise soruyu daha önceden bildiğini ifade etmiş ve çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Problemi nasıl çözdün $Ö_4$?

Ö$_4$: Ben burada şöyle düşündüm. İki noktadan bir tane doğru geçiyor. Üç noktadan ise iki tanesini seçmem gerekiyor. O zaman n taneden, n nokta verdiyse bana 2 tane seçmem gerekiyor.

Ö$_4$'ün yanıtı özelleştirme, tahmin ve genelleme açısından değerlendirilmemiştir. Ö$_4$ formülün doğruluğunu 2, 3 ve 4 noktalı durumlarla göstermiş ancak bu örneklerde elde ettiği değerler ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamıştır. Dolayısıyla Ö$_4$'ün bu probleme vermiş olduğu yanıtta Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_5$'in 1. probleme yönelik yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 6. Ö$_5$'in Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ kendisiyle yapılan mülakatta Nokta ve Doğru problemi ile daha önceden karşılaştığını ifade etmiştir. Dolayısıyla Ö$_5$'in bu probleme yönelik yanıtında herhangi bir özelleştirme, tahmin ve genellemede bulunduğu söylenemez. Yanıtında önce *"her iki noktadan bir doğru geçer"* şeklinde çözümü ile ilgili bir bilgi vermiş olsa da sonrasında bu bilgiyi kullanmamış, farklı bir yolla formülü elde etmeye çalışmıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede çözümünü:

A: Burada nasıl düşündün?

Ö$_5$: İki noktayı baz aldım ve iki noktadan bir doğru geçeceğini düşündüm. Daha sonra n nokta için (bir noktadan geçen) n-1 tane doğru çizebileceğimizi düşündüm.

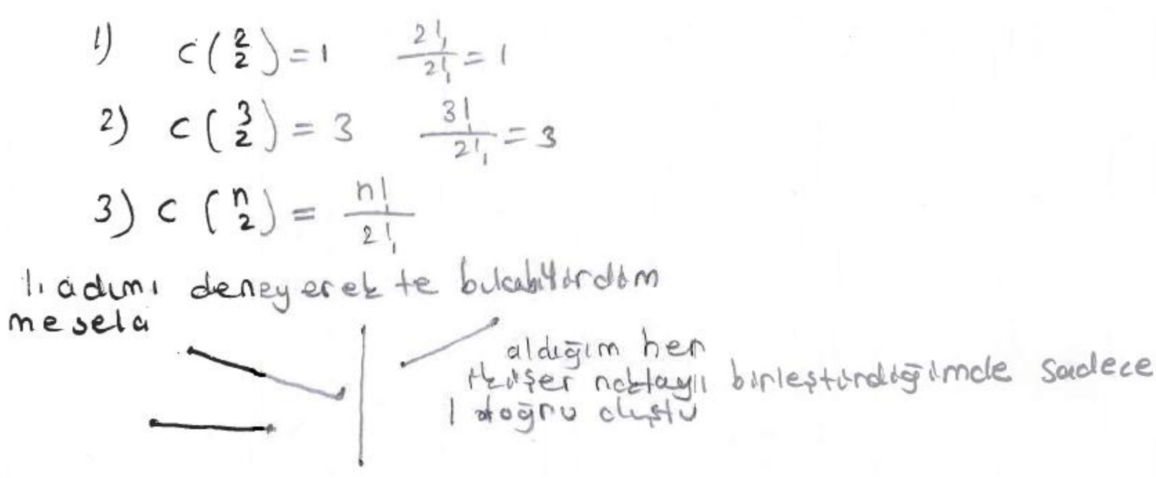
A: Aynı noktadan geçen değil mi?

Ö$_5$: Evet. Daha sonra bir noktayı aldığım zaman herhangi bir noktadan çizdiğim zaman bir doğru, diğer aldığım noktadan da aynısı olduğu için onu ikiye böldüm, (aynı doğruyu) iki defa saymamak için.

şeklinde ifade etmiştir.

Bununla birlikte, Ö$_5$ yanıtında tek bir örnek üzerinden (5 noktalı durum) çözümü ve sorunun bileşenleri arasındaki ilişkileri açıklama yoluna gitmiş olduğundan Genel Örnek türünden ispat yaptığı ifade edilebilir.

Ö$_6$'nın Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt ise aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 7. Ö$_6$'nın Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

Ö$_6$ yanıtında önce 2 ve 3 noktalı durumları örneklendirmiş, bu örneklerdeki doğru sayılarını bir formül ile ifade etmiş, sonra n tane noktalı durumda oluşacak doğru sayısını yine formüle bağlı olarak bulmuştur. Yanıtına doğrudan formül kullanarak başlamış ancak formülün açılımını yanlış uygulamıştır. Kendisiyle yapılan mülakatta ise soru ve çözümü ile ilgili şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Bu soruyu daha önce görmüş müydün?

Ö$_6$: Evet biliyordum.

A: Nasıl yaptın bu soruyu?

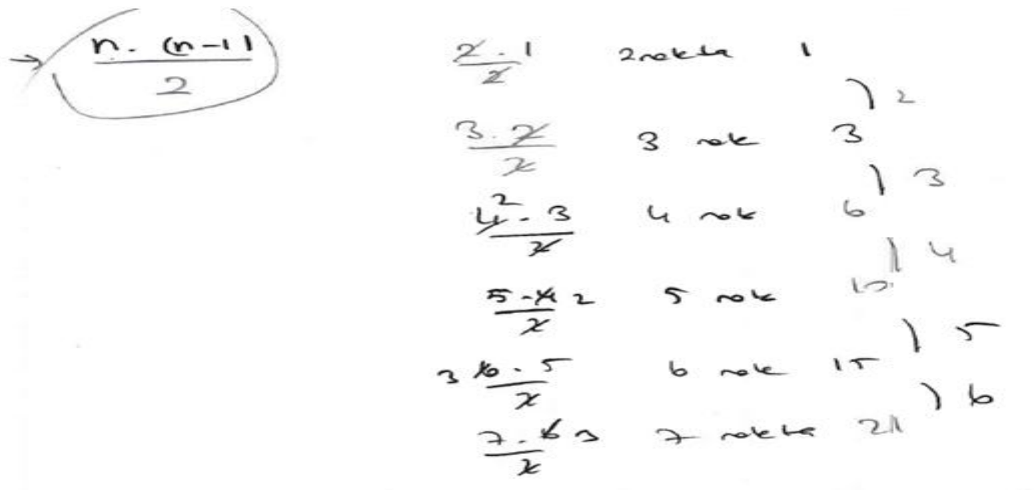
Ö$_6$: Kombinasyonu kullandım. Yani n tane şeyden iki tane geçtiğini yani n'nin ikilisini kullanacağımızı biliyordum. O şekilde yaptım. Sonra deneyerek de nasıl açıklayabileceğimizi düşündüm.

A: Evet.

Ö$_6$: Burada denemeler yaptım. Çizdim. Orada noktalardan doğrular bu şekilde geçti, öyle ifade etmeye çalıştım. Daha sonra işte nokta sayısı artarsa nasıl yapabiliriz diye işte şekillerle ifade etmeye çalıştım.

Gerek $Ö_6$'nın probleme verdiği yazılı yanıtı gerekse kendisiyle yapılan görüşmede kullanmış olduğu ifadeleri burada mantıksal bir düşünmeden çok bir ezberin söz konusu olabileceğini göstermektedir. Nitekim $Ö_6$'nın görüşmede "*Yani n tane şeyden iki tane geçtiğini yani n'nin ikilisini kullanacağımızı biliyordum.*" şeklinde muğlâk bir ifadede bulunması ve verdiği yanıtta direkt olarak kombinasyonu kullanmasına rağmen formülün açılımını yanlış göstermiş olması bunu düşündürmüştür. $Ö_6$'nın yanıtı ispat açısından incelendiğinde Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir. Çünkü çözümünü rastgele 2 ve 3 noktalı durumlarda elde ettiği sayısal değerler yoluyla açıklamaya çalışmıştır. Ancak aynı durumla (2 noktalı durum) ilgili olarak birden fazla örnek vermiş olması, bu örnekler üzerinde yeterli düşünme gerçekleştirmemiş olması ihtimalini akla getirmektedir.

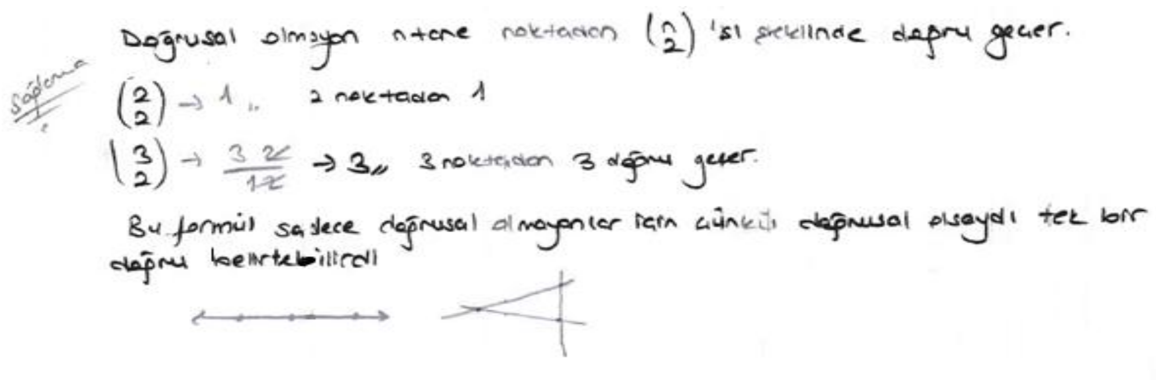
$Ö_7$'nin 1. probleme verdiği yanıt şu şekildedir:



Şekil 4. 8. $Ö_7$'nin Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

$Ö_7$ yanıtında önce doğrudan formülü belirtmiş, sonrasında ise 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 noktalı örneklerde elde ettiği sayısal değerlerle formülünün doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Ancak formülü nasıl elde ettiği ile ilgili herhangi bir açıklamada bulunmamış ve kendisiyle yapılan mülakatta ise problemi bildiğini ifade etmiştir. Bu nedenle $Ö_7$'nin yanıtında özelleştirme, tahmin ve genelleme durumu değerlendirilmemiştir. $Ö_7$'nin yanıtı ispat açısından incelendiğinde ise burada Saf Deneycilik türünden bir ispatın olduğu söylenebilir. Çünkü $Ö_7$ doğrudan 2, 3, 4, 5, 6, 7 noktalı durumları örneklendirmiş ve formülün bu örnekler için geçerli olduğunu göstermiş, sorunun bileşenleri arasında yer alan herhangi bir ilişkiden bahsetmemiş ve formül ile ilgili bir açıklama yapmamıştır.

$Ö_8$'in Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 9. $Ö_8$'in Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

$Ö_8$ ise yukarıda görüldüğü üzere yanıtında önce doğrudan formülü ifade etmiş, 2 ve 3 noktalı durumlarda elde ettiği sayısal değerlerle formülünün doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Ancak formülü nasıl elde ettiği ile ilgili herhangi bir açıklamada bulunmamıştır.

$Ö_8$ kendisiyle yapılan görüşmede problem ve vermiş olduğu yanıt ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Bu daha önceden gördüğün bir problem miydi?

$Ö_8$: Daha önceden biliyordum. Ona göre yani formüle göre çözdüm.

A: Direkt formülü mü uyguladın?

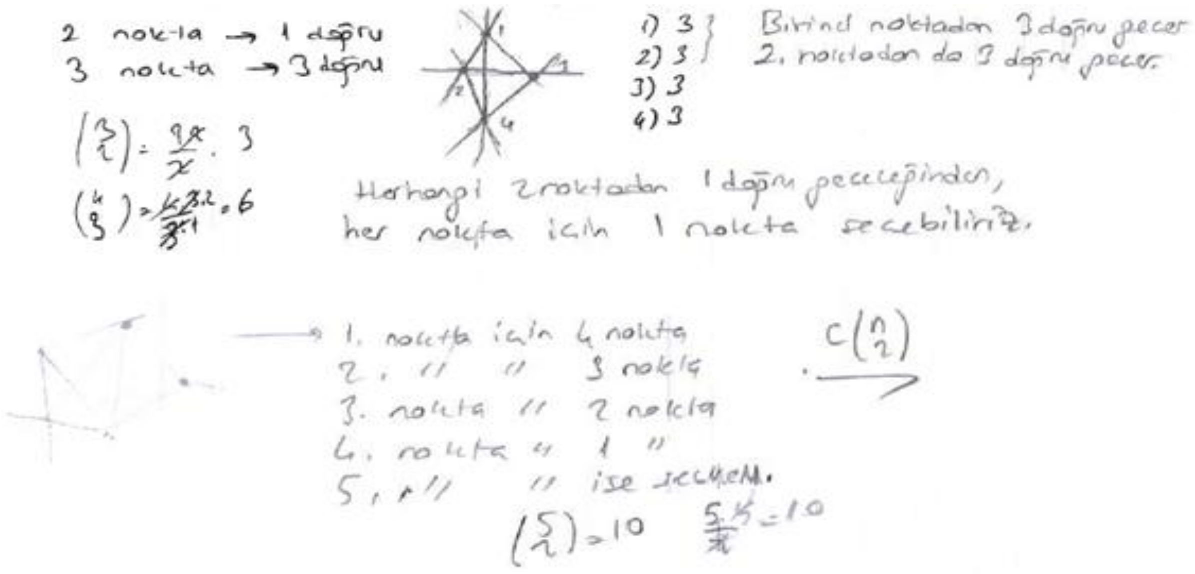
$Ö_8$: Evet.

A: Peki burada n'nin ikili kombinasyonunu seçme nedenin neydi? Formül mü aklına geldi yoksa mantık mı kullandın?

$Ö_8$: Direkt formül geldi burada aklıma. Biliyordum yani formülü.

$Ö_8$ problemi daha önceden bildiğini ifade ettiği için yanıtında problemle ilgili herhangi bir özelleştirme, tahminde bulunma ve genelleme yapmamıştır. İspat açısından yanıt değerlendirildiğinde Saf Deneycilik türünden ispat yapıldığı söylenebilir. Çünkü formülün sağlamasında, soruyu oluşturan bileşenler arasındaki ilişkilere değinilmeden 2 ve 3 noktalı durumlara sadece formül uygulanmış ve doğruluğu ispatlanmaya çalışılmıştır.

Ö$_9$'un 1. probleme verdiği yanıt ise şu şekildedir:



Şekil 4. 10. Ö$_9$'un Nokta ve Doğru problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında önce 2 ve 3 noktalı örneklerde oluşan doğru sayılarını hesaplamış, sonra 4 noktalı durumu incelemiş ve burada her noktadan geçen doğru sayısına odaklanmıştır. Bu sayıyı 4'ün 3'lü kombinasyonu şeklinde göstermeye çalışmış ancak bulduğu sonucu hatalı bir biçimde, çizdiği şekilde elde ettiği doğru sayısına eşitlemiştir. Bunun nedeni o anda formülü tam hatırlamamış olması olabilir. Ö$_9$ burada çözümle ilgili bir ipucu elde edemediğinden olsa gerek daha sonra *"herhangi iki noktadan bir doğru geçeceğini"* belirtmiş, 5 noktalı durumu ele almış ve bu defa her bir nokta için birlikte doğru oluşturabileceği nokta sayısı (dolayısıyla o noktadan geçecek doğru sayısı) üzerine odaklanmıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede ise problem ve yanıtı ile ilgili olarak:

A: Daha önceden bu problemi biliyor muydun?

Ö$_9$: Evet biliyordum ama tam hatırlamıyordum.

A: Problemi çözerken formülü hatırlamadın mı?

Ö$_9$: Hayır hatırlamadım.

A: Nasıl düşündün?

Ö$_9$: İki noktadan bir doğru geçeceği için burada kombinasyon uygulamaya çalıştım. n (tane) nokta varsa… n'nin ikili kombinasyonundan sonucu buldum.

şeklinde ifadelerde bulunmuştur. $Ö_9$ formülü hatırlamadığı için burada bir özelleştirme, tahmin ve genellemeden bahsedilebilir.

$Ö_9$ şekillere bağlı olarak özelleştirme yapmış ve 2 örnek üzerinden sonuca ulaşmaya, vermiş olduğu örneklerde sorunun bileşenleri arasında ilişki kurmaya ve soruyu çözmeye çalışmıştır. Bu açıdan bakıldığında soruda anlatılanı ve istenileni doğru anlamış, Yeterli Özelleştirme yapmıştır.

$Ö_9$ önce 4 noktalı durumu sonrasında ise 5 noktalı durumu incelemiş, çözümünü ise özellikle kendi çizmiş olduğu 5 noktalı duruma bağlı olarak elde etmeye çalışmıştır. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin türünden bir tahminle formüle ulaşmaya çalıştığı ifade edilebilir. Yanıtının devamında n'nin ikili kombinasyonu şeklinde bir formüle ulaşmış, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Formülü tek bir durumla (5 noktalı durum) açıklayarak örneklendirmiş, doğruluğunu göstermiştir. Bu nedenle $Ö_9$'un Genel Örnek türünden ispat yaptığı ifade edilebilir.

Nokta ve Doğru problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre ispat seviyeleri açısından incelendiğinde elde edilen bulgular aşağıda Tablo 4. 1.'de gösterilmiştir.

Tablo 4. 1. Nokta ve Doğru probleminde kullanılan ispat türleri

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	İspat Türü
İyi	$Ö_1$	Düşünce deneyi
	$Ö_2$	Genel Örnek
	$Ö_3$	Kritik Deney
Orta	$Ö_4$	Saf Deneycilik
	$Ö_5$	Genel Örnek
	$Ö_6$	Saf Deneycilik
Düşük	$Ö_7$	Saf Deneycilik
	$Ö_8$	Saf Deneycilik
	$Ö_9$	Genel Örnek

Tablo 4. 1. incelendiğinde matematik başarı düzeyleri iyi olan öğrenciler arasında Düşünce Deneyi ve Genel Örnek türünden ispatlara daha fazla rastlandığı görülmektedir. Her iki ispat çeşidi soruda mevcut bileşenler arasında nedensel bir ilişki kurma gerektiren, daha üst seviyede düşünmenin gerçekleştiği ispat türleridir. Bununla birlikte, orta ve düşük başarı düzeylerine sahip öğrenciler arasında Saf Deneycilik türünden ispatların daha ön plana çıktığı görülmektedir.

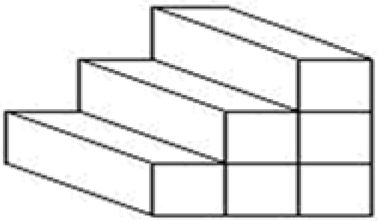
Öğrencilerin 2. problem olan Merdiven problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir:

4.2. Merdiven Problemine İlişkin Bulgular

MERDİVEN PROBLEMİ

Yapacağınız etkinlikler sonunda aşağıdaki soruya cevap bulacaksınız.

Ali şekildeki gibi 3 basamaklı bir merdiven yapmak için 6 blok kullanmaktadır.



Buna göre n basamaklı bir merdiven yapmak isteyen birisinin kullanacağı blok sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 4. 11. Merdiven Problemi

Merdiven problemine ilişkin ilk olarak Ö$_1$'in yanıtı incelenmiştir. Şekil 4. 12.'de görüleceği üzere Ö$_1$'in Merdiven problemine verdiği yanıtta herhangi bir örneklendirme yer almamış olması problemi daha önceden görmüş olma ihtimalini akla getirse de kendisiyle yapılan görüşmede Merdiven problemi ile daha önceden karşılaşmamış olduğunu belirtmiştir:

A: Bu problemle daha önce karşılaşmış mıydın?

Ö$_1$: Merdiven sorusuyla bu şekilde karşılaşmamış olsam bile 1, 2, 3 +…

A: Gittiğini hemen görebildin mi?

Ö$_1$: Evet toplam şeklinde. Direk Gauss toplamı geldi aklıma. Gauss'un 1'den n'ye kadar sayılar toplamı. İspatını da biliyordum.
A: Soruda verilen şekle baktığında böyle olması gerektiğini mi düşündün?
Ö$_1$: Evet ardışık toplam gelmesi gerektiği kafamda oluşmuştu.

Ö$_1$'in yanıtı aşağıda verilmiştir:

- Ali'nin merdiven problemi: büyük matematikçi Gauss'un genel toplam formülüne dayanır.
- Gauss 1'den n'e kadar olan ardışık doğal sayıların toplamını $\boxed{\frac{n.(n+1)}{2}}$ şeklinde formülize etmiştir.

<u>İspat</u>

$n \in N$ olmak üzere

1) $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$ → şeklinde n tane toplam belirtelim

2) Bu toplam dizisini ters çevirip ~~taraf~~ tarafa topladığımızda:

$$\begin{array}{l} \ \ 1+2+3+4+\dots+n \\ \ \ n+(n-1)+(n-2)+\dots+1 \\ \hline + \ \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\dots+(n+1)}_{n \text{ tane}} \end{array}$$

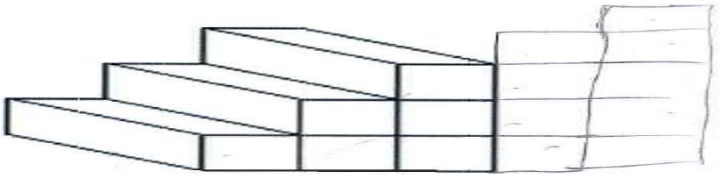
elde ederiz

Bu toplam $n.(n+1)$ şeklinde ifade edilir. Bizden istenen ise bunun yarısıdır.

Şekil 4. 12. Ö$_1$'in Merdiven problemine verdiği yanıt

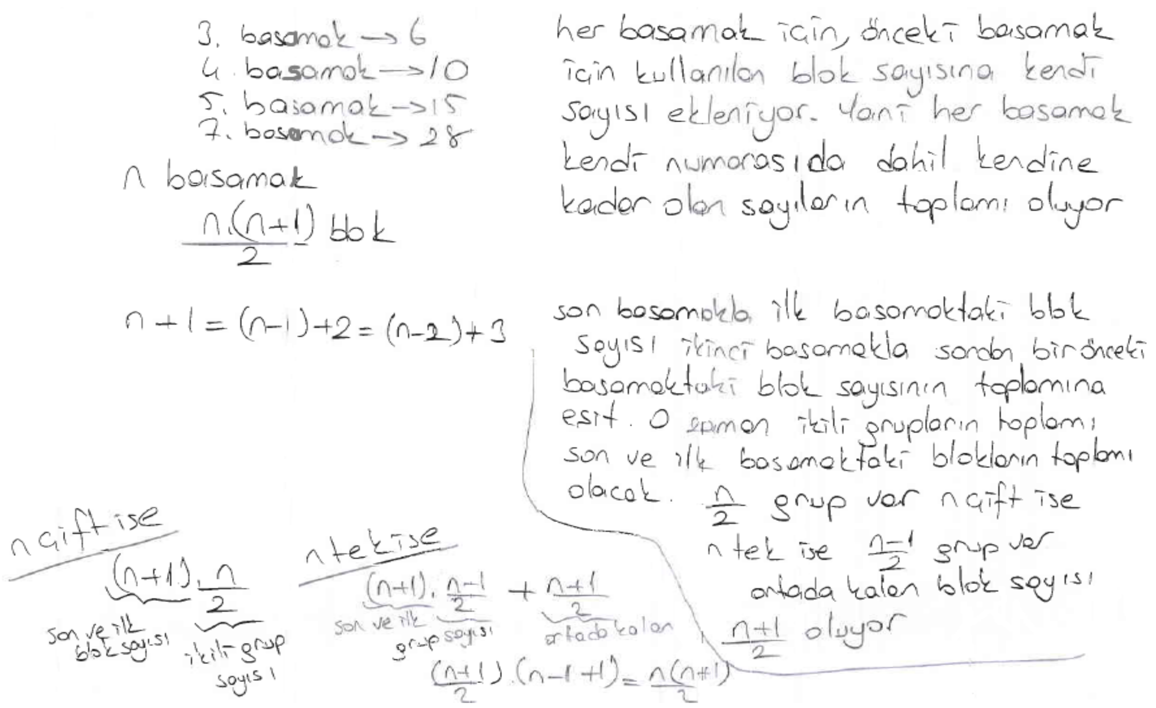
Ö$_1$ yanıtında herhangi bir örneklendirme, inceleme ve dolayısıyla özelleştirme yapmadan genelleme basamağına geçmiş, doğru çözümü bulabilmiştir. Ö$_1$ sadece soruda verilen şekle, diğer bir ifadeyle sorunun görsel gösterimine bağlı kalarak formül ile ilgili tahminde bulunmuş ve formülü ifade etmiştir. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin yapmıştır. Formülü sembolik olarak göstermiş, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Formülün ispatını daha önceden bildiğini ifade ettiği için Ö$_1$'in ispatı değerlendirmeye alınmamıştır.

Ö$_2$'nin 2. problem olan Merdiven problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 13a. Ö$_2$'nin Merdiven problemine verdiği yanıt 1

Ö$_2$ yanıtında önce problemde verilen şekil üzerinde 4 ve 5 basamaklı merdiven durumunu çizmiştir. Sonrasında ise aşağıda gösterildiği biçimde çözümünü gerçekleştirmiştir:



Şekil 4. 13b. Ö$_2$'nin Merdiven problemine verdiği yanıt 2

Ö$_2$ sırasıyla 3, 4, 5 ve 7 basamaklı merdiven örneklerini incelemiş, kullanılan blok sayılarını ayrı ayrı hesaplamıştır. Burada elde ettiği verilerden *"her basamak için, önceki basamak için kullanılan blok sayısına kendi sayısı ekleniyor"* sonucuna ulaşmıştır. Sonrasında ise daha farklı bir yolla çözümüne devam etmiştir. Kendisiyle yapılan görüşmede soru ve çözümü ile ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Bu soru nasıldı hemen ilk bakışta sorunun özelliğini görebildin mi? Gerçi sen örnekleri dört ve beş basamaklı durumlara da ilerletmişsin değil mi?

Ö$_2$: Evet örüntüye göre kural oluşturmaya çalıştım.

A: Örüntüye göre?

Ö$_2$: Evet. Bir formül bilmiyordum.

A: Örüntüde de basamakla kullanılan blok sayısı arasındaki örüntüyü mü ortaya çıkarmaya çalıştın?

Ö$_2$: Aynen. Ona göre.

A: 6, 10, 15, 28… hemen buradan sayılar toplamının geldiğini mi düşündün?

Ö$_2$: Yok. Basamak sayısı ile arasındaki ilişkiye baktım. Oradan da formülü…

A: Türettin?

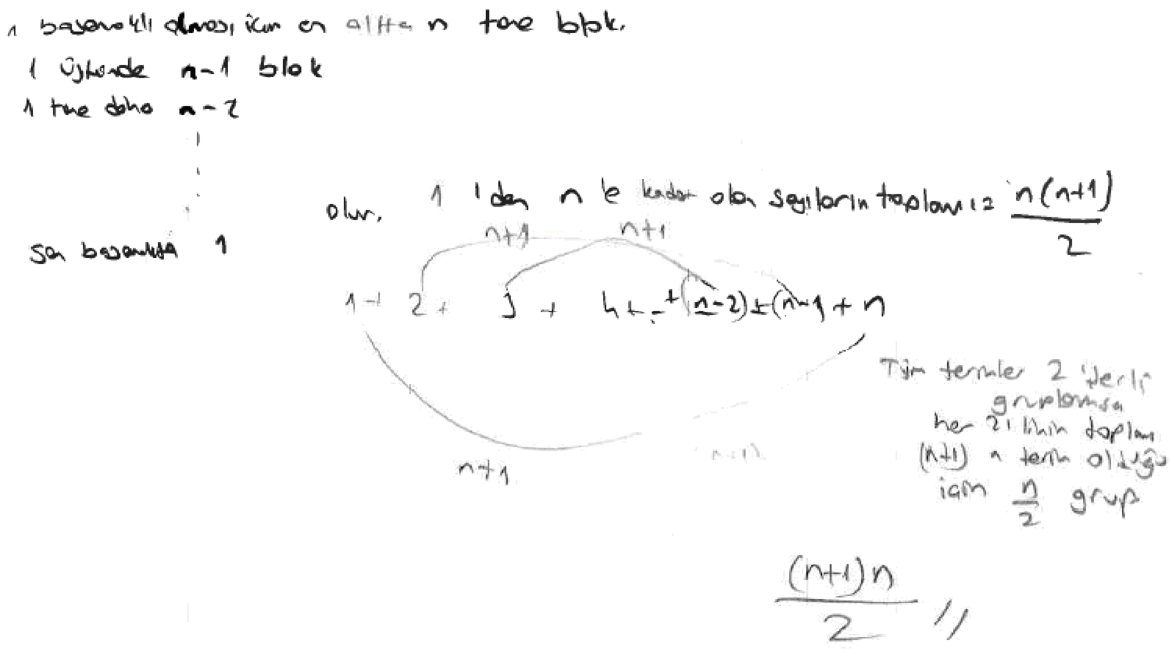
Ö$_2$: Aynen.

Ö$_2$ yanıtında, kendisinin de belirttiği gibi basamak sayısı ile blok sayısı arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Soruda anlatılanı ve istenileni doğru anlamış, Yeterli Özelleştirme yapmıştır. Her ne kadar 3, 4, 5 ve 7 basamaklı durumları incelemiş olsa da formül ile ilgili tahminini *"son basamakla ilk basamaktaki blok sayısı, ikinci basamakla sondan bir önceki basamaktaki blok sayısının toplamına eşit"* şeklindeki bulgusuna bağlı olarak gerçekleştirmiştir. Ö$_2$'nin bu ifadesi onun formüle ulaşırken görselliği, soruda kullandığı çizimi ön planda tutmuş olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin ile formüle ulaştığı söylenebilir.

Ö$_2$'nin yanıtını açıklarken soruyla ilgili çizimi üzerinden bir genellemeye varmış olduğu ve bu çizime bakarak *"son basamakla ilk basamaktaki blok sayısı, ikinci basamakla sondan bir önceki basamaktaki blok sayısının toplamına eşit"* şeklinde soruyu oluşturan bileşenler arasında bir ilişkiye ulaştığı görülmektedir. Bu nedenle ispat anlamında Genel Örnek türünden ispat yaptığı ifade edilebilir. Ö$_2$'nin verdiği yanıt genelleme açısından incelendiğinde ise *"her basamak için; önceki basamak için kullanılan blok sayısına kendi sayısı ekleniyor"* ya da diğer bir ifadeyle her defasında kullanılan blok sayısının basamak sayısı kadar arttığını belirtmiş olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Ö$_2$'nin önce Aritmetik Genelleme, sonrasında bir formüle ulaşmış olması nedeniyle ise Sembolik Genelleme yaptığı söylenebilir.

Aşağıda görüldüğü üzere Ö$_3$ Merdiven problemi ile ilgili yanıtında herhangi bir örneklendirme yapmadan direkt çözüme geçmiş, n basamaklı durumla ilgili yorumlamalarda bulunmuş ve kullanılacak olan blok sayılarını her bir basamak için ifade etmiştir. Dolayısıyla yanıtı incelendiğinde Ö$_3$'ün özelleştirme yapmadığı görülmektedir.

Ö$_3$'ün Merdiven problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 14. Ö$_3$'ün Merdiven problemine verdiği yanıt

Ö$_3$ kendisiyle yapılan görüşmede problem ve yanıtıyla ilgili şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Bu daha önceden görmüş olduğun bir problem miydi?

Ö$_3$: Direkt böyle görmedim ama buna benzer yani aynı formülü kullanacağımız sorularla karşılaşmıştım.

A: Çözümünü problemde verilen şekilden elde etmişsin sanırım çünkü farklı çizimler yapmamışsın. Üç basamaklı merdiven senin için yeterli oldu mu?

Ö$_3$: Evet.

A: Soruya ilk baktığında ne dikkatini çekti?

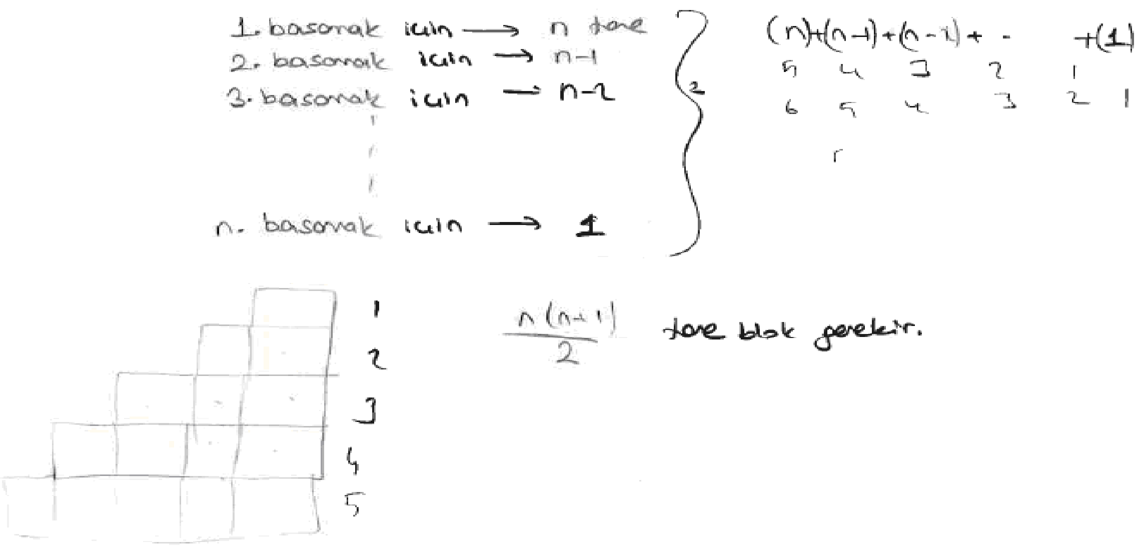
Ö$_3$: Yani sürekli birer basamak arttığını gördüm. Blok sayısı da 1, 2, 3, 4 o şekilde gidiyordu. Genelledim. 1, 2, 3… n derken onların toplamı gelir diye düşündüm.

A: Oradan direkt formül geldi mi?

Ö$_3$: Evet direkt formülden. Hani bunun da ispatını yaptım ben.

Ö$_3$ doğrudan problemdeki şekilden tahmine vardığı için Algıya Dayalı Tahmin yaptığı ifade edilebilir. Ö$_3$'ün kendisiyle yapılan mülakatta belirttiği *"sürekli birer basamak arttığını gördüm"* ifadesi de bu düşünceyi desteklemektedir. Ö$_3$'ün formüle ulaşırken herhangi bir örneği referans göstermeden doğrudan n basamaklı merdiveni düşünmesi ve onunla ilgili açıklamalar getirmiş olması nedeniyle Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir. Soruda istenen formülü sembolik olarak ifade etmiş, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir.

Ö$_4$'ün aynı problemle ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 15. Ö$_4$'ün Merdiven problemine verdiği yanıt

Ö$_4$ yanıtında 5 basamaklı merdiveni çizerek örneklendirmiştir. Basamak sayısı ile kullanılan blok sayısı arasındaki ilişkiyi ise soruyla birlikte verilen şekle bakarak açıkça ortaya koymuştur. Çizim ve ifadelerinden Ö$_4$'ün soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı anlaşılmaktadır. Kendisiyle yapılan görüşmede ise yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu problemi nasıl çözdün?

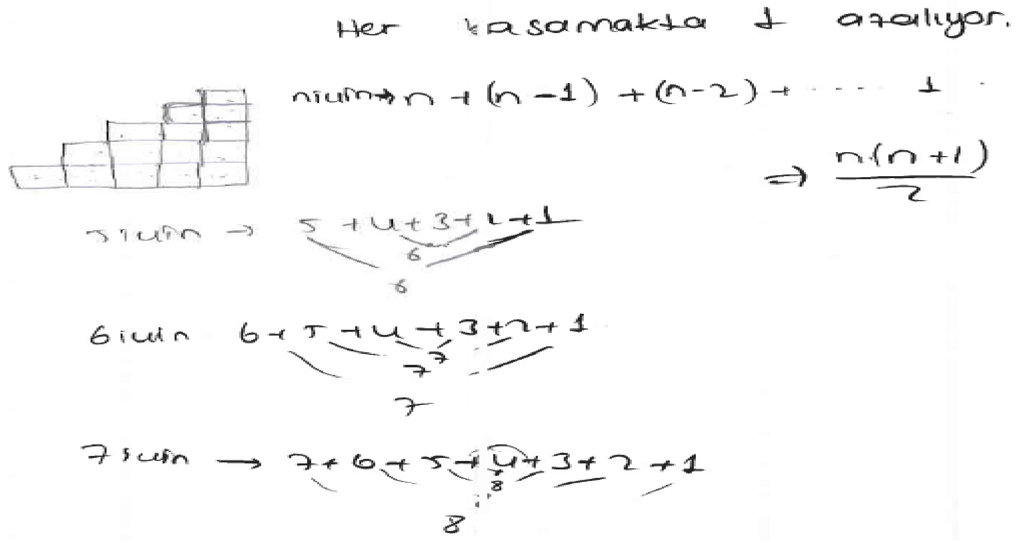
Ö$_4$: Burada da verilen şekil üzerinden dedim. Birinci basamak için 3 tane (blok), sonrasında bir azalmış sonra bir azalmış. O zaman birinci basamak için n tane, ikinci basamak için $n-1$, üçüncü basamak için $n-2$ diye gidiyor.

A: Evet.

Ö$_4$: En son basamakta bir blok olduğu için n. basamakta bir blok olması gerekiyor. Buradan da zaten ardışık sayıların toplamı geliyor. O yüzden formülü $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ olarak buldum.

Ö$_4$'ün "*Burada da verilen şekil üzerinden dedim*" ifadesinden de anlaşılacağı üzere sorunun görsel halini inceleyerek çözümünü yaptığı, Algıya Dayalı Tahmin gerçekleştirdiği görülmektedir. Çözümünü yine soruyla birlikte verilen görsele dayalı olarak oluşturmuş, basamak sayısı ile kullanılan blok sayıları arasındaki ilişkiyi ifade etmiştir. Bu nedenle Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir. Formülü matematiksel olarak sunmuş ve Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir.

Ö$_5$'in Merdiven problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 16. Ö$_5$'in Merdiven problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ yanıtında önce 5 basamaklı merdiveni çizmiş ve *"her basamakta 1 azalıyor"* ifadesiyle belirttiği gibi kullanılan blok sayılarının birer azalarak devam ettiği sonucuna ulaşmıştır. Sonrasında ise 5, 6 ve 7 basamaklı merdivenlerde kullanılan blok sayılarını ayrı ayrı hesaplamıştır. Ö$_5$'in çizimi ve yanıtı, soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Burada nasıl düşündün?

Ö$_5$: Şimdi üstten başlayarak alta doğru indiğimizde birer artıyor blok sayısı.

A: Her basamakta birer mi artıyor?

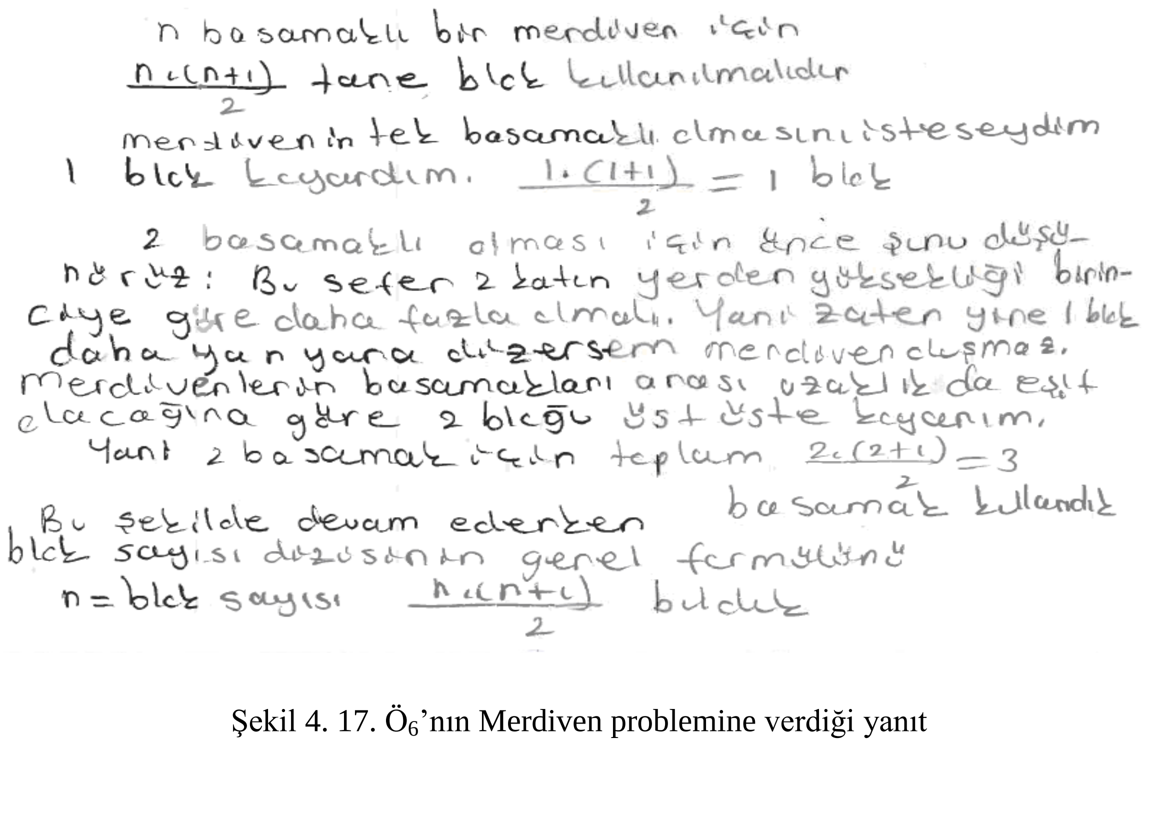
Ö$_5$: Evet. Önce beş için düşününce ben bir örüntü kurmaya çalıştım. Bunları (kullanılan blok sayılarını) tek tek yazdım 1, 2, 3, 4, 5 şeklinde. Altı için yazdım yedi için yazdım.

A: Evet.

Ö$_5$: n (basamaklı merdiven) için ise aşağıdan yukarıya doğru gittiğimizde n tane n-1 tane diye gidiyor. Bunları toplamamız gerekiyor. Daha sonra zaten $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ şeklinde bir formül buldum.

"*Önce beş için düşününce ben bir örüntü kurmaya çalıştım"* ifadesinden de anlaşılacağı üzere Ö$_5$ çözümünü, çizmiş olduğu 5 basamaklı duruma bakarak yaptığını belirtmektedir. Bu nedenle Ö$_5$'in formüle yönelik Algıya Dayalı Tahmin yaptığı söylenebilir. Basamak sayıları ve blok sayıları arasındaki ilişkiyi keşfetmiş, sonrasında ise 6 ve 7 basamaklı örnekleri ele almıştır. Çözümünde 5 basamaklı örneğe odaklanarak basamak ve blok sayıları arasındaki ilişkiyi açıklamıştır. Bu nedenle Ö$_5$'in Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir. Ö$_5$ formülü n'ye bağlı ifade ettiğinden yanıtında Sembolik Genelleme söz konusudur.

Ö$_6$'nın Merdiven problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:


n basamaklı bir merdiven için
$\frac{n.(n+1)}{2}$ tane blok kullanılmalıdır
merdivenin tek basamaklı olmasını isteseydim
1 blok koyardım. $\frac{1.(1+1)}{2} = 1$ blok
2 basamaklı olması için önce şunu düşünürüz: Bu sefer 2 katın yerden yüksekliği birinciye göre daha fazla olmalı. Yani zaten yine 1 blok daha yan yana dizersem merdiven oluşmaz. Merdivenlerin basamakları arası uzaklık da eşit olacağına göre 2 bloğu üst üste koyarım.
Yani 2 basamak için toplam $\frac{2.(2+1)}{2} = 3$ basamak kullandık
Bu şekilde devam ederken blok sayısı dizisinin genel formülünü
n = blok sayısı $\frac{n.(n+1)}{2}$ buldum

Şekil 4. 17. Ö$_6$'nın Merdiven problemine verdiği yanıt

Ö$_6$ yanıtında herhangi bir örneklendirme yapmamış ve doğrudan basamak sayısı ile kullanılan blok sayısı arasında ilişki kurarak çözümünü gerçekleştirmiştir. Dolayısıyla özelleştirmede bulunmamış, matematiksel düşünme açısından sonraki basamağa geçiş yapmıştır. Yanıtıyla ilgili yapılan görüşmede de bu durumu şu şekilde belirtmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün?

Ö$_6$: n basamaklı bir merdiven için $n \cdot (n + 1)$ *tane blok kullanılmalıdır dedim çünkü eğer merdivenin bir basamaklı olmasını isteseydim mesela bir tane blok koyardım.*

A: Evet.

Ö$_6$: İki basamaklı olması için öncekiyle bir tane daha aynı düzeyde bir tane de onun üzerine koymamız gerekiyor.

A: Evet.

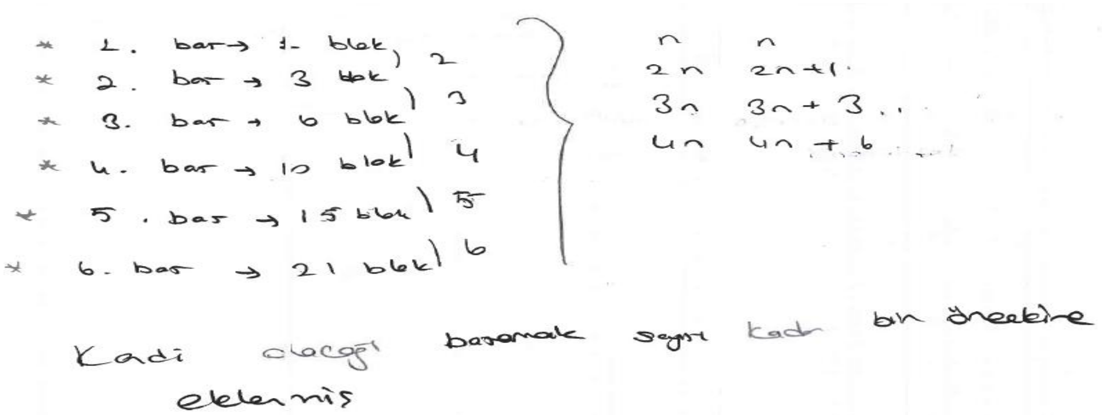
Ö$_6$: Sonra üç için hani üçüncü bir şey için onun üzerine bir tane daha.

A: Burada problemin yapısını şekilden mi gördün?

Ö$_6$: Evet. İşte böyle devam ederken blok sayısını $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *şeklinde ifade ettim.*

Soruyu oluşturan bileşenler arasındaki ilişkiyi doğru olarak ifade eden Ö$_6$, formülü oluştururken soruda verilen örnek dışında başka bir örnek kullanmamış, Algıya Dayalı Tahmin'de bulunmuştur. Yanıtında herhangi bir örnek referans göstermeden mantığa dayalı değerlendirmelerde bulunarak çözümü genellediği için Ö$_6$'nın Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir. Formülü sembolik olarak belirtmiş, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir.

Ö$_7$'nin 2. problemle ilgili yanıtı şu şekildedir:



Şekil 4. 18. Ö$_7$'nin Merdiven problemine verdiği yanıt

$Ö_7$ ise Merdiven problemine verdiği yanıtında yukarıda Şekil 4. 18.'de görüldüğü gibi sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5 ve son olarak 6 basamaklı merdiven durumuna kadar örneklendirmelerde bulunmuştur. Her bir örnekte kullanılan blok sayısını hesaplamış ve birbirini takip eden örneklerde kullanılan blok sayıları arasındaki artışa dikkat etmiştir. Sonrasında her bir merdiven için kullanılan blok sayılarını n'ye bağlı olarak ifade etmiştir. Ancak bu incelemeleri sonucunda bir formüle ulaşamamış, kullanılan blok sayıları ile ilgili olarak *"Kendi olacağı basamak sayısı kadar bir öncekine eklenmiş"* şeklinde bir ifade de bulunmuştur.

$Ö_7$'nin yanıtında ifade ettiği değerler problemde anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Çünkü 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 basamaklı merdivenler için gerekli olan blok sayılarını doğru olarak hesaplamış, soruda anlatılanı ve istenileni doğru bir biçimde yanıtına aktarmıştır. Kendisiyle yapılan mülakatta ise yanıtı ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruyu nasıl yaptın?

$Ö_7$: Blok sayıları aritmetik olarak arttığı için ben de aritmetik bir kural yazmaya çalıştım. Formülüm yanlış olabilir fakat gittiğim yolun doğru olduğunu düşünüyorum.

A: Evet gidiş yolunda bir problem yok.

$Ö_7$: Sonra 1, 2, 3, 4, 5 olarak (blok sayılarının) arttığını gördüm. Sürekli her basamakta kendinden önceki basamağa göre blok sayısının arttığını gördüm.

A: Bunu bir formüle mi dönüştüremedin?

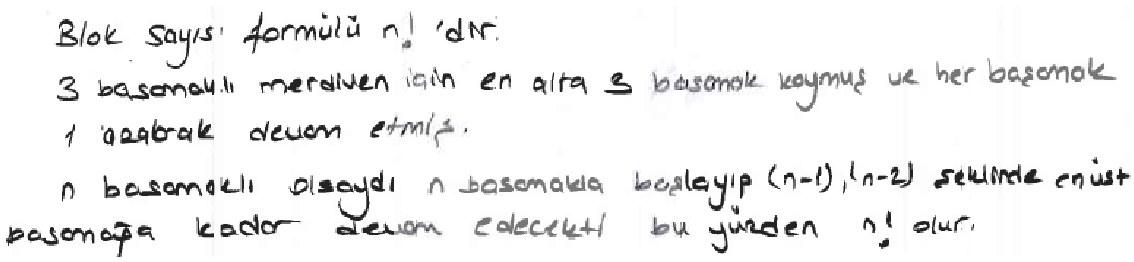
$Ö_7$: Evet bir formüle dönüştüremedim.

A: Burada ilişkileri görmek zor oldu mu?

$Ö_7$: Hayır ilişkiyi biliyordum ama formülüze edemedim.

$Ö_7$ yanıtında herhangi bir açıklama yapmamış, sadece 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 basamaklı örneklerde kullanılan blok sayılarını hesaplamıştır. Bu örneklerle elde ettiği sayısal değerler üzerinden, formüle yönelik Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmuş ama doğru sonuca ulaşamamıştır. Genelleme açısından $Ö_7$'nin yanıtı incelendiğinde her basamakta kullanılan blok sayıları için Aritmetik Genelleme gerçekleştirmiş olduğu görülmektedir. Nitekim *"kendi olacağı basamak sayısı kadar bir öncekine eklenmiş"* olduğunu, diğer bir ifadeyle bir önceki merdivende kullanılan blok sayısına kendi basamak sayısı kadar blok eklenmiş olduğunu belirtmesi bu düşünceyi desteklemektedir. Bu genellemeye ise birkaç örnekte elde ettiği sayısal değerlere bağlı olarak ulaştığından, $Ö_7$'nin Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_8$'in aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıda verilmiştir:


Blok sayısı formülü n! 'dir.
3 basamaklı merdiven için en alta 3 basamak koymuş ve her basamak 1 azalarak devam etmiş.
n basamaklı olsaydı n basamakla başlayıp (n-1), (n-2) şeklinde en üst basamağa kadar devam edecekti bu yüzden n! olur.

Şekil 4. 19. $Ö_8$'in Merdiven problemine verdiği yanıt

$Ö_8$ yanıtında herhangi bir örneklendirmede bulunmamış, doğrudan formülü belirtmiş ve özelleştirme yapmamıştır. Basamaklar ve kullanılan blok sayıları arasındaki ilişkiyi ise *"her basamak bir azalarak devam etmiş"* ifadesiyle belirttiği gibi doğru olarak tespit etmiştir. Dolayısıyla soruda verilen şekle bakmış ve Algıya Dayalı Tahmin yapmıştır. Ancak yanıtının sonunda her ne kadar formülü n'ye bağlı olarak ifade etmiş ve Sembolik Genelleme'ye ulaşmış olsa da burada belirtmiş olduğu formül yanlıştır. Yapılan görüşmede yanıtını şu şekilde açıklamıştır:

$Ö_8$: Burada da işte basamaklar birer birer azaldığı için n. basamakta da n-1'e kadar gider dedim o yüzden blok sayısı faktöriyel olur dedim.

A: Anladım yalnız faktöriyel neydi?

$Ö_8$: Sayıların çarpımı.

A: Burada çarpım mı söz konusu sence? Mesela kaç blok var? (2 basamaklı durumda) 2, 1, toplam 3.

$Ö_8$: Yani olabilir mantıklı (gülüyor) toplam kullanmamız gerekiyormuş.

A: O an dalgınlığına mı geldi?

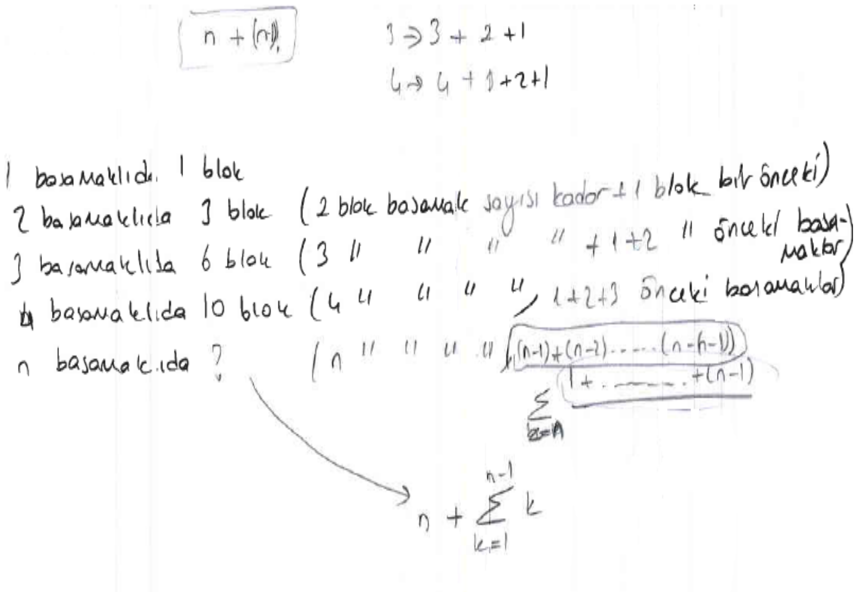
$Ö_8$: Şey geldi bana çarpım gibi geldi. Böyle devamlı sonsuza gidiyormuş gibi düşünmüştüm ama… Yanlış düşünmüşüm.

A: Ama soru açık bir problemdi, anlaşılması güç değildi değil mi?

$Ö_8$: Ya ben o an (soruyu çözerken) çok farklı düşünmüşüm (gülüyor).

Ö$_8$'in yanıtı ispat açısından incelendiğinde, genellemeye ulaşırken 3 basamaklı durumu göz önünde bulundurması ve formülü basamaklarda kullanılan blok sayılarının birer azaldığını ifade ederek açıklaması nedeniyle Ö$_8$'in soruda Genel Örnek türünden ispat gerçekleştirmiş olduğu söylenebilir.

Ö$_9$'un Merdiven problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 20. Ö$_9$'un Merdiven problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ Merdiven problemini çözümünde örneklemini 4 basamaklı merdiven durumuna kadar genişletmiş, sorunun bileşenleri arasındaki ilişkiyi açıkça göstermiş, Yeterli Özelleştirme yapmıştır. Ö$_9$ yapılan görüşmede problemin çözümüyle ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

A: İkinci problem, Merdiven probleminde nasıl düşündün Ö$_9$?

Ö$_9$: Bir basamaklıda bir blok, iki basamaklıda üç blok şeklinde burada bir dizi bulmaya çalıştım. Bir kural bulmaya çalıştım.

A: Evet.

Ö$_9$: Sonra 1'den n-1'e kadar olan sayıların toplamını elde ettim.

A: Mesela burada dört basamaklı için (dördüncü basamakta) dört blok kullanılacak, basamak sayısı kadar demişsin, sonra üç blok, sonra iki, bir…

Ö$_9$: Evet o şekilde düşündüm. 1'den n-1'e kadar olan sayıların toplamı şeklinde yazmaya çalıştım.

Yanıt tahmin açısından incelendiğinde, $Ö_9$ soruda verilen 3 basamaklı merdiven örneği üzerinde 1, 2 ve 3 basamaklı merdivenlerde kullanılacak toplam blok sayılarını ayrı ayrı incelemiş ve örneklemini 4 basamaklı merdiven durumuna genişletmiştir. Bu örneklerde ise blok sayılarının birer azalarak devam ettiğini görmüş ve bu ilişki yoluyla formüle ulaşmıştır. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin yaptığı söylenebilir. Problemin çözümüne bakıldığında $Ö_9$'un *"... blok basamak sayısı kadar + önceki basamaklar"* ifadesiyle her basamakta kendinden önceki basamaklarda kullanılan toplam blok sayısına kendi basamak sayısının eklendiğini belirtmiştir. Ancak bu ifade örüntünün herhangi bir terimini (örneğin 100 basamaklı merdivende kullanılan blok sayısı vb.) elde etmeyi sağlamamaktadır. Dolayısıyla önce Aritmetik Genelleme yapmış, sonrasında ise bu ifadeyi daha da geliştirerek Sembolik Genelleme'ye ulaşmıştır. Çözüme, problemle birlikte verilen görsel üzerinden ulaştığı ve basamak sayıları ile kullanılan blok sayıları arasında bir ilişkiden bahsettiği için $Ö_9$'un Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Merdiven problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme seviyeleri açısından incelendiğinde ise aşağıda Tablo 4. 2.'de görüldüğü gibi bir durumla karşılaşılmıştır.

Tablo 4. 2. incelendiğinde başarı düzeyi iyi olan öğrenciler arasında özelleştirme basamağından atlamalara daha sık rastlandığı göze çarpmaktadır. Öğrenciler herhangi bir özelleştirme yapmadan doğrudan bir sonraki basamağa geçiş yapmış ve doğru sonucu elde etmişlerdir. Özelleştirme basamağını gerçekleştiren tüm öğrenciler Yeterli Özelleştirme yapmışlardır.

Merdiven probleminde sadece bir öğrenci ($Ö_7$) Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmuş, diğer öğrencilerin tümü ise Algıya Dayalı Tahmin yapmışlardır.

İspat seviyeleri açısından Tablo 4. 2. incelendiğinde bir öğrencinin ($Ö_7$) Saf Deneycilik, diğer tüm öğrencilerin ise Genel Örnek veya Düşünce Deneyi türünden daha üst seviyede ispat gerçekleştirdikleri görülmektedir. Bununla birlikte, Algıya Dayalı Tahmin'de bulunan öğrencilerin sonrasında Genel Örnek ve Düşünce Deneyi türünden daha üst seviyede ispat yaptıkları, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunan öğrencinin ($Ö_7$) ise sonrasında Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı göze çarpmaktadır.

Tablo 4. 2. Merdiven problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yok	Algıya Dayalı Tahmin	Öğrenilmiş İspat	Sembolik Genelleme
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_3$	Yok	Algıya Dayalı Tahmin	Düşünce deneyi	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_5$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Yok	Algıya Dayalı Tahmin	Düşünce deneyi	Sembolik Genelleme
Düşük	$Ö_7$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Aritmetik Genelleme
	$Ö_8$	Yok	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme

Genelleme seviyeleri ile ilgili olarak öğrenciler arasında herhangi bir farklılık görülmemiş ve sadece bir öğrenci ($Ö_7$) Aritmetik Genelleme yapmış, diğer öğrencilerin tamamı yanıtlarının sonunda Sembolik Genelleme yapmışlardır.

Öğrencilerin 3. problem olan Kâğıt Ev problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir.

4.3. Kağıt Ev Problemine İlişkin Bulgular

KAĞIT EV

n katlı bir kağıt ev için gerekli olan kart sayısı kaçtır?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Bu 3 katlı bir kağıt evdir.

En üst kat birbirine yaslanmış iki kart ve altlarındaki bir karttan meydana getirilmiştir. Bir sonraki kat ise 4 karttan meydana gelmiş (birbirine yaslanmış 2'şer kart kümesi) ve tabanlarında yine birer kart vardır. Bu şekilde yapılan n katlı bir kağıt ev için gerekli olan kart sayısı kaçtır? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 4. 21. Kâğıt Ev Problemi

İlk olarak Ö$_1$'in yanıtı incelenmiştir. Ö$_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir:

Dikey ve yatay kart sıralarını ayrı ayrı incelersek

1. katta $\rightarrow 2$
2. katta $\rightarrow 4$
3. katta $\rightarrow 6$
⋮
n. katta $\rightarrow 2n$
+
Toplamda $\frac{2.(n).(n+1)}{2}$

$\boxed{n.(n+1)}$ tane dikey kart vardır.

1. katta $\rightarrow 1$
2. katta $\rightarrow 2$
3. katta $\rightarrow 3$
⋮
n-1. katta $\rightarrow n-1$
n. katta $\rightarrow 0$
+
$\frac{(n-1).n}{2}$ yatay kart vardır

Sonuç olarak n katlı kağıt ev için

$n.(n+1) + \frac{(n-1).n}{2}$

$\frac{2n^2+2n+n^2-n}{2}$

$\frac{3n^2+n}{2}$ kart vardır.

Şekil 4. 22. Ö$_1$'in Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt

Ö$_1$ Kâğıt Ev problemine verdiği yanıtta sadece soruda verilen şekle odaklı özelleştirme yapmış ve dik kartlar ile tabanda bulunan kartları ayrı ayrı düşünerek kat sayısı ile kart sayıları arasındaki ilişkiyi tespit etmiştir. Soruda ifade edileni ve istenileni doğru olarak anlamış, Yeterli Özelleştirme yapmıştır. Görüşmede sorunun çözümüyle ilgili olarak ise şunları belirtmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün?

$Ö_1$: Bunda da (şekli) parçaladım. İki dik ve bir tabanı parçalayarak topladım.

A: Güzel.

$Ö_1$: Dikey ve yatay (kart) sayıları ayrı ayrı inceledim. Yani her sırada ikişerli olması gerektiği için 2, 4, 6 şeklinde dikeyler var.

A: Anladım.

$Ö_1$: Her sırada da birer taban olması gerektiği için…

A: 1, 2, 3 şeklinde tabanlar var.

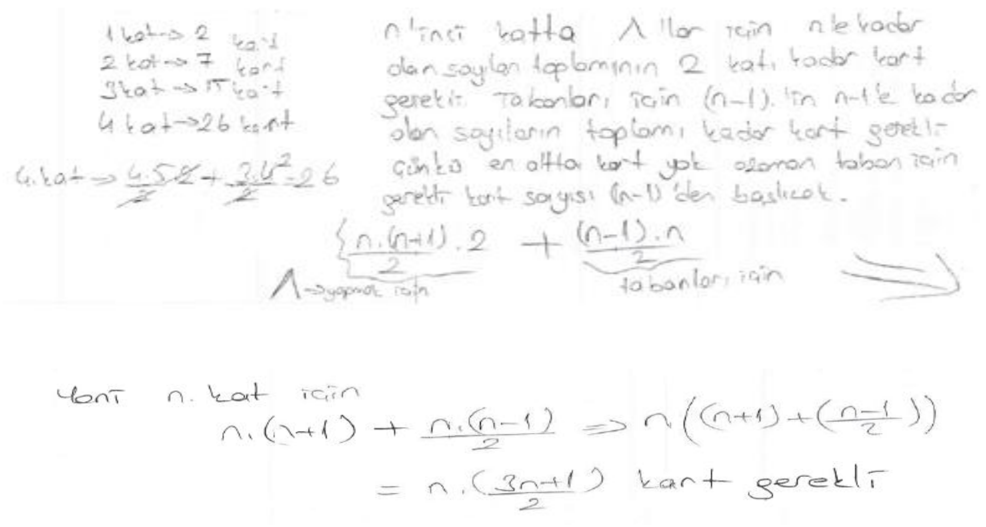
$Ö_1$: Aynen. Sonrasında da formüle döktüm ve iki formülü topladım.

$Ö_1$ formüle yönelik tahminini sadece sorunun görsel sunumuna, 3 katlı kâğıt ev durumuna göre yapmış, Algıya Dayalı Tahmin'de bulunmuştur. Formülü sembolik olarak ifade edebilmiş, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Bu genellemeye ulaşırken ise sadece 3 katlı durumu incelemiş, şekil üzerinde fark ettiği özelliklere göre kartları sınıflandırmış ve kart sayıları yoluyla formüle ulaşmıştır. Bu nedenle $Ö_1$'in Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_2$'nin Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt aşağıda verilmiştir.

Şekil 4. 23a. $Ö_2$'nin Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt 1

$Ö_2$ çözüme önce dört katlı bir kâğıt ev çizerek başlamıştır. Bu çizimle birlikte soru hakkında Yeterli Özelleştirme yaptığı söylenebilir. Çünkü hem çizimi hem de aşağıda görüldüğü üzere problemle ilgili yaptığı açıklamalar problemde anlatılanı ve istenileni anladığını, kat sayıları ile kart sayıları arasındaki ilişkiyi farkedebildiğini göstermektedir.



Şekil 4. 23b. Ö$_2$'nin Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt 2

Ö$_2$ yanıtında kartları dikey (ikililer) ve yatay (tabanda olan tekliler) şeklinde ayrı ayrı düşünmüştür. Sonra her iki kart grubunun sayılarını kat sayıları ile ilişkilendirmiş ve yanıtı ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Kâğıt Ev probleminde neler yaptın Ö$_2$?

Ö$_2$: Burada da aynı şekilde önce yazıp sonra ispatını buldum.

A: Yukarıdan aşağıya doğru ilerlemişsin değil mi? Burada 1. kat derken en üst katı mı ifade ettin?

Ö$_2$: Evet öyleydi zaten birinci kat en üst.

A: Önce ikilileri mi oluşturdun?

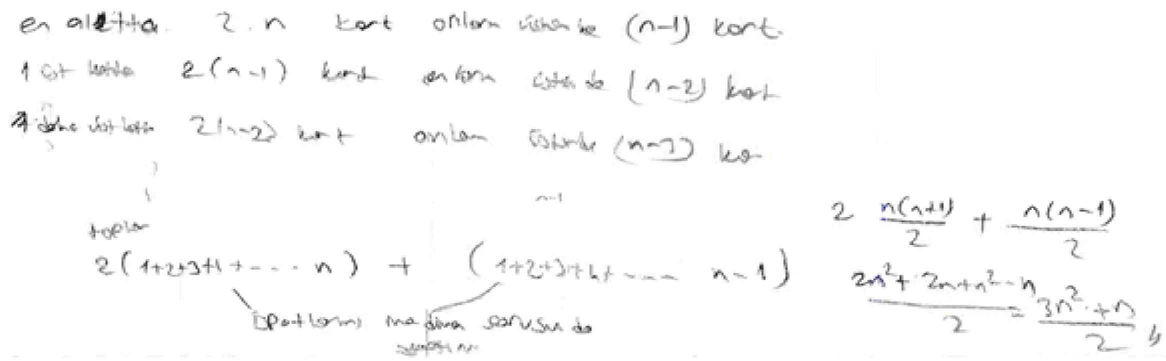
Ö$_2$: Evet ikilileri. Evet, öyle oldu.

A: Sonra tabandakileri mi düşündün?

Ö$_2$: Evet.

Ö$_2$ her ne kadar 1, 2, 3 ve 4 katlı kâğıt ev için gerekecek toplam kart sayısını hesaplamış olsa da soruyu kendi çizimiyle tekrar ifade etmiş ve soruyla ilgili açıklamayı da bu çizim odaklı yapmıştır. Dolayısıyla yanıtında Algıya Dayalı Tahmin söz konusudur. *"Burada da aynı şekilde önce yazıp sonra ispatını bulmuşum"* ifadesi Ö$_2$'nin de diğer çoğu arkadaşı gibi formüle ulaşma yolunu ispat olarak nitelediğini göstermektedir. Yanıtta ulaşılan genelleme tamamen dört katlı kâğıt ev odaklı olduğundan ve kart sayısı ile kat sayıları arasındaki ilişkiyi bu örnek üzerinden belirlediğinden Ö$_2$'nin Genel Örnek türünde ispat gerçekleştirdiği söylenebilir. Formül ise n'ye bağlı biçimde ifade edilmiş, Sembolik Genelleme yapılmıştır.

Ö$_3$'ün bu probleme ilişkin yanıtı aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 24. Ö$_3$'ün Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt

Ö$_3$ yanıtında herhangi bir örneklendirme yapmamış, kat sayıları ile kart sayıları arasındaki ilişkiyi ifade etmiş ve doğrudan n katlı kâğıt ev ile ilgili genellemede bulunmuş, özelleştirme basamağını atlamıştır. Yapılan görüşmede soru ve yanıtı ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Buna benzer bir problemle karşılaşmış mıydın daha önce?

Ö$_3$: Hayır böyle bir problem görmemiştim.

A: Nasıl düşündün burada?

Ö$_3$: Şimdi şöyle düşündüm. En üst katta iki çarpı bir tane kâğıt var.

A: Evet birinci kat olarak adlandırdın sanırım.

Ö$_3$: Evet. İkinci katta iki çarpı iki tane, üçüncü katta iki çarpı üç tane... Demek ki dördüncü katta iki çarpı dört tane kâğıt olacak.

A: Evet.

Ö$_3$: n. kata geçtim genelleme yaparak. (O katta) iki çarpı n tane kart olacak. Demek ki iki çarpı n eksi bir, iki çarpı n eksi iki böyle böyle gidecek.

A: Anladım.

Ö$_3$: Bir de bunların aralarında artı bir de tabanlardaki kartlar var diye düşündüm. Birinci katta bir tane olacak çünkü bir tane ikili var. İkinci katta iki tane ikili olduğu için (tabandaki kart sayısı) iki tane olacak.

A: Evet.

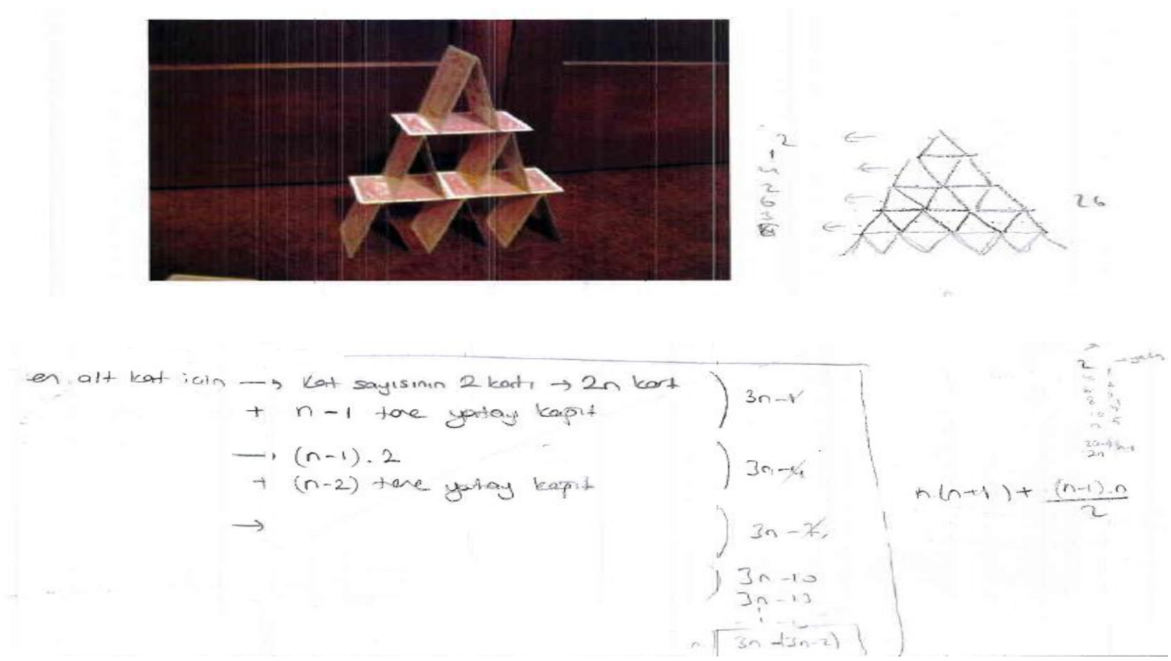
Ö$_3$: Yani 1, 2, 3, 4… n'ye kadar olduğu için de n'ye kadar toplam gelecek.

A: Ama en alt katta (tabandaki kâğıtlar) yoktu onu düşündün mü?

Ö$_3$: Evet zaten çözümde ondan bahsettim. Oradan formüllerin toplamı zaten kuralı getirdi.

Ö$_3$'ün yapılan görüşmede "*şimdi şöyle düşündüm. En üst katta iki çarpı bir tane kâğıt var"* ifadesiyle belirttiği gibi sadece soruda verilen 3 katlı kâğıt evi göz önüne almış olması, Algıya Yönelik Tahmin yaptığını göstermektedir. Çözümünü de 3 katlı kâğıt ev odaklı gerçekleştirmiş ve kart sayıları ile kat sayıları arasındaki ilişkiyi açık bir şekilde ifade etmiştir. Bu nedenle Ö$_3$'ün Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir. Soruda sembolik olarak bir formüle ulaşılmış, Sembolik Genelleme yapılmıştır.

Ö$_4$'ün Kâğıt Ev problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 25. Ö$_4$'ün Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt

Ö$_4$ yanıtında 5 katlı kâğıt ev çizmiş ve bu şekil üzerinden ilerlemiştir. Çizim ve çözümde ulaşılan sayısal değerler, soruda anlatılanın ve istenilenin doğru olarak anlaşıldığını, Yeterli Özelleştirme yapıldığını göstermektedir. Ö$_4$ kendisiyle yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruyu nasıl yaptın Ö$_4$?

Ö$_4$: Bunda da yine aynı şekilde, şekil üzerinden gittim.

A: Nasıl?

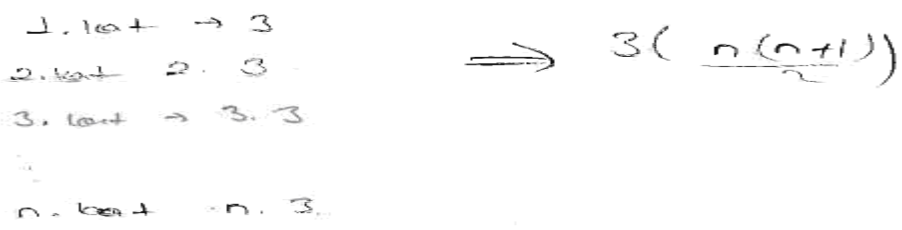
Ö$_4$: Şurada dört kattan meydana gelmiş. Dördüncü katta sekiz tane (ikili) kâğıt kullanılmış. O zaman burada 3.katta altı tane kullanılmış, yani kat sayısının iki katı kadar kâğıt kullanılmış. Aralara koyulanlar ise kat sayısının bir eksiği kadar.

A: Güzel.

Ö$_4$: Onlar için birkaç tane yazdım. Sonra ayrı ayrı topladım. Yani şu (ikili) kart sayılarını $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ve teklileri de n-1,n-2… zaten bunlar ardışık şekilde geliyor, onları da kendi arasında topladım. Oradan formüle ulaştım.

Ö$_4$ tabandaki kartları tavandaki kartlar gibi düşünmüş ve bunu da "*Aralara koyulanlar ise kat sayısının bir eksiği kadar*" şeklinde ifade etmiştir. Sonrasında yataydaki (tabana koyulan kartlar) ve dikeydeki kartları (ikililer) ayrı ayrı hesaplamış, bunlar için formüller geliştirerek sonucu bulmuştur. Kendisiyle yapılan görüşmede "*Şurada dört kattan meydana gelmiş. Dördüncü katta sekiz tane (ikili) kâğıt kullanılmış.*" ifadesiyle de belirttiği gibi çizmiş olduğu 5 katlı kağıt ev örneğine odaklı çözüm yapmış olması nedeniyle Ö$_4$'ün formüle ulaşırken Algıya Dayalı Tahmin türünden bir tahminde bulunduğu ve Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir. Yanıtının sonunda ise formülü matematiksel olarak ortaya koymuş ve Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir.

Ö$_5$'in aynı problemle ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 26. Ö$_5$'in Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ yanıtında verilen şekil üzerinden çözümünü gerçekleştirmiştir. 3 katlı kâğıt ev için her bir katta kullanılan kart sayısını ayrı ayrı hesaplamış, 3. kata kadar ilerlemiş ve sonrasında bu durumu n. kata genellemiştir. Çözümünü ise şu şekilde ifade etmiştir:

A:Bu problemde nasıl düşündün Ö$_5$?

Ö$_5$*: Birinci katta (en üst kat) üç tane kâğıt vardı. İkinci katta iki tane üçlü kâğıt vardı. Sonra bunları n. katta* $n \cdot 3$ *tane kâğıt olması lazım diye düşündüm.*

A: Güzel.

Ö$_5$*: Bunların hepsini toplamak gerekiyor. Üç parantezine alıp toplam formülünden buldum.*

Ö$_5$ gerçekleştirdiği özelleştirme ile kat sayısı ve kart sayıları arasındaki ilişkiyi bulmuştur. Ancak en alt kattaki kartların tabanlarında kart olmadığını fark edememiştir. Bu nedenle özelleştirme eksik kalmış, Kısmi (Eksik) Özelleştirme yapılmıştır. Kendisi de bu durumu görüşmede şu şekilde ifade etmiştir:

A: Burada gözden kaçmış bir şey olabilir mi sence?

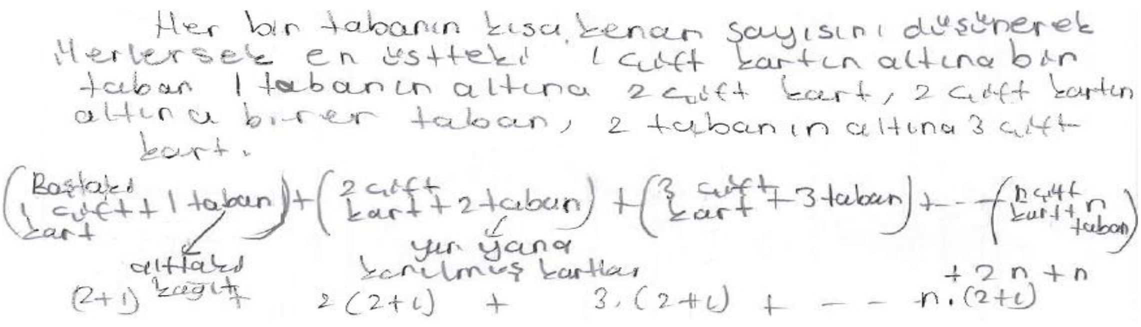
Ö$_5$*: Aaa... Alttakilerde (en alt kat) şey yok. (Tabanlarında) Kâğıtlar, tekliler yok. Orayı hiç düşünmemiştim.*

A: Galiba orayı fark edememişsin.

Ö$_5$*: Evet şu an fark ettim (gülüyor).*

Ö$_5$'in sadece 3 katlı kâğıt ev çizimi üzerinden formülle ilgili bir tahmine varmış olması, Algıya Dayalı Tahmin yaptığını göstermektedir. Problemin çözümünde sadece 3 katlı kâğıt ev düşünülerek kart sayıları ve kat sayıları arasında ilişki kurulduğundan, Genel Örnek türünden ispat yapıldığı söylenebilir. Çözümün sonunda her ne kadar doğru olmasa da çözüm yöntemiyle uyumlu, n'ye bağlı bir formüle ulaşılmış, Sembolik Genelleme yapılmıştır

Ö$_6$'nın Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt aşağıdadır:


Her bir tabanın kısa kenar sayısını düşünerek ilerlersek en üstteki 1 çift kartın altına bir taban 1 tabanın altına 2 çift kart, 2 çift kartın altına birer taban, 2 tabanın altına 3 çift kart.

(Baştaki 1 çift kart + 1 taban) + (2 çift kart + 2 taban) + (3 çift kart + 3 taban) + - - + (n çift kart + n taban)

alttaki kâğıt

yan yana koyulmuş kartlar

(2+1) + 2(2+1) + 3.(2+1) + - - n.(2+1) + 2n + n

Şekil 4. 27a. Ö$_6$'nın Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt 1

Ö$_6$ yanıtında en üst kattan başlayarak çözüme ilerlemiştir. Kartları çift kartlar ve tabandaki kartlar şeklinde ayırmıştır. Ancak yanıtında kullandığı ifadeler incelendiğinde n.

kat için n çift kart + n taban şeklinde bir ifade kullandığı, en alt katın tabanında da kartlar olması gerektiğini düşündüğü görülmektedir. Dolayısıyla $Ö_6$ bu problemde Kısmi (Eksik) Özelleştirme yapmıştır. Yapılan görüşmede ise yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

$Ö_6$: Burada yukarıdan aşağıya doğru gittim. Burada her (dik) kart çiftinin altına bir taban (kart) koyuluyor.

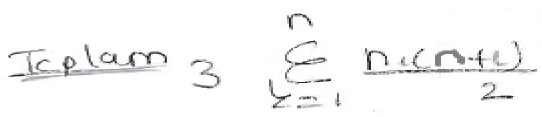
A: Evet.

$Ö_6$: Kısa kenar sayısını düşündüm yani şuradaki 1, 2, 3 olmuş o zaman yani çizgi sayısı (tabandaki kart sayısı) kadar çift kart koyularak gidiliyor.

A: Anladım.

$Ö_6$: Öyle yapıldığında (en üst katta) baştaki bir çift kart artı bir taban, alttaki kart. Sonra iki çift kart artı iki taban olmuş. Böyle ilerleyince en son hep iki artı bir geliyor. Bir çarpı iki artı bir, iki çarpı iki artı bir, n'ye kadar gidiyor. $n \cdot 3$... o da toplam sembolü ile ifade edilince üç parantezinde $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

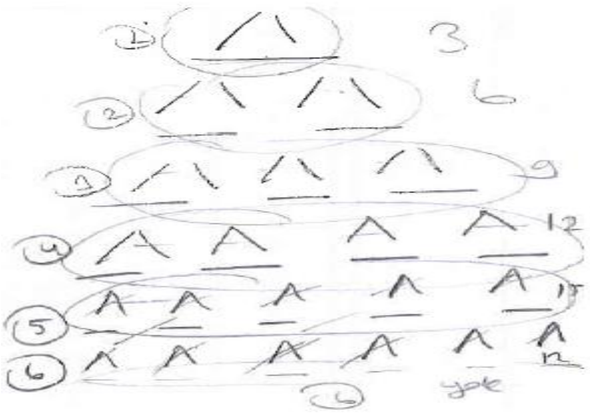
Her ne kadar çözüm yolu doğru olsa da $Ö_6$ burada en alt katın tabanında da kartlar olması gerektiğini düşünmüştür. Bunun sonucu olarak da formülü yanlış ifade etmiş ve şu şekilde göstermiştir:



Şekil 4. 27b. $Ö_6$'nın Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt 2

$Ö_6$ problemin görsel gösterimi odaklı ancak eksik bir çözüm yapmış ve başka herhangi bir örneklendirmede bulunmamıştır. Bu nedenle formülü Algıya Dayalı Tahmin yoluyla tahmin ettiği söylenebilir. Formülü matematiksel dil kullanarak ifade etmiş, Sembolik Genelleme türünden bir genellemede bulunmuştur. Sorunun çözümünde sadece bir örnekten yararlanmış ve bu örnek üzerinde yapmış olduğu inceleme sonucuna göre cevabını şekillendirmiştir. Dolayısıyla $Ö_6$'nın Genel Örnek türünden ispat yapmış olduğu ifade edilebilir.

Ö$_7$'nin Kâğıt Ev problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 28a. Ö$_7$'nin Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt 1

Ö$_7$ yanıtında 6 katlı kâğıt evi çizerek örneklendirmede bulunmuştur. Her bir katta bulunan kart sayılarını hesaplamıştır. Burada yaptığı çizime ve elde ettiği değerlere bakıldığında Yeterli Özelleştirme yapmış olduğu görülmektedir. Kendisi ile yapılan görüşmede soruya verdiği yanıtla ilgili olarak şu şekilde ifadelerde bulunmuştur:

A: Bu problemde neler yaptın Ö$_7$?

Ö$_7$: Ben burada aslında buldum, ilerledim ama şeyi fark ettim; en son koyduğumuz kaçıncı kat ise o kat sayısı kadar altında taban olmuyor. Onu formüle dökemedim orada problem yaşadım.

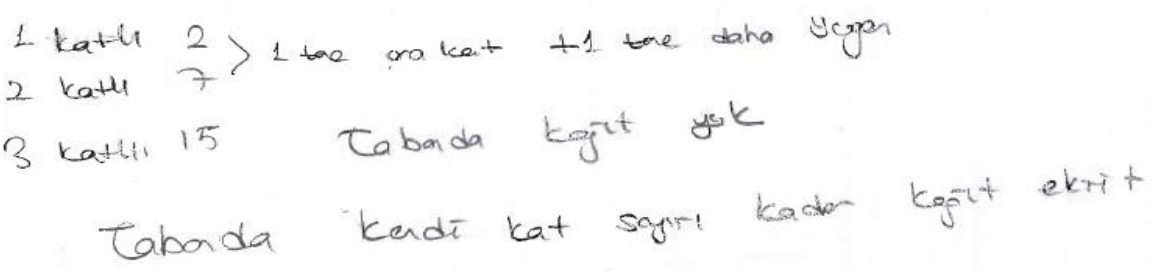
A: Sadece orada mı zorlandın?

Ö$_7$: Evet çünkü mesela birinci katta altta bir tane kâğıt yok, ikinci katta eğer bu son kat olacaksa altta iki tane kart yok.

A: Evet.

Ö$_7$: O yüzden mesela şurada (altı katlı çizimini gösteriyor) altıncı kata kadar geldiğimde altta (tabanda) altı tane kart olmuyor. Onu formüle dökemedim. Yoksa bunlar hani üçün katları şeklinde ilerliyor ama son katta problem oluyor.

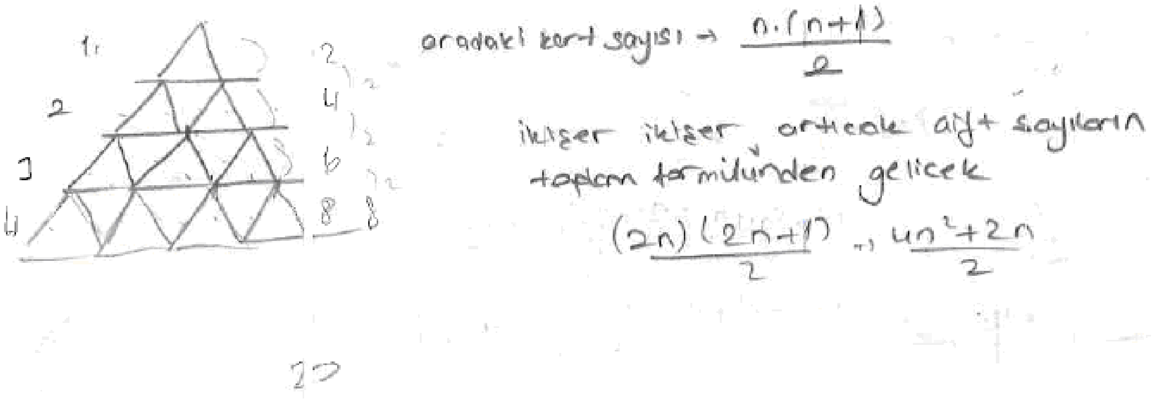
Kendisiyle yapılan görüşmede de ifade ettiği gibi Ö$_7$'nin yaşadığı problem, soruyu doğru olarak anlamasına rağmen anladıklarını formüle dökememiş olmasıdır. Bu nedenle Ö$_7$ aşağıda görüldüğü üzere yanıtının devamında herhangi bir formül elde edememiştir:



Şekil 4. 28b. Ö$_7$'nin Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt 2

Ö$_7$ yanıtının devamında 1, 2 ve 3 katlı kâğıt evde var olan kart sayılarını incelemiş ancak çözüme daha fazla devam edememiştir. Bu şekilde Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türü tahminde bulunmaya çalışsa da formülü elde etmede başarılı olamamış, herhangi bir genelleme ve ispat yapamamıştır.

Ö$_8$'in aynı problem ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 29. Ö$_8$'in Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt

Ö$_8$ yanıtında 4 katlı kâğıt ev çizmiş, her katta kullanılan kart sayılarını ayrı ayrı incelemiş ve çözümü bu çizim odaklı gerçekleştirmiştir. Ancak çiziminde en alt katın tabanında da kartlar olduğunu göstermiştir. Sorunun özelleştirme aşamasında soruyla ilgili yönergeler tam olarak yanıta yansıtılmamıştır. Dolayısıyla Ö$_8$ Kısmi (Eksik) Özelleştirme yapmıştır. Kartları aradaki (tabandaki) kartlar ve diğerleri (ikililer) olarak ayırmıştır. Bu durumu ise görüşmede şu şekilde ifade etmiştir:

A: Dört katlı kâğıt evi örnek vermişsin değil mi?

Ö$_8$: Evet sonra aradaki kartları hesapladım.

A: Tekli kartları mı?

$Ö_8$: Evet tekli kartları saydım.

Sonrasında ise tekli kartların birer ve çiftlerin (ikililer) ise ikişer arttığını düşünüp onlara uygun formüller geliştirmeye çalışmıştır:

A: Burada bir tane, burada iki tane diyerek aradaki kartların sayıları birer artarak gidiyor şeklinde mi düşündün?

$Ö_8$: Evet öyle düşündüm.

A: Sonrasında aradaki kartlar için formül gelmiş.

$Ö_8$: Evet o formülü buldum. Şu…($\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ formülünü gösteriyor)

A: Şu da çiftler için… 2, 4, 6, 8 şeklinde mi düşündün?

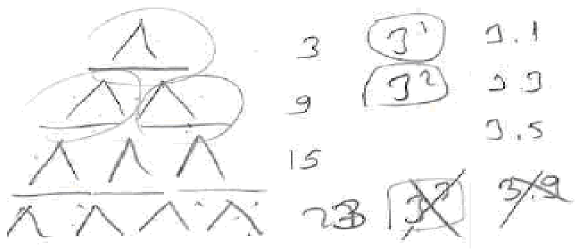
$Ö_8$: Evet aynen öyle ardı ardına artıyor diye düşündüm ama burada ikisinin formülünü kuramadım. Yani toplam şeklinde düşünemedim.

A: n yerine 2n yazarak n'li formülü 2n'li formüle mi dönüştürdün?

$Ö_8$: Evet n yerine 2n yazdım. Aynen öyle (gülüyor). Ne kadar karıştırmışım... 2'şer arttığı için 2n'li yaptım. Öyle.

Yukarıda da ifade ettiği gibi $Ö_8$'in yaptığı hatalardan biri çift kartların sayısını veren formülü bulurken tek kartlar için kullandığı formülde n yerine 2n yazması olmuştur. Bu durum ise işlem bilgisi eksikliğinden kaynaklanmış olabilir. Dolayısıyla formülü yanlış bulmuştur. $Ö_8$ formülü oluştururken sadece kendi çizimi olan, diğer bir ifadeyle sorunun görsel temsili olan 4 katlı kâğıt evi kullanmış, Algıya Dayalı Tahmin gerçekleştirmiştir. Her ne kadar yanlış da olsa çözümü ile tutarlı bir formüle ulaşmış ve Sembolik Genelleme yapmıştır. Bu genellemeye ulaşırken sadece 4 katlı kağıt evi ele almış, ona bağlı yorumlamalarda bulunmuştur. Bu nedenle $Ö_8$'in Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_9$'un Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt aşağıdadır:



Şekil 4. 30. $Ö_9$'un Kâğıt Ev problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında 4 katlı kâğıt ev çizmiş ve bu örnek üzerinde yaptığı incelemelerle cevabı bulmaya çalışmıştır. 4 katlı kâğıt evde önce en üst iki kat için kullanılacak kart sayılarını ayrı ayrı hesaplamıştır. Sonrasında ise 3 katlı ve 4 katlı kâğıt ev için kullanılacak toplam kart miktarını sırasıyla göstermiştir. Ancak 4 katlı kâğıt evde kullanılacak kart sayısını yanlış hesaplamıştır. Buna rağmen soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı görüldüğünden Ö$_9$'un Yeterli Özelleştirme yapmış olduğu söylenebilir. Yanıtının devamında ise herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Yapılan görüşmede yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda neler yaptın?

Ö$_9$: Bir katlıda üç tane kâğıt kullanılır. Sonra iki katlıda 9, üç katlıda 15… Bu şekilde yine bir diziden gitmeye çalıştım ama…

A: Formülü elde edemedin mi?

Ö$_9$: Evet yazamadım.

Ö$_9$ cevabında 3 ve 4 katlı kâğıt ev için kullanılacak kart miktarını bularak bir formüle ulaşmaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır. Dolayısıyla formüle yönelik Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunduğu söylenebilir. İspat ve genelleme açısından yanıt incelendiğinde ise herhangi bir genelleme ve ispat yapılmadığı görülmektedir.

Kağıt Ev problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme seviyeleri açısından incelendiğinde ise aşağıda Tablo 4. 3.'te verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4. 3. incelendiğinde başarı düzeyi iyi olan öğrencilerin özelleştirme basamağında en başarılı öğrenci grubu olduğu görülmektedir. Bununla birlikte Kısmi (Eksik) Özelleştirmenin daha çok orta seviye öğrenciler tarfaından yapıldığı dikkat çekmektedir. 3 öğrenci (Ö$_5$, Ö$_6$ ve Ö$_8$) Kısmi (Eksik) Özelleştirme yaparken, bir öğrenci (Ö$_3$) özelleştirme yapmamış ve diğer basamaklara geçmiş, bu öğrencilerin tamamı yanıtlarının sonunda Sembolik Genelleme'ye ulaşmışlardır.

Öğrenciler Algıya Dayalı Tahmin veya Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminlerde bulunmuşlardır. İyi ve orta düzeyde başarılı öğrencilerin tamamının Algıya Dayalı tahmin yaptığı, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmini ise sadece düşük başarı düzeyindeki öğrencilerin (Ö$_7$ ve Ö$_9$) yaptığı görülmüştür.

Tablo 4. 3. Kâğıt Ev problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_3$	Yok	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_5$	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
Düşük	$Ö_7$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_8$	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok

İspat ve genelleme açısından Tablo 4. 3. incelendiğinde ise başarı düzeyi düşük olan iki öğrencinin ($Ö_7$ ve $Ö_9$) ispat ve genellemede bulunmadığı, başarı düzeyi düşük öğrencilerin ispat ve genelleme basamağında en başarısız öğrenci grubu olduğu görülmektedir. İspat ve genellemenin gerçekleşmediği her iki durumda da Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminin kullanılmış olması dikkat çekmektedir. İspat basamağını gerçekleştirmiş olan öğrencilerin tamamı Genel Örnek türünden ispat yapmış, Saf Deneycilik, Kritik Deney ve Düşünme Deneyi türünden ispata ise hiç rastlanmamıştır. Genellemenin yapıldığı tüm durumlarda ise öğrenciler Sembolik Genelleme seviyesinde cevaplar vermiştir.

Öğrencilerin 4. problem olan Tokalaşma problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir:

4.4. Tokalaşma Problemine İlişkin Bulgular

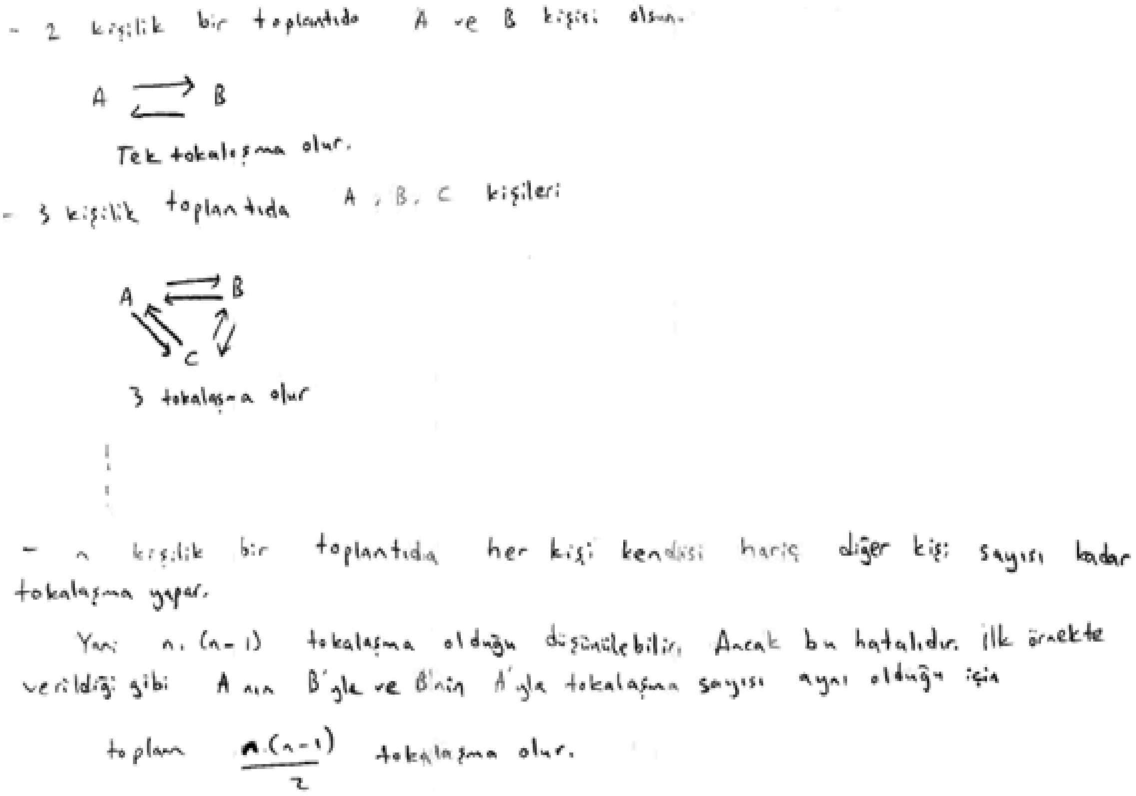
TOKALAŞMA

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Yapılan bir toplantıda bulunan herkesin toplantı öncesi orada bulunan herkesle tokalaştıklarını hayal edin. 2 kişi kendi aralarında tokalaştığında 1 tokalaşma meydana gelir. 3 kişi kendi arasında tokalaştığında ise 3 tokalaşma meydana gelecektir. Bu şekilde düşündüğümüzde toplantıda n kişi olduğunu ve her birinin birbirleriyle tokalaştığını varsayarsak meydana gelecek tokalaşma sayısını bir formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 4. 31. Tokalaşma Problemi

İlk olarak Ö$_1$'in yanıtı incelenmiştir. Ö$_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir.


- 2 kişilik bir toplantıda A ve B kişisi olsun.

$A \rightleftarrows B$

Tek tokalaşma olur.

- 3 kişilik toplantıda A, B, C kişileri

3 tokalaşma olur

- n kişilik bir toplantıda her kişi kendisi hariç diğer kişi sayısı kadar tokalaşma yapar.

Yani n. (n−1) tokalaşma olduğu düşünülebilir. Ancak bu hatalıdır. İlk örnekte verildiği gibi A nın B'yle ve B'nin A'yla tokalaşma sayısı aynı olduğu için

toplam $\frac{n.(n-1)}{2}$ tokalaşma olur.

Şekil 4. 32. Ö$_1$'in Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_1$ Tokalaşma problemini bildiğini belirtmiştir. Bu nedenle burada özelleştirme, tahmin ve genellemeye yönelik herhangi bir değerlendirme yapılmamıştır. Yapılan görüşmede problem ve verdiği yanıt ile ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Tokalaşma sorusunda nasıl düşündün?

Ö$_1$: Bu da yine tokalaşma yapabilmek için en az iki kişinin gerekmesi olayı. Burada düşüneceğimiz ikinci şey benim sizinle tokalaşmamın sizin benimle tokalaşmamla aynı olması. O yüzden son durumda ikiye böldük.

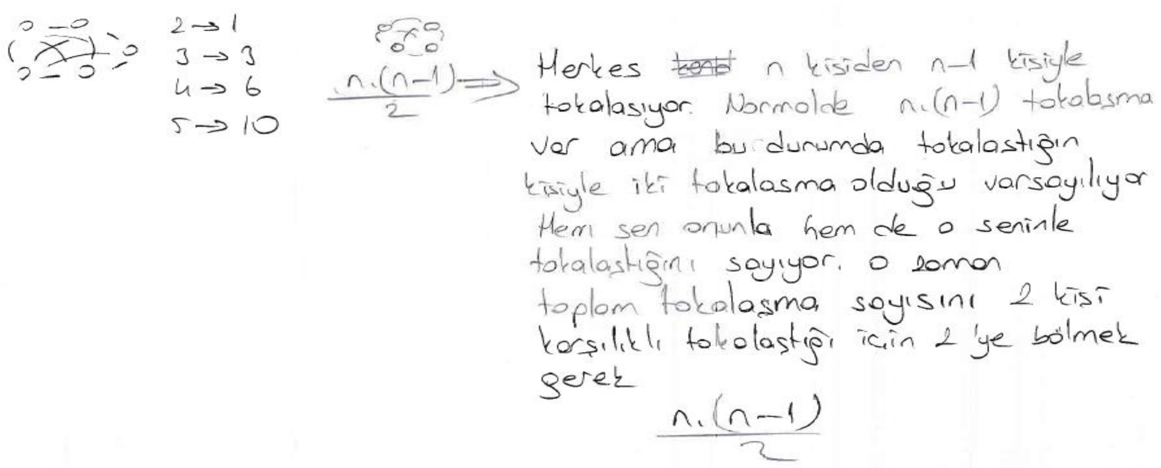
A: Daha önceden rastladığın bir problem miydi?

Ö$_1$: Rastladım evet.

Eğer değerlendirme yapılacak olsaydı 2, 3 kişilik örnekler ile Ö$_1$'in Yeterli Özelleştirme yapmış olduğu, soruyu şekilsel olarak ifade etmiş ve bu şekillerdeki ilişkiler üzerinden sonuca ulaşmış olması nedeniyle Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminde bulunduğu, formülü gösterim şekli nedeniyle de Sembolik Genelleme yaptığı belirtilebilirdi. Ancak tüm bu durumlar değerlendirmeye katılmamış ve Ö$_1$'in yanıtı sadece ispat açısından incelenmiştir.

Burada Ö$_1$'in soruyla ilgili ifade ettiği hem yazılı hem sözel yanıtlarda herhangi bir özel örneği referans göstermeden açıklamalar yapması nedeniyle Düşünce Deneyi türünden ispat gerçekleştirdiği söylenebilir.

Ö$_2$'nin aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıdadır:



Şekil 4. 33. Ö$_2$'nin Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_2$ yanıtında 5 kişilik tokalaşma durumunu çizerek örneklendirmiş, 2, 3, 4 ve 5 kişilik durumlarda mevcut olan tokalaşma sayılarını ayrı ayrı hesaplamıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede ise bu problemle daha önceden karşılaştığını ifade etmiştir:

A: Bu daha önceden rastladığın bir soru muydu Ö$_2$?

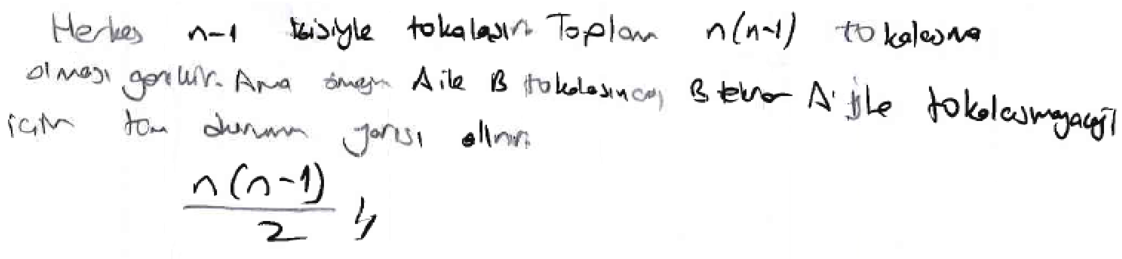
Ö$_2$: Evet. Bunu zaten sürekli derslerde…

A: Kullanıyor musunuz?

Ö$_2$: Evet.

Ö$_2$ Tokalaşma probleminin daha önceden karşılaştığı bir problem olduğunu ifade ettiğinden özelleştirme, tahmin ve genelleme ile ilgili herhangi bir değerlendirmede bulunulmamıştır. Ancak sorunun çözümünden Düşünce Deneyi yoluyla ispat gerçekleştirildiği söylenebilir. Çünkü Ö$_2$ formülü ifade ettikten sonra herhangi özel bir örneği referans göstermeden n'li durumla ilgili olarak direkt kişi sayısı ile tokalaşma sayısı arasındaki ilişkiyi nedenleriyle birlikte açıklamıştır.

Ö$_3$'ün 4.probleme verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 34. Ö$_3$'ün Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_3$ yanıtında herhangi bir örneklendirmede bulunmamış, doğrudan soruyu n kişilik duruma genellemiştir. Kendisiyle yapılan görüşmede ise bu problemi bildiğini belirtmiştir:

A: Bu bildiğin bir soru muydu?

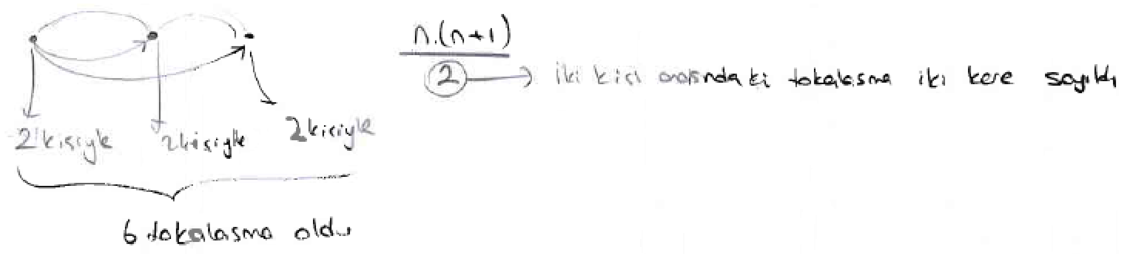
Ö$_3$: Bu belli bir soru tipi direkt formül olarak veriyorlar (derste). Kural olarak (ders öğretmenleri) veriyorlar, sorularda biz de direkt uyguluyoruz. İspatını yapmak için de 1 kişi n-1 kişiyle tokalaşır diye düşündüm.

A: Anladım.

Ö$_3$: Demek ki n tane kişi olsa $n \cdot (n-1)$ tane (tokalaşma) olması lazım ama aynı iki kişi bir defa daha tokalaşamayacağından ikiye böldüm.

Daha önceden bildiği bir soru olduğundan Ö$_3$'ün bu soruda özelleştirme, tahmin veya genelleme yaptığından söz edilemez. Ancak "*ispatını yapmak için de 1 kişi $n-1$ kişiyle tokalaşır diye düşündüm*" ifadesiyle ispatı kendisinin düşündüğünü belirtmiştir. Yanıtı ispat açısından değerlendirildiğinde Ö$_3$'ün bu soruda Düşünce Deneyi türü ispat yaptığı söylenebilir. Çünkü özel bir durumu referans göstermeden, doğrudan n'li durumu örneklendirmiş ve kişi sayısı ile tokalaşma sayısı arasındaki ilişkiyi açıklamıştır.

Ö$_4$'ün Tokalaşma problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:

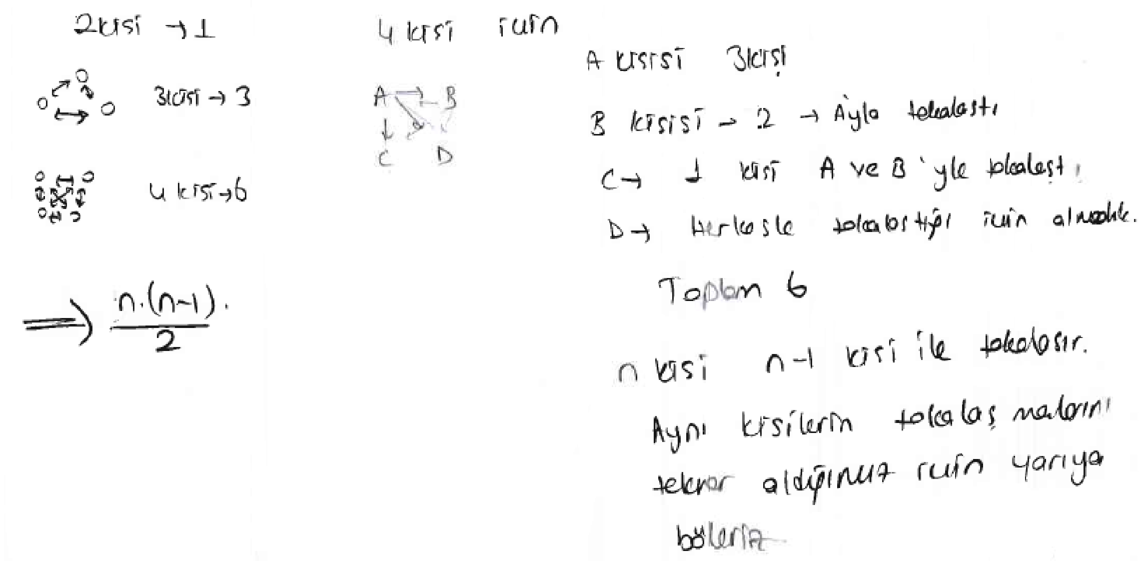


Şekil 4. 35. Ö$_4$'ün Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_4$ yanıtında 3 kişilik durumu çizerek örneklendirmiş ve burada mevcut olan tokalaşma sayısını kendi çizimi yoluyla göstermiştir. Sonrasında doğrudan formülü belirtmiş ve formüldeki ifadenin ikiye bölünme nedenini açıklamıştır. Burada her ne kadar *"iki kişi arasındaki tokalaşma iki kere sayıldı"* uyarısında bulunmuş olsa da çiziminde elde ettiği tokalaşma sayısı değeri için bu durumu düşünmemiştir. Ö$_4$ yapılan mülakatta soruyu bildiğini söylemiştir. Bu nedenle Ö$_4$'ün sadece ispat yöntemi değerlendirilecektir. Ancak Ö$_4$ her ne kadar sorunun cevabını bildiğini ifade etse de bulduğu formül yanlıştır. Üstelik vermiş olduğu 3 kişilik durumda, çizimi üzerinde elde ettiği tokalaşma sayısı da hatalıdır. Bunun nedeni Ö$_4$'ün soruda istenen formülü yanlış hatırlaması ve çözümünü de bu yanlış formüle uydurmaya çalışıyor olması olabilir.

Ö$_4$'ün kendisiyle yapılan görüşmede "*Burada mesela üç kişilik bir toplulukta bir kişi iki kişiyle tokalaşıyor. Tokalaştığı kişi de aynı zamanda kendisiyle tokalaşma yaptığı için* $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$*. formülü oluyor.*" şeklindeki açıklaması, Ö$_4$'ün soruda sadece 3 kişilik tokalaşma durumunu ele aldığını ve bu örnek üzerinden kişi sayısı ile tokalaşma sayısı arasındaki ilişkiyi gösterdiğini düşündürmektedir. Dolayısıyla Ö$_4$'ün Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_5$'in Tokalaşma problemine verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 36. Ö$_5$'in Tokalaşma problemine verdiği yanıt

$Ö_5$ yanıtında 2, 3, 4 kişilik tokalaşma durumlarını çizerek göstermiş ve her bir durumdaki tokalaşma sayısını ayrı ayrı hesaplamıştır. Sonrasında ise özel olarak 4 kişilik örneği ele almış ve bu örnek ile formülü açıklamaya çalışmıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede soruyu daha önceden görmüş olduğunu belirtmiş ve çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu problemde nasıl düşündün $Ö_5$?

$Ö_5$: Ben ilk başta kolay olsun diye iki kişiyi ele aldım. Hani iki kişi karşılıklı bir kere tokalaşır. Daha sonra üç kişiyi de kendi aralarında tokalaştırdım, üç (tokalaşma) oldu.

A: Anladım.

$Ö_5$: Daha sonra dört kişiye geçtim. (Kişileri) A, B, C, D diye isimlendirdim.

A: Evet.

$Ö_5$: A kişisi önce üç kişiyle tokalaştı. Sonra B kişisi A ile tokalaştığı için onu saymadım ve iki kişi ile tokalaştı. C kişisi A ve B ile tokalaşmıştı sadece bir kişiyle tokalaşmış gibi oldu. Sonra D de herkesle tokalaşmış olduğu için onu almadım. Toplam altı tane (tokalaşma oldu) dedim.

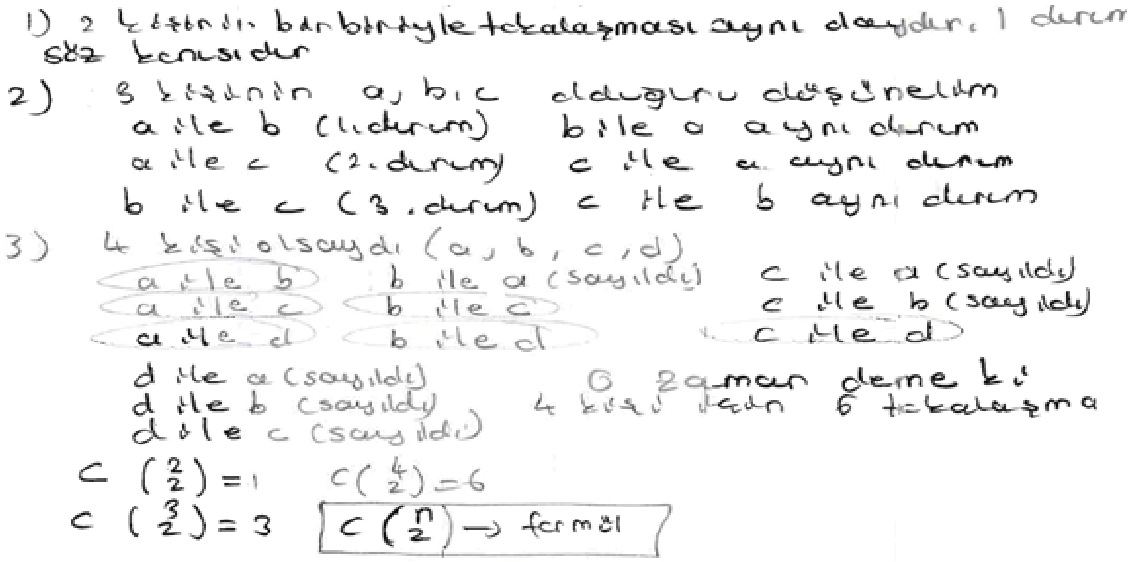
A: Güzel.

$Ö_5$: Daha sonra n kişi için n-1 kişi ile tokalaşır diye düşündüm. Sonra aynı kişi ile tokalaşma (bir daha) sayılamayacağı için ikiye böldüm, yarısını aldım.

$Ö_5$ formülün açıklamasında bu örneklerle herhangi bir ilişki kurmamış, doğrudan "*daha sonra n kişi için n-1 kişi ile tokalaşır diye düşündüm*" demiş ve n kişili durumu düşündüğünü ifade etmiştir. Açıklamasında herhangi bir örneği referans göstermemiş ve tokalaşma sayısı ile kişi sayıları arasındaki ilişkiyi mantıksal açıdan ortaya koymuş olması nedeniyle $Ö_5$'in yanıtında Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_6$ ise Tokalaşma problemini daha önceden gördüğünü belirtmiştir. Aşağıda görüldüğü gibi probleme verdiği yanıtta 2, 3 ve 4 kişilik tokalaşmaları ayrı ayrı incelemiştir. Her bir örnekteki tokalaşma sayılarını bulmuş, detaylı bir şekilde ifade etmiş ancak kişi sayısı ile meydana gelen tokalaşma sayıları arasında bir ilişkiden bahsetmemiştir.

Ö$_6$'nın Tokalaşma problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



1) 2 kişinin birbiriyle tokalaşması aynı olaydır. 1 durum söz konusudur
2) 3 kişinin a, b, c olduğunu düşünelim
a ile b (1. durum) b ile a aynı durum
a ile c (2. durum) c ile a aynı durum
b ile c (3. durum) c ile b aynı durum
3) 4 kişi olsaydı (a, b, c, d)
a ile b b ile a (sayıldı) c ile a (sayıldı)
a ile c b ile c c ile b (sayıldı)
a ile d b ile d c ile d
d ile a (sayıldı) O zaman demek ki
d ile b (sayıldı) 4 kişi için 6 tokalaşma
d ile c (sayıldı)
$C\binom{2}{2}=1$ $C\binom{4}{2}=6$
$C\binom{3}{2}=3$ $\boxed{C\binom{n}{2} \rightarrow \text{formül}}$

Şekil 4. 37. Ö$_6$'nın Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_6$ kendisiyle yapılan görüşmede yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Tokalaşma problemini nasıl çözdün Ö$_6$?

Ö$_6$: Şimdi iki kişinin birbirleriyle tokalaşması zaten aynı yani bir tane olan, o bir durum. Yani biri onunla, o bununla bir tane durum.

A: Evet.

Ö$_6$: Üç kişinin hani A, B, C olduğunu düşündüm. A ile B bir durum, A ile C bir başka durum, B ile C de başka durum. Oradan B ile A aynı durum olduğu için üç durum geliyor.

A: Evet.

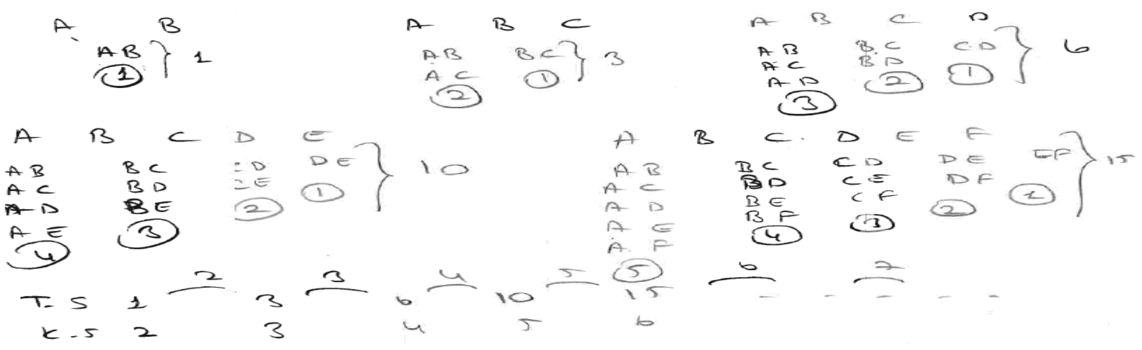
Ö$_6$: Yani bunları, aynı durumları saymıyoruz

A: Anladım.

Ö$_6$: Dört kişi olsaydı da altı tokalaşma çıkmış. Oradan demek ki iki kişi de birse, üç kişide üçse, oradan n'nin ikili kombinasyonu geliyor. Tokalaşma için iki kişiye ihtiyaç olduğundan.

Ö$_6$ yanıtında verdiği örneklerde sadece meydana gelecek tokalaşma sayılarını hesaplamıştır. Buna bağlı olarak formülünü açıklamaya çalışmış ancak kişi sayısı ile tokalaşma sayısı arasında herhangi bir ilişkiye değinmemiştir. Bu nedenle Ö$_{6}$'nın Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_{7}$'nin Tokalaşma problemi ile ilgili yanıtı aşağıdadır:



Şekil 4. 38. Ö$_{7}$'nin Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_{7}$ yanıtında 2, 3, 4, 5 ve 6 kişili durumları örneklendirmiş, her bir durumda oluşan tokalaşma sayısını ayrı ayrı hesaplamıştır. Sonra bu örneklerde oluşan tokalaşma sayıları arasındaki artışı incelemiş ancak bir sonuca ulaşamamıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve yanıtı ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu problemde nasıl düşündün Ö$_{7}$?

Ö$_{7}$: Bunda baya ilerlemiştim (gülüyor). Bunun formülünü ben biliyordum aslında o yüzden baya sinir olmuştum bu soruda.

A: Formül aklına mı gelmedi?

Ö$_{7}$: Formülü gelmedi aklıma ve bunda baya o yüzden ilerlemiştim.

A: Anladım.

Ö$_{7}$: Ama güzel de gitmiştim.

A: Gitmişsin dört, beş ve altı kişili örneklere kadar ilerlemişsin değil mi hatta altı kişili örnekte on beş tane tokalaşma gerçekleşir demişsin.

Ö$_{7}$: Evet formülü biliyordum (gülüyor). Hani YGS denemelerinde de bu tarz sorular çözdük de o an hatırlayamadım formülü, sinir oldum.

A: İnsan aklında bir formül olsun onu kullansın istiyor sanırım?

Ö$_{7}$: Evet.

A: Formül üretme zor mu geliyor?

Ö$_{7}$: Evet. Formül burada (olsun) böyle gideyim çıkar bir şeyler…

Ö$_7$'nin yanıtında kullanmış olduğu örnekler, soruda ifade edileni ve istenileni doğru olarak anladığını göstermektedir. Dolayısıyla Yeterli Özelleştirme gerçekleştirmiştir. Ancak burada özelleştirme yapmasına rağmen sorunun bileşenleri arasındaki ilişkiye bakmamış, kişi sayısı ile tokalaşma sayısı arasındaki bağıntıya dikkat etmemiş, bununla ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

Ö$_7$: Burada güzel şeyler de gelmişti aslında. Bir, iki, bir aritmetik olarak da hep buralarda azalmıştı.

A: Artış miktarına mı dikkat ettin orada?

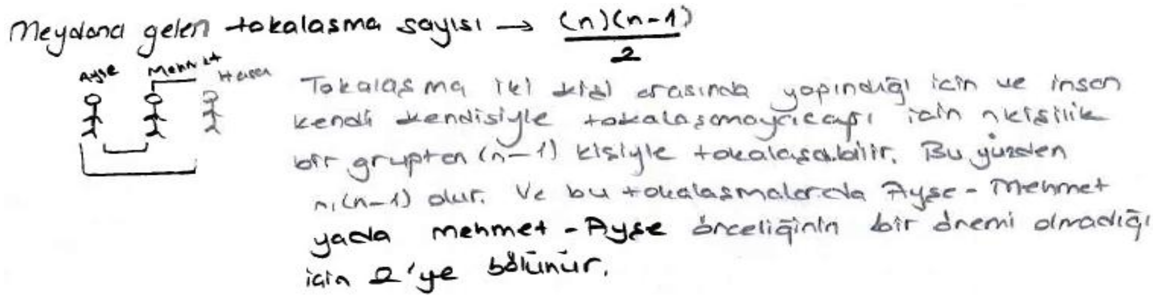
Ö$_7$: Evet tokalaşma sayısı iki, üç, dört, beş, altı, yedi hep öyle artarak gidiyor.

A: Artarak gidiyor.

Ö$_7$: Kişi sayısı iki iken, üç iken, dört iken…

Yukarıda da görüldüğü üzere Ö$_7$ sadece kişi sayısının değişimi ile birlikte tokalaşma sayısında meydana gelen değişimi incelemiştir. Ancak o an hatırlayamadığı formülü hatırlamaya çalışması nedeniyle sorunun bileşenleri arasındaki ilişkilere dikkat edememiş olabilir. Herhangi bir tahmin, genelleme ve ispat yapmamıştır.

Ö$_8$'in aynı probleme verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 39. Ö$_8$'in Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_8$ her ne kadar 3 kişinin birbiriyle tokalaşmasını çizerek göstermiş olsa da yanıtında bu örneğe referansta bulunmamış ve problemin bileşenleri arasındaki ilişkiyi, herhangi bir örnek göstermeksizin ifade etmiştir. Kendisiyle yapılan görüşmede ise soru ve yanıtı ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Bu problemi biliyor muydun?

Ö$_8$: Biliyordum. Bunun mantığını da biliyordum.

A: Nasıl bir mantık vardı burada?

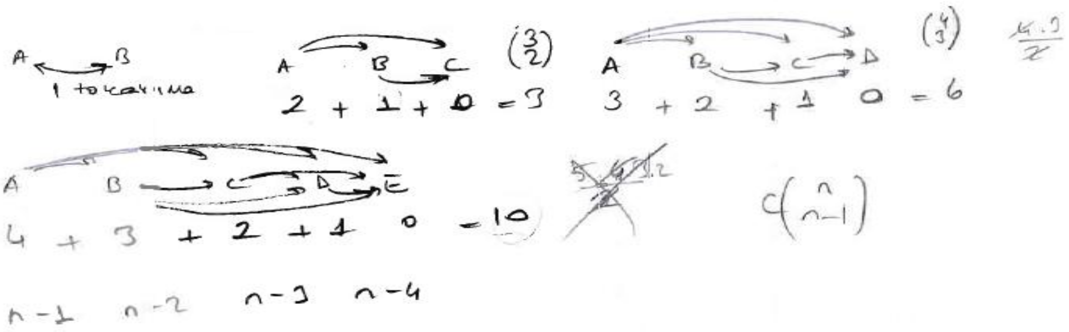
Ö$_8$: Bir kişi toplulukta kendisiyle tokalaşamayacağı için n kişilik bir grupta n-1 kişiyle tokalaşabilir. Bu yüzden (toplam tokalaşma sayısı) $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ olur.

A: Neden 2'ye böldün?

Ö$_8$: Aynı iki kişi arasındaki tokalaşma iki defa sayılamayacağı için ikiye bölünür.

Daha önceden bildiği bir soru olması nedeniyle yanıt sadece ispat açısından değerlendirildiğinde; herhangi bir örneği referans göstermeden doğrudan durumun mantığını açıkladığından, Ö$_8$'in Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_9$'un Tokalaşma problemine verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 40. Ö$_9$'un Tokalaşma problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında 2, 3, 4 ve 5 kişili durumları örneklendirmiş, her bir durumda oluşacak olan tokalaşma sayısını hesaplamıştır. Yanıtında her ne kadar 2'li, 3'lü ve son olarak n-1'li kombinasyonları göstermiş olsa da bir formüle ulaşamamıştır. Yapılan görüşmede soru ve vermiş olduğu yanıt ile ilgili şunları ifade etmiştir:

A: Tokalaşma probleminde nasıl düşündün Ö$_9$ bu problemi daha önceden biliyor muydun?

Ö$_9$: Bunu biliyordum ama ben bunun formülünü hatırlayamamıştım.

A: Anladım.

Ö$_9$: Sonra formülü çıkarmaya çalıştım. Yine bir kombinasyon olduğunu biliyordum ama…

A: Formül aklına mı gelmedi?

Ö$_9$: Evet formül aklıma gelmediği için uygulayamadım.

Burada da formülü hatırlayamama durumu söz konusudur. $Ö_9$ muhtemelen formülü hatırlayabilmek amacıyla 5 kişilik duruma kadar örnekleri ilerletmiş ve Yeterli Özelleştirme gerçekleştirmiştir. Örnekler yoluyla bir tahmine ve genellemeye ulaşmaya çalışmış ancak bunda başarılı olamamıştır. Dolayısıyla burada Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmaya çalıştığı söylenebilir. Formüle ulaşamama nedenlerinden biri de çözümde göstermiş olduğu örnekleri incelemek yerine unutmuş olduğu formülü daha fazla örnekle hatırlamaya çalışması olabilir. Herhangi bir genelleme ortaya koymamış, ispat yapmamıştır.

Tokalaşma problemine verilen yanıtların öğrenci başarı düzeylerine göre ispat basamağı açısından incelenişi sonucu elde edilen bulgular Tablo 4. 4.'te verilmiştir:

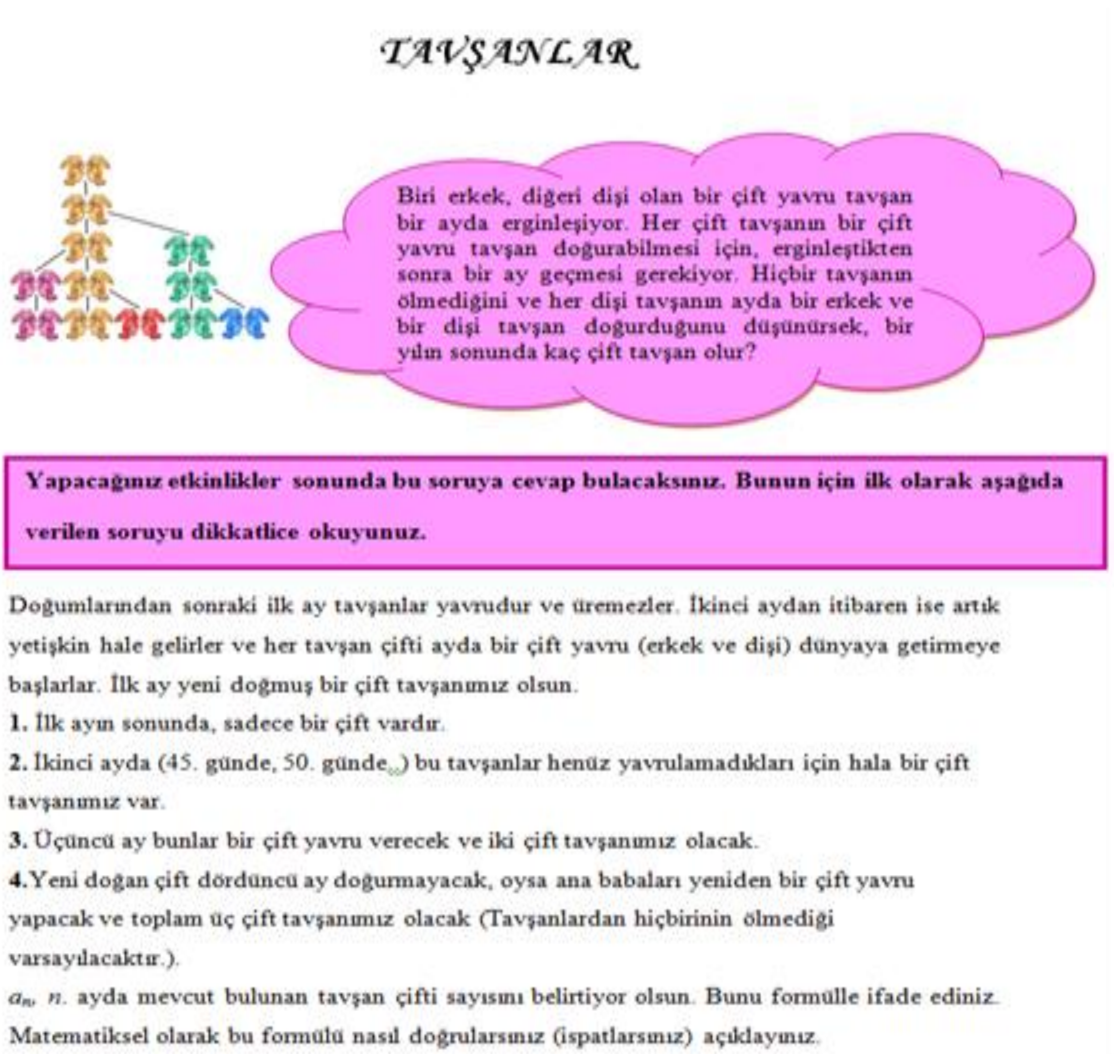
Tablo 4. 4. Tokalaşma probleminde kullanılan ispat türleri

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	İspat Türü
İyi	$Ö_1$	Düşünce deneyi
	$Ö_2$	Düşünce deneyi
	$Ö_3$	Düşünce deneyi
Orta	$Ö_4$	Genel Örnek
	$Ö_5$	Düşünce deneyi
	$Ö_6$	Saf Deneycilik
Düşük	$Ö_7$	Yok
	$Ö_8$	Düşünce deneyi
	$Ö_9$	Yok

Öğrencilerin ispat seviyeleri açısından Tablo 4. 4. incelendiğinde orta ve iyi başarı düzeyindeki öğrencilerin en başarılı öğrenci grubu oldukları görülmektedir. İspat basamağında başarılı olmuş öğrencilerin büyük çoğunluğu Düşünce Deneyi türünde ispat yaparken, bir öğrenci ($Ö_4$) Genel Örnek, bir öğrenci ise ($Ö_6$) Saf Deneycilik türünden ispat gerçekleştirmiştir. 4. problemde başarı düzeyi düşük olan öğrencilerin ispat basamağında zorlandıkları görülmüştür. Örneğin başarı düzeyi düşük olan iki öğrenci ($Ö_7$ ve $Ö_9$) ispat yapamamıştır.

Öğrencilerin 5. problem olan Tavşanlar problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir.

4.5. Tavşanlar Problemine İlişkin Bulgular



Şekil 4. 41. Tavşanlar Problemi

İlk olarak $Ö_1$'in yanıtı incelenmiştir. $Ö_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir.

Bu tavşan çftleri Fibonacci Dizisi belirtir. Fibonacci önceki iki terimin toplamının bir sonraki terimi verdiği bir sayı dizisidir. İfade edecek olursak

1 1 2 3 5 8 13 21 34 ..... n

(1+0) (1+1) (3+2) (3+5) .....

Şekil 4. 42. $Ö_1$'in Tavşanlar problemine verdiği yanıt

Ö$_1$ yanıtında herhangi bir örnek vermeden formülü sözel olarak ifade etmiştir. Örüntüyü oluşturan terimler arasındaki ilişkiyi (1+1, 3+2 vb. şekilde) göstermiştir. Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve çözümü ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

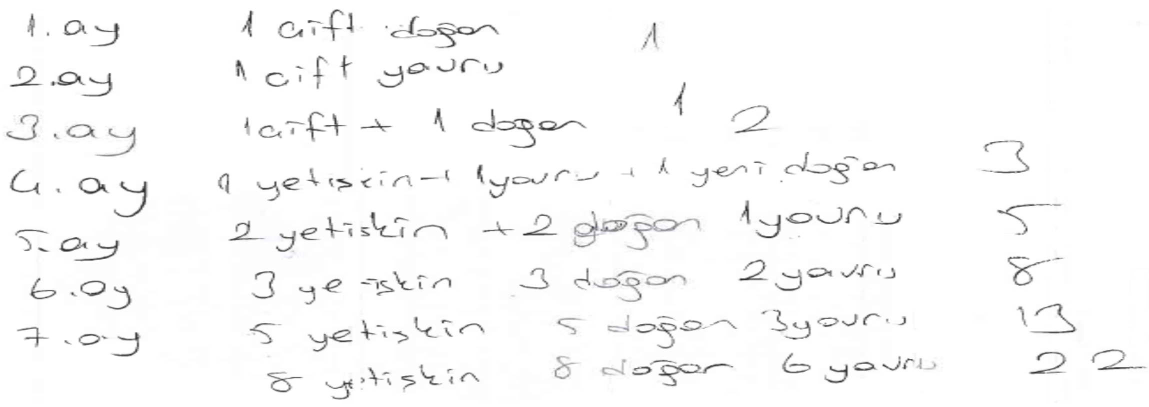
Ö$_1$: Tavşan problemini ortaokulda matematik öğretmenimiz bahsetmişti Fibonacci dizisini anlatırken böyle bir anlatış da var diye. Görünce oradan aklıma geldi.

A: Çözmüş müydü hocanız o sırada?

Ö$_1$: Ya direkt hikâyesini anlatmıştı çok fazla detaya girmemişti. Bir de bu Fibonacci dizisi benim özel ilgi duyduğum bir dizi. Yani bir kitap okuduktan sonra, Da Vinci'nin Şifresi'ni okuduktan sonra baya bir ilgimi çekmişti o dizi.

Ö$_1$'in formülü bilmesine rağmen formülü sembolik olarak sunamamış olması dikkat çekmektedir. Ö$_1$ problemi daha önceden bildiğini belirttiği için bu sorudaki özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme durumu incelenmemiştir.

Ö$_2$'nin aynı problem ile ilgili yanıtı ise aşağıda verilmiştir.



Şekil 4. 43. Ö$_2$'nin Tavşanlar problemine verdiği yanıt

Ö$_2$ yanıtında her ay mevcut bulunan tavşan çifti sayısına odaklanmış ve 7. aya kadar örneklendirmede bulunmuştur. Örnekler incelendiğinde Ö$_2$'nin problemde anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Ancak burada herhangi bir formül elde edememiştir. Yapılan görüşmede Ö$_2$ problem ve yanıtı ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Bu problemi daha önce görmüş müydün ya da böyle bir soru?

Ö$_2$: Hayır.

A: Neler yaptın burada?

$Ö_2$: Bu soruda o kadar sıkılmıştım ki çünkü bunda da bir örüntü oluşturamadım. Oradan da bir formül çıkmadı.

A: Bir formül elde edemedin mi?

$Ö_2$: Evet. Biraz da kuramadım sanırım.

A: Aslında burada doğru sayıları bulmuşsun. Yalnız sayılar arasında bir ilişki oluşturamamışsın.

$Ö_2$: Evet.

A: Yanıtında elde ettiğin sayılar arasındaki ilişki sana görülemeyecek bir ilişkiymiş gibi mi geldi? O mu zorladı seni?

$Ö_2$: Hayır aslında ben bu son sayıları da çok zor buldum. Bunlarda da çok kafam karıştı. Doğan yavru vs. bunları da buldum. Baktım ama hiçbir formül bulamadım.

$Ö_2$ sözel biçimde verilen problemi sayısal verilere dönüştürmede ve ilgili sayıları elde etmede yaşadığı sıkıntılardan bahsetmiştir. Soru 7. aya kadar örneklendirilmiş olduğundan formülün Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türü tahmin yoluyla elde edilmeye çalışıldığı söylenebilir. Ancak herhangi bir formül bulunamamış, bir genelleme ve ispat yapılmamıştır.

$Ö_2$ ile yapılan görüşmede problemin çözümü ile ilgili olarak şu şekilde bir diyalog geçmiştir:

A: Evet. Şimdi mesela baksak seninle yeniden 1, 1 ilk iki ay değil mi?

$Ö_2$: Evet.

A: Üçüncü ayda ne olmuş? Toplam 2 çift tavşan. Diğer ayda ne olmuş? Üç.

$Ö_2$: Evet.

A: Diğer ayda? Beş. Bir sonraki ayda, sekiz. Bak görüyor musun? Sanki bir şey var?

$Ö_2$: Bir önceki kadar artıyor. Bunu hiç fark etmemiştim (gülüyor).

A: Şu ikisinin (önceki iki aydaki tavşan sayıları) toplamı buna (o aydaki toplam tavşan sayısına) geliyor. Şu ikisinin toplamı ona geliyor (diğer bir aydan örnek verildi). Sence bunu görememenin nedeni ne olabilir?

$Ö_2$: Belki de önyargı.

A: Önyargı?

Ö$_2$: Evet.

A: Yani bu soru burada soruluyorsa zor bir soru olmalı gibi mi?

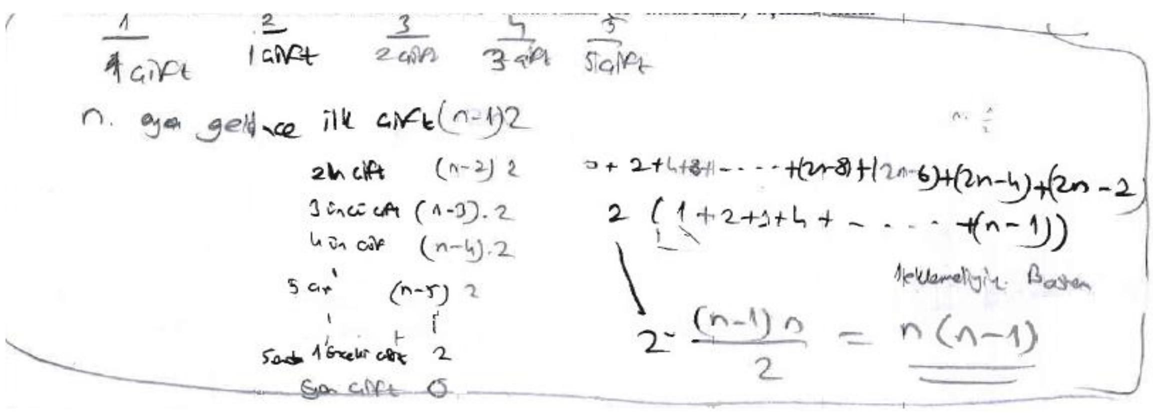
Ö$_2$: Yok. Ben tavşan sorusunu en sona bıraktım hani okuduktan sonra uzun diye. Şey herkes baya bir…

A: Zorlanınca… (uygulama esnasında öğrenciler bu problemde zorlandıklarını ifade etmişlerdi).

Ö$_2$: Evet çok zor diye hiç şey yapamadım.

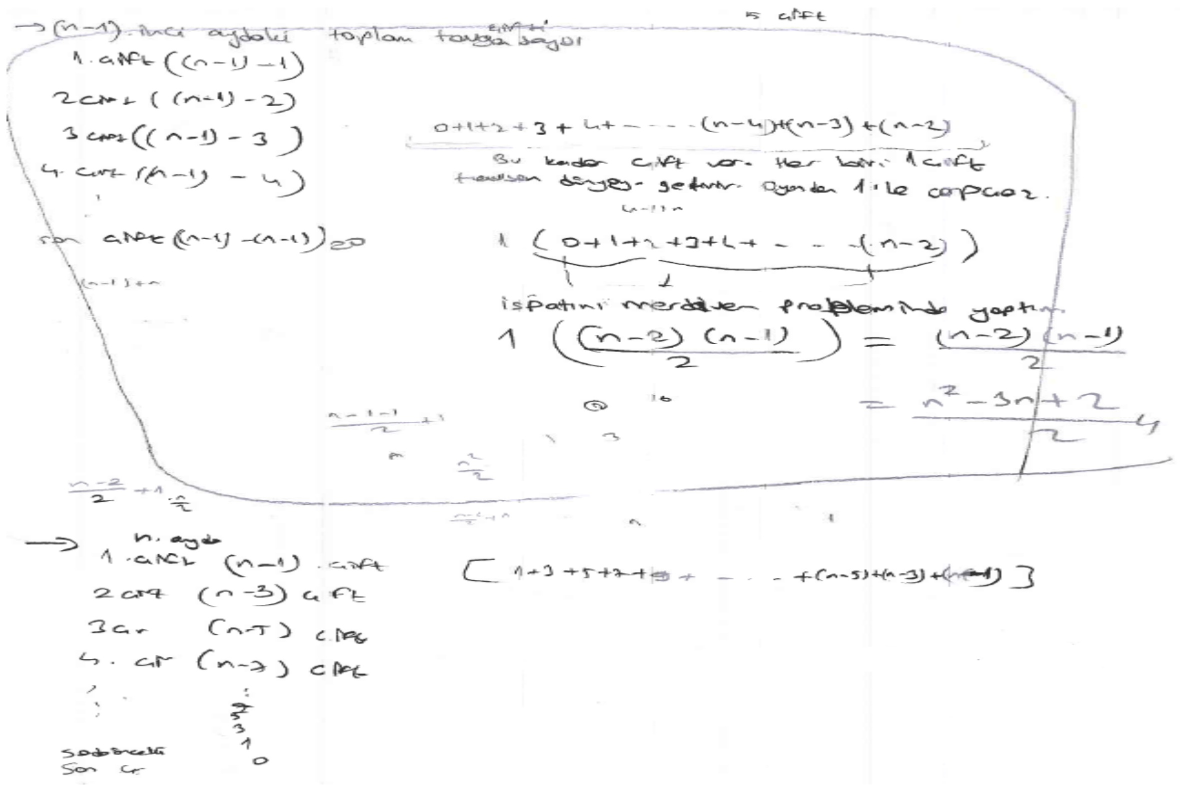
Ö$_2$ yapılan bu görüşmede soruyu çözememe nedeni olarak soru hakkındaki ön yargısını göstermiştir.

Ö$_3$'ün Tavşanlar problemine verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



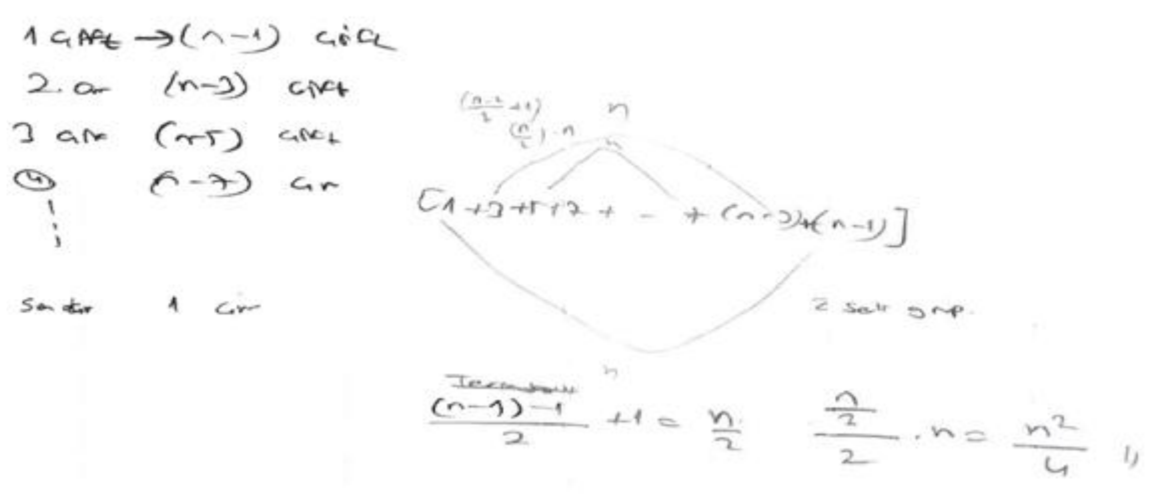
Şekil 4. 44a. Ö$_3$'ün Tavşanlar problemine verdiği yanıt 1

Ö$_3$ yanıtında önce ilk 5 aydaki tavşan çifti sayısını her ay için ayrı ayrı hesaplamıştır. Kullandığı değerler ise soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını göstermektedir. Dolayısıyla Ö$_3$, Yeterli Özelleştirme yapmıştır. Sonrasında n. ayda her bir tavşan çiftinden meydana gelecek tavşan çifti sayısını düşünmüştür. Ancak bulduğu formül elde ettiği değerleri sağlamamaktadır.



Şekil 4. 44b. Ö$_3$'ün Tavşanlar problemine verdiği yanıt 2

Sonra yine n. ayda sırasıyla 1. çiftin, 2. çiftin, 3.çiftin… ve son çiftin sahip olacağı yavru sayısını hesaplayarak yeni bir işleme başlamıştır. Ancak burada bulduğu formül de elde ettiği sayıları sağlamamaktadır. Bunun üzerinde çözüm üzerinde bir defa daha düşünmüş ve şu şekilde cevaba ulaşmaya çalışmıştır:



Şekil 4. 44c. Ö$_3$'ün Tavşanlar problemine verdiği yanıt 3

Yukarıda görüldüğü üzere Ö$_3$ benzer bir yolla cevabı üçüncü kez bulmayı denemiş, burada ulaştığı formülü ise cevap olarak belirtmiştir. Kendisiyle yapılan görüşmede soru ve yanıtı ile ilgili olarak aşağıdakileri ifade etmiştir:

A: Tavşanlar sorusunu daha önceden görmüş müydün?

Ö$_3$: Hayır hiç görmemiştim.

A: Her ayda oluşacak tavşan çifti sayısını mı belirlemeye çalıştın?

Ö$_3$: Evet öyle yaptım.

A: Şimdi burada sizden bir formül isteniyor. Formül deyince aklına ne geliyor?

Ö$_3$: Direkt mesela şöyle bir şey geliyor $\frac{n^2}{4}$ *gibi...*

A: n'li bir ifade mi geliyor?

Ö$_3$: Evet n'yi verecek bize, biz de direkt (değerini) yazıp geçeceğiz. Öyle bir şey geliyor.

A: Bu zamana kadar hep öyle sorular mı gördün?

Ö$_3$: Evet.

Ö$_3$'ün burada formülü n'li ve n yerine değer konulduğunda sonucu verecek, biraz da karmaşık bir ifade şeklinde düşündüğü anlaşılmaktadır. Görüşmenin devamında, sorunun cevabının gösterilişi eşliğinde şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Birinci ayda kaç çift tavşan var?

Ö$_3$: Bir çift.

A: İkinci ayda yine bir çift. Sonra yavrulamaya başlıyorlar ve üçüncü ayda iki çift tavşan oluyor. Dördüncü ayda kaç çift?

Ö$_3$: Üç çift.

A: Şimdi sadece şunları (ilk beş aydaki tavşan sayısı) düşün.

Ö$_3$: Çok düşündüm de…

A: Aralarında bir şey fark edebiliyor musun?

Ö$_3$: Şu ikisinin (önceki iki aydaki tavşan çifti sayıları) toplamı şunu (o ayda mevcut bulunan tavşan çifti sayısı) veriyor.

A: Formül istenince bu şekilde de bir formül belirtilebiliyor.

Ö$_3$: Evet ama işte aklıma direkt n geldi.

A: n geldi ona odaklandın sanırım.

Ö$_3$: Evet genel bir formül türetmeye çalıştım. Türettim çok da hani mesela…

A: Tam denk gelmemiş olabilir.

Ö$_3$: Yazıyorum mesela $\frac{49}{4}$ *gibi şeyler geliyor. Böyle bir şey (tavşan sayısı) olamayacağından…*

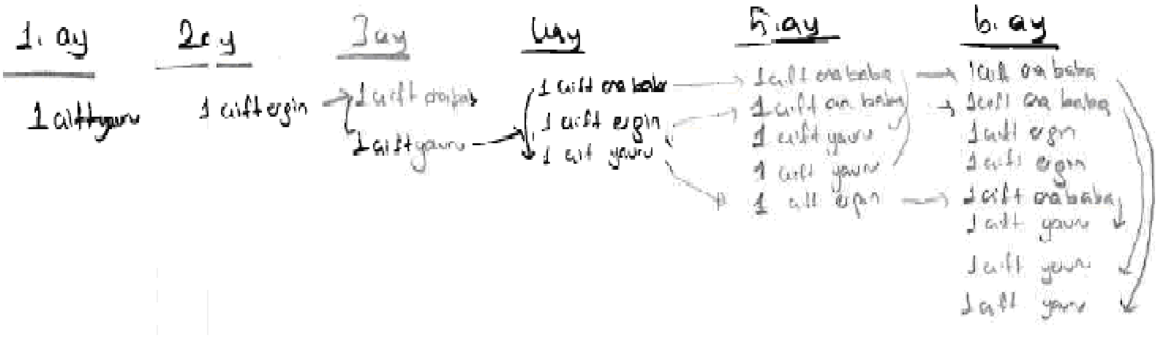
A: Belki biraz daha basit düşünsen formülü bulabilir miydin?

Ö$_3$: Ama hani biz genelde öyle kompleks sorular çözüyoruz ya… Öyle basit şeyler (aklımıza) gelmiyor. Çok zorlayıcı, çok düşünülmesi gerekiyor yani. Bir de hani alışkanlık oldu yani. Mesela ilk soruda birden n'ye kadar, o kâğıt sorusunda 1'den n'ye kadar diyince bu da öyle gibi geldi. Yine n'li bir şeydir gibi geldi.

Görüldüğü üzere burada Ö$_3$'ü en çok etkileyen faktör, formüle yönelik başta sahip olduğu düşüncedir. Ö$_3$'ün soruya vermiş olduğu yanıtlar değerlendirildiğinde ise soruyu sayısal değerlerle ifade edebilmiş olduğu görülmektedir.

Ö$_3$'ün Tavşan problemine vermiş olduğu farklı yanıtların tümünde de tavşan çiftlerini ayrı ayrı hesapladığı görülmektedir. Bu nedenle Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım ile tahminde bulunduğu söylenebilir. Her durumda da çözümle uyumlu bir formüle ulaşmış, Sembolik Genelleme yapmıştır. Bu genellemelere ulaşırken her ne kadar başlangıçta 5. aya kadar olan durumu ele almış olsa da orada elde ettiği değerleri sonrasında kullanmamış ve özel bir örneği referans göstermeden cevabını direkt olarak n. aya genellemiştir. Dolayısıyla Ö$_3$'ün Düşünce Deneyi türünden ispat yapmış olduğu söylenebilir.

Ö$_4$'ün aynı probleme verdiği yanıt aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 4. 45. Ö$_4$'ün Tavşanlar problemine verdiği yanıt

Ö$_4$ yanıtında soruyu 6. aya kadar doğru bir şekilde örneklendirmiştir. Vermiş olduğu örnekler, problemde anlatılanı ve istenileni anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Ancak çözüm bununla sınırlı kalmış ve daha ileriye taşınamamıştır. Ö$_4$ yapılan görüşmede soru ve yanıtı ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Tavşanlar sorusu aslında tarihte ünlü bir problemdir Fibonacci dizisi ile ilgili. Daha önce bu soruyla ilgili bilgin yoktu sanırım.

Ö$_4$: Fibonacci dizisiyle ilgili bilgim vardı ama burada onu kullanabileceğimi düşünmemiştim.

A: Anladım. Burada ne yaptın teker teker aylara göre mi ilerlemeye çalıştın?

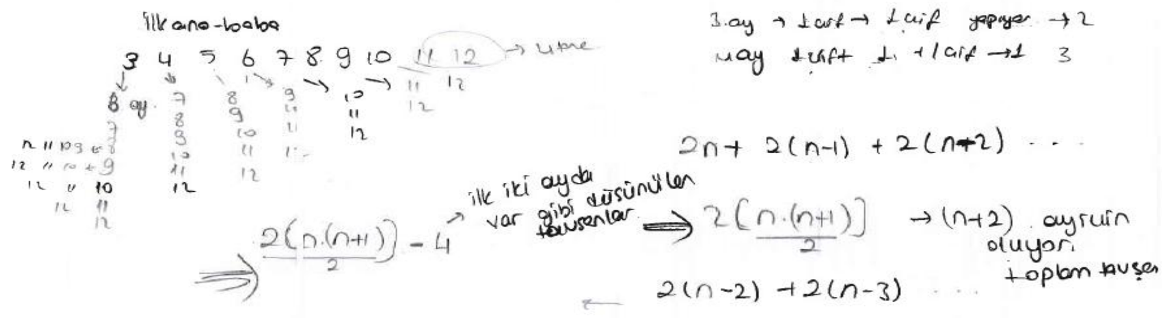
Ö$_4$: Evet biraz gitmeye çalıştım ama çıkmadı.

A: Burada zorlandığın kısım formüle dökmek mi oldu?

Ö$_4$: Evet bir de hani bir süre sonra aynı tavşan tekrar yavru veriyor ve yavru veren tavşan da tekrar yavru veriyor. Bir de beklemesi gerekiyor. O yüzden burada birazcık zorlandım.

Ö$_4$'ün yanıtında elde ettiği verileri sayıya dökmemiş olması bütünü görmesine engel olmuş olabilir. Örneğin 3. ayda 2 çift tavşan, 4. ayda 3 çift tavşan, 5. ayda 5 çift tavşan şeklinde mevcut tavşan sayılarını, sayısal değerlerle ifade etmemiştir. Burada kullanılan örnekler 1, 2, 3, 4, 5 ve 6. aydaki tavşan sayıları olduğundan Ö$_4$'ün Sonlu Sayıda Ayrık Durumdan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmaya çalıştığı söylenebilir. Ancak herhangi bir genellemeye ulaşamamış ve ispat yapmamıştır.

Ö$_5$'in 5. problemle ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 46. Ö$_5$'in Tavşanlar problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ yanıtında önce ilk tavşan çiftini, sonra sırasıyla 3. ayda, 4. ayda, 5. ayda… 12. ayda doğan tavşan çiftlerini ele almış, onların hangi aylarda yavrulayacaklarını inceleyerek bir çözüm gerçekleştirmeye çalışmıştır. Ancak herhangi bir sonuca ulaşamayınca bu defa 3. ve 4. aylardaki tavşan çifti sayılarını incelemiştir. Buradan da herhangi bir çözüme ulaşamamış ve en son olarak n. aydaki tavşan sayısını hesaplama yoluna gitmiş, bir formül ortaya koymuştur. Yanıtı incelendiğinde $Ö_5$'in soruyu ve istenileni doğru anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Yapılan görüşmede soru ve yanıtı ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Tavşanlar sorusu daha önceden karşılaştığın bir soru muydu $Ö_5$?

$Ö_5$: Hayır.

A: Anlamak zor oldu mu senin için?

$Ö_5$: Bu en zor soruydu. Ben baya zorlandım.

A: Şimdi bu soruda bir formül isteniyor ya formül deyince aklına ne geliyor?

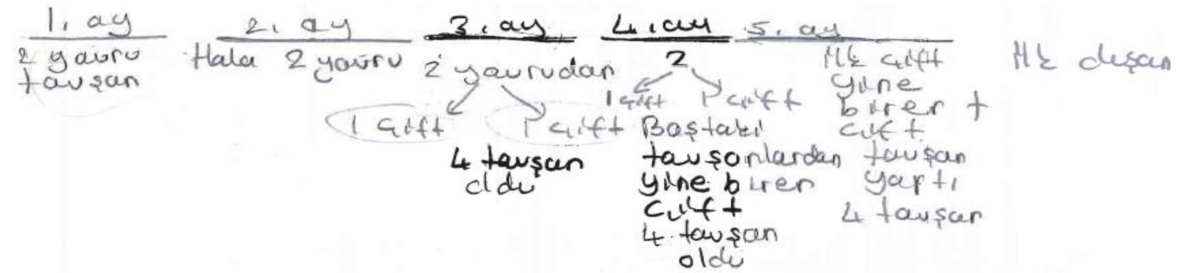
$Ö_5$: Formül deyince benim aklıma n birşey ne yazarsak onun yerine hepsini çıkarıyor.

A: Anladım. Burada teker teker her ay doğan yavru sayısına mı bakmaya çalıştın?

$Ö_5$: Evet onu bulmaya çalıştım ama herhalde yanlış yapmışım soruyu.

$Ö_5$'in yanıtında kullanmış olduğu örneklerde her ay doğan tavşan çifti sayısını hesapladığı görülmektedir. Dolayısıyla Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin yaptığı söylenebilir. Formülü ifade ediş biçimi Sembolik Genelleme yaptığını göstermektedir. $Ö_5$ her ne kadar başta ay ay mevcut tavşan çifti sayısını elde etmiş olsa da formülü bulurken herhangi özel bir örneği referans almadan doğrudan n. ayı düşünmüş olduğundan, Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı ifade edilebilir.

$Ö_6$'nın aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıdadır:



Şekil 4. 47a. $Ö_6$'nın Tavşanlar problemine verdiği yanıt 1

Tavşanlar probleminde $Ö_6$ her ay doğacak tavşan yavrularına ve o ayda mevcut olan tavşan sayılarına odaklanmış, bunları ifade etmiştir. Ancak yanıtında bir formüle ulaşamamıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede bu durumla ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Neler yaptın bu soruda?

Ö$_6$: Baya detaylı bir inceleme yapmaya çalıştım.

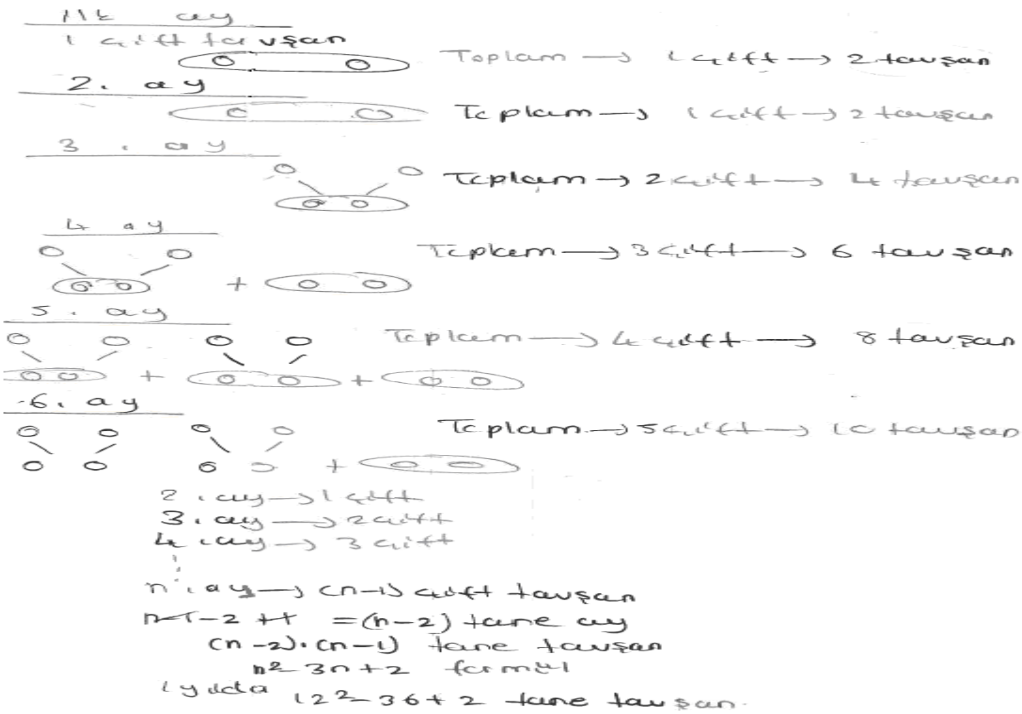
A: Evet.

Ö$_6$: Birinci ay iki yavru tavşan, ikinci ay onlar büyümediği için iki yavru tavşan, üçüncü ay ikisinden bir çift yani dört tavşan oluyor. Dördüncü ay, baştaki tavşanlarda yine birer çift var ama…

A: O şekilde ilerliyor.

Ö$_6$: Evet o şekilde ilerleyecek diye düşündüm ama aslında bunu çok iyi formülüze edemedim.

Bu çözüm yöntemi muhtemelen biraz karışık geldiği için Ö$_6$ sonrasında çözümünü aşağıda görüleceği üzere görselliği daha ön planda olan farklı bir çizimle gerçekleştirmeye karar vermiştir:



Şekil 4. 47b. Ö$_6$'nın Tavşanlar problemine verdiği yanıt 2

Ö$_6$ bu defa yanıtında 6. aya kadar örneklendirmede bulunmuş, her ay mevcut olan tavşan çifti sayısını göstermiştir. Ancak 5. ayla ilgili çiziminde toplamda 5 çift tavşan olduğunu göstermiş olmasına rağmen 4 çift tavşan olduğunu belirtmiştir. Her ne kadar 6. ayda eksik bir çizim yapmış, toplamda 5 çift tavşan olduğunu ifade etmiş olsa da buraya kadar gerçekleştirmiş olduğu çözüm ve kendisiyle yapılan görüşmede kullandığı ifadeler $Ö_6$'nın soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. $Ö_6$ formülü elde edişi ile ilgili ise şunları ifade etmiştir:

$Ö_6$: Bir şeyler yapmaya çalıştım. En son bir düzenleme yapmaya çalıştım. Birinci ay bir, ikinci ay bir, üçüncü ay iki, dördüncü ay üç…

A: O zaman n-1 çift tavşan şeklinde ilerliyor mu dedin?

$Ö_6$: Evet. n-2 tane ay, n-1 tane tavşan çifti oluyor. O yüzden $n^2 - 3 \cdot n + 2$ (tane) tavşan oluyor diye söyledim.

$Ö_6$ yanıtında ilk 6 aydaki durumları incelemiş, her ay mevcut olan tavşan çifti sayısını çizimleriyle göstermiş ve hesaplamıştır. Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım yoluyla tahminde bulunmaya çalışmıştır. Her ne kadar yanlış da olsa yanıtıyla tutarlı bir formüle ulaşmış, bu formülü n'ye bağlı şekilde ifade etmiş ve Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. 6. aya kadarki durumları ayrı ayrı inceleyerek elde ettiği sayısal değerler üzerinden genellemeye ulaştığı için $Ö_6$'nın Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_7$ Tavşanlar problemine vermiş olduğu yanıtında çözüme yönelik herhangi bir girişimde bulunmamış, kendisiyle yapılan görüşmede ise bu durumu şu şekilde ifade etmiştir:

$Ö_7$: Ben bu soruyu boş bıraktım sinir oldum soruya.

A: Sinir mi oldun?

$Ö_7$: Evet.

A: Uğraşmak mı istemedin?

$Ö_7$: Evet çözüme uğraştım ama sonra boşverdim. Sevmedim soruyu.

A: Biraz karışık mı geldi soru?

$Ö_7$: Ya bir de sona bırakmıştım soruyu, yoruldum. Bir de ben başta soruyu farklı olarak düşünmüştüm. Sonra çok farklı şeyler düşündüğümü fark ettim, biraz da sıkılınca boşverdim.

Dolayısıyla $Ö_7$ bu problem ile ilgili herhangi bir özelleştirme, tahmin ispat ve genelleme gerçekleştirmemiştir.

Ö$_8$ de aynı problem ile ilgili yanıtında cevabı boş bırakmış, herhangi bir çözüm girişiminde bulunmamıştır. Bunun nedeniyle ilgili olarak ise şu ifadelerde bulunmuştur.

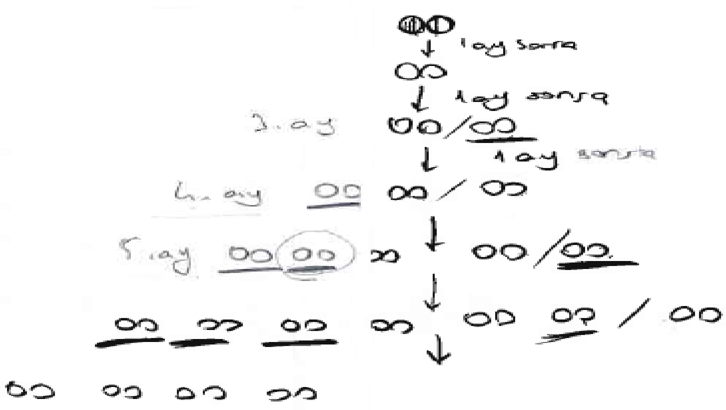
Ö$_8$: Bunu yapamadım.

A: Hiç bir şey yapamadın mı?

Ö$_8$: Çok karışık geldi hiçbir şekilde anlamlandıramadım.

Dolayısıyla bu soruda Ö$_8$ ile ilgili bir özelleştirme, tahmin, ispat ve genellemeden bahsedilmemiştir.

Ö$_9$ ise yanıtında 6. aya kadar örnekler vermiş, her bir ayda mevcut olan tavşan çiftlerini göstermiş ve Şekil 4. 48.'de görüldüğü üzere problemi kendine özgü bir çizim ile görselleştirmiştir:



Şekil 4. 48. Ö$_9$'un Tavşanlar problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında her ne kadar 6. aydaki tavşan çifti sayısını yanlış göstermiş olsa da oraya kadar yapmış olduğu çözüm, Ö$_9$'un soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Ancak elde ettiği bulguları sayısal olarak ifade etmemiş, bir formüle ulaşamamıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede problemle ilgili yanıtını şu şekilde açıklamıştır:

A: Neler yaptın bu problemde?

Ö$_9$: Şekillerden ilerlemiştim. Genelde ben böyle yaparım (gülüyor). Bunda da hepsini teker teker yazıp bir dizi bulmaya çalıştım ama tabi bir sonuç olmadı.

A: Zorlandın mı?

$Ö_9$: Zorlandım evet. Çünkü hayal edemedim. Bir tane, bir çift yavrusu olacak. O yavrunun da sonra yavrusu olacak. Biraz karışmıştı. İki ay sonra bir daha yavrusu oluyordu. O yüzden...

Dolayısıyla sayısal herhangi bir değer veya bir formül ortaya koymadığı, sadece problem ile ilgili bir çizim gerçekleştirdiği bu yanıtında $Ö_9$ için herhangi bir tahmin, genelleme ve ispattan söz edilemez.

Görüşmede $Ö_9$'a problemin çözümü gösterildiğinde ise şöyle bir diyalog gerçekleşmiştir:

A: Üçüncü ay kaç çift tavşan var iki çift değil mi? Dördüncü ay? Üç çift.

$Ö_9$: Evet.

A: Burada (ikinci ay) bir çift tavşan var, burada (üçüncü ay) iki çift var, burada (dördüncü ay) üç çift…

$Ö_9$: Hmmm…

A: Beşinci ay beş çift. Burada (üçüncü ay) iki çift vardı, burada (dördüncü ay) üç çift vardı burada (beşinci ay) beş çift.

$Ö_9$: Evet.

A: Yani ne geliyor aslında? Kendinden önceki iki ayın toplamı geliyor değil mi?

$Ö_9$: Evet onu görememişim.

A: Bunu belki sayı olarak gösterseydin aslında şuraya yazsan belki görecektin. 1, 1, 2, 3, 5 şeklinde gittiğini görsen…

$Ö_9$: Aynen onu yazsaymışım ama ben şey… Hani sonucunda acaba ne gelir gibi düşünmüştüm. Sayıların hiç böyle toplayıp da geleceğini düşünmemiştim açıkçası.

Burada $Ö_9$'un kendisinin de ifade ettiği gibi sonuçta elde edeceği değeri düşünmesinin, formülü bulmasında engelleyici bir rol oynadığı söylenebilir.

Tavşanlar problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları açısından genel olarak incelendiğinde Tablo 4. 5.'teki bulgulara ulaşılmıştır.

Tablo 4. 5. Tavşanlar problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yok	Yok	Yok	Yok
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_3$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Düşünce deneyi	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_5$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Düşünce deneyi	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
Düşük	$Ö_7$	Cevap yok	Cevap yok	Cevap yok	Cevap yok
	$Ö_8$	Cevap yok	Cevap yok	Cevap yok	Cevap yok
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Yok	Yok	Yok

Tablo 4. 5. incelendiğinde Tavşanlar probleminde en başarısız öğrenci grubunun düşük başarı düzeyine sahip öğrenciler olduğu görülmektedir. Bir öğrenci ($Ö_1$) problemi ve ispatını daha önceden bildiğini ifade ettiği için yanıtı özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme açısından değerlendirmeye alınmamıştır.

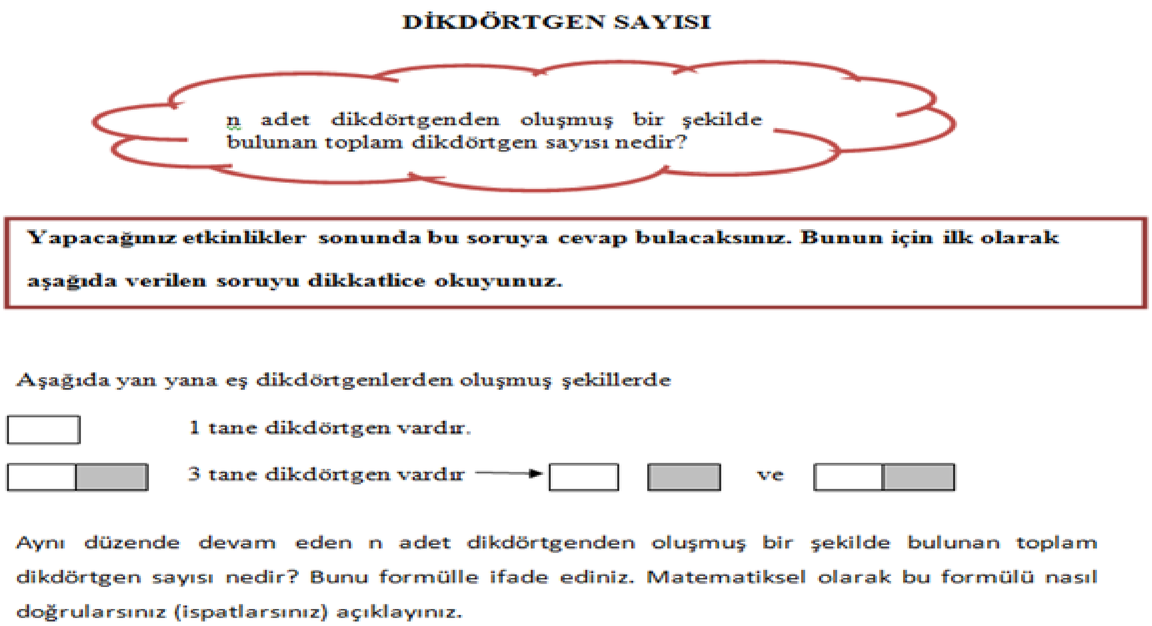
Yanıtlarında özelleştirme basamağını gerçekleştiren tüm öğrenciler Yeterli Özelleştirme yapmış, başarı düzeyleri düşük olan iki öğrenci ($Ö_7$ ve $Ö_8$) ise probleme cevap verememiştir. İki öğrenci ($Ö_2$ ve $Ö_4$) Yeterli Özelleştirme yapmış ancak ispat ve genelleme basamaklarında başarısız olmuşlardır. Bir öğrenci ($Ö_9$) ise Yeterli Özelleştirme yapmasına rağmen tahmin, ispat ve genelleme basamağında başarısız olmuştur.

Tahmin basamağını gerçekleştirebilmiş olan öğrencilerin tümü Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmuştur. Ancak sonrasında bu öğrencilerin yalnızca üçü ($Ö_3$, $Ö_5$ ve $Ö_6$) ispat ve genelleme basamaklarını gerçekleştirebilmiştir. Bu öğrencilerden iki tanesi ($Ö_3$ ve $Ö_5$) Düşünce Deneyi seviyesinde ispatta bulunurken bir öğrenci ($Ö_6$) ise Saf Deneycilik seviyesinde ispat yapmıştır.

Dikkat çeken diğer bir nokta ise esasen bu sorunun Aritmetik Genelleme gerektiren bir soru ve Aritmetik Genelleme'nin ise Cebirsel Genelleme'ye göre daha basit seviyede bir genelleme türü olmasına rağmen cevap veren öğrencilerin tümünün Aritmetik Genelleme yapmayı düşünmeden, Sembolik Genelleme yapmaya çalışmış olmalarıdır. Öğrencilerin formül algısının bu durum üzerinde etkisi olmuş olabilir. Bununla birlikte, özelleştirme ve tahmin gerçekleştirmesine rağmen genelleme ve ispat basamağında başarısız olmuş her iki öğrencinin de Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmuş olmaları dikkat çeken diğer bir durumdur.

Öğrencilerin 6. problem olan Dikdörtgen Sayısı problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir.

4.6. Dikdörtgen Sayısı Problemine İlişkin Bulgular


DİKDÖRTGEN SAYISI

n adet dikdörtgenden oluşmuş bir şekilde bulunan toplam dikdörtgen sayısı nedir?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Aşağıda yan yana eş dikdörtgenlerden oluşmuş şekillerde

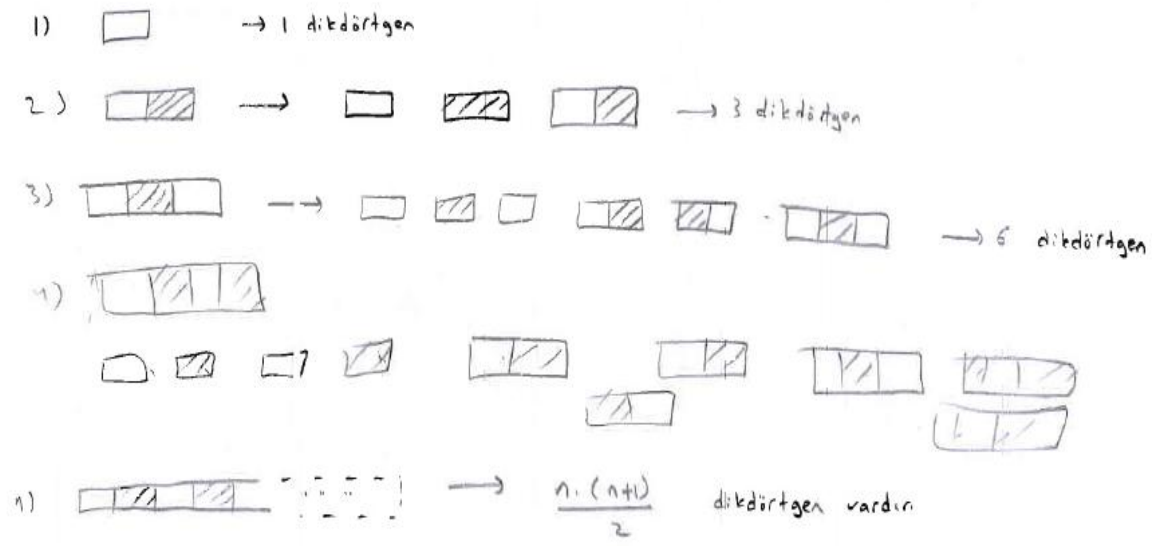
1 tane dikdörtgen vardır.

3 tane dikdörtgen vardır → ve

Aynı düzende devam eden n adet dikdörtgenden oluşmuş bir şekilde bulunan toplam dikdörtgen sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 4. 49. Dikdörtgen Sayısı Problemi

İlk olarak $Ö_1$'in yanıtı incelenmiştir. $Ö_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir.



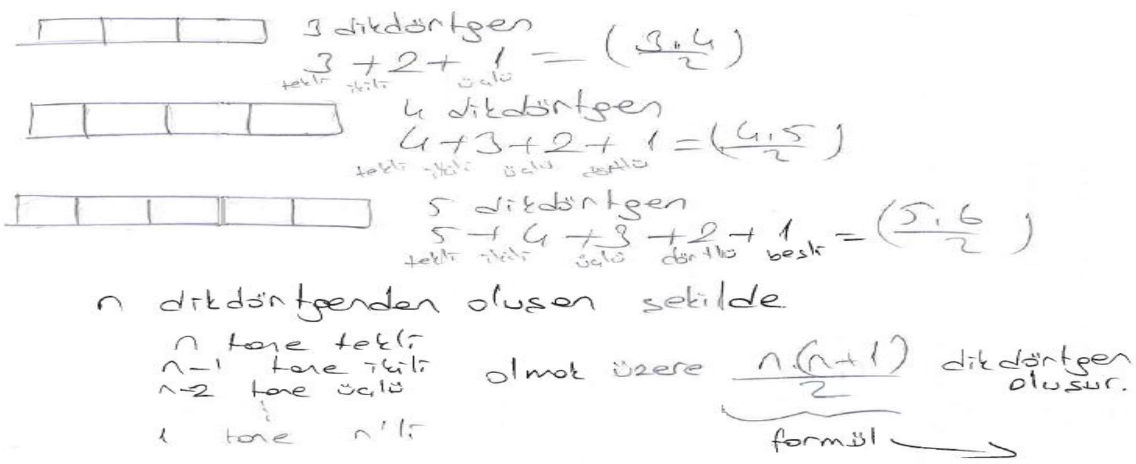
Şekil 4. 50. $Ö_1$'in Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

$Ö_1$ yanıtında sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 dikdörtgenli durumları incelemiş, oluşan dikdörtgenleri ayrı ayrı tespit etmiştir. Çizimlere bakıldığında $Ö_1$'in soruda anlatılanı ve istenileni anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede ise çözümü şu şekilde gerçekleştirdiğini ifade etmiştir:

$Ö_1$: Her adımda Gauss toplamı geliyordu bunda da öyle bir şey buldum. İlk üç adımı bulup sonrasını genelledim.

$Ö_1$ yanıtında sorunun görsel gösterimini kendi çizimleriyle yapmıştır. Ancak burada çizimlere bağlı herhangi bir özellikten bahsetmemiş, sadece sayısal değerler ortaya koymuştur. Formülü elde ederken sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 dikdörtgenli durumları örneklendirerek her bir durumda mevcut olan dikdörtgen sayılarını hesapladığı için $Ö_1$'in Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunduğu ve Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir. Formülü n'ye bağlı olarak göstermiş ve Sembolik Genelleme yapmıştır.

$Ö_2$'nin aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 4. 51a. Ö$_2$'nin Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt 1

Ö$_2$ yanıtında 3, 4 ve 5 dikdörtgenli durumları incelemiş, her bir durumda ortaya çıkan dikdörtgen sayısını hesaplamış ve problemi bu örneklere bağlı olarak çözmüştür. Çizimlere bakıldığında Ö$_2$'nin problemi doğru anlayıp ifade edebildiği, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede ise çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Burada oluşacak toplam dikdörtgen sayısı isteniyordu. Bu problemde neler yaptın?

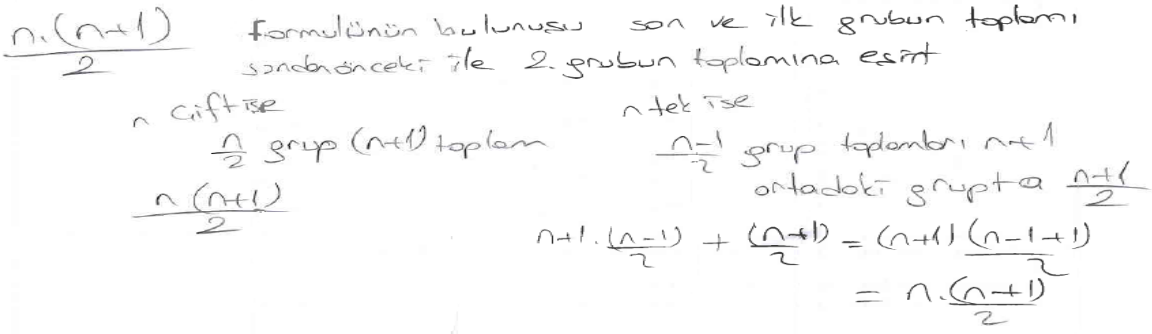
Ö$_2$: Evet permütasyon kullanarak yapıyorduk. Normalde tek tek sayıyordum kısa olunca (gülüyor). Formülü hiç düşünmüyordum ama burada da formülü türettim.

A: Nasıl türettin?

Ö$_2$: Tekli, ikili, üçlü yine sayarak yaptım.

Görüşmede Ö$_2$'nin de dile getirdiği üzere yanıtında her bir dikdörtgende (eğer mevcutsa) oluşan tekli, ikili, üçlü… dikdörtgen sayılarını ayrı ayrı sayarak problemi çözümlemeye gitmiştir. Sonrasında ise bu üç örnekten elde ettiği bilgileri n dikdörtgenli duruma genellemiştir. Örneklerle elde ettiği sayısal değerler yoluyla formüle ulaşmış, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünde tahmin yapmıştır.

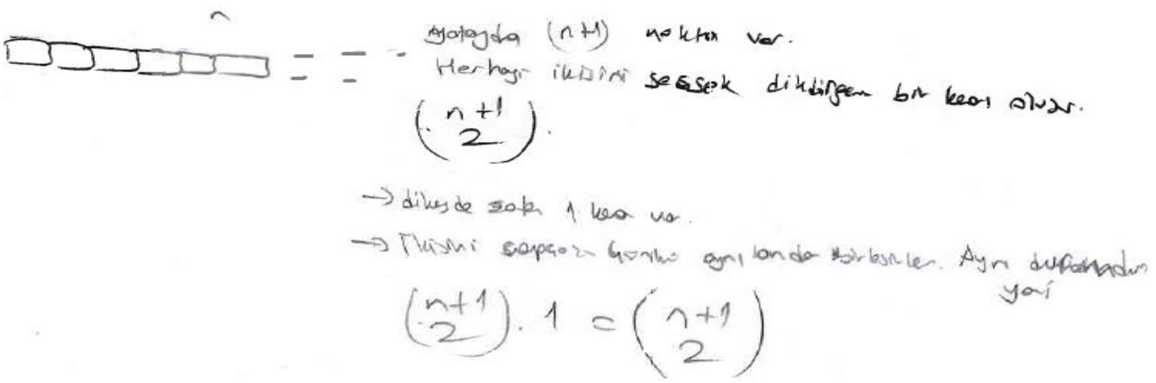
Yanıtının devamında Ö$_2$ bir formüle ulaşmış ve formülünü şu şekilde açıklamıştır:



Şekil 4. 51b. $Ö_2$’nin Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt 2

$Ö_2$ soruyu oluşturan bileşenler arasındaki bir ilişkiye değinmeden, herhangi mantıksal bir çıkarımda bulunmadan, doğrudan örnekler üzerindeki işlemlere göre formüle ulaşmıştır. Bu nedenle Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir. Çözümün sonunda ise n’ye bağlı bir formül ifade etmiş, Sembolik Genelleme yapmıştır.

$Ö_3$’ün Dikdörtgen Sayısı problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 52. $Ö_3$’ün Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

$Ö_3$ yanıtında doğrudan n tane dikdörtgenli durumu ele almış ve bu örnek odaklı çözüm gerçekleştirmiştir. Soruda anlatılanı ve istenileni açık bir biçimde ifade etmiş, Yeterli Özelleştirme yapmıştır. Yatay ve dikey kenarlarda bulunan nokta sayılarına dikkat etmiş ve kendisiyle yapılan görüşmede çözümü ile ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Bu problemi nasıl çözdün $Ö_3$?

$Ö_3$: Noktaların ikili kombinasyonlarının çarpımını uyguladım.

A: Yataydaki noktaların ikili kombinasyonu çarpı düşeydeki noktaların ikili kombinasyonu mu?

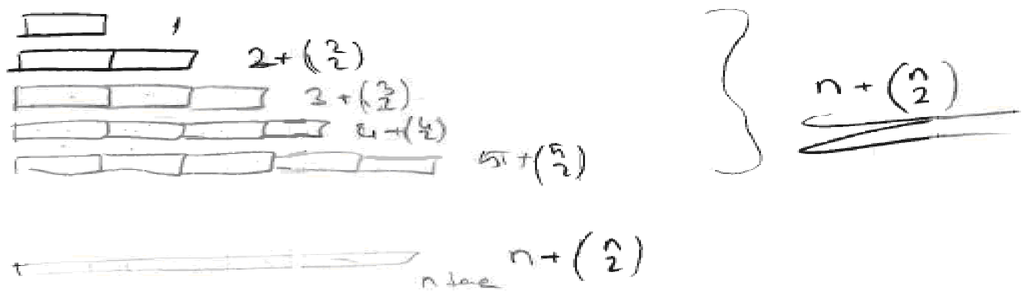
Ö₃: Evet. Düşeyde zaten iki nokta var orada ikinin ikilisi bir dedim direkt. Yatayda kaç nokta var? Dedim ki hani mesela iki tane dikdörtgen varsa üç nokta oluyor. Üç tane (dikdörtgen) varsa dört (nokta) olacak. Demek ki n tane dikdörtgen olursa n artı bir nokta olacak. n artı birin ikilisi dedim.

A: Yataydakiler için mi?

Ö₃: Evet. Herhangi ikiliyi seçersek bir dikdörtgen oluşacak. Zaten dikeyde tek sütun var. Orada farklı seçme şansımız olmayacak. O nedenle n artı 1'in ikili kombinasyonu dedim direkt.

$Ö_3$ problemi bir çizimle görselleştirmiş ve *"Düşeyde zaten iki nokta var"* ifadesiyle de belirttiği gibi sorunun görsel gösterimine göre, soruyla ilgili belirli özelliklere dayalı olarak formülü bulmuştur. Bu nedenle Algıya Dayalı Tahmin yaptığı ifade edilebilir. Sembolik Genelleme yapmış ve formülü n'ye bağlı göstermiştir. Bu formülün açıklamasını ise *"herhangi ikisini (noktayı) seçsek dikdörtgenin bir kenarı oluşur"* ifadesiyle belirttiği gibi herhangi bir örnekten bağımsız olarak, mantık yoluyla yapmıştır. Dolayısıyla Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_4$'ün aynı probleme verdiği yanıt aşağıdadır:



Şekil 4. 53. $Ö_4$'ün Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

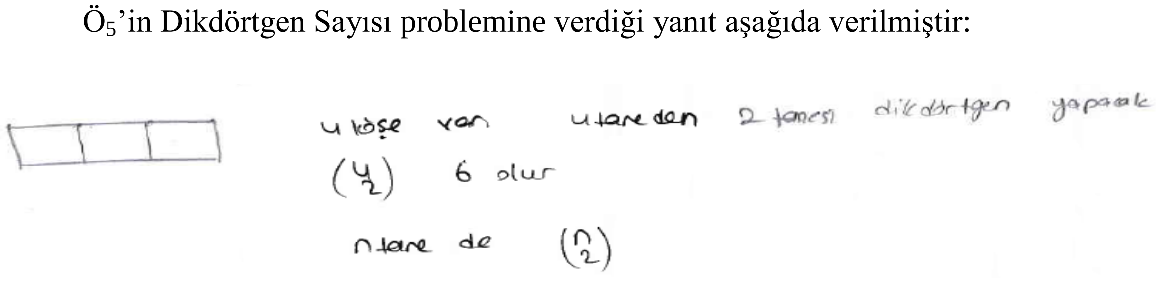
$Ö_4$ yanıtında 1, 2, 3, 4 ve 5 dikdörtgenli durumları inceleyerek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ancak soruyu oluşturan bileşenler ile ilgili herhangi bir yorumda bulunmamış, doğrudan formül kullanmaya başlamış ve özelleştirme yapmamıştır. Uyguladığı formül doğrudur. Çünkü burada birden fazla dikdörtgenden oluşmuş tüm dikdörtgenler için uçlarda rastgele iki dikdörtgenin seçilmesi söz konusudur ve ifade ettiği formül sadece bu şekilde doğru olmakta, dolayısıyla formülde kastedilen ikinin buradan gelmesi gerekmektedir. Ancak $Ö_4$ kendisiyle yapılan görüşmede uçlardaki dikdörtgenleri değil sadece iki dikdörtgenden meydana gelen dikdörtgenlerin seçimini düşündüğünü belirtmiş, çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

> *Ö$_4$: Burada da zaten bir dikdörtgenlide 1 tane dikdörtgen var, iki dikdörtgenlide ise iki dikdörtgen birleştiği için iki tane ve bir tane de büyük dikdörtgen var. Üç tanelide ise üç tane kesin geliyor, bir de iki tane dikdörtgenden bir tane büyük dikdörtgen oluştuğu için 3'ün 2'lisi şeklinde seçme yaptım.*
>
> *A: Evet.*
>
> *Ö$_4$: Yine dört için dört tane kesin geliyor, bir de iki taneyi kendi arasında seçip büyük dikdörtgen oluşturabiliriz o nedenle 4'ün 2'lisi (4'ün 2'li kombinasyonu) yaptım. Bu şekilde devam ettim.*
>
> *A: Peki burada mesela 4'ün 3'lü kombinasyonu olabilir miydi?*
>
> *Ö$_4$: Evet olabilirdi (gülüyor). Sanırım burada yanlış yapmışım, unutmuşum. Geçen sene gördüğümüz konu olunca hatırladığım kadarıyla yaptım.*

Ö$_4$'ün görüşmede belirttiği "*Geçen sene gördüğümüz konu olunca hatırladığım kadarıyla yaptım.*" ifadesi, öğrencinin çözümde kullandığı örneklerdeki ilişkilerden çok, öğrenmiş olduğu formül odaklı çözüm yaptığını düşündürmüştür. Öğrenci burada belki formülü sadece ezberlediğinden, kullanma mantığını içselleştirmemiş ve formülü doğru olarak bulmuş olmasına rağmen çözüm şeklini ifade edememiş olabilir.

Ö$_4$'ün yanıtında 1, 2, 3, 4 ve 5 dikdörtgenli durumları inceleyerek formüle ulaşmaya çalışmış olması, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunduğunu göstermektedir. Formülü n'ye bağlı olarak ifade edebilmiş ve Sembolik Genelleme yapmıştır. Formülü gösterirken 5 örnek kullanmış ve bu örneklerde elde ettiği sayısal değerlere odaklanmış, sorunun bileşenleri arasında herhangi bir ilişki ya da özelliği belirtmemiştir. Dolayısıyla Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_5$'in Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 54. Ö$_5$'in Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ sadece 3 dikdörtgenli duruma göre çözüm yapmıştır. Yanıtında kullandığı ifadeler soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Ö$_5$ yanıtında öncelikle köşe sayılarına odaklanmış, yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

Ö$_5$: Burada ben… Dikdörtgen oluşmuş olması için iki tane dik (kenar) iki tane ayrı ayrı (yatay kenar) birleştirmişiz. Sonra dört köşeden hani iki tanesi olduğu için (yatay kenarların köşeleri) diğer iki tanesini seçmem gerekiyor diye düşündüm.

A: O iki tanesi yatayda olduğu için onları seçme şansım yok şeklinde mi düşündün?

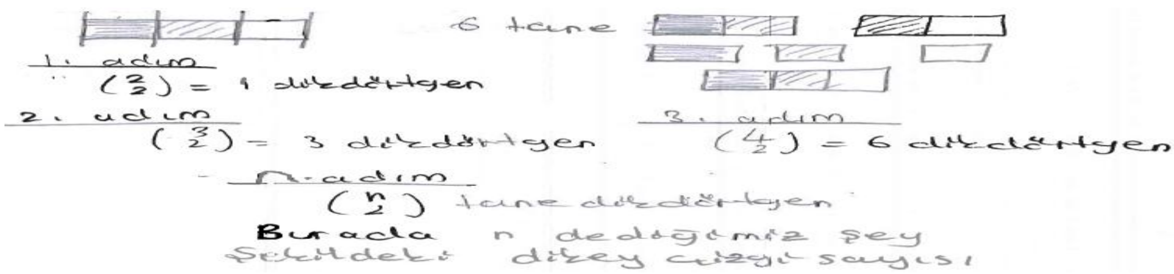
Ö$_5$: Evet. Sonra o yüzden dört tanesinden (köşeden) iki tanesini seçtim.

A: Anladım. Bunu n'ye uyarladığında ne çıktı?

Ö$_5$: n'nin ikilisi (kombinasyonu) diye düşündüm orada da.

Ö$_5$ yanıtında cevabı problemin görsele dönüştürülmüş hali olan tek bir örnek üzerinden bulmaya çalışmış ve Algıya Dayalı Tahmin yapmış, sonuçta ise formülü n'ye bağlı olarak ifade ederek Sembolik Genelleme'ye ulaşmıştır. Bu genellemeye ulaşırken sadece 3 dikdörtgenli durumu ele aldığı ve bu örnek üzerinden çözümünü açıkladığı için Ö$_5$'in Genel Örnek türünden ispatta bulunmuş olduğu söylenebilir.

Ö$_6$'nın aynı probleme verdiği yanıt ile ilgili bulgular aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 55. Ö$_6$'nın Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

Ö$_6$ yanıtında 3 dikdörtgenli örneği çizmiş ve buradan çözüme ulaşmaya çalışmıştır. Ayrıca bir dikdörtgenli (1. adım) ve iki dikdörtgenli (2. adım) örnekleri de incelemiş, dikey ve yataydaki çizgi sayılarına odaklanmıştır. Çizimler Ö$_6$'nın problemde anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu problemde nasıl düşündün Ö$_6$?

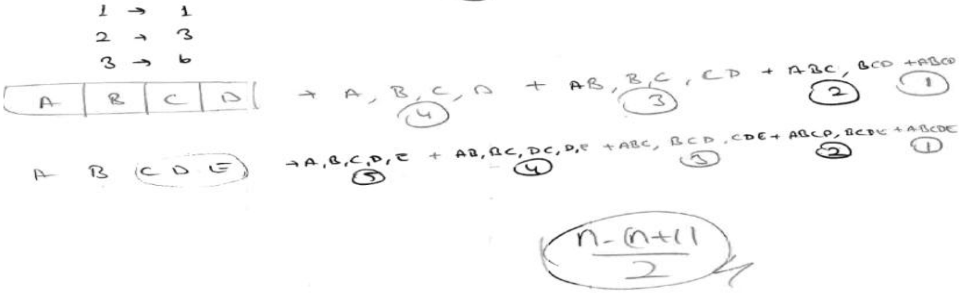
Ö$_6$: Burada da dikdörtgenin kenarlarını düşünerek hani. İki tane dikey kenar olduğunda bir tane dikdörtgen, üç tane olduğunda üç tane dikdörtgen, dört tane olduğunda üçüncü adımda altı dikdörtgen... O zaman demek ki n'nin ikili kombinasyonu gelmiş.

A: Peki dikey kenarları düşünürken yatay kenarları neden düşünmeye gerek duymadın burada?

Ö$_6$: Yataydaki kenarlar için seçim yapma şansımız kalmıyor çünkü sadece iki tane yatay kenar var.

Yukarıda da ifade ettiği üzere Ö$_6$ yanıtında sadece dikey kenarları seçmeyi düşünmüştür. Sorunun gösterimini kendi çizimiyle gerçekleştirmiş, 1, 2 ve 3 dikdörtgenli durumları örneklendirmiştir. Çizimlerinde kenar sayısının yan yana dizilmiş olan dikdörtgenlerin sayısından bir fazla olduğunu fark etmiştir. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin'de bulunduğu söylenebilir. Ancak bu örneklerde n'yi dikdörtgen sayısı olarak ele almasına rağmen son adım olan n. adımda n'yi dikey çizgi sayısı olarak nitelendirmiştir. Çözümün sonunda Sembolik Genelleme yapmıştır. Bu genellemeye ulaşırken bir dikdörtgenli, iki dikdörtgenli ve üç dikdörtgenli olmak üzere 3 ayrı durumu incelemiş ve kenar sayısının neden ikili kombinasyonunu aldığını ise "*İki tane dikey kenar olduğunda bir tane dikdörtgen, üç tane olduğunda üç tane dikdörtgen, dört tane olduğunda üçüncü adımda altı dikdörtgen... O zaman demek ki n'nin ikili kombinasyonu gelmiş*" ifadesiyle belirttiği gibi mantıksal bir çıkarımda bulunmadan ifade etmiştir. Bu nedenle Ö$_6$'nın çözümünde Saf Deneycilik türü ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_7$'nin 6. probleme verdiği yanıt aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 4. 56. Ö$_7$'nin Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

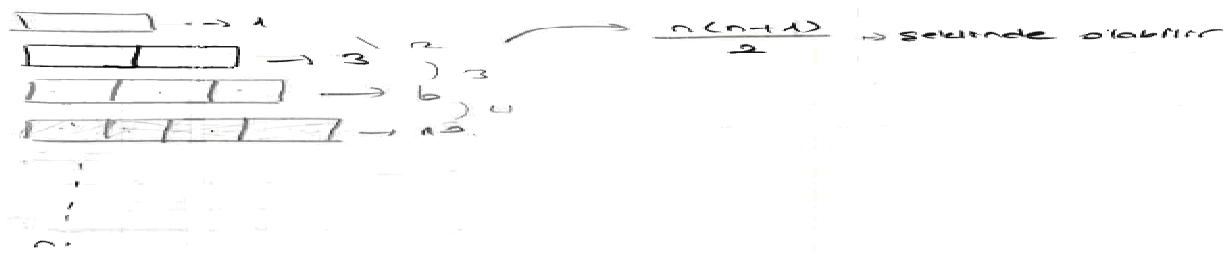
Ö$_7$ yanıtında soruyla birlikte verilen 1, 2, 3 dikdörtgenli ve kendisinin çizmiş olduğu 4 ve 5 dikdörtgenli durumları incelemiştir. Çizimlere ve çözüme bakıldığında problemin doğru şekilde anlaşıldığı, Yeterli Özelleştirme yapıldığı görülmektedir. Ö$_7$ yapılan görüşmede ise çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

Ö$_7$: Bu da aslında aynı mantık şeyle Tokalaşma problemiyle olması lazım.

A: Oluşan dikdörtgen sayılarını bulmuşsun. Birli, ikili, üçlü, dörtlü… Evet birliden üç tane, ikiliden iki tane, üçlüden bir tane dikdörtgen oluşur dedim.

Yanıtında formüle yönelik tahminini 3, 4 ve 5 dikdörtgenli örneklere bakarak, sayısal değerlere bağlı yaptığından Ö$_7$'nin Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin gerçekleştirdiği söylenebilir. Sembolik Genelleme ile formülü belirtmiştir. Bu genellemeye ulaşırken 4 ve 5 dikdörtgenli durumları incelemiş, oluşan dikdörtgen sayılarını bulmuş ancak herhangi bir açıklama yapmamıştır. Buna bağlı olarak Ö$_7$'nin Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_8$'in Dikdörtgen Sayısı problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



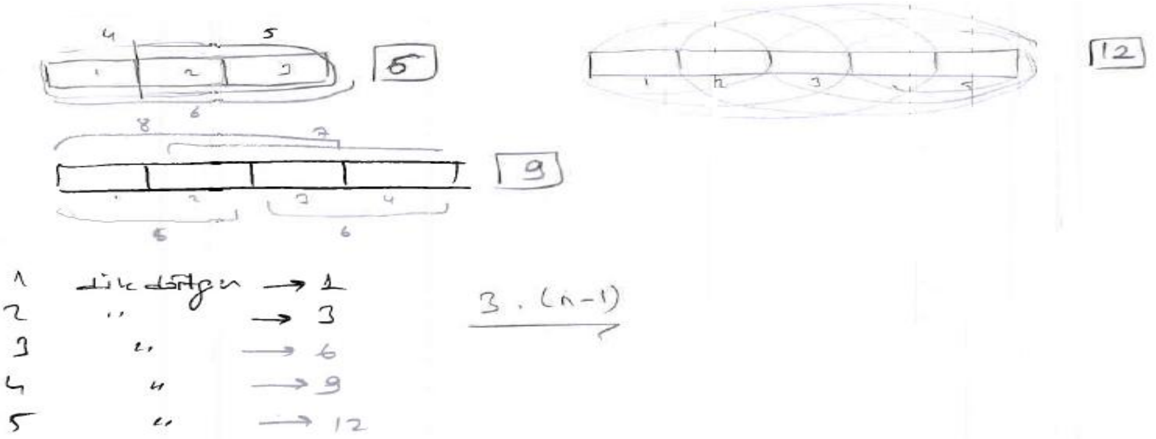
Şekil 4. 57. Ö$_8$'in Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

Ö$_8$ yanıtında 1, 2, 3 ve 4 dikdörtgenli durumları ayrı ayrı incelemiş ve çözüme bu yolla ulaşmaya çalışmıştır. Çizimlerine bakıldığında soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Ö$_8$ yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

Ö$_8$: Dikdörtgenler çizdim, birkaç adımını. Oluşan dikdörtgen sayıları arasındaki artışı buldum. Ardından da formülü çıkardım $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *diye.*

Sonrasında ise görüşmede de belirttiği üzere adımlar arasında oluşan dikdörtgen sayılarındaki artışa dikkat etmiştir. Ayrı ayrı 4 örneği inceleyerek kurala yönelik bir tahminde bulunduğundan Ö$_8$'in yanıtında Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin yaptığı söylenebilir. Formülü n'ye bağlı olarak ifade etmiş, Sembolik Genelleme'de bulunmuştur. Bu genellemeye ise 4 örnek üzerinden ulaştığı sayısal değerler yoluyla varmıştır. Dolayısıyla Ö$_8$'in Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_9$'un Dikdörtgen Sayısı problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 58. Ö$_9$'un Dikdörtgen Sayısı problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında 3, 4 ve 5 dikdörtgenli çizimler yapmış, örnekleri ayrı ayrı incelemiş ve her örnekte oluşan dikdörtgen sayılarını bulmuştur. Çizimler ve çözüme bakıldığında Ö$_9$'un soruda Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Ancak bulduğu değerler hatalıdır. Örneğin, 4 dikdörtgenli çizimde ikili dikdörtgenlerden birini (2. ve 3. dikdörtgenle oluşan dikdörtgeni) hesaba katmamıştır. Yine 5 dikdörtgenli çiziminde de benzer bir durum söz konusudur. Yapılan görüşmede ise çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Burada ne düşündün nasıl çözdün problemi Ö$_9$?

Ö$_9$: Bir dikdörtgende bir tane dikdörtgen vardır. İkide üç tane, üç dikdörtgende altı tane... Ondan sonra da bunu $3 \cdot (n-1)$ şeklinde gösterdim.

Ö$_9$'un çözümü sonucunda ulaştığı formül yanlış olsa da çözümde kullandığı değerlerle örtüşmektedir. Dolayısıyla rastgele bir formül oluşturma söz konusu değildir. Formüle yönelik tahminde bulunurken 5 dikdörtgenli duruma kadar her bir durumu ayrı ayrı incelemiş, burada elde ettiği sayısal değerler yoluyla tahminde bulunmuştur. Dolayısıyla Ö$_9$'un Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin yaptığı söylenebilir. Formülü sembolik olarak ifade etmiş, Sembolik Genelleme yapmıştır. Bu formüle ulaşırken bulduğu değerlere ilişkin herhangi bir açıklamada bulunmamış, oluşan dikdörtgen sayıları ile ilgili bir değerlendirme yapmamıştır. Dolayısıyla $Ö_9$'un Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Dikdörtgen Sayısı problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme seviyeleri açısından incelendiğinde ise Tablo 4. 6'da verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4. 6. Dikdörtgen Sayısı problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_3$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Düşünce Deneyi	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Yok	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_5$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
Düşük	$Ö_7$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_8$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme

Tablo 4. 6. incelendiğinde özelleştirme basamağını gerçekleştiren öğrencilerin tümünün Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Sadece bir öğrenci ($Ö_4$) özelleştirme yapmadan doğrudan bir sonraki basamağa geçiş yapmıştır.

Tahmin basamağı açısından öğrencilerin yanıtları incelendiğinde, öğrencilerin Algıya Dayalı Tahmin veya Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminler yaptığı görülmektedir. Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminlerin sayısı Algıya Dayalı Tahmin'e göre daha fazladır.

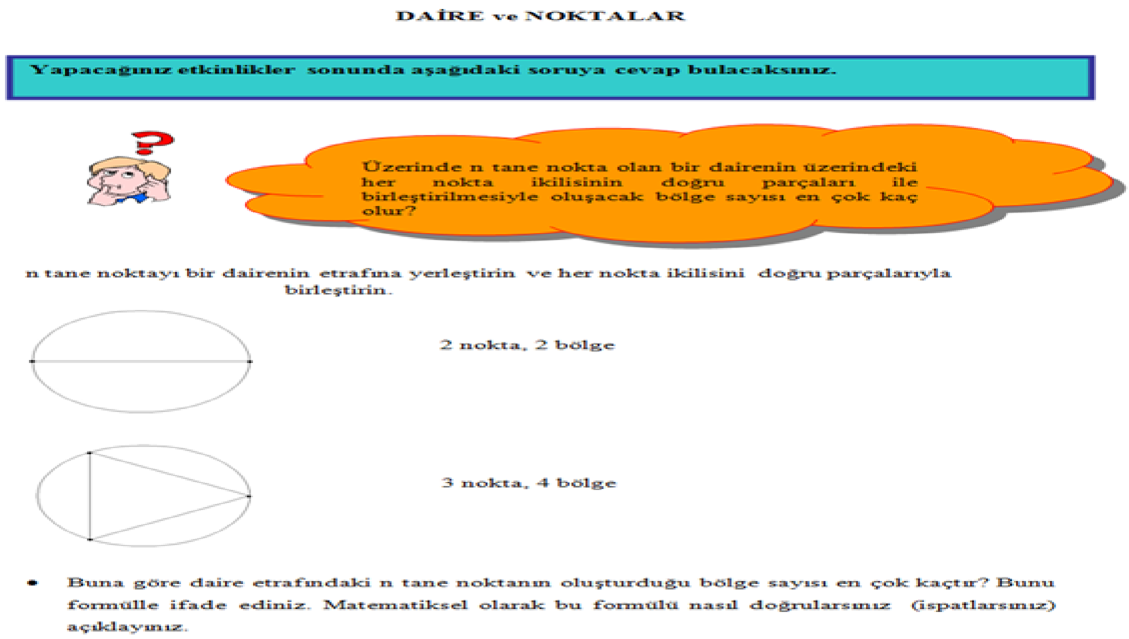
Bir öğrenci ($Ö_3$) Düşünce Deneyi türünden, bir öğrenci ise ($Ö_5$) Genel Örnek türünden ispat yapmıştır. Diğer öğrencilerin tamamı ise Saf Deneycilik türünden ispatlarda bulunmuşlardır. Düşünce Deneyi ve Genel Örnek türünden ispatların yapıldığı her iki durumda da öncesinde Algıya Dayalı Tahmin yapılmış olması dikkat çekmektedir. Bununla birlikte, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminlerin yapılmış olduğu tüm durumlarda sonrasında Saf Deneycilik türünden ispatların yapıldığı görülmektedir.

Dikdörtgen Sayısı probleminde öğrencilerin tümü özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamaklarını gerçekleştirebilmişlerdir. Üst seviye ispatlardan sayılan Düşünce Deneyi ve Genel Örnek türü ispatlara ise sırasıyla başarı düzeyi iyi ve orta olan öğrenciler arasında rastlanılmış olması dikkat çekmektedir.

Genelleme seviyeleri ile ilgili olarak öğrenciler arasında herhangi bir farklılık gözlenmemiş ve öğrencilerin tamamı Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir.

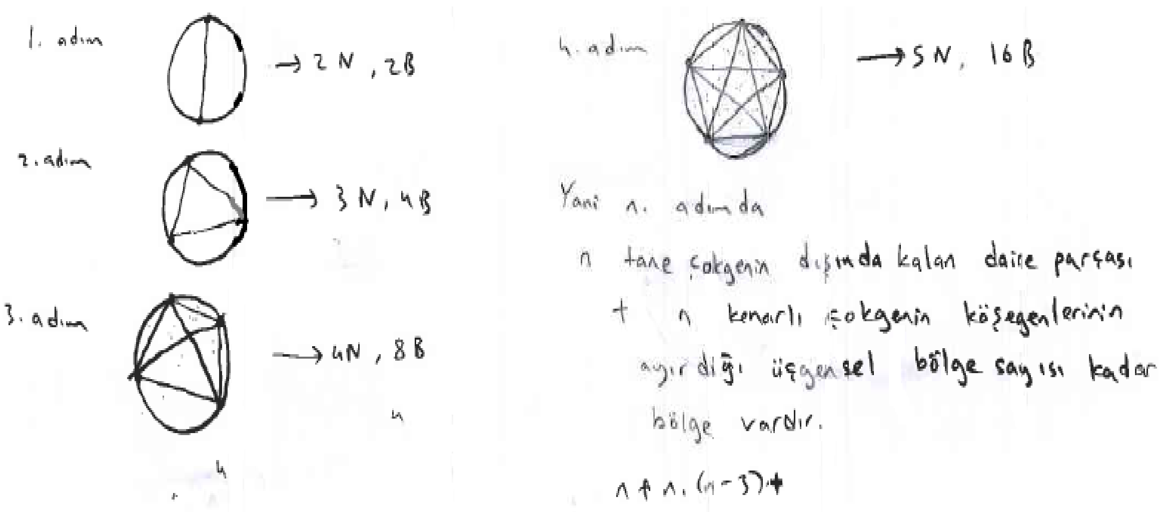
Öğrencilerin 7. problem olan Daire ve Noktalar problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir.

4.7. Daire ve Noktalar Problemine İlişkin Bulgular



Şekil 4. 59. Daire ve Noktalar Problemi

İlk olarak Ö$_1$'in yanıtı incelenmiştir. Ö$_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir.



Şekil 4. 60. Ö$_1$'in Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

Ö$_1$ yanıtında 2, 3, 4 ve 5 noktalı örnekleri çizerek ayrı ayrı incelemiş ancak nokta sayısı ile bölge sayısı arasında bir ilişkiye ulaşamamıştır. Yanıtı incelendiğinde Ö$_1$'in soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda neler yaptın $Ö_1$?

$Ö_1$: Ya burada da adımlar arasında ilişki kurmaya çalıştım da yani bir bağıntı bulamadım, gelmedi aklıma.

A: Aslında burada bir formüle ulaşır gibi olmuşsun ama…

$Ö_1$: Yarım kaldı, formüle ulaşamadım.

A: Burada kaç adımı ele aldın?

$Ö_1$: Dört adımı.

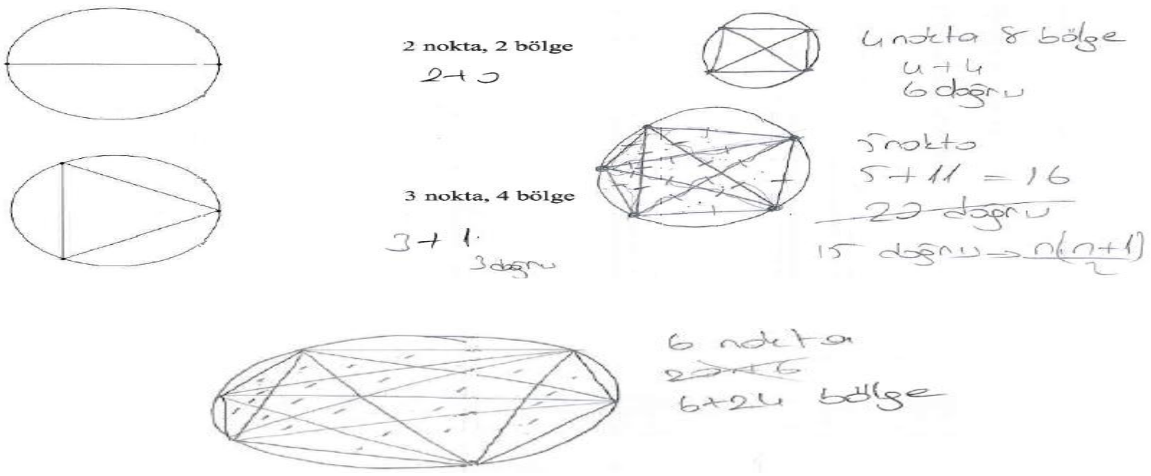
A: Şu belirttiğin n kenarlı çokgenin dışında kalan bölge sayısı artı n kenarlı çokgenin köşegenlerinin ayırdığı üçgensel bölge sayısı. Bu formülü bilmediğin için mi zorlandın?

$Ö_1$: Aynen evet. Sonrasında üçgen olmayan bölgeler de olmaya başladığı için o yüzden düzen kuramadım. 2^n'li falan mı geliyor acaba. Hiç düşünmemiştim.

A: Evet burada 2^n'li gibi görünse de aslında öyle değil. Az örnekle çözünce sanki öyle gibi geliyor ancak 6 noktalı örnekle çözülse öyle olmadığı görülecek.

$Ö_1$ formülü bulamama nedeni olarak dairenin kapsadığı çokgenlerin içerisinde oluşmaya başlayan, üçgen olmayan bölgeleri göstermiştir. Yanlış da olsa formüle yönelik "*n kenarlı çokgenin dışında kalan bölge sayısı artı n kenarlı çokgenin köşegenlerinin ayırdığı üçgensel bölge sayısı*" şeklinde Aritmetik Genelleme diyebileceğimiz bir ifadede bulunmuştur. Burada birbirinden bağımsız, ayrık durumlarla çözüme başlamış, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin ortaya koymuştur. Genellemeye ulaşırken 4 ayrı durumu incelemesi ancak herhangi bir açıklama yapmaması nedeniyle $Ö_1$'in Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir. Yanıtında bir formüle ulaşamamış olsa da görüşmede formülün 2^n'li bir ifade olabileceğini belirtmiştir. Bunun nedeni ise görüşme esnasında sorunun içine gömülmüş olmayıp soruya daha yukarıdan, bütüncül olarak bakabilmiş olması olabilir.

Ö$_2$'nin aynı probleme verdiği yanıt aşağıdadır:



Şekil 4. 61. Ö$_2$'nin Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

Daire ve Noktalar probleminde Ö$_2$ örneklerini 4, 5 ve 6 noktalı durumlara kadar genişletmiş, oluşan bölge sayılarını bulmuştur. Ancak 6 noktalı durum için elde ettiği değer yanlıştır. Çizimler Ö$_2$'nin soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede soruyla ilgili yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

Ö$_2$: Burada da (şekilde) içte ve dışta oluşan bölgeler olarak direkt saydım. Ama yine arasındaki örüntüyü bulamadım.

Ö$_2$ yukarıda da ifade ettiği gibi nokta sayısı ile bölge sayısı arasındaki örüntüyü bulamamıştır. Her ne kadar 5 noktalı durum için $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ şeklinde bir formüle ulaşmış olsa da diğer durumları sağlamadığından olsa gerek Ö$_2$ bu formülü cevap olarak belirtmemiştir. Ö$_2$'nin yanıtında Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünde tahminde bulunmaya çalıştığı görülmektedir. Ancak herhangi bir genelleme gerçekleştirememiş ve dolayısıyla da ispat girişiminde bulunmamıştır. Problem ile ilgili görüşme esnasında bununla ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Dört nokta kaç bölge oluşturuyor sekiz bölge değil mi?

Ö$_2$: Evet.

A: Dört noktada sekiz bölge oluşuyor. Beş noktada?

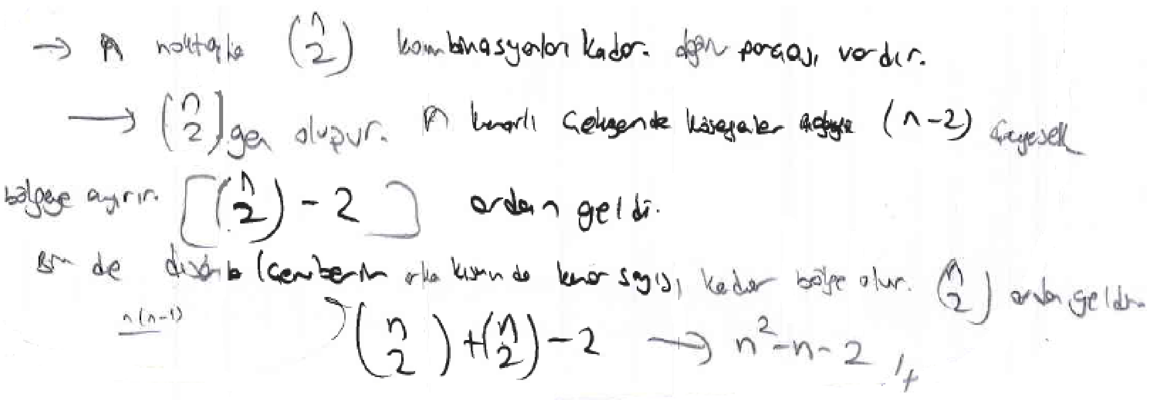
Ö$_2$: On altı.

A: İki noktada iki bölge, üç noktada dört bölge… iki, dört, sekiz, on altı bölge.

Ö$_2$: (gülüyor) İkinin üsleri... Beş nokta için dördüncü üssü, üçüncü üssü, ikinci üssü… (gülüyor). Ben sadece sanırım bir önceki (adım) ile ilişkilendirmeye çalıştım. O yüzden olmadı. Genele baksam oluyormuş.

Ö$_2$ adımları sadece bir önceki adımla ilişkilendirmeye çalıştığı için bütünü göremediğini ve bu nedenle yanıtında herhangi bir formüle ulaşamadığını, genelleme yapamadığını ifade etmiştir.

Ö$_3$'ün aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 62a. Ö$_3$'ün Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt 1

Ö$_3$ yanıtına n noktalı durumu düşünerek başlamıştır. Burada önce n noktalı durumda oluşacak doğru sayısını ifade etmiştir. Böylece bu doğru parçalarıyla daire içinde meydana gelecek olan çokgeni düşünme aşamasına geçebilmiştir. Yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Bu soruda neler yaptın Ö$_3$?

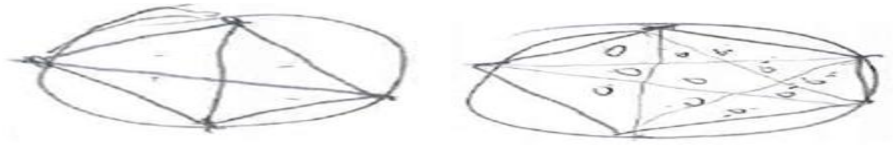
Ö$_3$: Burada mesela üç tane doğru parçası varsa üçgen oluşacak dairede dedim. Burada köşegen oluşmayacak zaten. n kenarlı bir çokgenin köşegenleri çokgeni n eksi iki üçgensel bölgeye ayırırdı. Burada üçgen üç kenarlı olduğundan zaten içinde tek bir bölge oluştu. Kenarların dışında kalan üç tane de alan var her kenarla daire arasında. O zaman n kenarlı (çokgen) için de dışta n tane bölge oluşacak.

A: Dairenin içinde ama çokgenin dışında değil mi?

Ö$_3$: Evet. O yüzden n tane nokta varsa n'nin ikili kombinasyonları kadar doğru parçası oluşacak. Böyle düşündüm, n'nin ikili kombinasyonu şeklinde. Böyle *düşündüm. Onlar da çokgeni n'nin ikili kombinasyonu eksi iki (tane) üçgensel bölgeye ayırır dedim ama sonra şu şekli çizince (beş noktalı şekil) gelmedi.*

A: Beş noktalıya mı uyguladın formülü?

Ö$_3$: Evet ama hani formül bulunca üç tane vermiş, dört noktayı denerim, beş noktalıyı. Genelde böyle yaparım. Beşi denedim sağlamadı, demek ki yanlış.

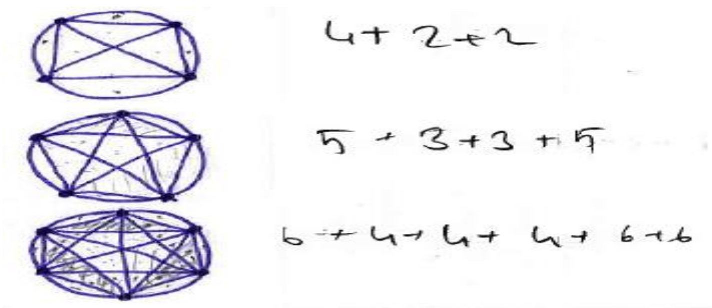


Şekil 4. 62b. Ö$_3$'ün Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt 2

Ö$_3$'ün yanıtında herhangi bir örneklendirmede bulunmadan doğrudan n noktalı duruma göre çözüme başlaması, özelleştirme basamağını atlamış olduğunu akla getirse de cevap kâğıdına bakıldığında problemde verilen 2 noktalı ve 3 noktalı şekilleri incelediği görülmüştür. Yanıtında sunduğu çizimler de soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede kullanmış olduğu "*Burada üçgen üç kenarlı olduğundan zaten içinde tek bir bölge oluştu. Kenarların dışında kalan üç tane de alan var her kenarla daire arasında. O zaman n kenarlı (çokgen) için de dışta n tane bölge oluşacak.*" ifadeleri de formülü problemin görsel gösterimi odaklı bulmaya çalıştığını, Algıya Dayalı Tahmin yaptığını göstermektedir.

Ö$_3$ yanıtında çokgenin içerisindeki köşegenlerin oluşturduğu alanlar da olacağını düşünmüş, o alanların sayısını hesaplamaya çalışmıştır. Yanıtının sonunda ise daire içerisindeki çokgenin kenarları ile daire arasında kalan bölgelerin sayısını son değerlere ilave etmiştir. Çözümü sonucunda n'ye bağlı ifade edilen bir formüle ulaşmış, Sembolik Genelleme yapmıştır. Bu genellemeyi ispatlamaya çalışırken ise formülü "*ama hani formül bulunca üç tane vermiş, dört noktayı denerim, beş noktalıyı. Genelde böyle yaparım. Beşi denedim, sağlamadı demek ki yanlış.*" ifadesinde de belirttiği üzere dört ve beş noktalı durumlar üzerinde denemiş ama doğru olmadığını bulmuştur. Bu nedenle Ö$_3$'ün bu soruda Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_4$'ün Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt aşağıda sunulmuştur:



Şekil 4. 63. Ö$_4$'ün Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

Ö$_4$ yanıtında 4, 5 ve 6 noktalı durumları örneklendirmiş ancak herhangi bir formüle ulaşamamıştır. Çizimler incelendiğinde Ö$_4$'ün Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Çünkü soruyu kendi örnekleriyle irdelemiş, anlatılanı ve istenileni çözümüne doğru bir şekilde aktarabilmiştir. Ö$_4$ yapılan görüşmede yanıtı ile ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

A: Burada yine birkaç örnek üzerinden ilerlemeye çalışmışsın.

Ö$_4$: Evet 6 noktalıya kadar uğraştım. Bölge sayısı sorulduğu için birazcık burada yapıp saymaya çalıştım.

A: $4 + 2 + 2$ derken?

Ö$_4$: Dıştaki ve içteki oluşan bölgeleri saymaya çalıştım.

A: Anladım.

Ö$_4$: Burada sanki bir şeyler geliyor gibi düşündüm ama bulamadım (gülüyor). Yani mesela burada 4 tane nokta çizdiğimde 4 tane dışta alan gelmiş, 5 tane çizdiğimde 5 tane dışta alan gelmiş, şekilde görmüşüm.

A: Evet. Sanırım sonra içerisini kendi arasında parçalamaya çalıştın.

Ö$_4$: Evet şu şekilde (4 noktalı örnekte çokgenin içinde oluşan üçgensel bölgeleri gösteriyor) yarısı kadar da üçgen oluşuyor şeklinde düşündüm.

Ö$_4$ bölgeleri içteki (çokgenin içindeki) ve dıştaki (çokgenin dışında ama dairenin içinde kalan) bölgeler olarak ayırmış, yanıtında bu bölgelerin sayısını ayrı ayrı belirtmiştir. Aslında ortak bazı özellikleri de görmeye başlamış olmasına rağmen (örn. dışta kenar sayısı kadar bölge oluştuğu gibi) devamında içte kalan bölgeleri de kendi arasında ayırmaya çalışmış ancak bir formüle ulaşamamıştır. Kendisiyle yapılan görüşmede ise formülü bulamamasıyla ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Bunlar daha öncesinden çok karşılaştığınız soru tipleri değil sanırım.

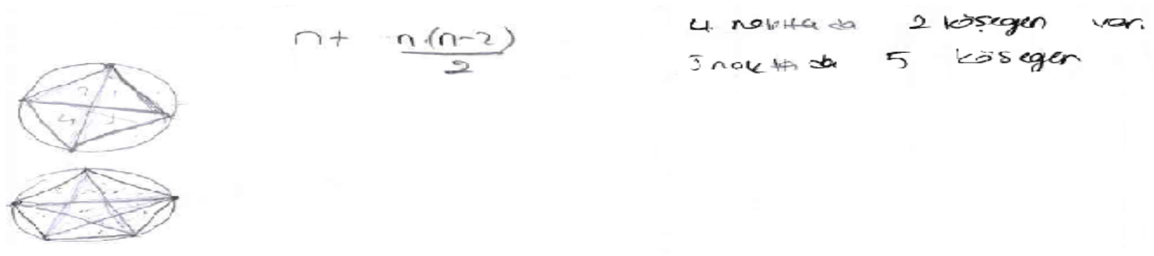
Ö$_4$: Evet özellikle ispat karşılaştığım bir şey değil kesinlikle yani şurada n yerine bir sayı verilse o daha kolay ama ispata girince hani bizim sınav sistemimizden dolayı birazcık da bu şekilde olunca zorlandım.

A: O türden sorular olsa…

Ö$_4$: O türden sorular olsa yani sayı verip de cevabı istense basit olurdu. Yani formül bulmak gibi ispat yapmak olunca daha zor oluyor. Çünkü bu alışık olmadığımız bir durum. Yani sınavı test odaklı düşündüğümüz için direk hani formül bulma değil de formülü yerine yazma odaklıyız.

Ö$_4$ soruyu çözememe nedeni olarak sınav sistemini ve soruda herhangi bir değer değil de formül ve ispat istenmiş olmasını göstermiştir. Hem çözüm hem de gerçekleştirilen görüşme incelendiğinde Ö$_4$'ün "*Dıştaki ve içteki oluşan bölgeleri saymaya çalıştım"* ifadesiyle belirttiği gibi formülü çizimleri yoluyla, Algıya Dayalı Tahmin türünden bir tahminle bulmaya çalıştığı söylenebilir. Ancak bunda başarılı olamamış, bir genelleme ve ispat gerçekleştirmemiştir.

Ö$_5$'in Daire ve Noktalar problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 64. Ö$_5$'in Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ yanıtında 4 ve 5 noktalı durumları örneklendirmiş, bu örneklere yönelik çizimler yapmıştır. Çizimler incelendiğinde Ö$_5$'in soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün Ö$_5$?

$Ö_5$: Burada önce bir daire çizdim. İçine bir dörtgen oluşturdum. Sonra bu dışında kalan bölgeler, dörtgen oluşturduğum için dört tane. Sonra beşgen oluşturdum. Tekrar saydım (dışta kalan bölge) beş tane oldu. Sonra n dedim. n tane olunca (dışta kalan bölge) n tane olacak.

A: Evet.

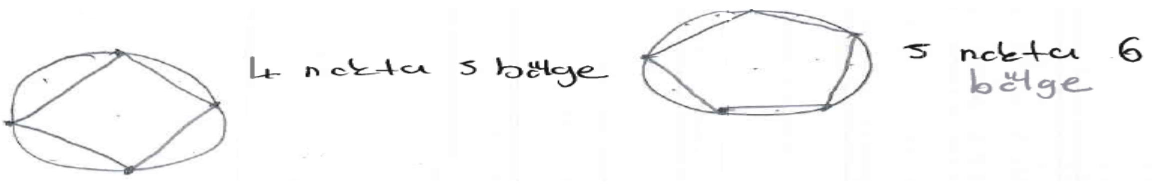
$Ö_5$: Sonra beşgenin içinde de köşegenleri oluşturdum. Köşegenlerin içeride oluşturduğu bölge sayısı için de $\frac{n\cdot(n-2)}{2}$ dedim.

A: Bu daha önceden bildiğin bir formül müydü?

$Ö_5$: Evet. Aslında formülü tam hatırlamıyorum ama (gülüyor) dörtgeni çizerek oradan türettim. Yani öyle gittim.

$Ö_5$ yaptığı çizimlerde bölgeleri içerideki ve dışarıdaki bölgeler olarak ayırmış, çokgenin dışında ve içinde oluşacak olan bölgelere odaklanmıştır. Bu nedenle Algıya Dayalı Tahmin yaptığı söylenebilir. Sonra çokgenin içinde, köşegenler ile oluşturulan bölge sayısını veren formülü hatırlamış ve onu kullanmıştır. Yanıtının sonunda çözüm ile uyumlu olarak Sembolik Genelleme'ye ulaşmıştır. Bu genellemeyi ise özellikle 4 ve 5 noktalı durumlar üzerinde elde ettiği sayısal değerler yoluyla gerçekleştirmeye çalışmıştır. Dolayısıyla Kritik Deney türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_6$'nın 7. problem olan Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt ise aşağıdadır:



Şekil 4. 65. $Ö_6$'nın Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

$Ö_6$ yanıtında 4 ve 5 noktalı örneklendirmelerde bulunmuş ancak soruda mevcut olan *"her nokta ikilisini doğru parçalarıyla birleştirin."* şeklindeki yönergeyi uygulamamış, çizimlerinde bu kısmı eksik bırakmıştır. Bu nedenle $Ö_6$'nın yanıtında Kısmi (Eksik) Özelleştirme yaptığı söylenebilir. Yapılan görüşmede yanıtıyla ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün $Ö_6$?

$Ö_6$: Bu soruda şey ben ikinci adımdan sonra bir adım daha ilerlettim. Dört nokta aldım, birleştirdim bir dörtgen oluştu. Sonra beş bölgeye ayrıldı.

A: Beş noktayı da düşündün herhalde.

$Ö_6$: Evet beş noktayı da düşündüm. Altı bölgeye ayrıldı ama matematiksel olarak ispatlayamadım bunu ben.

A: Peki yöntemin doğruluğundan emin miydin?

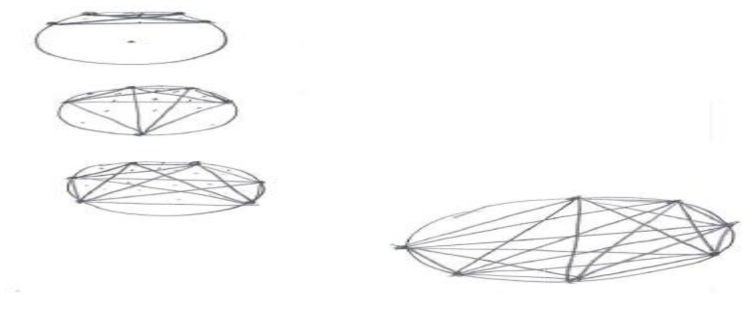
$Ö_6$: Doğruluğundan çok da emin değildim. Çünkü yaptıkça bölgeler oluşmaya devam edecek düzenli de gitmiyor zaten. Çıkan bölge sayıları arasında bir ilişki kuramadım. O yüzden de ispatlayamadım.

A: Formül için $n+1$ diyebilir miydik burada?

$Ö_6$: $n+1$ yani diyemezdik çünkü ilkinde iki nokta var ve iki bölge var. Sağlamıyor. Zaten o yüzden şüphelenmeye başlamıştım hani onu ($n+1$'i) düşündüm ama ilk adımda iki noktada iki bölge oluştuğu için öyle olmamalı dedim.

$Ö_6$'nın yanıtında formüle yönelik ayrı ayrı 4 ve 5 noktalı örnekler vermesi ve bu örnekler üzerinde herhangi bir irdeleme yapmadan sadece sayısal değerleri hesaplamış olması, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmaya çalıştığını göstermektedir. Yanıtının sonunda ise soruyla ilgili bir genelleme ve ispat yapmamıştır.

$Ö_7$'nin Daire ve Noktalar problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:

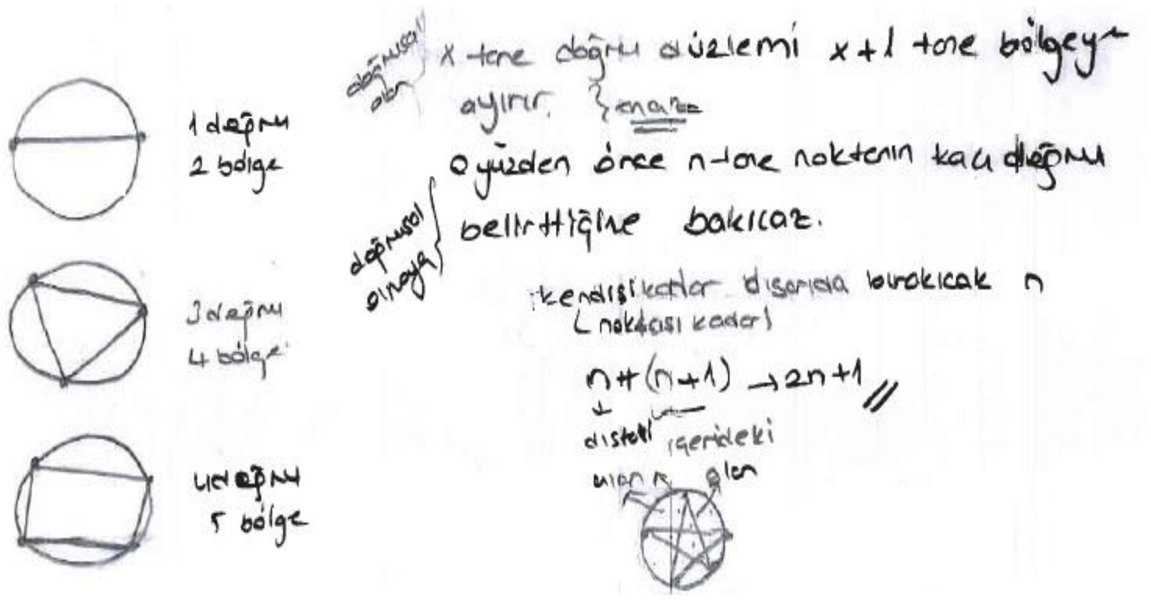


Şekil 4. 66. $Ö_7$'nin Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

$Ö_7$ Daire ve Noktalar problemi ile ilgili yanıtında 4, 5, 6 ve 7 noktalı örnekleri çizmiştir. Aynı sayıda noktalı durumlar için farklı farklı çizimler yapmış ancak nokta sayısı ile bölge sayıları arasında herhangi bir ilişkiye ulaşamamıştır. Çizimler incelendiğinde $Ö_7$'nin Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Ancak bu örneklerden elde ettiği bulguları sayılara çevirmemiş ve herhangi bir formül ifade etmeden çözümü bırakmış, kendisiyle yapılan görüşmede problemle ilgili olarak *“onu da yapamadım”* demiştir.

Ö$_7$’nin yanıtında çizimleri yoluyla birbirinden farklı örnekleri incelediği görülmektedir. Dolayısıyla Ö$_7$’nin Sonlu Sayıda Ayrık Durumdan Empirik Tümevarım türünden bir tahminde bulunmaya çalıştığı söylenebilir. Ancak herhangi bir genellemeye varamamış ve ispat gerçekleştirmemiştir.

Ö$_8$’in aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıdadır:



Şekil 4. 67. Ö$_8$’in Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

Ö$_8$ yanıtında çizerek gösterdiği örnekler üzerinde sırasıyla 2, 3 ve 4 noktalı durumlarda oluşacak bölge sayılarını bulmuştur. Çizimler incelendiğinde yine soruda mevcut olan *“her nokta ikilisini doğru parçalarıyla birleştirin.”*şeklindeki yönergenin uygulanmamış, çizimlerde bu kısmın eksik bırakılmış olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Kısmi (Eksik) Özelleştirme söz konusudur.Ö$_8$ yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün Ö$_8$?

Ö$_8$: Burada da dikdörtgen sorusundaki gibi x tane doğru $x+1$ bölgeye ayırır dedim en az.

A: Örneklerde de bunu demişsin, 3 doğru 4 bölgeye ayırır…

Ö$_8$: Onları direkt çizdiğim için böyle oldu. Sonra 4 doğru 5 bölgeye ayırmış. O yüzden önce n tane noktanın kaç doğru belirttiğine bakarız dedim.

A: Neden?

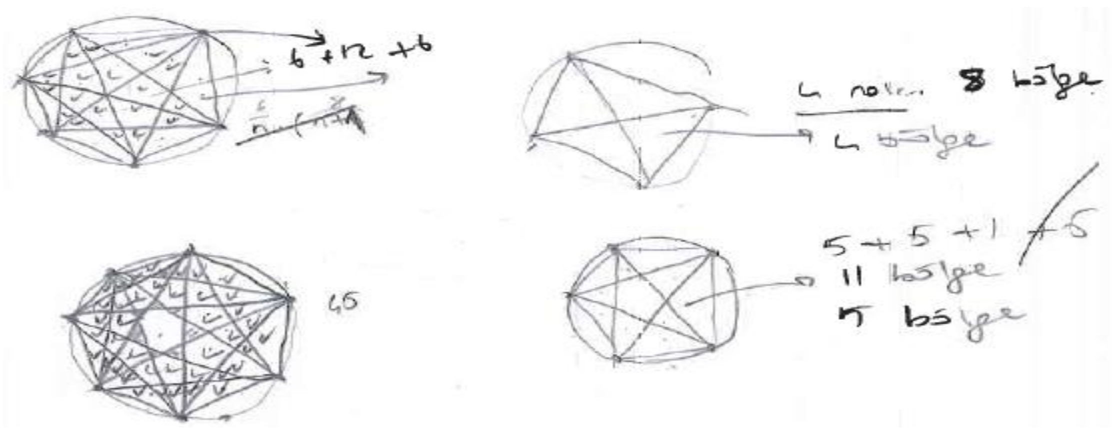
Ö$_8$: Çünkü bölge sayısı doğru sayısıyla alakalı. Çünkü kendisi (doğru sayısı) kadar bölge dışarıda bırakıyor. Sonra da bunları topladım.

A: Ama verdiğin şu örnek (4 noktalı durum) bununla çelişiyor değil mi?

Ö$_8$: Evet (gülüyor) kendimle çelişmişim orada baya.

Ö$_8$ her ne kadar Kısmi (Eksik) Özelleştirme yapmış olsa da sonuçta soruyla ilgili, yanıtıyla tutarlı bir formüle ulaşmış, Sembolik Genelleme yapmıştır. Ö$_8$ formülü oluştururken sorunun görsel çizimine bakmış, bölgeleri dışarıdakiler ve içeridekiler olarak ikiye ayırmıştır. Bu nedenle Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminde bulunduğu ifade edilebilir. Formülün ispatında ise sadece özel bir durumu, 5 noktalı durumu ele almış ve bu örnekte formül sağlandığı için formülün doğru olduğunu düşünmüştür. Bu nedenle Ö$_8$'in Kritik Deney türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_9$'un Daire ve Noktalar problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 68. Ö$_9$'un Daire ve Noktalar problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında 4, 5, 6 ve 7 noktalı durumları ayrı ayrı çizerek örnek vermiştir. Çizimler incelendiğinde soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Bu çizimlerde bölgeleri içteki ve dıştaki bölgeler olarak ikiye ayırmış, hesaplamalarda ise bu değerleri birbirleri ile toplamıştır. Problem ile ilgili yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu problemde nasıl düşündün $Ö_9$?

$Ö_9$: Burada bir formül vardı geometride görmüştük. n kenarlı bir çokgeni köşegenleri kaç bölgeye ayırır şeklinde… Bunun bir formülü vardı ama ben onu yine hatırlayamadım. Onu çıkarmaya çalıştım.

A: Anladım.

$Ö_9$: Çünkü sanki çokgenleri köşegenleri… İşte şu formülü bulsaydım dairenin de kaç bölgeye ayrılacağını bulacaktım çünkü burada mesela 2, 4, 5 (sayıyor) nokta olduğunda şu kenarları yine beş noktaya ayrılıyordu.

A: Beş bölgeye.

$Ö_9$: Evet beş bölgeye. Şey beşgeni köşegenleri kaç bölgeye ayırır onu bulabilseydim oradan formül gelebilirdi.

A: Burada baya örnek vermişsin.

$Ö_9$: Evet baya uğraştım çünkü formülü hatırlamaya çalıştım.

A: Örnekler üzerinden mi?

$Ö_9$: Evet şekil üzerinden.

$Ö_9$ yanıtında problem ile ilgili bir özelliği fark etme amacıyla değil de unutmuş olduğu bir formülü hatırlamak için örnekler vermiştir. Her ne kadar soruya verilen yanıtta bir formüle ulaşamamış olsa da $Ö_9$'un yanıtı incelendiğinde, genel olarak çizimlerde içte ve dışta oluşan bölge sayılarına odaklanması nedeniyle Algıya Dayalı Tahmin ile formüle ulaşmaya çalıştığı söylenebilir. Ancak yanıtının sonunuda bir formüle ulaşamamış, herhangi bir genelleme ve ispat yapmamıştır.

Daire ve Noktalar problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme seviyeleri açısından incelendiğinde ise Tablo 4. 7.'de görüldüğü gibi bir durumla karşılaşılmıştır.

Tablo 4. 7. incelendiğinde iki öğrencinin ($Ö_6$ ve $Ö_8$) Kısmi (Eksik) Özelleştirme, diğer öğrencilerin tümünün Yeterli Özelleştirme yaptıkları görülmektedir.

Yanıtlar tahmin basamağı açısından incelendiğinde beş öğrencinin ($Ö_3$, $Ö_4$, $Ö_5$, $Ö_8$ ve $Ö_9$) Algıya Dayalı Tahmin yaptığı, diğer öğrencilerin tamamının ise Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunduğu görülmektedir.

Tablo 4. 7. Daire ve Noktalar problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Aritmetik Genelleme
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_3$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Yok	Yok
	$Ö_5$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Kritik Deney	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
Düşük	$Ö_7$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_8$	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Kritik Deney	Sembolik Genelleme
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Yok	Yok

Daire ve Noktalar probleminde beş öğrenci ($Ö_2$, $Ö_4$, $Ö_6$, $Ö_7$ ve $Ö_9$) ispat ve genelleme yapmamıştır. İspat basamağında başarılı olmuş öğrencilerden ikisi ($Ö_1$ ve $Ö_3$) Saf Deneycilik, diğer iki öğrenci ise ($Ö_5$ ve $Ö_8$) Kritik Deney türünden ispat yapmıştır. Genellemeye ulaşan öğrencilerin biri ($Ö_1$) Aritmetik Genelleme yapmış, diğer öğrenciler ise Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Herhangi bir genelleme ve ispat sunamamış öğrencilerin, yanıtlarında Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmini daha çok kullandıkları görülmektedir.

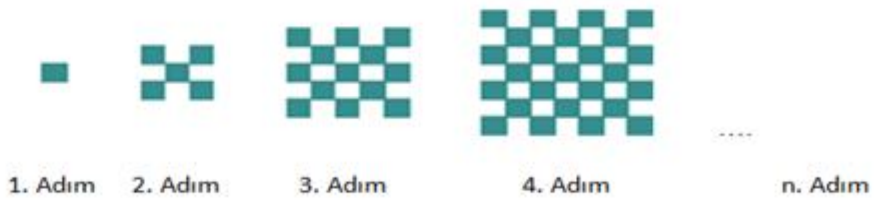
Öğrencilerin 8. problem olan Desen problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir:

4.8. Desen Problemine İlişkin Bulgular

DESEN

Aşağıdaki örüntüde görüldüğü gibi küçük karelerden kare şeklinde daha büyük bir yapı oluşturulmaktadır. Kullanılan turkuaz kare sayısı nedir?

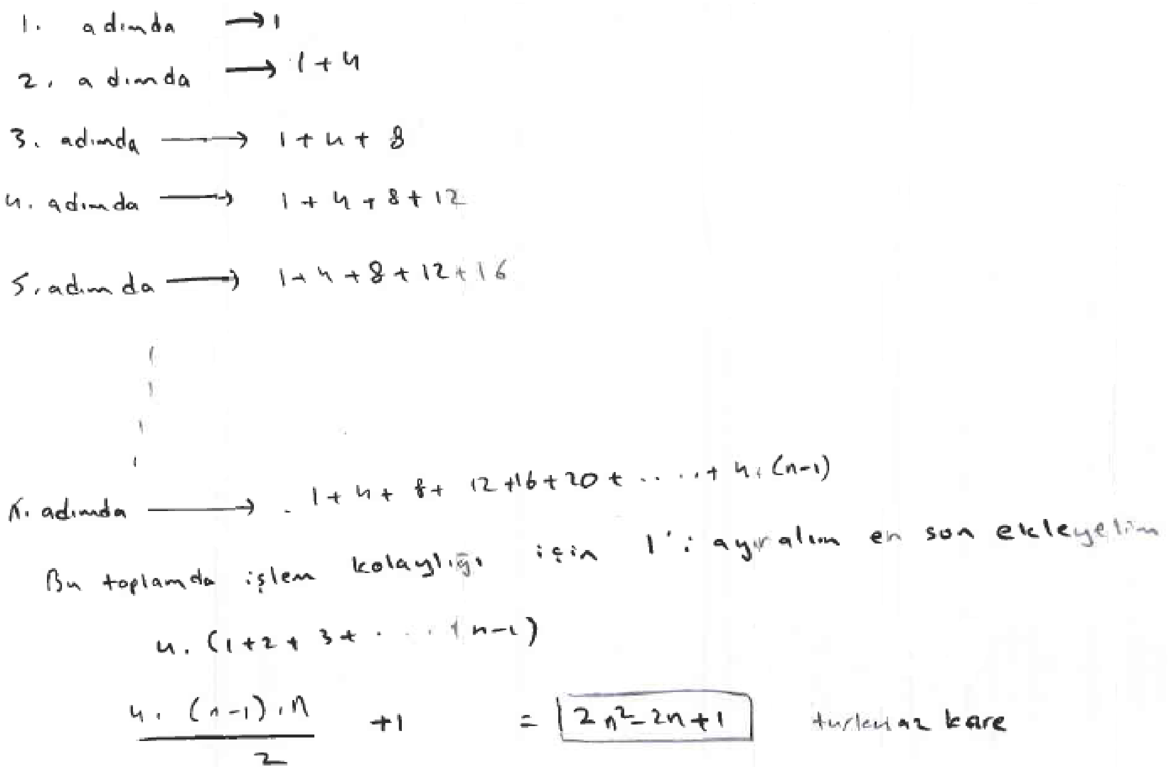
Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



Yukarıdaki modellere göre n. adımda oluşan yapıda kullanılan turkuaz kare sayısı değeri nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

Şekil 4. 69. Desen Problemi

İlk olarak $Ö_1$'in yanıtı incelenmiştir. $Ö_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir:



Şekil 4. 70. $Ö_1$'in Desen problemine verdiği yanıt

$Ö_1$ yanıtında 1., 2., 3., 4. ve 5. adımda oluşan turkuaz kare sayılarını hesaplayarak çözüme başlamıştır. Sonrasında elde ettiği verilere göre n. adımda oluşacak olan turkuaz kare sayısını bulmuştur. $Ö_1$'in soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak yanıtına aktardığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede ise çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

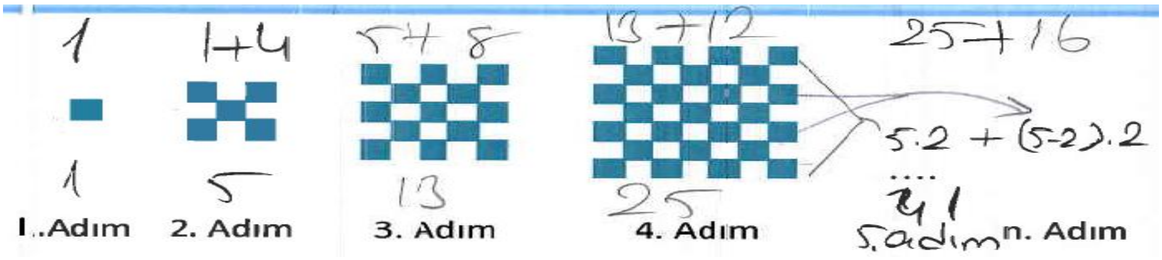
$Ö_1$: Burada direkt sayılara bakarak gittim. Artış miktarına baktım.

A: Beşinci adıma sen genellemişsin herhalde ama 5. adımı çizmemişsin burada. Böyle gidiyorsa 5. adımda da böyle oluyor mudur dedin?

$Ö_1$: Evet. Bağıntı olarak gittiğini, $4 \cdot (n-1)$ *olarak gittiğini anladım.*

$Ö_1$ problemde verilen görseller üzerinde, doğru her bir aşamada merkezdeki kareden dışarıya oluşan kare sayılarını bulmuş ve buna bağlı çözüm gerçekleştirmiştir. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminde bulunmuştur. Formülü n'ye bağlı bir ifade şeklinde göstermiş, Sembolik Genelleme yapmıştır. Formülü oluştururken ilk 5 adımıincelemiş ve direkt nümerik ilişkilere odaklanmıştır. Bu nedenle Saf Deneycilik türünden ispat gerçekleştirdiği söylenebilir.

$Ö_2$'nin aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 4. 71a. $Ö_2$'nin Desen problemine verdiği yanıt 1

$Ö_2$ de önce 1., 2., 3., 4. ve 5. adımdaki turkuaz kare sayılarını hesaplayarak yanıtına başlamıştır. Çözümden anlaşılacağı üzere $Ö_2$ her bir adımda, önceki adıma dışarıdan bir kat kare daha eklendiğini düşünmüş, o nedenle 2. adımdaki turkuaz kare sayısını 1 (1. adımdaki turkuaz kare sayısı) +4 (1. adımdaki karenin etrafına bir kat kare eklenmesi sonucu şekle ilave edilecek olan turkuaz kare sayısı) şeklinde göstermiştir. Benzer yolla 3. adımdaki turkuaz kare sayısını $5 + 8$ şeklinde, 4. adımdaki turkuaz kare sayısını $13 + 12$ şeklinde, 5. adımdaki turkuaz kare sayısını ise $25 + 16$ şeklinde ifade etmiştir. Sonrasında bu gösterimi değiştirmiş ve formülü aşağıdaki gibi elde etmiştir:

1 adım 1 kare → $1^2+0^2=1$
2adım 5 kare → $2^2+1^2=5$
3 adım 13 kare → 3^2+2^2
4. adım 25 kare → 4^2+3^2
5. adım 41 kare → 5^2+4^2
6. adım 51 kare → 6^2+5^2

6. adım
$41+\underbrace{6.2}_{\text{alt ve üst}}+\underbrace{(6-2).2}_{\text{orta kenarlar}}$
$41+12+8=61$

n. adım $n^2+(n-1)^2$ kare turkuaz kare olmalı

Şekil 4. 71b. $Ö_2$'nin Desen problemine verdiği yanıt 2

Yanıtı incelendiğinde $Ö_2$'nin 6. adıma kadar örneklendirmelerde bulunduğu ve her durumda oluşan turkuaz kare sayısını hesapladığı, soruyu anladığı ve istenileni tam olarak bulduğu, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. $Ö_2$ yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Burada da güzel çözümleme yapmışsın. İkinci adımda ikinin karesi artı birin karesi, sonra ikinin karesi artı üçün karesi…

$Ö_2$: Evet.

A: Böyle olduğu hemen kafanda şekillenmiş miydi?

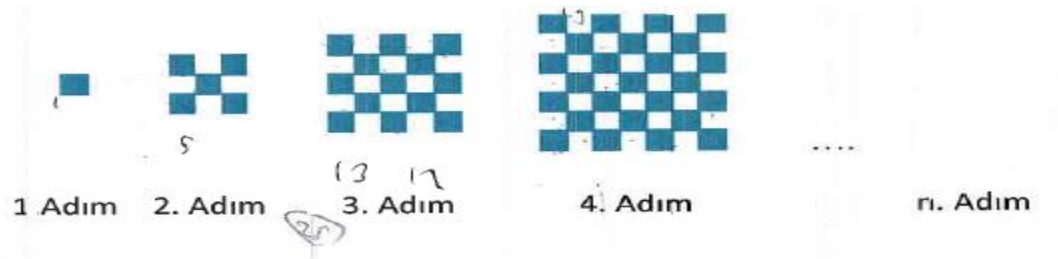
$Ö_2$: Evet yani üçüncüye kadar küçük sayılar olduğu için denk getirmiştim sonra bunu sağlıyorsa…

A: Beşinci adımı da oluşturur şeklinde mi düşündün?

$Ö_2$: Evet.

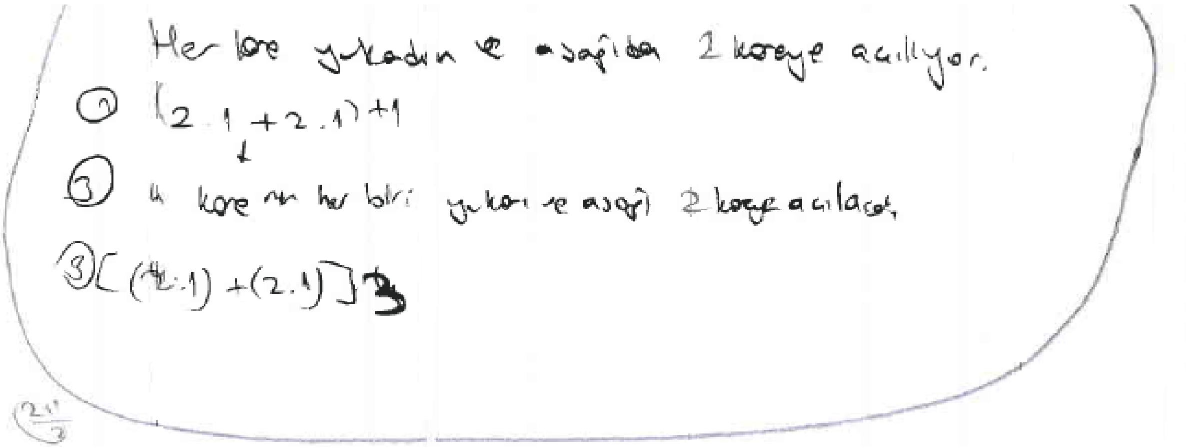
$Ö_2$ örneklemini 6. adıma kadar genişletmiştir. Bu örneklerde herhangi bir açıklama yapmamış, sayısal değerler üzerinde yorumlamalarda bulunmuştur. Bu nedenle Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünde tahmin yaptığı söylenebilir. Çözüm n'ye bağlı ifade edilmiş olan bir formül ile neticelenmiş ve Sembolik Genelleme yapılmıştır. Formül oluşturulurken örnekler nümerik açıdan değerlendirilmiş ve çok sayıda örnek kullanılmıştır. Dolayısıyla $Ö_2$'nin Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Şekil 4. 72a.'da görüldüğü gibi $Ö_3$ de $Ö_2$'ye benzer şekilde ilk 4 adımdaki turkuaz kare sayılarını hesaplayarak çözüme başlamıştır. Yanıtında kullandığı ifadeler soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığını göstermektedir. Dolayısıyla Yeterli Özelleştirme söz konusudur. $Ö_3$'ün 8. probleme verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



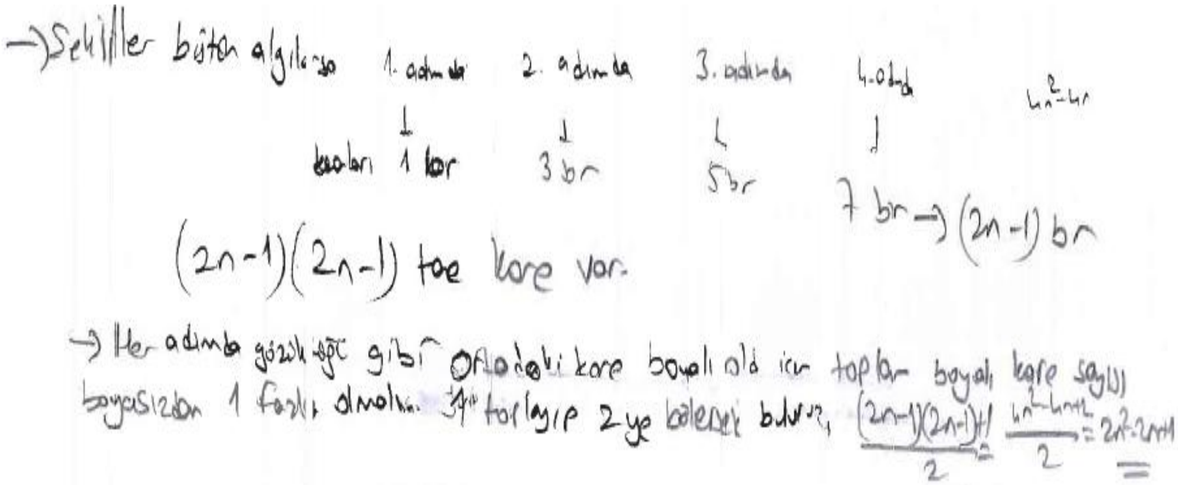
Şekil 4. 72a. $Ö_3$'ün Desen problemine verdiği yanıt 1

$Ö_3$ yanıtının devamında şekilleri parçalamaya başlamış, kareleri merkez kareler ile onların yukarı ve aşağısında olan kareler şeklinde ayrı ayrı düşünmüştür. Örneğin 2. adımda, merkez kare olarak adlandırdığı ortadaki karenin yukarıdan ve aşağıdan 2 kareye açıldığını şu şekilde ifade etmiştir:



Şekil 4. 72b. $Ö_3$'ün Desen problemine verdiği yanıt 2

Ancak bu yolla çözüme devam etmemiş ve aşağıda görüldüğü üzere yöntemini değiştirerek adımları temsil eden şekillere daha bütüncül bakmaya başlamıştır:



Şekil 4. 72c. $Ö_3$'ün Desen problemine verdiği yanıt 3

Yanıtının bu kısmında $Ö_3$ her adımdaki karelerin kenar uzunluklarını bulmuş, kenar uzunluklarının her defasında tek sayı olduğunu farketmiştir. $Ö_3$ görüşmede yanıtını şu şekilde açıklamıştır:

A: Burada nasıl düşündün $Ö_3$?

$Ö_3$: Ben ilk şekle bakarak birinci adımda karenin bir kenarının bir birim olduğunu gördüm. İkinci adımda üç birim. Üçüncü adımda beş birim, dördüncü adımda yedi birim olduğunu gördüm. Dolayısıyla n. adımdaki bir karenin kenarında bulunan (birim) kare sayısının $2 \cdot n - 1$ olduğunu gördüm.

A: Evet.

Ö$_3$: Dolayısıyla (n. adımda) toplam $2 \cdot n - 1$ çarpı $2 \cdot n - 1$ tane kare olduğunu gördüm ve şu (şekillerde) ortadaki kare hep dolu (turkuaz) olduğu için... Hani neredeyse kare sayıları hep eşit olacak, dolular (turkuaz kareler) ile boş karelerin sayısı... ama ortadaki kare hep dolu olduğu için demek ki dolu sayısı boştan bir fazladır diye düşündüm. Dolayısıyla boş kare sayısı x ise dolu (turkuaz) kare sayısı $x + 1$ olmalı.

A: Evet.

Ö$_3$: Dolayısıyla şimdi biz bu ikisinin (turkuaz ve beyaz renkte kareler sayısı) toplamına bir ekleyip ikiye bölersek dolu kare sayısını buluruz diye düşündüm. O yüzden toplamlarına bir ekleyip (sonucu) ikiye böldüm, dolu kare sayısını buldum.

A: $2 \cdot n - 1$ çarpı $2 \cdot n - 1$ tek sayı olacağı için mi öyle yaptın?

Ö$_3$: Evet. Dolu sayısı bir fazla olduğu için bir ekledim ki küçük sayı x, büyük sayı $x + 1$ ise bir eklersek küçük de $x + 1$ olacak büyük de.

A: Bu problemde çok zorlanmadın herhalde.

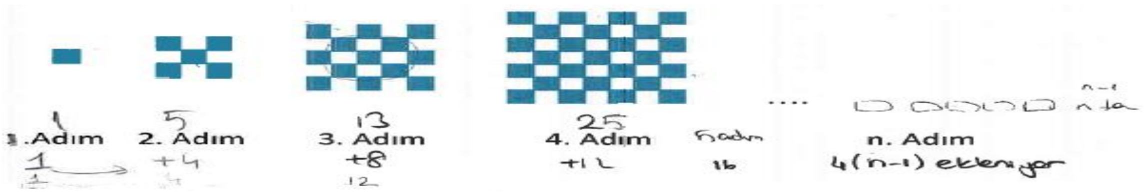
Ö$_3$: Yok. Şeyi yazdıktan sonra (kare kenarlarındaki birim kare sayısı) birinci adımda bir birim, ikinci adımda üç birim, genel formülü buluyoruz. Sonrası basit zaten, görmek lazım yani...

A: Neyi görmek?

Ö$_3$: Ortadakinin dolu olduğunu. Gerisi basit.

Ö$_3$ problemde verilmiş olan şekillere bakmış, ortak bir özelliği *"ortadakinin dolu olduğunu"*, her adımda merkezdeki karenin turkuaz renkte olduğunu ve turkuaz kare sayısının boş kare sayısından daima bir fazla olduğunu fark etmiş, formülü oluştururken Algıya Dayalı Tahmin yapmıştır. Bu özelliği fark ettikten sonra da her bir şekilde oluşacak olan toplam kare sayısını düşünerek mevcut olan turkuaz kare sayısını hesaplama yoluna gitmiştir. Formülü n'ye bağlı olarak belirtmiş ve Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Genellemeye şekiller arasında ortak bir özellik fark ederek belirli bir mantıksal açıklamayla ulaştığı için bu soruda Ö$_3$'ün Genel Örnek türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_4$'ün Desen problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 73a. Ö$_4$'ün Desen problemine verdiği yanıt 1

Ö$_4$ yanıtına şekillerdeki turkuaz kare sayılarını sayarak başlamış, örnekleri 5. adıma kadar incelemiştir. Ayrıca adımlar arasında, turkuaz kare sayılarında meydana gelen artışa dikkat etmiş ve her defasında n adım sayısını göstermek üzere turkuaz kare sayısının $4 \cdot (n-1)$ değerinde arttığını tespit etmiştir. Yanıtında ifade ettiği değerler, soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Yapılan görüşmede Ö$_4$ çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Bu soruda nasıl düşündün Ö$_4$?

Ö$_4$: Burada her adımda oluşan turkuaz kare sayısını bulmaya çalıştım.

A: Ayrı ayrı mı?

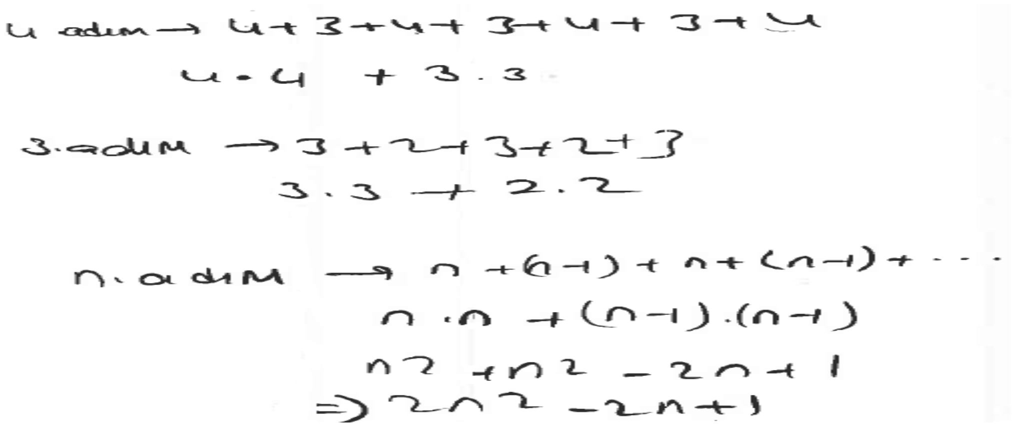
Ö$_4$: Evet. İlkinde bir tane turkuaz kare var dedim. 5, 13, 25 şeklinde gidiyor. Burada 1'e 4 eklenmiş (ikinci adımda), 5'e 8 eklenmiş (üçüncü adımda), 13'e 12 eklenmiş (dördüncü adımda), (beşinci adımda bir önceki adıma) 16 eklenmiş diye örüntüyü bulup oradan $4 \cdot (n-1)$ yani 4. adım için mesela dört eksi bir üç, üç kere dört, oniki şeklinde kaç eklendiğini buldum.

Ancak Ö$_4$ daha sonra bu çözüm yolundan vazgeçmiş ve sadece 4. adımı incelemiştir. Bu adımda yukarıdan aşağıya doğru turkuaz kare sayılarını saymış, bu sayılar arasında bir düzen fark etmiş ve buna göre formülü şu şekilde oluşturmuştur:

Şekil 4. 73b. Ö$_4$'ün Desen problemine verdiği yanıt 2

Ö$_4$ yanıtının bu kısmında 4. adımda her bir satırda oluşan turkuaz kare sayısını saymış, sayıların dizilişinde bir örüntü tespit etmiş ve bu örüntüye göre n. adımda yer alacak olan sayısal ifadeleri n değişkeni türünden belirtmiştir. Formülü bulurken sadece 4. adımı gösteren şekil üzerinde yukarıdan aşağıya doğru her bir satırda oluşan kare sayılarını bulmuş, Algıya Dayalı Tahmin türünden tahmin ve Sembolik Genelleme yapmıştır. Genellemeye ulaşırken spesifik bir durumu (4. adım) inceleyip başka herhangi bir örneklendirmeye gitmeden buradaki durumun diğer durumlarda da geçerli olacağını düşündüğü için Ö$_4$'ün ispat türünün Kritik Deneycilik olduğu söylenebilir.

Ö$_5$'in aynı soruya verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 74. Ö$_5$'in Desen problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ yanıtında 3. ve 4. adımlardaki turkuaz kare sayılarını hesaplayarak çözüme başlamıştır. İfade ettiği çözüm, soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. 3. ve 4. adımlardaki turkuaz kare sayılarını ayrı ayrı çözümlediğinde ise bir örüntüye ulaşmış ve sonrasında bunu n. adıma genellemiştir. Yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün Ö$_5$?

Ö$_5$: Ben üçüncü adımla dördüncü adıma baktım. Üçüncü adımda üç tane turkuazlı (karenin en üst kenarı) sonra iki tane turkuazlı (üstten ikinci satır) kare geliyor.

A: Evet.

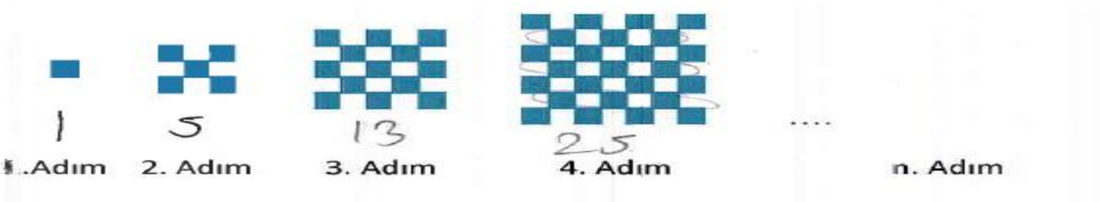
Ö$_5$: Bunları bu şekilde topladığımda (karedeki tüm turkuaz kare sayısı) üç çarpı üç artı iki çarpı iki geliyor. Sonra dörtlüye baktım (dördüncü adım). Dört *tane dörtlü, üç tane üçlü (turkuaz kare sayısı) geldi. Bunları topladığımda dört çarpı dört artı üç çarpı üç geldi.*

A: Buradan bir örüntüye mi vardın?

Ö$_5$: Evet. Sonra n. adımda da n çarpı n artı n eksi bir çarpı n eksi bir ($n \cdot n + (n-1) \cdot (n-1)$) tane turkuaz kare olur.

Ö$_5$ formülü oluştururken 3. ve 4. adımlarda yine yukarıdan aşağıya doğru herbir satırda oluşan kare sayılarını bulmuş, burada elde ettiği sayısal değerler üzerinden Algıya Dayalı Tahmin türünde tahminde bulunmuştur. Çözüm sonunda Sembolik Genelleme mevcuttur. Bu genellemeye ise başka herhangi bir örneklendirmeye gitmeden sadece özel iki durum (3. ve 4.adım) inceleyerek ulaştığı ve buradaki durumun diğer durumlarda da geçerli olacağını düşündüğü için Ö$_5$'in ispat türünün Kritik Deneycilik olduğu söylenebilir.

Ö$_6$'nın Desen problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 75a. Ö$_6$'nın Desen problemine verdiği yanıt 1

Ö$_6$ ilk 4 adımda bulunan turkuaz kare sayılarını saymış ve buna bağlı bir çözüm gerçekleştirmiştir. Verdiği değerler soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde açıklamıştır:

A: Bu soruda nasıl düşündün Ö$_6$?

Ö$_6$: Şimdi adımlardaki turkuaz kare sayılarını saydım önce onları yazdım. 1, 5, 13 diye devam ediyor. Sonra bu sayılar arasında nasıl bir ilişki olabilir diye düşündüm.

A: Sonra ne yaptın?

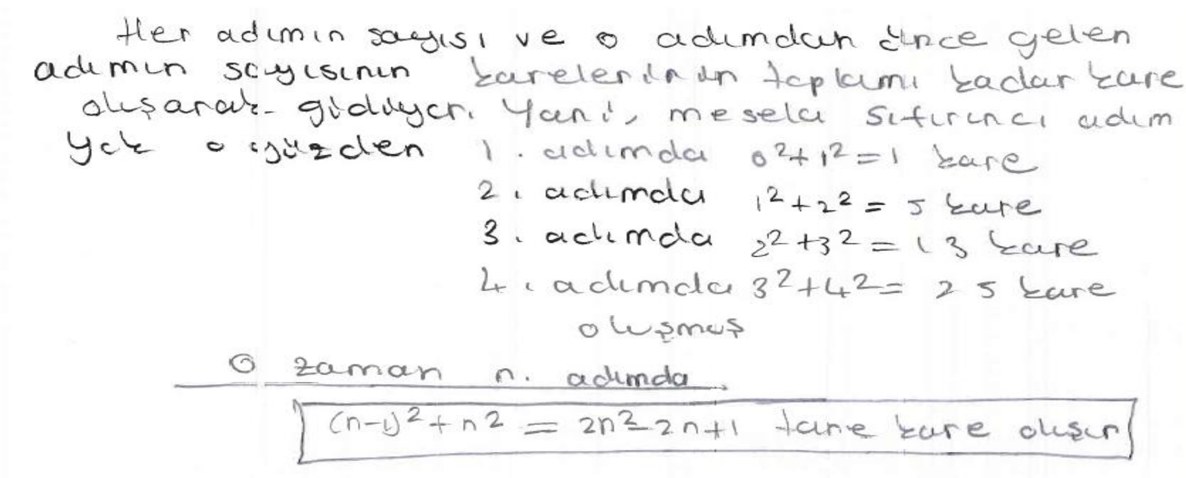
Ö$_6$: Sonra birçok şey geliyor insanın aklına.

A: Ne geldi?

Ö$_6$: Neyin karesiyle neyin karesi diye geldi. Ondan sonra da en sonunda bunların adımın bir önceki adımın karesi artı o adımın karelerinin toplamı *olduğunu gördüm. Yani birinci adımda ilk adım olmadığı (kendisinden önce adım olmadığı) için sıfır artı kendisinin* (1) *karesi bir, ikinci adımda kendinden önceki 1'in karesi artı kendisinin (adım numarası) karesi dört, beş yaptı, üçüncü adım 13 bu şekilde gidiyor. Sonra formulleştirince de* $(n-1)$*'in karesi artı* n^2*, o şekilde gidiyor. Oradan da formül* $2 \cdot n^2 - 2 \cdot n + 1$ *geldi.*

Ö$_6$ yapılan görüşmede formülü önce *"bir önceki adımın karesi artı o adımın karelerinin toplamı"* şeklinde düşündüğünü ifade etmiştir. Dolayısıyla Ö$_6$'nın önce Bağlamsal Genelleme gerçekleştirdiği söylenebilir. Ö$_6$'nın aklına formül ile ilgili olarak hemen "*neyin karesiyle neyin karesi"* şeklinde bir ifadenin gelmiş olması dikkat çekmektedir. Soruda kareler ile uğraşılıyor olması veya 1, 5, 13, 25 gibi hem asal hem de asal olmayan, farklı türden sayıların bir arada olması bu duruma neden olmuş olabilir.

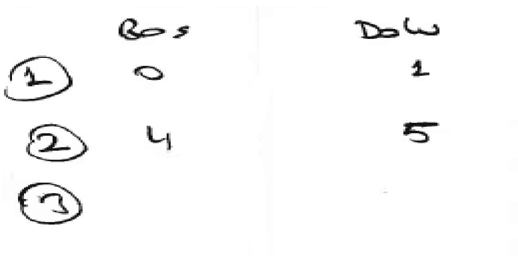
Ö$_6$ yanıtının devamında ilk dört adımdaki turkuaz kare sayılarını matematiksel olarak çözümlemiş ve görüşmede ifade ettiği üzere karelerin toplamı şeklinde göstermiştir. Ö$_6$ yanıtında 4 farklı durumu inceleyerek çözüme ulaşmıştır. İlk dört adımda mevcut olan turkuaz kare sayıları yoluyla formülü Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminle elde ettiği görülmektedir. Her ne kadar başlangıçta Bağlamsal Genelleme yapmış olsa da aşağıda görüldüğü üzere yanıtının sonunda Sembolik Genelleme ile formüle ulaşmıştır:


Her adımın sayısı ve o adımdan önce gelen adımın sayısının karelerinin toplamı kadar kare oluşarak gidiyor. Yani, mesela sıfırıncı adım yok o yüzden 1. adımda $0^2+1^2=1$ kare
2. adımda $1^2+2^2=5$ kare
3. adımda $2^2+3^2=13$ kare
4. adımda $3^2+4^2=25$ kare
oluşmuş
O zaman n. adımda
$\boxed{(n-1)^2+n^2=2n^2-2n+1 \text{ tane kare oluşur}}$

Şekil 4. 75b. Ö$_6$'nın Desen problemine verdiği yanıt 2

Ö$_6$ bu genellemeyi ise mantıksal veya sorunun bileşenleri arasındaki ilişkiler odaklı bir açıklama yapmadan direkt sayısal ifadeler arasındaki benzerliklere bağlı yapmıştır. Dolayısıyla Ö$_6$'nın yanıtında yer alan ispat türünün Saf Deneycilik olduğu söylenebilir.

Ö$_7$'nin 8. problem ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 76a. Ö$_7$'nin Desen problemine verdiği yanıt 1

Ö$_7$ önce 1. ve 2. adımda bulunan boş (beyaz) ve dolu (turkuaz renkli) kare sayılarını incelemiştir. Bu durumu şu şekilde ifade etmiştir:

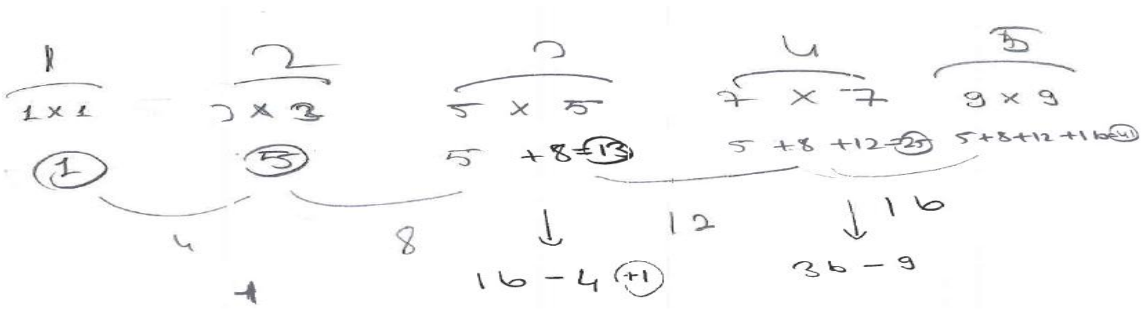
A: Bu soruda nasıl düşündün?

Ö$_7$: Bunda da bir şey yapamadım (gülüyor).

A: Burada kareleri boş ve dolu olarak ayırmışsın.

Ö$_7$: Evet ben öyle ilerlemeye çalışmıştım. Ama oradan bir şey gelmemişti.

Ö$_7$ yanıtının devamında çözüm yöntemini değiştirmiştir:



Şekil 4. 76b. Ö$_7$'nin Desen problemine verdiği yanıt 2

Ö$_7$ ikinci çözüm denemesinde örneklemini 5. adıma kadar genişletmiş ve her adımda oluşan turkuaz kare sayıları ile adımlar arasında turkuaz kare sayılarında meydana gelen artışı hesaplamıştır. Yapılan görüşmede bununla ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

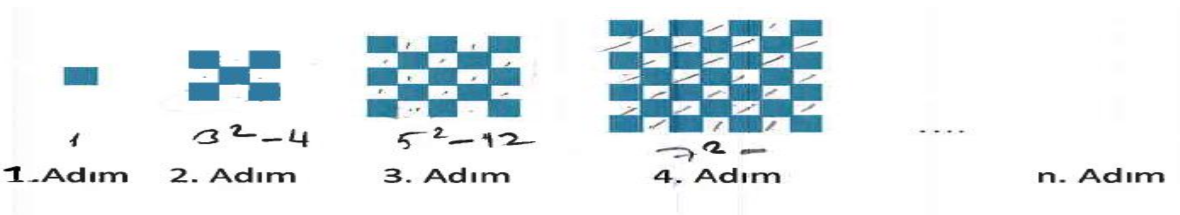
Ö$_7$: Aslında şey diye düşünmüştüm. Mesela 3. adımda (2. adımda oluşan karelerin) yanına üçer tane ekleniyor şu şekilde (2.adımdaki şeklin etrafına *ilave edilen kareleri gösteriyor).Ama formüle dökemedim. 4. adımda mesela (3. adımdaki karelerin) yanına yine dört tane geliyor.*

A: Yanlardan değil mi?

$Ö_7$: Evet. 5. adımda beş tane gelecek, 6. adımda altı tane sürekli… Ama formülüze edemedim.

$Ö_7$ elde ettiği bulguları formüle dönüştürememiş olmasına rağmen yanıtında yer alan çizimler ve verdiği örnekler, soruda Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Burada her adımda oluşan turkuaz kare sayılarını ayrı ayrı hesaplamış ancak bu sayılarla ilgili herhangi bir açıklama yapmamıştır. Dolayısıyla $Ö_7$'nin formülü Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminle elde etmeye çalıştığı ifade edilebilir. Ancak bunda başarılı olamamış, herhangi bir genelleme ve ispat ortaya koyamamıştır.

$Ö_8$'in Desen problemine verdiği yanıt ise aşağıda verilmiştir:



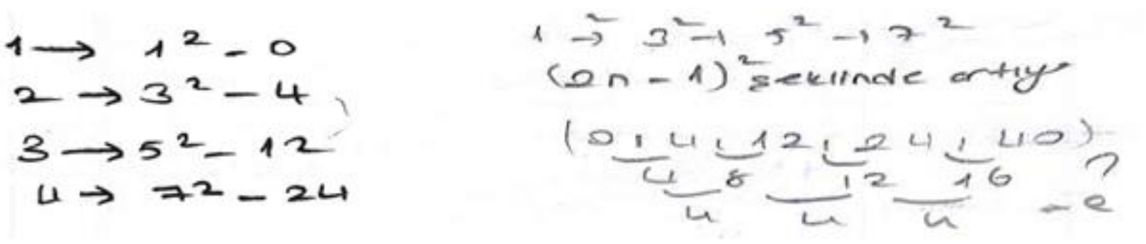
Şekil 4. 77a. $Ö_8$'in Desen problemine verdiği yanıt 1

$Ö_8$ yanıtında önce 4 adımı incelemiş ve her bir adımdaki turkuaz kare sayısını, toplam kare sayısından beyaz karelerin çıkarılışı şeklinde ifade etmiştir. Burada $Ö_8$'in soruya bütüncül yaklaştığı söylenebilir. Özelleştirme açısından soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün?

$Ö_8$: Kareleri hesapladım. Sonra toplam kare sayısından ne kadar çıkardığıma baktım.

$Ö_8$ yanıtının devamında elde ettiği bu değerleri alt alta toplamış ve aşağıda görüldüğü gibi kenardaki birim kare sayısı n olmak üzere, her bir adımdaki toplam kare sayısının $(2 \cdot n - 1)^2$ şeklinde arttığını (devam ettiğini) belirtmiştir:



Şekil 4. 77b. Ö$_8$’in Desen problemine verdiği yanıt 2

Ö$_8$ yapılan görüşmede probleme verdiği yanıtın bu kısmında yaptıkları ile ilgili olarak şu ifadelerde bulunmuştur:

Ö$_8$: Sonra alt alta topladım. 1’in karesi, 3’ün karesi falan geldi buradan.$(2n -$ 1’in karesi olarak artıyor dedim.

A: Oradan sonuca ulaşmak biraz zor mu oldu?

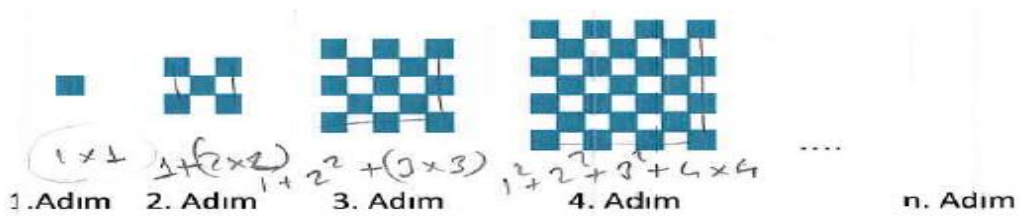
Ö$_8$: Evet zaten burada da soru işareti yaptım (gülüyor).

A: Farklı bir yolla çözülebilir miydi sence bu soru?

Ö$_8$: Evet çözülebilir aslında düşünsek ama o an direkt bu geldi. Hep böyle geldi. Ama o an böyle yaptım, mantıklı gelmişti.

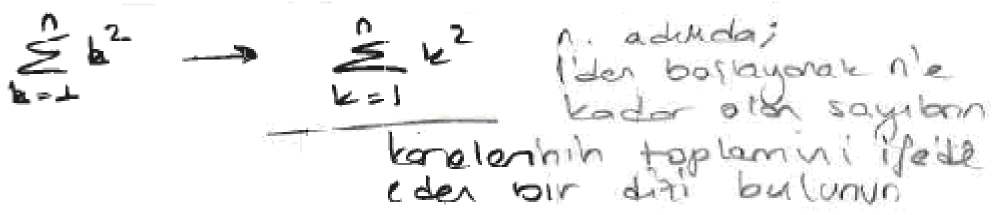
Ö$_8$’in formüle 1., 2., 3. ve 4. adımları inceleyerek ulaşmaya çabalamış olması, formülü Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin ile tahmin etmeye çalıştığını göstermektedir. Ancak herhangi bir formül oluşturamamış, bir genelleme ve ispat yapamamıştır.

Ö$_9$’un Desen problemi ile ilgili yanıtı ise aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 78a. Ö$_9$’un Desen problemine verdiği yanıt 1

Ö$_9$ yanıtında parçadan bütüne doğru ilerlemiştir. Önce 1. adımdaki kare ile başlamış ve 2. adımda bu karenin etrafına 2^2 adet turkuaz kare yerleştirildiğini düşünmüştür. Ancak daha sonra hatalı bir biçimde bu durumun diğer kareler için de geçerli olduğunu, her defasında bir önceki karenin etrafına sırasıyla 3^2, 4^2,… adet kare yerleştirildiğini varsaymıştır. Örneğin 3. adımda, 2. adımda oluşmuş olan karenin etrafına 3^2 kadar turkuaz kare eklendiğini ifade etmiştir. Bu değerlendirmesi neticesi formülü aşağıdaki şekilde göstermiştir:



Şekil 4. 78b. $Ö_9$'un Desen problemine verdiği yanıt 2

$Ö_9$ her ne kadar hatalı hesaplamada bulunmuş olsa da soruda anlatılanı ve istenileni doğru olarak anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede soruya verdiği yanıt ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu problemde nasıl düşündün $Ö_9$?

$Ö_9$: İlk önce işte ilk adımda bir tane turkuaz kare var. İkinci adımda iki çarpı ikiden, dört tane var kenarlarda, bir de ortada var. Üçüncü adımda üç çarpı üçten kenarlarda dokuz tane, bir de burada ikinin karesi (ortadaki karenin etrafındaki kareleri şekil üzerinde gösteriyor) şeklinde.

A: İç kısımdakiler değil mi?

$Ö_9$: Evet bir de artı bir var ortada. İkinci adımdan bir tane var, bir de ikinci adımdan ikinin karesi şeklinde dört tane var diye düşündüm. Sonra dördüncü adımda yine dört çarpı dört on altı tane kesin var. Sonra içini bulmaya çalıştım o da birin karesi, ikinin karesi, üçün karesi şeklinde yazdım.

A: Evet oradan formülü elde etmeye çalışmışsın.

$Ö_9$: Evet oradan gidince toplam sembolüyle bir formül yazmaya çalıştım.

$Ö_9$ formülü oluştururken 1., 2., 3. ve 4. adımdaki örnekleri incelemiş, eklenen yeni kare sayılarını şekil üzerinde saymış ve şekle baktığında her defasında önceki adımdaki karenin etrafına, o adımın sayısının karesi kadar kare ekleniyormuş gibi algılayarak çözüm ile ilgili tahminde bulunmuştur. Dolayısıyla burada Algıya Dayalı Tahmin türünden bir tahmin söz konusudur. Yanıtının sonunda Sembolik Genelleme ile formüle ulaşmıştır. $Ö_9$ yanıtında birkaç örnek yoluyla elde ettiği sayısal değerler üzerinden bir genellemeye vardığı için Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Desen problemine verilen yanıtların öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları açısından incelenişi aşağıda Tablo 4. 8.'de verilmiştir.

Tablo 4. 8. Desen problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
	$Ö_3$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Genel Örnek	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Kritik Deney	Sembolik Genelleme
	$Ö_5$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Kritik Deney	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
Düşük	$Ö_7$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_8$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme

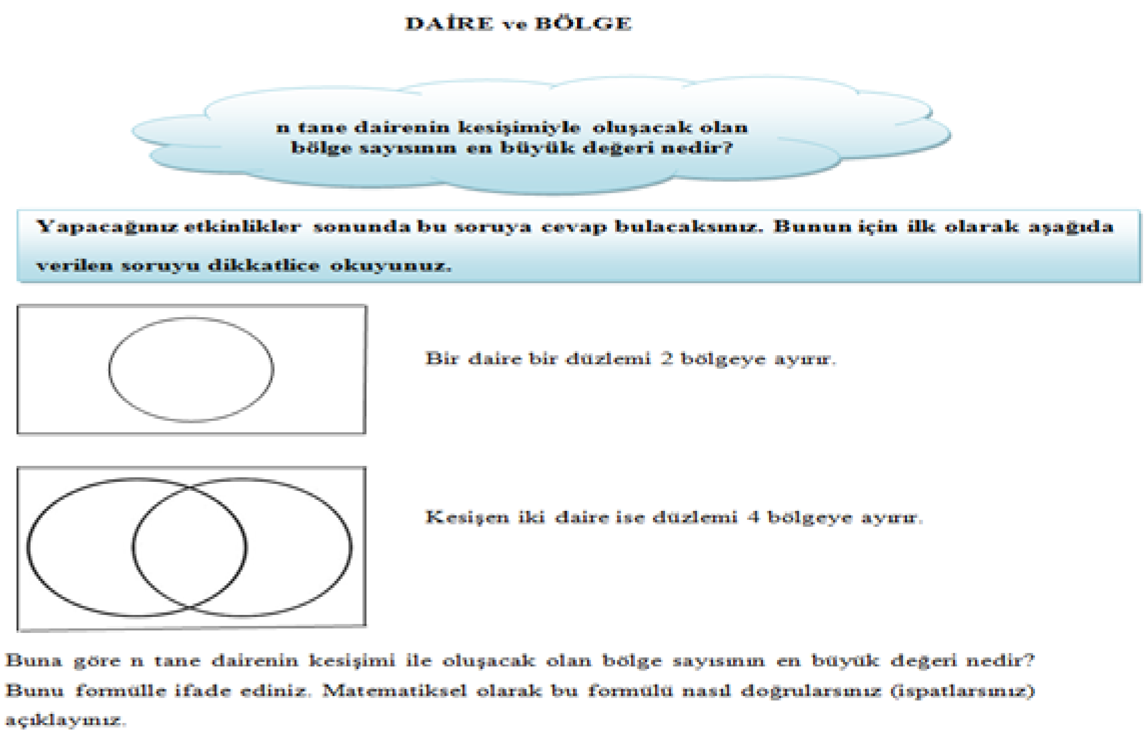
Tablo 4. 8. incelendiğinde öğrencilerin tamamının Yeterli Özelleştirme yaptıkları görülmektedir. Ancak Yeterli Özelleştirme yapmış olmalarına rağmen iki öğrenci ($Ö_7$ ve $Ö_8$) ispat ve genelleme basamağını gerçekleştirememiştir.

Yanıtlar tahmin basamağı açısından incelendiğinde, öğrencilerin Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım veya Algıya Dayalı Tahmin yaptıkları görülmektedir.

İspat basamağını gerçekleştiren öğrenciler arasında bir öğrenci ($Ö_3$) Genel Örnek türünden ispatta bulunurken, iki öğrenci ($Ö_4$ ve $Ö_5$) Kritik Deney seviyesinde ispat yapmış, diğer öğrenciler ise Saf Deneycilik türünden ispat sergilemişlerdir. İspat ve genelleme yapmamış olan her iki öğrencinin ($Ö_7$ ve $Ö_8$) de Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmuş olması dikkat çekmektedir. Genelleme basamağında başarılı olmuş tüm öğrenciler ise Sembolik Genelleme yapmışlardır.

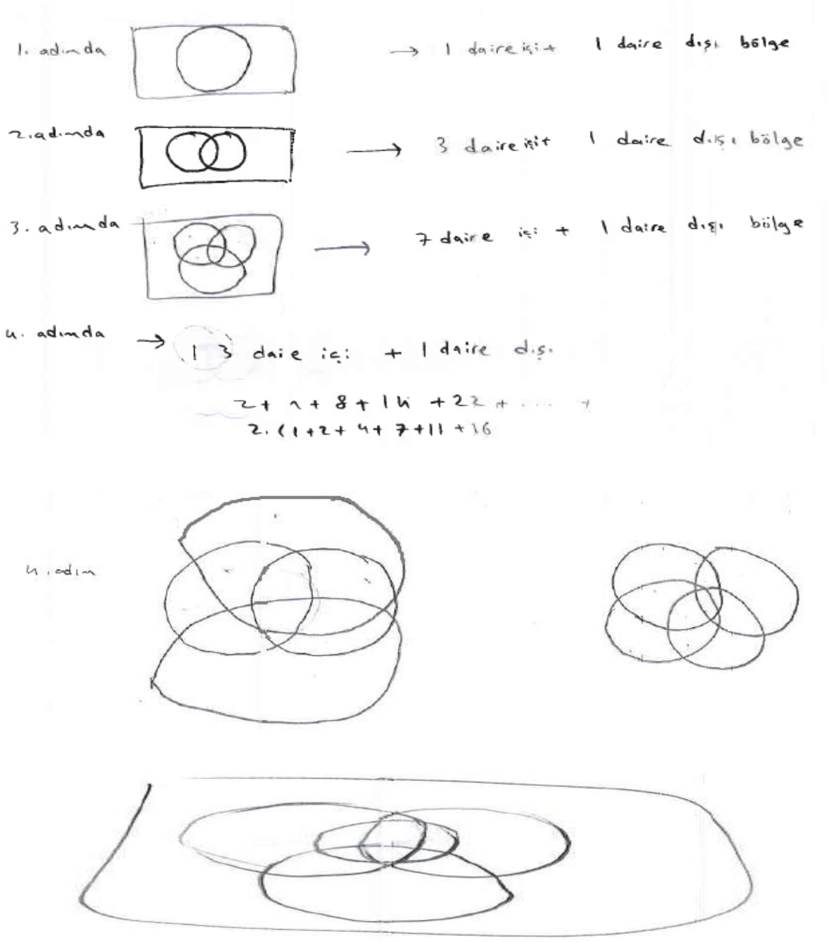
Öğrencilerin 9. problem olan Daire ve Bölge problemi ile ilgili yanıtlarına ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir.

4.9. Daire ve Bölge Problemine İlişkin Bulgular



Şekil 4. 79. Daire ve Bölge Problemi

İlk olarak $\ddot{O}_1$'in yanıtı incelenmiştir. $\ddot{O}_1$'e ait bulgular aşağıdaki gibidir:



Şekil 4. 80. $\ddot{O}_1$'in Daire ve Bölge Problemine verdiği yanıt

$\ddot{O}_1$ yanıtında 1, 2, 3 ve 4 daireli durumları çizerek örneklendirmiştir. Her durumda oluşan bölgeleri ise daire içinde ve daire dışında olmak üzere ikiye ayırmış, içte ve dışta oluşan bölgelerin sayısını bulmuştur. Çizimleri ve elde ettiği değerler, $\ddot{O}_1$'in soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. $\ddot{O}_1$ yapılan görüşmede yanıtıyla ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruda neler yaptın $\ddot{O}_1$?

$\ddot{O}_1$: Burada da yarım kaldı.

A: 4. adıma kadar genişletmişsin örneklerini.

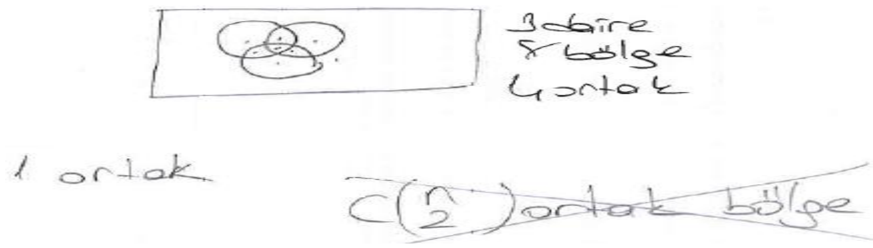
$\ddot{O}_1$: 5. adımı çizemediğim için bağıntı bulamamış olabilirim ki bulamadım.

A: Sonrasında yine sayılar üzerinden…

Ö$_1$: Evet gitmeye çalıştım da… Tam olmadı bu da yarım kaldı, bir yere varmıyor.

Her ne kadar çizimlerinde elde ettiği bölgeleri daire içi ve dışı bölgeler olarak ikiye ayırmış olsa da Ö$_1$'in yanıtına bakıldığında son durumda bunları ayrı ayrı düşünmediği, toplam bölge sayıları üzerinden bir formüle ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Dolayısıyla Sonlu Sayıda Ayrık Durumdan Empirik Tümevarım türünde bir tahminle formülü elde etmeye çalıştığı söylenebilir. Ancak bunda başarılı olamamış, bir formül oluşturamamış, genelleme ve ispat yapamamıştır.

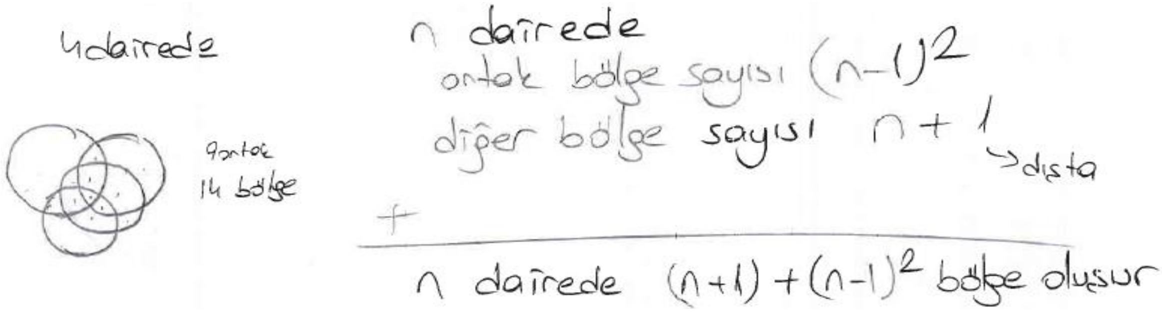
Ö$_2$'nin Daire ve Bölge Problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 81a. Ö$_2$'nin Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt 1

Ö$_2$ yanıtında önce 3 daireli durumu incelemiştir. Oluşan toplam bölge sayısını doğru olarak tespit etmiş ve ortak bölgelere odaklanmıştır. Yanıtında kullandığı çizimler, soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir.

3 daireli örnekle herhangi bir formül elde edemeyen Ö$_2$ sonrasında 4 daireli durumu incelemeye başlamıştır. Burada 4 daireli durumu da inceleyerek aşağıdaki şekilde n daireli duruma genelleme yapmış ve formülü doğru olarak bulmuştur:



Şekil 4. 81b. Ö$_2$'nin Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt 2

4 daireli durumu incelerken $Ö_2$'nin dairelerin kesişimleriyle oluşan ortak bölgelerin ve herhangi bir kesişme olmadan oluşan bölgelerin sayısını ayrı ayrı hesapladığı görülmektedir. Bu hesaplamalarda ulaştığı değerler yoluyla formülü ortaya koymuştur. Yapılan görüşmede çözümüyle ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruda neler yaptın?

$Ö_2$: Yine örüntülerden…

A: Burada sanki önceki adımla ilişkilendirmek yerine biraz daha genel düşünmüşsün değil mi?

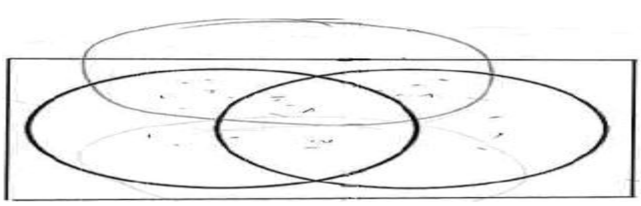
$Ö_2$: Evet yani bir tanesini düşünüp diğerleri ona uyuyor mu diye baktım. Toplam daire sayısı ile ortak bölge sayısı ve diğer oluşan bölge sayıları arasındaki ilişkiye baktım.

A: Anladım. Peki, böyle formül üretmek zor oluyor mu senin için?

$Ö_2$: Örüntü çıkıyorsa değil, zor değil ama örüntü yoksa (formülü) bulmak zor, (soruyu oluşturan) elemanlar arası ilişki bulmak zor oluyor.

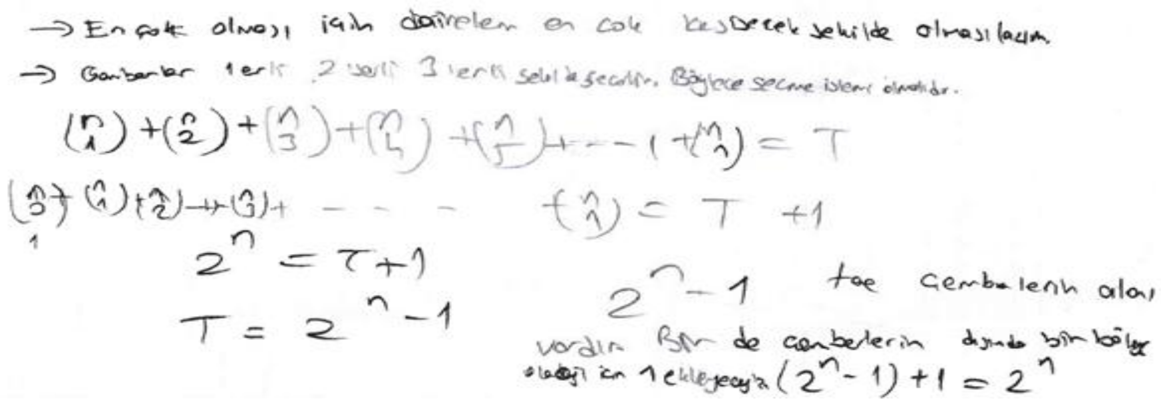
$Ö_2$'nin yanıtı formülü 3 ve 4 daireli durumlara dayalı olarak tahmin ettiğini düşündürse de görüşmede söylediği "*bir tanesini düşünüp diğerleri ona uyuyor mu diye baktım*" ifadesi, $Ö_2$'nin zihninde 3 daireli örnek ile formülün şekillenmeye başladığını, 4 daireli örnekle bu sürecin pekiştiğini göstermektedir. Yanıtında $Ö_2$'nin ortak bölgelerden bahsediyor olması, problem ile ilgili çizimi odaklı çözüm yaptığını, Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminde bulunduğunu ifade etmektedir. Doğru formülü bulmuş ve Sembolik Genelleme yapmıştır. Formülün doğruluğunu araştırırken sadece 4 daireli örneği ele almış olması ve "*bir tanesini düşünüp diğerleri ona uyuyor mu diye baktım.*" şeklindeki çözümü açıklama biçimi ise 4 daireli örneğin formülü sağlayıp sağlamadığına baktığını ve sağladığını gördüğünde de formülün doğru olduğunu düşündüğünü göstermektedir. Bu nedenle $Ö_2$'nin Kritik Deney türünden ispat yaptığı söylenebilir.

$Ö_3$'ün Daire ve Bölge problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 82a. $Ö_3$'ün Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt 1

$Ö_3$ yanıtında bir ve iki daireli durumu incelemiş, 4 daireli durumu ise çizerek göstermiştir. Aşağıda görüldüğü üzere yanıtının devamında n tane dairenin kesişimini düşünerek çözümünü genellemiş ve bir formüle ulaşmıştır:



→ En çok olması için dairelerin en çok kesişecek şekilde olması lazım.

→ Çemberler 1'erli, 2'şerli, 3'erli şekilde seçilir. Böylece seçme işlemi olmalıdır.

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}+\dots+\binom{n}{n}=T$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{3}+\dots+\binom{n}{n}=T+1$$

$$2^n=T+1$$

$$T=2^n-1$$

2^n-1 tane çemberlerin alanı verdim. Bir de çemberlerin dışında bir bölge olduğu için 1 ekleyeceğiz $(2^n-1)+1=2^n$

Şekil 4. 82b. $Ö_3$'ün Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt 2

$Ö_3$ yanıtında 4 dairenin kesişimini soruda verilen görsel üzerinde incelemiş, bölge sayısının *"en çok olması için dairelerin en çok kesişecek şekilde olması gerektiğini"* ifade etmiştir. $Ö_3$'ün bu ifadesi soruyu ve istenileni doğru olarak anladığını, Yeterli Özelleştirme yaptığını göstermektedir. Kendisiyle yapılan görüşmede çözümünü şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün?

$Ö_3$: Şey burada zaten bize bir ve iki diye vermiş. Benim burada gördüğüm şu... En dışarıda zaten mutlaka bir bölge kalacak ve daireler kesişecek. Daireler kesiştikten sonra da bir dairenin diğerinden mutlaka bir farkı (dışında kalan alan) olacak. O bölge olacak. Her daire için n tane daire olsa n tane bölge gelecek o şekilde. Dışarıda bir tane alan var onu bulmuştuk. Bir de bunlar (daireler kendi aralarında) kesişecek. Kesişince bir alan çıkacak ortaya.

$Ö_3$ yanıtının bu kısmında herhangi bir örneğe atıf yapmadan, doğrudan mantıkla hareket ederek bir çözüm geliştirmiştir:

$Ö_3$: Dedim ki ne kadar çok kesişirse o kadar çok alan (bölge) çıkar. O yüzden de mesela dedim n tane daire olsa ne olacak?

A: Hmm… Çözümde n'nin birlisi dediğin, her dairede diğerlerinin dışında kalan bölge değil mi? Üç daire kesişiyor olsa her birinde birer bölge toplamda üçün birli kombinasyonu yani üç bölge oluşmuş olacak.

Ö$_3$: Tabi yani hepsinin diğerlerinden farkı. A, B, C (kesişen üç daire) olsa A'nın B ve C'den farkı. B'nin farkı, C'nin farkı… Oradan bir gelecek dedim. n'nin birlisi (kombinasyonu) bu. Sonra dedim ki kendi aralarında da kesişecekler. Ne kadar çok kesişirlerse o kadar bölge oluşacak.

A: Evet.

Ö$_3$: Şimdi mesela iki tane daire bir şekilde kesişebilir, ikinin ikilisi. Üç tane (daire) olsa A, B, C; A ile B kesişebilir, B ile C, A ile C kesişebilir.

A: Üç daire olsa, dört daire olsa onları teker teker düşündün sanırım.

Ö$_3$: Evet. n daire olsa n'nin herhangi iki tanesi kesişebilir, üç tanesi, dört tanesi, hepsi de kesişebilir. Küçücük bir alan oluşur diye düşündüm.

A: Anladım.

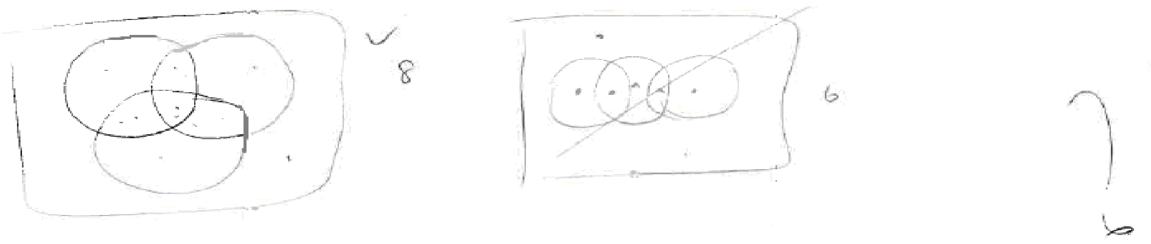
Ö$_3$: Bunların toplamına T dedim. Şimdi her iki tarafa 1 ekleyince burada bir formül vardı. 1'den n'ye kadar olan sayıların kombinasyonları toplamı, iki üzeri n'yi verir diye. 2^n *… Benim aradığım neydi? Bir eklemiştim. Bir çıkardım o yüzden* $2^n - 1$ *geldi.*

A: Evet.

Ö$_3$: $2^n - 1$ *bu dairelerden gelen, bir de her zaman mutlaka dışarıda bir tane kalıyor. Onu da ekledim* 2^n *geldi oradan.*

Ö$_3$'ün çözümüyle ilgili olarak belirttiği "*Benim burada gördüğüm şu… En dışarıda zaten mutlaka bir bölge kalacak ve daireler kesişecek*" ifadesi formülü sorunun görsel gösterimi odaklı tahmin ettiği anlamına gelmektedir. Dolayısıyla Ö$_3$'ün Algıya Dayalı tahmin yaptığı söylenebilir. Formülü sembolik olarak ifade etmiş, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Çözümü sonunda formülü herhangi bir örneği referans göstermeden, yanıtında da belirttiği gibi *"En çok olması için dairelerin en çok kesişecek şekilde olması lazım. Çemberler 1'erli, 2'şerli, 3'erli şekilde seçilir. Böylece seçme işlemi olmalıdır."* şeklinde doğrudan mantık ile oluşturduğundan Ö$_3$'ün Düşünce Deneyi türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_4$'ün Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 4. 83. Ö$_4$'ün Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt

Ö$_4$ yanıtında 3 dairenin kesiştiği durumların farklı gösterimlerini çizmiş ve dairelerin hem yan yana hem de karışık kesişimlerini örneklendirmiştir. Ancak çözümüne devam etmemiş ve yanıtını burada sonlandırmıştır. Yapılan görüşmede yanıtıyla ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün?

Ö$_4$: Bunu da yapamadım (gülüyor).

A: Önce yan yana gibi göstermişsin.

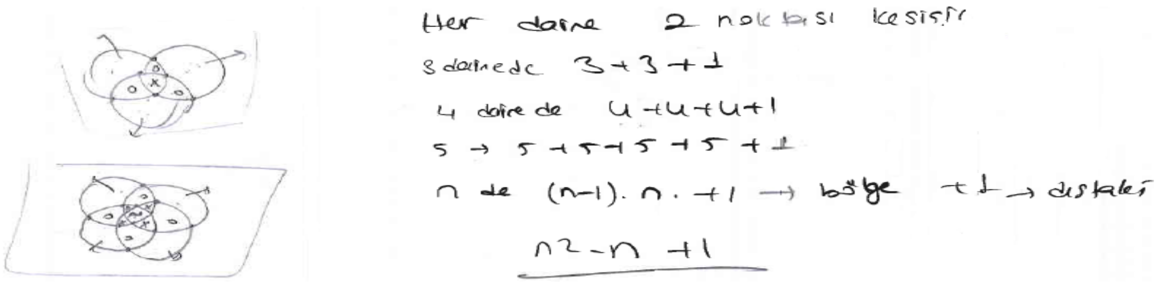
Ö$_4$: Evet. Burada iki farklı şekilde kesişimlerini düşündüm.

A: Ama sen sadece yan yana değil de farklı kesişim olabileceğini de göstermişsin.

Ö$_4$: Böyle yapınca (yan yana) 6 tane, böyle gösterince (karışık kesişim) 8 tane geliyor o yüzden karar veremedim. O yüzden yapamadım.

Ö$_4$ görüşmede hangi gösterime göre hareket edeceğini bilemediğinden bir çözüm ortaya koyamadığını belirtmiştir. Bu ifadesi Ö$_4$'ün soruda yeterli özelleştirme yapmadığını, Kısmi (Eksik) Özelleştirme gerçekleştirdiğini göstermektedir. Çünkü problemde dairelerin kesişimi ile oluşacak bölge sayısının en büyük değeri isteniliyor olmasına rağmen yanıtında bu yönde herhangi bir tercihte bulunmamıştır. Ayrıca formülle ilgili bir tahmin, genelleme ve ispat yapmamıştır.

Ö$_5$'in aynı probleme verdiği yanıt aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 84. Ö$_5$'in Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt

Ö$_5$ önce 3 dairenin kesiştiği sonra 4 dairenin kesiştiği durumları çizmiş ve yanıtına bu durumları inceleyerek başlamıştır. Çizimler sorunun ve istenilenin anlaşıldığını, Yeterli Özelleştirme yapıldığını göstermektedir. Ö$_5$ yanıtının devamında ise bu kesişmelerle oluşacak bölge sayılarını ortak bölgeler, ortak bölgeleri de hepsinin ortak olduğu, ikisinin ortak olduğu, üçünün ortak olduğu vb. bölgeler ve dıştakiler şeklinde ayırmıştır. Yapılan görüşmede çözümüyle ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruda nasıl düşündün?

Ö$_5$: Ben önce üç tane daireyi kesiştirdim kendi aralarında.

A: Evet.

Ö$_5$: Orada ikisi kendi aralarında (ikililerin kesişimi) üç defa kesişti. Daha sonra dıştakiler, dairelerin kendi parçaları vardı üç tane (kesişimler dışında her bir dairenin içinde kalan bölgeler). Bir tane de içinde vardı.

A: Üçünün kesişimi ile oluşan bölge.

Ö$_5$: Üçünün kesişimi olan. Bir de (en) dıştaki var. Onu almayı unutmuşum orada.

A: Sonra dört daireli kesişime mi geçtin?

Ö$_5$: Evet. Dörtlüye (dört daireli durum) geçtim sonra, dörtlüyü saydım. Baktım dört artı dört artı dört bir de içte var dördünün kesiştiği bir tane. Hepsini saydım. Sonra dedim beşlide de yine bu şekilde olur.

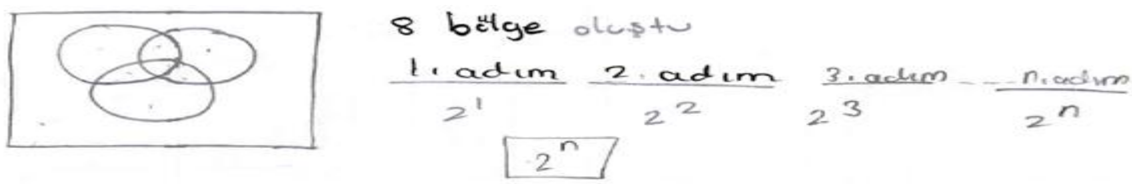
A: Anladım.

Ö$_5$: Sonra n'ye uyarladığımda $n - 1$ tane n oluyor. Artı bir (hepsinin kesişimi ile oluşan bölge), bir de dıştaki bölge var. Oradan n kare eksi n artı iki

$(n^2 - n + 2)$ olması gerekiyor. Ama ben burada o artı biri ilave etmeyi unutmuşum.

Ö$_5$, 3 ve 4 daireli durumların nümerik açılımlarında ortak bir özellik keşfetmiş ve bunu önce 5 daireli duruma sonrasında ise n tane daireli duruma genellemiştir. Formülü oluştururken, " *Baktım dört artı dört artı dört bir de içte var dördünün kesiştiği bir tane"* ifadesiyle belirttiği gibi çizmiş olduğu 3 ve 4 daireli durumları incelemiş ve oluşan bölgeleri sınıflandırmıştır. Dolayısıyla Algıya Dayalı Tahmin yaptığı söylenebilir. Çözümün sonunda Sembolik Genelleme ile formülü ortaya koymuştur. Bu genellemeye ise iki özel durumu inceleyerek ulaştığından, Kritik Deney türünden ispat gerçekleştirdiği ifade edilebilir.

Ö$_6$'nın aynı soru ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 85. Ö$_6$'nın Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt

Ö$_6$ yanıtında önce 3 dairenin kesiştiği durumu çizmiş ve burada 8 bölge oluştuğunu bulmuştur. Bu çizim sorunun Ö$_6$ tarafından doğru anlaşıldığını, Yeterli Özelleştirme yapıldığını göstermektedir. Ö$_6$ sonra 1, 2 ve 3 daireli durumlarda oluşan bölge sayılarını bulmuş ve bu yolla çözümünü n dairenin kesiştiği duruma genellemiştir. Yapılan görüşmede ise yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu problemde nasıl düşündün Ö$_6$?

Ö$_6$: Burada zaten ilkinde iki bölge, ikincisinde dört bölge verilmiş.

A: Burada üçlüyü (üç daireli kesişimi) de çizmişsin.

Ö$_6$: Üçlüyü de çizdim evet. Üçlüyü çizince sekiz tane bölge oluştu.

A: Evet.

Ö$_6$: Önce bir, iki, üç (daireli kesişim) diye gidince hani ikinin kuvvetleri şeklinde 2^1, 2^2 ve 2^3 şeklinde gittiğini gördüm. n. adımda 2^n olabilir diye düşündüm ama bunun yanlış olabileceğini hissetmeme rağmen yine de cevap *vermek istediğim için* 2^n *dedim. Aslında 4. adımı çizdiğimde bunun (formülü) sağlamadığını gördüm.*

A: Hmm... Sonra da sildin mi (o çizimi)?

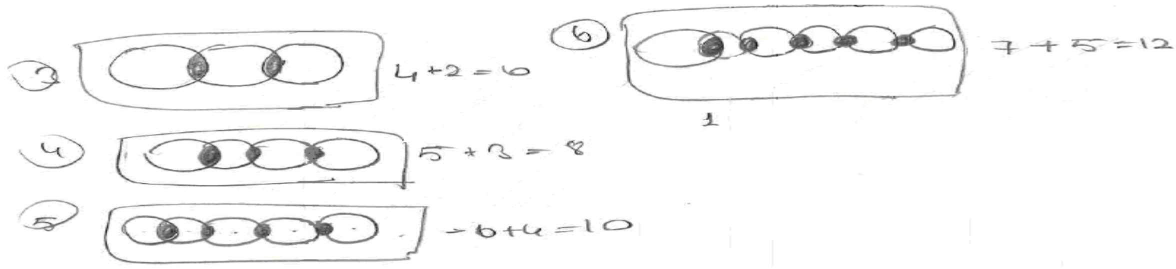
Ö$_6$: Yani evet sonra da sildim.

A: Sıkıntı olmaması için mi?

Ö$_6$: Evet sıkıntı oldu biraz (gülüyor).

Ö$_6$'nın formülde bir hata olduğunu farketmesine rağmen formülün doğru olmadığını gösteren örneği silmesi ve bulduğu yanlış formülü cevap olarak sunması ilginçtir. Ö$_6$ yanıtında 3 durumu incelemiş ve sadece sayısal değerlere bağlı kalmış, herhangi bir açıklama yapmamış, Sonlu Sayıda Ayrık Durumdan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunmuştur. Çözümünde formülü n'ye bağlı ifade etmiş, Sembolik Genelleme gerçekleştirmiştir. Bu genellemeye ise sorunun bileşenleri arasında herhangi bir ilişkiye değinmeden doğrudan birkaç durumda mevcut bulunan sayısal değerler yoluyla ulaşmıştır. Bu nedenle Ö$_6$'nın Saf Deneycilik türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Ö$_7$'nin Daire ve Bölge problemi ile ilgili yanıtı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4. 86. Ö$_7$'nin Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt

Ö$_7$ yanıtında 3, 4, 5 ve 6 daireli kesişimleri çizerek örnekler vermiştir. Ancak tüm çizimlerinde daireleri yan yana yerleştirmiş ve kesişmelerini buna bağlı olarak incelemiştir. Her bir durumda oluşan bölge sayılarını da ortak bölgeler ve diğerleri şeklinde ayrı ayrı hesaplamıştır. Yapılan görüşmede ise yanıtını şu şekilde ifade etmiştir:

A: Bu soruda neler yaptın Ö$_7$?

Ö$_7$: Kesişimleri hesapladım ilk önce. Üçte (üç dairelide) iki tane, işte beşte dört tane… Sonra ayrılan bölgeyi üstüne ekledim. Altı, sekiz, on, on iki gibi bir örüntü geldi ama formüle gidemedim.

Burada $Ö_7$'nin yapmış olduğu çizimlere göre formülün oldukça basit olarak bulunabileceği açıktır ancak ilk akla gelen $2 \cdot n$ formülü iki daireli kesişimde ortaya çıkan bölge sayısını karşılamadığından $Ö_7$ bu formülü kullanmamış olabilir. $Ö_7$ tüm çizimlerinde daireleri yan yana yerleştirmiş ve kesişmelerini buna bağlı olarak incelemiştir. $Ö_7$'nin çizimleri incelendiğinde soruda kendisinden istenileni tam olarak anlamadığı, Hatalı Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Bu durum kendisine hatırlatıldığında şunları ifade etmiştir:

A: Burada oluşan bölge sayısının en büyük değeri isteniyordu ya bunların hep yan yana dizilmesi mi gerekiyordu sence?

$Ö_7$: Hayır (gülüyor). Orada büyük bir hata yapmışım.

A: Aklına gelmedi mi?

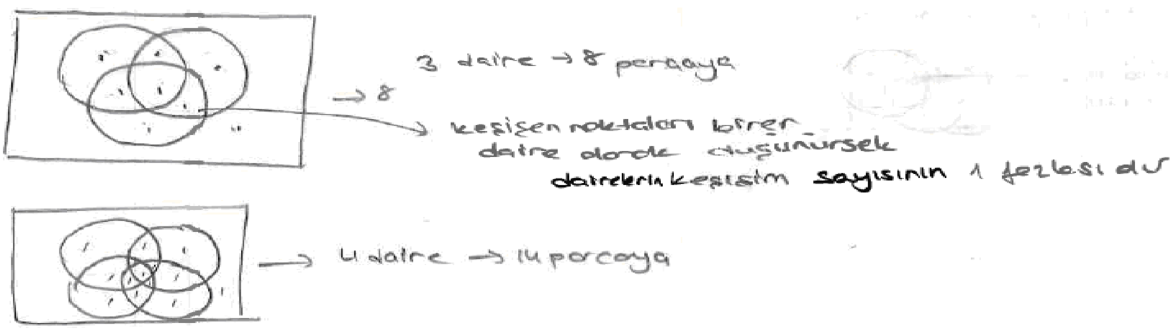
$Ö_7$: Düşünmedim. Şöyle koyduğumuzda (karışık kesişmeleri kastediyor) daha fazla kesişim oluyor.

A: Acaba daha çok görsele odaklandığın için böyle olmuş olabilir mi? Yan yana kesişimler olur gibi mi düşündün?

$Ö_7$: Evet kesişimi sadece yan yana kesişim olarak algıladım.

$Ö_7$ yanıtında her ne kadar formüle ulaşamamış olsa da bölge sayılarını çizimlere bağlı olarak, ortak bölgeler ve diğerleri şeklinde ayrı ayrı göstermiştir. Dolayısıyla burada Algıya Dayalı Tahmin'den söz edilebilir. Ancak herhangi bir genelleme ve ispat yapmamıştır.

$Ö_8$'in aynı probleme verdiği yanıt ise aşağıda gösterilmiştir:



Şekil 4. 87. $Ö_8$'in Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt

$Ö_8$ yanıtında 3 ve 4 daireli kesişmeleri çizerek örneklendirmiş, her bir durumda ortaya çıkan bölge sayısını hesaplamıştır. Çizimler incelendiğinde $Ö_8$'in soruda anlatılanı ve istenileni doğru anladığı, Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Yapılan görüşmede yanıtı ile ilgili olarak şunları ifade etmiştir:

A: Bu soruda neler yaptın Ö$_8$?

Ö$_8$: Bu da diğer soruyla aynı mantıkta bir soruydu en az en çok.

A: Daire ve Noktalar sorusuyla mı?

Ö$_8$: Evet onunla.

A: Burada 3 ve 4 daireye kadar ilerletmişsin.

Ö$_8$: Evet. Burada en azı düşünmedim direk zaten. 2 daireliye baktım 4 bölge buldum. Sonra kesişim noktalarını birer daire olarak düşündüm.

A: Problemde sana zor gelen kısım ne oldu?

Ö$_8$: Şey ben genelde mesela böyle sorularda ilk iki adımı yazarım ya da üç adımı. Sonra hani bir kural türetirim kafamda ama şimdi dördüncüyü yaptım beşinciyi yapsam çok karışacaktı. O yüzden az örnekle yetinmem gerekti ve yetinememişim. Şurada birazcık uçmuşum (gülüyor) kesişen noktaları falan birer daire olarak düşünmüşüm.

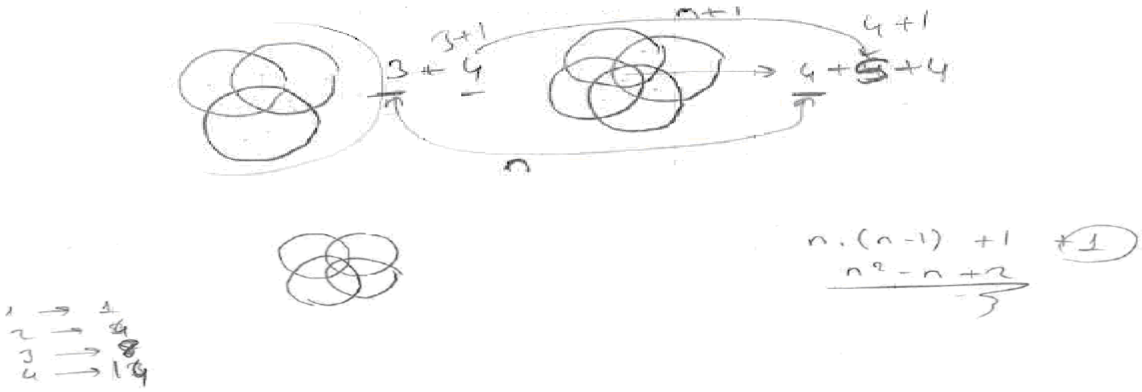
Ö$_8$'in sorularda kendine has bir çözüm stratejisi geliştirmesi güzel bir durum olmakla birlikte bu stratejide *"şey ben genelde mesela böyle sorularda ilk iki adımı yazarım ya da üç adımı. Sonra hani bir kural türetirim kafamda"* ifadesinde görüldüğü üzere kendini kısıtlandırması gerçekten ilginçtir. Bunun nedeni belki de genellikle hazır bilgi ile iki, üç adımda çözülebilecek sorularla oldukça fazla karşılaşmış ve bu durumun kendisinde bir alışkanlık oluşturmuş olması olabilir. Yapılan görüşmede bu konuda şunları dile getirmiştir:

A: O halde senin de genellikle daha kolay çözebildiğin sorular…

Ö$_8$: Hep formül yani bildiğimiz şeyler. Mesela permütasyonda falan görüyorduk onları oradan yani… Kuralı üretme diye bir şey çok yok. Kuralı biliyoruz, uyguluyoruz.

Dolayısıyla herhangi bir formüle ulaşamadığı bu problemde Ö$_8$'in 3 ve 4 daireli durumlarda oluşan bölge sayıları üzerinden, Sonlu Sayıda Ayrık Durumdan Empirik Tümevarım türünden tahmin yoluyla formüle ulaşmaya çalıştığı ancak genelleme ve ispat yapamadığı söylenebilir.

Ö$_9$'un Daire ve Bölge problemi ile ilgili yanıtı aşağıda sunulmuştur:



Şekil 4. 88. Ö$_9$'un Daire ve Bölge problemine verdiği yanıt

Ö$_9$ yanıtında 3 ve 4 daireli kesişmeleri çizerek incelemiş ve çizimlerde elde edilen bölge sayılarının dizilişlerinde bir örüntü fark etmiştir. Burada sorunun ve istenilenin doğru olarak anlaşıldığı, Yeterli Özelleştirme yapıldığı görülmektedir. Ö$_9$ yapılan görüşmede yanıtını şu şekilde açıklamıştır:

A: Bu soruda neler yaptın Ö$_9$?

Ö$_9$: Burada da yine şekil çizerek gittim. Üç tanede (üç dairenin kesişiminde) mesela dışarıda yine üç tane bölge oluşacak (dairelerin içinde kesişimin dışında kalan bölge sayısı). İkililerin (daire ikililerinin) kesişimi var üç tane, bir de ortada (üçünün kesişimi olan bölge) var bir tane.

A: Evet.

Ö$_9$: Sonra dört daireliyi yaptım. Orada da yine aynı şekilde kenarlarda, ikili kesişmelerde ve ikili kesişmelerin tekrar kesişimi ve artı bir ortada... Bu şekilde n yani daire sayısını, onun bir eksiği ile çarptım. Sonra bir tane ortadaki vardı. Bir de dışta ya bu dikdörtgen onu ekledim.

A: Tamam yani en dıştaki bölgeyi ekledin değil mi?

Ö$_9$: Evet öyle yaptım.

Ö$_9$'un çözümünü 3 ve 4 daireli çizimlere dayalı yaptığı görülmektedir. Bu çizimlerde oluşan ortak ve ortak olmayan bölge sayılarını fark etmiş ve bu yolla formüle ulaşmıştır. Bu nedenle Ö$_9$'un soruda Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminde bulunduğu söylenebilir. Çözümün sonunda doğru formül bulunmuş ve gösterilmiş, Sembolik Genelleme yapılmıştır. Ö$_9$ genellemeye ulaşırken sorunun bileşenleri arasında herhangi bir ilişki ya da özelliği ifade etmemiş, sadece doğrudan birkaç durumda mevcut bulunan sayısal değerlere bağlı olarak formülü elde etmiştir. Bu nedenle $Ö_9$'un yanıtında Kritik Deney türünden ispat yaptığı söylenebilir.

Daire ve Bölge problemine verilen yanıtlar öğrenci başarı düzeylerine göre özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları açısından incelendiğinde Tablo 4. 9'da verilen sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 4. 9. Daire ve Bölge problemine verilen yanıtların genel incelenişi

Öğrenci Başarı Düzeyi	Öğrenci Kodu	Özelleştirme Türü	Tahmin Türü	İspat Türü	Genelleme Türü
İyi	$Ö_1$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_2$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı	Kritik Deney	Sembolik Genelleme
	$Ö_3$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı	Düşünce deneyi	Sembolik Genelleme
Orta	$Ö_4$	Kısmi (Eksik) Özelleştirme	Yok	Yok	Yok
	$Ö_5$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı	Kritik Deney	Sembolik Genelleme
	$Ö_6$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Saf Deneycilik	Sembolik Genelleme
Düşük	$Ö_7$	Hatalı Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Yok	Yok
	$Ö_8$	Yeterli Özelleştirme	Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım	Yok	Yok
	$Ö_9$	Yeterli Özelleştirme	Algıya Dayalı Tahmin	Kritik Deney	Sembolik Genelleme

Tablo 4. 9.’a göre Daire ve Bölge problemine verdikleri yanıtlarda bir öğrenci ($Ö_4$) Kısmi (Eksik) Özelleştirme ve bir öğrenci ($Ö_7$) Hatalı Özelleştirme, diğer tüm öğrenciler ise Yeterli Özelleştirme yapmışlardır.

Yanıtlar tahmin basamağı açısından incelendiğinde öğrencilerin tahmin türlerinin Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım veya Algıya Dayalı Tahmin olduğu, Algıya Dayalı Tahmin türünün daha çok kullanıldığı görülmektedir. Sadece bir öğrenci ($Ö_4$) herhangi bir tahmin girişiminde bulunmamıştır.

İspat ve genelleme basamakları açısından tablo incelendiğinde ise dört öğrencinin ($Ö_1$, $Ö_4$, $Ö_7$ ve $Ö_8$) bu basamakları sergileyemedikleri görülmektedir. İspat basamağında başarılı olmuş öğrenciler Saf Deneycilik, Kritik Deney veya Düşünce Deneyi türünden ispatlarda bulunmuşlardır.

Herhangi bir ispat ve genellemenin yapılmadığı durumlarda Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminin daha çok kullanılmış olması dikkat çekmektedir.

Algıya Dayalı Tahmin yapan öğrencilerin ispat basamağında, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin gerçekleştiren öğrenciye ($Ö_6$) göre daha üst seviyeden ispat sergiledikleri görülmektedir.

Problemlere verilmiş olan yanıtlar incelendiğinde özelleştirme yapmadan doğrudan diğer basamaklara geçiş yapan öğrencilerin de sonraki aşamalarda tahmin, ispat ve genelleme yapabildikleri görülmüştür. Örneğin Merdiven probleminde özelleştirme basamağını atlayan öğrenciler ($Ö_3$, $Ö_6$ ve $Ö_8$) Algıya Dayalı Tahmin yapmış, Genel Örnek veya Düşünce Deneyi türünden üst düzey ispatlar gerçekleştirmiştir. Dikdörtgen sayısı probleminde ise bir öğrenci ($Ö_4$) özelleştirme basamağını atlamasına rağmen Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin ve Saf Deneycilik türünden ispat yapmıştır. Ayrıca bu örneklerin tümünde de genelleme hiyerarşisinde en üst basamak olan Sembolik Genelleme yapıldığı görülmektedir. Dolayısıyla özelleştirme yapma veya yapmamanın sonrasında diğer basamaklarda elde edilen seviye ya da o basamakları gerçekleştirip gerçekleştirememe üzerine bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

Öğrencilerin özelleştirme türlerine göre yanıtları incelendiğinde büyük çoğunluğunun Yeterli Özelleştirme yaptığı görülmektedir. Bununla birlikte, Kısmi (Eksik) veya Hatalı Özelleştirme yapan öğrenciler az da olsa vardır. Ancak özelleştirme türünün diğer basamaklar üzerinde doğrudan herhangi bir etkisi tespit edilmemiştir. Yeterli özelleştirme yapılan örneklerde tüm diğer basamakların çoğunlukla gerçekleştirilmiş olduğu ifade edilebilir. Kısmi (Eksik) Özelleştirme yapılan örneklerde de öğrenciler soruyla ilgili tahmin, ispat ve genellemeye ulaşabilmişlerdir. Örneğin Kâğıt Ev probleminde üç öğrenci ($Ö_5$, $Ö_6$ ve $Ö_8$) Kısmi (Eksik) Özelleştirme yapmış, sonraki aşamalarda formüle yönelik tahmin, ispat ve genellemeye ulaşabilmişlerdir. Yanıtlarında özellikle özelleştirme basamağını gerçekleştirmiş, matematik başarısı iyi düzeyde olan öğrencilerin tümü Yeterli Özelleştirme yapmışlardır.

Tahminin gerçekleştiği ancak ispat ve genelleme basamaklarının gerçekleşmediği durumlarda ise büyük oranda Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminin yapıldığı görülmüştür. Dolayısıyla Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminin bir genellemeye ulaştırma oranının Algıya Dayalı Tahmin'e göre daha düşük olduğu söylenebilir. Bunun nedeni ise Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminlerin, sorunun bileşenleri arasındaki ilişki ve özellikler yerine sadece yanıtta elde edilen sayısal değerlere bağlı olması olabilir.

Algıya dayalı tahminde bulunan öğrencilerin ispat basamağında Genel Örnek ve Düşünce Deneyi türünden üst seviye ispatları daha çok yaptıkları, Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminlerde bulunan öğrencilerin ise çoğunlukla Balacheff'in ispat türleri basamağına göre alt seviye ispatlardan sayılan Saf Deneycilik türünden ispat yaptıkları görülmüştür.

Farklı türden özelleştirme, ispat ve genellemenin yer aldığı birçok yanıtta öğrencilerin genelleme hiyerarşisinde en üst seviye sayılan Sembolik Genelleme'ye ulaştığı görülmüştür. Dolayısıyla diğer basamaklarda gerçekleştirilen özelleştirme, tahmin ve ispat türlerinin genelleme basamağı ve seviyesi üzerinde herhangi bir etkisinin olmadığı söylenebilir. Bununla birlikte, matematiksel düşünmenin çalışmamızda ele alınan doğası gereği herhangi bir tahminin oluşmadığı durumlarda bir genellemeye ulaşılamayacağı, bir genellemenin yapılmadığı durumlarda da ispat basamağının gerçekleştirilmeyeceği ifade edilebilir.

5. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde yapılan araştırmanın sonuçlarına yer verilmiş, elde edilen bulgular ve sonuçlar ışığında konu hakkında çalışmak isteyen araştırmacı ve eğitimcilere yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.1. Tartışma ve Sonuç

Bu araştırmanın amacı, 12. sınıf fen lisesi öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerini özelleştirme, tahmin, ispat ve genelleme basamakları bağlamında incelemektir. Bu amaçla, yapılan çalışma neticesinde elde edilen sonuçlar ilgili literatür ile tartışılarak aşağıda sunulmuştur.

Bulgular incelendiğinde öğrenciler açısından problemlerin zorluk derecelerine göre kolaydan zora sırasıyla Nokta ve Doğru, Tokalaşma, Merdiven, Dikdörtgen Sayısı, Kâğıt Ev, Desen, Daire ve Bölge, Daire ve Noktalar problemi ve Tavşanlar problemi şeklinde sıralandığı görülmüştür. Bu sıralamanın oluşumunda öğrencilerin daha önceden soruya aşina olup olmamaları, tahmin, ispat ve genelleme yapabilme durumları ile bu basamaklardaki seviyeleri göz önüne alınmıştır.

Bu sıralamada yanıtlar incelendiğinde genelde soruların zorluk dereceleri arttıkça öğrencilerin özelleştirme basamağından daha az atladığı, özelleştirme aşamasında kullandıkları örneklerin sayısının, diğer bir ifadeyle özelleştirme eğilimlerinin de arttığı görülmektedir. Nispeten kolay sorularda özelleştirme basamağının atlanışına daha sık rastlanılırken, öğrencilerin büyük çoğunluğunun sorularda Yeterli Özelleştirme yapabildiği, sonraki aşamalarda çeşitli tahmin, ispat ve genellemelere ulaşabildiği sonucuna varılmıştır. Bu sonucun, 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmeleri ile ilgili araştırma yapan ve öğrencilerin çoğunun özelleştirme aşamasında gerekli olan işlemleri doğru olarak yaptıkları sonucu elde edilen Arslan ve Yıldız'ın (2010) çalışmasıyla uyumlu olduğu görülmüştür. Sayıca az da olsa Kısmi (Eksik) veya Hatalı Özelleştirme yapan öğrenciler de bulunmaktadır.

Bulgular tahmin basamağı açısından değerlendirildiğinde, öğrencilerin soruyla ilgili birkaç örnekte ulaştıkları değerler yoluyla (Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım) veya sorunun görsel gösterimi üzerinden (Algıya Dayalı Tahmin) formülleri tahmin ettikleri görülmektedir. Dindyal (2007) de lise öğrencileriyle yaptığı çalışmada benzer sonuçlara ulaşmış, öğrencilerin örüntü içeren problemlerde formülleri; sayma, çizme veya ilk birkaç örneği irdeleme yoluyla elde etmeye çalıştıklarını ifade etmiştir.

Kullanılan tahmin türleri sayıca incelendiğinde öğrencilerin yanıtlarında daha çok Algıya Dayalı Tahmin yapmayı tercih ettikleri görülmektedir. Bu sonuç Cañadas ve Castro'nun (2007) 14-18 yaş arası 12 öğrenci ile yaptıkları çalışmada elde ettikleri sonuçlarla örtüşmemektedir. Onlar öğrencilerin çoğunun tahminlerini 3'ten fazla sayıda örneklere dayalı olarak yaptıklarını, diğer bir ifadeyle Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminde bulunduklarını ifade etmişlerdir. Bu çalışmada farklı bir sonucun elde edilmesinin nedeni, çalışmada kullanılan çoğu problemin görsel olarak sunulmuş olması olabilir.

Öğrencilerin en çok zorlandığı soru olan Tavşanlar probleminde tahminde bulunmaya çalışan öğrencilerin tamamının Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmine yöneldiği görülmektedir. Bunun nedeni, öğrencilerin sorunun bileşenleri arasındaki ilişkileri az sayıdaki örnek üzerinde görememeleri ve sayıca daha fazla örnek çözerek soruyla ilgili bir anlayış geliştirmeye çalışmaları olabilir. Nitekim benzer şekilde Dindyal (2007) de çalışması sonucunda öğrencilerin örüntü içeren problemlerde kısıtlı sayıda örnek incelemelerinin, onların bir genellemeye ulaşmaları için yeterli olmayabileceğini ifade etmiştir.

Merdiven problemi ve Dikdörtgen Sayısı problemi aynı formülü gerektirmesine rağmen öğrenciler Merdiven probleminde daha çok Algıya Dayalı Tahmin türünden tahminde bulunmuş, Dikdörtgen Sayısı probleminde ise Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahmin daha baskın olarak kullanılmıştır. Bunun nedeni problemlerin görsel gösterimlerinin kendileriyle ilgili yapmış oldukları çağrışım seviyesindeki farklılık olabilir. Şöyle ki Merdiven probleminde öğrencilerin çoğu problemin gösteriminden basamakların birer birer arttığını görebilmesi, Dikdörtgen Sayısı probleminde yer alan örüntüyü görebilmelerinin o denli kolay olmaması ve bu nedenle Dikdörtgen Sayısı probleminde Sonlu Sayıda Ayrık Durumlardan Empirik Tümevarım türünden tahminlere yönelmiş olmaları mümkündür. Ancak literatürde bu konuyla ilgili kısıtlı sayıda çalışma olması nedeniyle bu bulguya dair başka herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Çözümler ispat basamağı açısından incelendiğinde, öğrencilerin tüm ispat seviyelerinde cevap verebilmiş oldukları görülmektedir. İspat basamağında başarısız olan öğrenciler ise bu durumla ilgili olarak:

$Ö_2$: Çözümü ispat gibi düşündüm.

$Ö_5$: Ben burada nasıl ispat yapabileceğimi bilemedim açıkçası. Hani ispat olarak ne olabilir bunu düşünemedim. Nasıl olduğunu bilemedim.

$Ö_6$: O şeyden dolayı kaynaklanıyor biz yoktan bir şeyi ispat edip formülü oluşturmaya değil zaten var olan bildiğimiz bir formülü nasıl açıklardık yoluyla yazdığımız için o şekilde oluyor.

$Ö_7$: Kanıksanmış bir şey bu hani doğruluğu kabul edilmiş. Yani bu kural doğru diyorsun ve yaptığın bir şey var. Formülde de yaptığın şey tutuyorsa bunu bir ispat olarak kabul edilebilir diyorsun.

$Ö_8$: Genelde şey… Biz genelde ispatlarla ilgilenmiyoruz ya o yani. Aslında ispatla ilgileniyor olsak dediğiniz gibi ispatı da olabilir ama biz ezberlediğimiz için… Mantığını değil yani. Kuralı biliyoruz, uyguluyoruz.

$Ö_9$: Biz böyle sanki ispattan formülü bulmaya çalışmışız o yüzden bu şekilde oldu.

şeklinde ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadelerde de görüleceği üzere öğrenciler ispat yapamamalarının nedeni olarak nasıl ispat yapacaklarını bilmediklerini, problemlerde sergiledikleri çözümü ispat gibi düşündüklerini ve derslerinde genelde ispatlarla ilgilenmiyor olmalarını göstermişlerdir. Bu sonuç alanda yapılan bazı araştırma sonuçları (Moore, 1994; Keçeli-Bozdağ, 2012) ile örtüşmektedir. Örneğin Moore (1994) yaptığı çalışmada, öğrencilerin ispat kavramıyla ilgili anlayış ve ispata başlamada zorluklar yaşadığı sonucuna varmıştır. Keçeli-Bozdağ (2012) da yaptığı çalışmada elde ettiği bulgular neticesinde öğrencilerin derslerinde sınırlı sayıda ispatla karşılaşmalarının ispat yapmalarını zorlaştırdığını ifade etmiştir.

Öğrenciler, özellikle daha öncesinden aşina oldukları, görece kolay sorularda Düşünce Deneyi veya Genel Örnek gibi hiyerarşide daha üst seviyede ispat yaparken, soruların zorluk dereceleri arttıkça hiyerarşide daha alt basamakta bulunan Saf Deneycilik veya Kritik Deney türünden ispatların sayısının da arttığı görülmektedir. Genelde öğrenciler aşina oldukları rutin sorularda daha üst seviye ispatlar yaparken, rutin olmayan sorularda daha alt seviyeden ispatlar yapmışlardır. Bu sonuç alanda yapılan bazı araştırma sonuçları (Healy ve Hoyles, 2000; Chin ve Lin, 2009) ile benzerlik göstermektedir. 14 ve 15 yaş öğrencilerle gerçekleştirdikleri çalışmalarda Healy ve Hoyles (2000) ile Chin ve Lin (2009) de benzer sonucu elde etmişlerdir. Bununla birlikte, soruların zorluk dereceleri arttıkça ispat basamağında başarısızlıkların arttığı belirlenmiş, öğrencilerin ispat yapmada oldukça zorlandıkları ve istenilen seviyede ispat gerçekleştiremedikleri görülmüştür. Bulgular Köğce, Aydın ve Yıldız'ın (2010) 10. sınıf öğrencilerinin ispat yöntem ve tekniklerini yeterince kullanamadıklarını, istenilen seviyede ispat gerçekleştiremediklerini tespit ettikleri çalışmanın sonuçları ile benzerlik göstermektedir. Ayrıca Özer ve Arıkan (2000) da lise 2. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirdikleri çalışmada, ispat açısından öğrencilerin genel olarak Balacheff taksonomisine göre en alt seviyede olduklarını ifade etmiştir. Bu durumun nedeni, öğrencilerin derslerinde veya ders kitaplarında ispat konusuna yeterince yer verilmemesi olabilir. Nitekim Çalışkan (2012) yapmış olduğu çalışmada 6, 7 ve 8. sınıf matematik ders kitaplarında ispat kavramına yer verilen etkinlikleri Balacheff taksonomisine göre incelemiş, kitapların %67'sinin Saf Deneycilik, %29'unun Kritik Deney ve sadece %4'ünün Genel Örnek türünden ispatlar içerdiğini, Düşünce Deneyi türünden ispatın ise hiç yer almadığını belirtmiştir.

Genellemeye gelindiğinde ise bu basamakta başarılı olmuş öğrencilerin neredeyse tamamının genelleme hiyerarşisinde en üst seviye olan Sembolik Genelleme yaptığı görülmektedir. Bu sonuç Coşkun (2012) ile Keskin, Dağ ve Altun'un (2013) bulgularıyla benzerdir. Coşkun (2012) matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirdiği çalışmasında öğretmen adaylarının genelleme sürecini yüksek düzeyde gerçekleştirmede oldukça başarılı olduklarını ifade etmiştir. Keskin, Dağ ve Altun (2013) ise başarı düzeyi yüksek bir lisenin 11. sınıf öğrencileriyle yaptıkları çalışmada, öğrencilerin soru çözümlerinde sözel genellemelerden çok problemin bileşenleri arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade ettikleri, diğer bir ifadeyle Sembolik Genelleme yaptıkları sonucuna varmışlardır. Ancak aynı sonuç genelleme aşamasını sözel olarak ifade eden 11. sınıf öğrencilerin sayısının, matematiksel sembollerle ifade eden öğrencilerden daha fazla olduğu şeklinde bulgu elde edilmiş olan Arslan ve Yıldız'ın (2010) çalışmasıyla çelişmektedir. Yine aynı şekilde Cañadas, Castro ve Castro (2008) da 9. ve 10. sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmada, öğrencilerin daha çok sözel genellemelerde bulundukları sonucunu elde etmişlerdir. Bu durumun nedeni araştırma yapılan okullar, araştırmaya katılan öğrencilerin seviyeleri veya kullanılan problemler arasındaki farklılıklar olabilir. Çok az sayıdaki öğrenci Aritmetik Genelleme yapmış, en çok yapılan genelleme türü Sembolik Genelleme olmuştur. Araştırmanın bu sonucu da Dindyal (2007) ile Akkan ve Çakıroğlu'nun (2012) araştırma sonuçları ile benzerlik göstermektedir. Örneğin Dindyal (2007) 6 lise öğrencisiyle gerçekleştirmiş olduğu çalışmasında öğrencilerin sözel genellemelerden kaçındığını, tamamının sembolik genellemeleri kullanmaya çalıştığını ifade ederken Akkan ve Çakıroğlu (2012) ise öğrenim seviyesi arttıkça kuralı harflerle veya cebirsel olarak ifade eden öğrencilerin sayısının da arttığı sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencilerin genelde bir formül ezberleme ve uygulama şeklinde devam eden eğitim süreçleri onları özellikle matematiksel formül bulmada avantajlı hale getirmiş, böyle davranmalarına sebep olmuş olabilir.

Soruların zorluk derecesi arttıkça genelleme yapma oranının da düştüğü gözlenmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan öğrenciler genelleme basamağında en başarılı öğrenci grubu olurken başarı düzeyi düşük olan öğrenciler en başarısız öğrenci grubunu oluşturmuşlardır. Dindyal (2007) de yaptığı çalışmada matematik başarısı düşük olan öğrencilerin, genelleme basamağında daha fazla zorlandığı sonucunu elde etmiştir. Zaman (2011) ise 9. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdiği çalışmasında, genellemenin matematik başarısı ile yüksek oranda pozitif ilişkili olduğunu saptamıştır.

Basamaklarda başarılı olma durumu göz önüne alındığında öğrencilerin en çok özelleştirme basamağında başarılı oldukları görülmektedir. Bu sonuç Arslan ve Yıldız'ın (2010) 11. sınıf öğrencileriyle, Lane ve Harkness'in (2012) öğretmen adayları ile yaptıkları çalışmalarda elde ettikleri sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Her iki çalışmada da araştırmacılar öğrencilerin matematiksel düşünmelerini özelleştirme, genelleme, tahmin/varsayımda bulunma ve ispat/ikna etme basamakları bağlamında incelemiş, öğrencilerin en çok özelleştirme basamağında başarılı olduğunu ifade etmişlerdir.

Basamakların gerçekleştirilme durumları incelendiğinde öğrencilerin gerçekleştirdiği basamaklar en çoktan en aza sırasıyla özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat şeklinde sıralanmıştır. Yine basamak seviyeleri incelendiğinde de öğrencilerin en üst seviyeye sahip oldukları basamağın genelleme basamağı olduğu ve oldukça yüksek oranda öğrencinin Sembolik Genelleme gerçekleştirdiği görülmüştür. Öğrencilerin 11 ve 12. sınıflarda sembollerle ifade edilen formüllere dayalı problemlerle daha fazla karşılaşmaları onları bu türden formüller türetmeye daha yatkın hale getirmiş olabilir.

5.2. Öneriler

Çalışmanın sonuçlarına paralel olarak yapılan öneriler aşağıda sunulmuştur:

Bu araştırmada örneklem 12. sınıf fen lisesi öğrencileri ile sınırlı tutulmuştur. Farklı okul gruplarından değişik sınıf düzeylerinde ve daha büyük bir örneklemle araştırmalar yapılması konu üzerinde daha derin ve kapsamlı bilgiler sağlayabilir.

Öğrencilerin büyük çoğunluğunun ispat basamağında zorluklar yaşadığı görüldüğünden özellikle ortaöğretimde ispat kavramı üzerinde daha ağırlıklı olarak durulmalı ve öğrencilerin ispat yöntemlerini kendi yaptıkları pratiklerle pekiştirmelerini sağlayacak ortamlar oluşturulmalarına imkân verilmelidir.

Çalışmada problemlerin çoğu görsel gösterimleri ile birlikte sunulmuştur. Söz konusu basamaklarla ilgili yapılan çalışmalarda daha farklı yollarla sunulmuş olan sorular kullanılması, basamak düzeyleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi verebilir.

Öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin artırılması amacıyla eğitimlerinde onların kendilerine özgü bir çözüm yolu geliştirebilecekleri, özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat yapabilmelerine olanak sağlayan rutin olmayan problemlere daha fazla yer verilmelidir.

Öğretmenlere, öğrencilerinin matematiksel düşünme düzeylerinin farkında olmaları ve bu düzeyleri değerlendirebilmelerini sağlayacak eğitim verilmesi öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi açısından yarar sağlayabilir.

Bu çalışmada matematiksel düşünme özelleştirme, tahmin, genelleme ve ispat basamakları bağlamında incelenmiş olup matematiksel düşünmenin diğer basamakları odaklı çalışmalar gerçekleştirilebilir.

Çalışmada kullanılan problemlerin her biri tüm dört basamağı da içeren problemlerdir. Her bir basamak için ayrı ayrı oluşturulmuş problemler ile yapılan çalışmalar, basamaklar hakkında daha ayrıntılı bilgi sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. *Eğitim ve Bilim, 37(165),* 104-120.

Aljaberi, N. M. (2014). Pre-Service elementary school teachers' level of mathematical thinking and their attitudes toward mathematics. *Journal of Education and Human Development, 3(3),* 181-195.

Alkan, H. ve Bukova-Güzel, E. (2005). Öğretmen adaylarında matematiksel düşünmenin gelişimi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25(3),* 221-236.

Alkan, H. ve Taşdan, B. T. (2011). Farklı sınıf düzeylerindeki matematik öğretmen adaylarının gözünden matematiksel düşünme. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12(2),* 107-137.

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(1),* 53-60.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi, 6(1),* 25-37.

Altun, M. and Sezgin-Memnun, D. (2008). Mathematics teacher trainees' skills and opinions on solving non-routine mathematical problems. *Journal of Theory and Practice in Education, 4(2),* 213-238.

Anthony, G. and Walshaw, M. (2002). Students' conjectures and justifications: Report of a probe study carried for the National Education Monitoring Project. *Palmerston North: Massey University.*

Argyle, S. F. (2012). *Mathematical thinking: From cacophony to consensus.* Doctoral Dissertation, Kent State University, Kent.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Aslan, E. (2011). *İlköğretim beşinci sınıf matematik dersi öğretim programında yer alan tahmin becerisi ve bu becerinin kazandırılması sırasında karşılaşılan durumların öğretmen görüşleri doğrultusunda değerlendirilmesi.* Yayımlanmış Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35(156),* 17-31.

Artut, P. D. ve Tarım, K. (2006). İlköğretim öğrencilerinin rutin olmayan sözel problemleri çözme düzeylerinin çözüm stratejilerinin ve hata türlerinin incelenmesi. *Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 15(2),* 39-50.

Aydin, U. and Ubuz, B. (2014). Predicting undergraduate students' mathematical thinking about derivative concept: A multilevel analysis of personal and institutional factors. *Learning and Individual Differences*, *32*, 80-92.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Bagdat, O. (2013). *İlköğretim öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Bağdat, A. G. O. ve Saban, P. A. (2014). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme becerilerinin solo taksonomisi ile incelemesi. *The Journal Of Academic Social Science Studies*, *26*, 473-496.

Bajpai, S. D. (1976). Patterns of mathematical thinking are much the same as the fundamental patterns of life. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, *7(4)*, 441-445.

Baki, A. (2006). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Trabzon: Derya Kitabevi.

Baker, J. D. (1996). Students' difficulties with proof by mathematical induction. *Educational Resources Information Center (ERIC).* Presented at the Annual meeting of the American Educational Research Association, New York. pp. 8-12.

Baker, D., & Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, *14*(4), 345-353.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (ed.), *Mathematics, Teachers and Children*(pp. 216–230). London: Hodder and Stoughton.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Barbosa, A. and Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network*, *10*, 57-70.

Barrow, J. D. (2005). The Artful Universe Expanded. *The Artful Universe Expanded, by John D Barrow, pp. 334. Foreword by John D Barrow. Oxford University Press, Jul 2005. ISBN-10: ISBN-13: 9780192805690, 1*.

Barwell, R. (2009). Researchers’ descriptions and the construction of mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 255-269.

Basturk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students’ conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies, 36(3),* 283-298.

Beatty, R. and Bruce, C. (2012). *From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships.* Toronto: Nelson.

Blitzer, B. (2014). *Thinking Mathematically*, (Sixth Edition). Pearson Education, Inc.

Bobis, J., Clarke, B., Clarke, D., Thomas, G., Wright, B., Young-Loveridge, J. and Gould, P. (2005). Supporting teachers in the development of young children’s mathematical thinking: Three large scale cases. *Mathematics Education Research Journal*, *16(3),* 27-57.

Breen, S. and O’Shea, A. (2010). Mathematical thinking and task design. *Bulletin of the Irish Mathematical Society*, *66*, 39-49.

Breen, S. and O'Shea, A. (2011). The use of mathematical tasks to develop mathematical thinking skills in undergraduate calculus courses–a pilot study. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *31(1),* 43-48.

Bukova, E. (2006). *Öğrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Bukova-Güzel, E. (2008). Yapılandırmacı öğrenme yaklaşımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine olan etkisi. *E-Journal of New World Sciences Academy*, *3(4),* 678-688.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15,* 35-49.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö.E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F. (2008). *Bilimsel araştırma yöntemleri.* Ankara: Pegem Yayınları.

Cabassut, R., Conner, A., Iscimen, A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. and Morselli, F. (2012). Conceptions of proof—in research and teaching. In G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (pp. 169–190). Dordrecht: Springer.

Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in US and Chinese students' solving of process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *2(4),* 309-340.

Cai, J. (2002). Assessing and understanding US and Chinese students' mathematical thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34(6),* 278-290.

Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International journal of mathematical education in science and technology, 34(5),* 719-737.

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. and Yevdokimov, O. (2007). The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning, 5(1),* 55-72.

Cañadas, M. C. and Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1(2),* 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E. and Castro, E. (2008). Description of a procedure to identify strategies: the case of the tiles problem. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano and A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX.* (Vol. 2, pp. 257-264). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Cardella, M. E. (2008). Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. *Teaching mathematics and its applications, 27(3),* 150-159.

Carroll, J. B. (1996). Mathematical abilities: Some results from factor analysis. In R. J. Sternberg and T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 3–25). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(5), 355-374.

Chin, E. and Lin, F. (2009). A comparative study on junior high school students' proof conceptions in algebra between Taiwan and the UK. *Journal of Mathematics Education, 2(2),* 52-67.

Chua, B. L. (2013). *Pattern generalisation in secondary school mathematics: Students' strategies, justifications and beliefs and the influence of task features.* Doctoral Dissertation, Institute of Education (University of London), London.

Clarke, D. M., Cheeseman, J., Clarke, B., Gervasoni, A., Gronn, D., & Horne, M. (2001). Understanding, assessing and developing young children's mathematical thinking: Research as a powerful tool for professional growth. *Numeracy and beyond, 1,* 9-26.

Coşkun, S. (2012). *Üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinin sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modeline göre tasarlanmış çalışma yaprakları yardımıyla incelenmesi.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Los Angeles, CA and London: Sage.

Csíkos, C. A. (1999). Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder's proof-categorizatıon. In*Proceedings of the 23rd Conference of the International Group forthe Psychology of Mathematics Education,* vol. 2, (pp. 233-240).

Çalışkan, Ç. (2012). *8.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Çelik, D. (2007). *Öğretmen adaylarının cebirsel düşünme becerilerinin analitik incelenmesi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çepni, S. (2009). *Araştırma ve proje çalışmalarına giriş* (Geliştirilmiş 4.Baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık.

Çilingir, D. ve Türnüklü, E. B. (2009). İlköğretim 6–8. sınıf öğrencilerinin matematiksel tahmin becerileri ve tahmin stratejileri. *İlköğretim Online, 8(3),* 637-650.

Davis, R. B., & McKnight, C. C. (1979). Modeling the processes of mathematical thinking. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 2*(2), 91-113.

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science, 284(5416),* 970-974.

Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level*. Unpublished Doctoral Dissertations, Illinois State University, Illinois.

Dindyal, J. (2007). High school students' use of patterns and generalisations. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 236 - 245): MERGA Inc.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T.and Eisenberg, T. (1996). On different facets of mathematical thinking. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253-284). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Dundar, S. (2015). An analysis on the pattern generalizations of the Turkish pre-service mathematics teachers that are presented in a different structure and presentation. *Educational Research and Reviews, 10(2),* 210-224.

Duran, N. (2005). *Matematiksel düşünme becerilerine ilişkin bir araştırma.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Ekiz, D. (2003). *Eğitim araştırma yöntem ve metotlarına giriş.* Ankara: Anı Yayıncılık.

Ersoy, E.and Güner, P. (2015). The place of problem solving and mathematical thinking in the mathematical teaching. *The Online Journal of New Horizons in Education, 5(1),* 120-130.

Faivillig, J. (2001). Strategies for advancing children's mathematical thinking. *Teaching Children Mathematics*, *7*(8), 454-459.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM*, *44*(6), 747-759.

Fong, H. K. (1997). Mathematical thinking strategies for solving challenging problems. *Teaching and Learning*, *18(1),* 54-63.

Ginsburg, H. P., Cannon, J., Eisenband, J. G., & Pappas, S. (2006). Mathematical thinking and learning. In K. McCartney & D. Phillips (Eds.), *Handbook of Early Childhood Development* (pp. 208-229). Oxford, England: Blackwell.

Ginsburg, H. P., Jacobs, S. F., & Lopez, L. S. (1993). Assessing mathematical thinking and learning potential in primary grade children. In *Investigations into assessment in mathematics education* (pp. 157-167). Springer Netherlands.

Ginsburg, H. P., Klein, A., & Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. In W. Damon, I. E. Siegel, & K. A. Renninger (Eds.), Handbook of child psychology: Vol. 4. Child psychology in practice (5th ed., pp. 401–476). New York: Wiley.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *1(4)*, 56-64.

Güler, G. ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *20(2)*, 571-590.

Harel, G. and Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society

Harel, G. and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective of proof. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 805- 842). United States of America: National Council of Teachers of Mathematics

Harel, G. and Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics*, *11(1)*, 38-42.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. and Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies*, *24(3)*, 315-331.

Hashemia, N., Abua, M. S., Kashefia, H. and Rahimib, K. (2013). Generalization in the learning of mathematics. In: *The 2nd International Seminar on Quality and Affordable Education a Paper accepted to present at ISQAE2013*.

Healy, L. and Hoyles, C. (2000). A Study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(4)*, 396-428.

Heinze, A. (2004). The proving process in mathematics classroom—method and results of a video study. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 3, pp. 41–48), Bergen (Norway): Bergen University College.

Heinze, A. and Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Hrsg.), *Teaching and learning proof across the grades: A K – 16 Perspective*, 191–203. New York, NY: Routledge.

Henderson, P. B., Fritz, S. J., Hamer, J., Hitcher, L., Marion, B., Riedesel, C. and Scharf, C. (2002). Materials Development in Support of Mathematical Thinking. The 7th Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education, Working Group Report, In *ACM SIGCSE Bulletin, 35(2)*, 185–190.

Hwa, T. Y. and Lim, C. S. (2008). Implementing school-based assessment: The Mathematical Thinking Assessment (MATA) Framework. *Buku Koleksi Bahan Seminar Inovasi Pedagogi IPBL*, 73-88.

Isoda, M. and Katagiri, S. (2012). *Mathematical thinking: How to develop it in the classroom*. Singapore: World Scientific.

Işık, C. ve Kar, T. (2011). İlköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin sayı algılama ve rutin olmayan problem çözme becerilerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12(1)*, 57-72.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of childrens' mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41(2)*, 169–202.

Jones, L. (1993). Algebra in the primary school. *Education 3-13, 21(2)*, 27-31.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31(1)*, 53-60.

Kabael, T. U. ve Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online, 9(1)*, 213-228.

Kahramaner, Y. ve Kahramaner, R. (2002). Üniversite eğitiminde matematik düşüncenin önemi. *İstanbul Ticaret Üniversitesi Dergisi*, *1(2)*, 15-25.

Kaplan, R. G. (1987). The Development of Mathematical Thinking as a Function of the Interaction between Affective and Cognitive Factors. Paper presented at the Annual Meeting of the Jean Piaget Society (17th, Philadelphia, PA, May 28-30, 1987).

Kapur, J. N. (1976). Proposal for a course on the nature of mathematical thinking. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology*, *7(3),* 287-296.

Karakoca, A. (2011). *Altıncı sınıf öğrencilerinin problem çözmede matematiksel düşünmeyi kullanma durumları*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kargar, M., Tarmizi, R. A. and Bayat, S. (2010). Relationship between mathematical thinking, mathematics anxiety and mathematics attitudes among university students. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8,* 537-542.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarinin ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal Of New Trends In Arts, Sports and Science Education (IJTASE), 1,* 134-141.

Keçeli-Bozdağ, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik tutumları ile ispatlama becerileri arasındaki ilişki*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Kenney, P. A., Zawojewski, J. S. and Silver, E. A. (1998). Marcy's dot pattern. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 474–477.

Keskin, M., Dag, S. A. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme asamalarındaki davranıslarının karşılaştırılması. *Journal Of Educational Science, 1(1),* 33-50.

Kinard, J. (2006). Creating rigorous mathematical thinking: a dynamic that drives mathematics and science conceptual development. *Transsylvanian Journal of Psychology-Erdély Pszichológiai Szemle, Special issue Vol. Supplement 2006, part, 2,* 251-266.

Knuth, E. J., Choppin, J. M. and Bieda, K. N. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning prof across the grades: A K–16 perspective* (pp. 153–170). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ko, Y. Y. and Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *TheJournal of Mathematical Behavior,28(1),* 68-77.

Kocaman, M. (2017). *Lise 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Köğce, D., Aydın, M. and Yıldız, C. (2010). The views of high school students about proof and their levels of proof (The case of Trabzon). *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2(2),* 2544-2549.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Kubinova, M., Novotna, J., & Littler, G. H. (1998). Projects and mathematical puzzles-a tool for development of mathematical thinking. *Mathematics Education I. II,* 54-64.

Kunimune, S., Fujita, T. and Jones, K. (2009). Why do we have to prove this?: Fostering students understanding of proof in geometry in lower secondary school. In F. L. Lin, et al. (Eds.), *Proc. of the ICMI study 19 conf.*(Vol. 1, pp. 256–261). Taipei: National Taiwan Normal University.

Kutluca, T. (2009). Dokuzuncu sınıf matematik öğretim programında zorluk çekilen konuların belirlenmesi. *NWSA: Education Sciences, 4(2),* 604-619.

Lane, C. P. (2011). *Mathematical Thinking and the Process of Specializing.* Doctoral Dissertation, University of Cincinnati, Cincinnati.

Lane, C. P., & Harkness, S. S. (2012). Game show mathematics: Specializing, conjecturing, generalizing, and convincing. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(2), 163-173.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning, 7(3),* 231-258.

Lee, K. (2006). *Teacher's knowledge of middle school students' mathematical thinking in algebra word problem solving*. Unpublished Ph.D. Thesis, Oregon State University, Corvallis.

Limjap, A. A. (2011). An analysis of the mathematical thinking of selected Filipino pupils. *The Asia-Pacific Education Researcher, 20(3),* 521-533.

Lin, F. L. (2006). Designing mathematics conjecturing activities to foster thinking and constructing actively. *Progress report of the APEC project: Collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)–Lesson study focusing on mathematical thinking, CRICED and University of Tsukuba*, 65-74.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M.and Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI study* (pp. 305–325). Berlin: Springer.

Liu, P. H. and Niess, M. L. (2006). An exploratory study of college students' views of mathematical thinking in a historical approach calculus course. *Mathematical Thinking and Learning, 8(4),* 373-406.

Liu, Y. (2014). *Teachers' in-the-moment noticing of students' mathematical thinking: A case study of two teachers.* Doctoral Dissertation, The University of North Carolina at Chapel Hill, North Carolina.

Lutfiyya, L. A. (1998). Mathematical thinking of high school students in Nebraska. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29(1),* 55-64.

Mason, J., Johnston-Wilder, S. and Graham, A. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: Sage

Mason, J., Stacey, K. and Burton, L. (2010). *Thinking Mathematically* (2nd edition). Edinburgh: Pearson.

McDonough, A., Clarke, B., & Clarke, D. M. (2002). Understanding, assessing and developing children's mathematical thinking: the power of a one-to-one interview for preservice teachers in providing insights into appropriate pedagogical practices. *International Journal of Educational Research, 37*(2), 211-226.

McDougall, D. and Karadag, Z. (2008). Tracking students' mathematical thinking online: Frame analysis method. *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Nuevo Leo, Mexico.*

Merriam, S. B. (2009). *Qualitative Research: a guide to design and interpretation.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2005). *İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu.* Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013a). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013b). *Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2015). *İlkokul Matematik Dersi (1, 2, 3 ve 4. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41(1),* 47-68.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics, 27(3),* 249-266.

Mubark, M. M. M. (2005). *Mathematical Thinking And Mathematics Achievement Of Students In The Year 11 Scientific Stream In Jordan*. Ph.D. Thesis, The University of Newcastle, Newcastle, Australia.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. National Academies Press.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. London:NCTM.

Ng, S. F. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator, 8(1)*, 39-59.

Nickerson, R. (2011). *Mathematical reasoning: Patterns, problems, conjectures, and proofs*. New York: Psychology Press, Taylor & Francis Group.

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2006). *İlköğretimde matematik öğretimine çağdaş yaklaşımlar*. Ankara: Ekinoks Yayıncılık.

Orton, A. and Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp 104-120). London: Cassell.

Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender.* Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Özer, Ö. ve Arıkan, A. (2000). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 47-68.

Öztürk, G. (2013). *Matematiksel düşünme odaklı öğretim: Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının planlama becerileri ve görüşleri*. Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Öztürk, G. ve Akyüz, G. (2013). Öğretmen adaylarının matematiksel düşünmeye odaklı öğretimi planlama becerilerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 21(3)*, 841-864.

Pape, S. J., Bell, C. V., & Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 179-202.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children-more than just alternating colours! *Australian Primary Mathematics Classroom, 12(3)*, 8-13.

Polya, G. (1957). *How to solve it* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88).

Radford, L. (2002). Generalizing geometric-numeric patterns: Metaphors, indexes and other students' semiotic devices. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *1(2)*, 63-72.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*, *5(1)*, 37-70.

Radford, L. and Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*(Vol. 1, pp. 2-21).

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM*, *40(1)*, 83-96.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4(2)*, 37-62.

Rivera, F. (2013). Types and levels of pattern generalization. In *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics*, (pp. 55-91). Dordrecht: Springer.

Sabena, C., Radford, L., and Bardini, C. (2005). Synchronizing Gestures, Words and Actions in Pattern Generalizations. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 129-136): University of Melbourne, Australia.

Santos-Trigo, M. (1998). Instructional qualities of a successful mathematical problem-solving class∗. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29(5)*, 631-646.

Sarı, M. (2011). *Üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıt ile ilgili güçlükleri ve kanıt öğretimi*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Sarpkaya, G., Karamik, G. A. and Bulut, N. (2011). Reflection of primary school 6th grade mathematics activities on the development of students mathematical thinking. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *15*, 1163-1167.

Schoenfeld, A. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. In L. B. Resnick & BL. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research* (pp. 83-103). (1989 Yearbook of the American Society for Curriculum Development). Washington, DC: ASCD

Scusa, T. (2008). *Five processes of mathematical thinking*. Master‘s Thesis, University of Nebraska-Lincoln, Lincoln, USA.

Sen, C. and Guler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research, 3(9),* 617-631.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?.*The mathematics teacher, 78(6),* 448-456.

Simon, M. A. and Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior, 15(1),* 3-31.

Song, M. J., & Ginsburg, H. P. (1987). The Development of Informal and Formal Mathematical Thinking in Korean and US Children. *Child Development*, *58*(5), 1286-1296.

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23(2),* 205-222.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20(2),* 147-164.

Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important. *Progress report of the APEC project: collaborative studies on innovations for teaching and learning mathematics in different cultures (II)—Lesson study focusing on mathematical thinking*.

Steen, L. A. (1988). The science of patterns. *Science*, *240(29),* 611-617.

Steen, L. A. (1990). Pattern. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 1 – 10). Washington, DC: National Academic Press.

Steele, D. F. and Johanning, D. I. (2004). A schematic–theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *57(1),* 65-90.

Sternberg, R. J. (1996). What is mathematical thinking? In R.J. Sternberg and Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 303-318). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.

Sternberg, R. J., & Ben-Zeev, T. (1996). *The nature of mathematical thinking*. Routledge.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11(4),* 258-288.

Sultan, A. and Artzt, A. (2011). *The mathematics that every secondary math teacher needs to know.* Florence, KY: Routledge, Taylor and Francis Group.

Sünkür, M. Ö., İlhan, M. ve Kılıç, M. A. (2012). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme düzeyleri ile zekâ alanları arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14(2),* 183-200.

Swafford, J. O. and Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(1),* 89-112.

Szetela, W. (1986). The Checkerboard Problem Extended, Extended, Extended,….*School Science and Mathematics,86(3)*, 205-222.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In D. Carraher and L. Miera (Eds.), *Proceedings of PME XIX*, Recife: Brazil. Vol. 1, 61–75.

Tall, D. (2006). Encouraging mathematical thinking that has both power and simplicity. Plenary at the APEC–Tsukuba International Conference, December 3–7, 2006, at the JICA Institute for International Cooperation (Ichigaya, Tokyo).

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. and Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 13–49). New York: Springer.

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi*. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Tanışlı, D. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının genelleme sürecindeki bilişsel yapıları: Bir öğretim deneyi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, *12(44)*, 255-283.

Tanışlı, D. ve Olkun, S. (2009). *Basitten Karmaşığa Örüntüler*. Ankara: Maya Akademi.

Tanner, H., & Jones, S. (2002). Assessing children's mathematical thinking in practical modelling situations. *Teaching Mathematics and its Applications*, *21*(4), 145-159.

Taşdan, B. T., Çelik, A. ve Erduran, A. (2013). Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *21(4 (ÖS))*, 1487-1504.

Taşdemir, A. (2008). *Matematiksel düşünme becerilerinin ilköğretim öğrencilerinin fen ve teknoloji dersindeki akademik başarıları, problem çözme becerileri ve tutumları üzerine etkileri*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Taştepe, M. (2012). *İspat kavramının kitap, öğretmen ve öğrenci boyutunda incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Tavşancıl, E. ve Aslan, E. (2001). *İçerik analizi ve uygulama örnekleri*. İstanbul: Epsilon Yayıncılık.

Taylor, C. H. (2008). *Promoting mathematical understanding through open-ended tasks; experiences of an eighth-grade gifted geometry class.* Doctoral Dissertation, Georgia State University, Georgia.

Tekinkır, D. (2008). *İlkogretim 6-8. sınıf ogrencilerinin matematik alanındaki tahmin stratejilerini belirleme ve tahmin becerisi ile matematik basarısı arasındaki iliski.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Türker, B., Alkaş, Ç., Aylar, E., Gürel, R. and Akkuş-İspir, O. (2010). The views of elementary mathematics education preservice teachers on proving. *International Journal of Human and Social Sciences, 5(7),* 423-427.

Umay, A. (1992). *Matematiksel düşünmede süreci ve sonucu yoklayan testler arasında bir karşılaştırma.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*, 234-243.

Varghese, T. (2011). Possible student justification of proofs. *School Science and Mathematics, 111(8),* 409-415.

Vogel, R. (2005). Patterns—a fundamental idea of mathematical thinking and learning. *ZDM, 37(5),* 445-449.

Van De Walle, J. A., Karp, K. S. and Bay-Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (7h Ed.). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Viitala, H., Grevholm, B. and Nygaard, O. (2010). About affect in five Finnish dissertations on mathematical thinking. In K. Kislenko (Ed.), *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVI: Proceedings of the MAVI-16 Conference, June 26-29, 2010, in Tallinn, Estonia* (pp. 313-330). Tallinn, Estonia: Tallinn University.

Walkowiak, T. A. (2014). Elementary and middle school students' analyses of pictorial growth patterns. *The Journal of Mathematical Behavior, 33,* 56-71.

Warren, E. and Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *11(1)*, 9-14.

Watson, F. R. (1980). The role of proof and conjecture in mathematics and mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology, 11(2),* 163-167.

Watson, A. and Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical thinking and learning*, *8(2)*, 91-111.

Way, J. (2008). Using questioning to stimulate mathematical thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13(3)*, 22-27.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 101–119.

Wiener, N. (1923). On the nature of mathematical thinking. *The Australasian Journal of Psychology and Philosophy*, *1(4)*, 268-272.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. *Journal for research in mathematics education, 37*(3), 222-252.

Yaman, H. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışları üzerine bir inceleme.* Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Yaman, H. ve Umay, A. (2013). İlköğretim öğrencilerinin sunum biçimlerine göre matematiksel örüntüleri algılayışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28(1)*, *405-416.*

Yavuz, G. (2006). *Dokuzuncu sınıf matematik dersinde problem çözme strateji öğretiminin duyuşsal özellikler ve erişiye etkisi*. Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yenilmez, K. ve Teke, M. (2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19(5),* 229-246.

Yeo, J. B. and Yeap, B. H. (2010). Characterising the cognitive processes in mathematical investigation. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*: *online journal available at http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal.*

Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In J. Schwartz, M. Yerushalmy, & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What it is a case of? (pp. 57–84). NJ: Erlbaum Inc.*

Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi.* Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yeşildere, S. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *30(30)*, 141-153.

Yeşildere, S. and Türnüklü, E. B. (2007). Examination of students' mathematical thinking and reasoning processes. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, *40(1)*, 181-213.

Yıldırım, C. (2011). *Matematiksel Düşünme* (7. Baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (6. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Yılmaz, R. ve Argün, Z. (2013). Matematiksel genelleme sürecinde görselleştirme ve önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28(2)*, 564-576.

Zaman, A. (2011). *Relationship between mathematical thinking and achievement in mathematics among secondary school students of North West Frontier Province, Pakistan*. Doctoral Thesis, International Islamic University, Islamabad.

Zazkis, R. and Liljedahk, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics*, *49(3)*, 379-402.

Zazkis, R., Liljedahl, P. and Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM, 40(1)*, 131-141.

EKLER

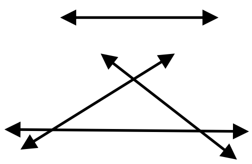
Ek 1: Veri Toplama Aracında Kullanılan Problemler

1. Problem

NOKTA ve DOĞRU

n tane noktadan kaç tane doğru geçer?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



İki noktadan tek bir doğru geçer.

Üç noktadan üç doğru geçer.

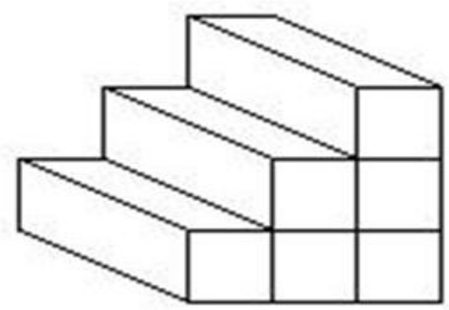
Bu durumda doğrusal olmayan n tane noktadan geçen doğru sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

2. Problem

MERDİVEN PROBLEMİ

Yapacağınız etkinlikler sonunda aşağıdaki soruya cevap bulacaksınız.

Ali şekildeki gibi 3 basamaklı bir merdiven yapmak için 6 blok kullanmaktadır.



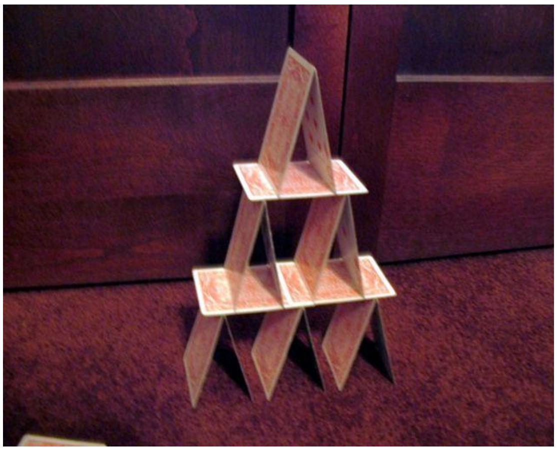
Buna göre n basamaklı bir merdiven yapmak isteyen birisinin kullanacağı blok sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

3. Problem

KAĞIT EV

n katlı bir kağıt ev için gerekli olan kart sayısı kaçtır?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

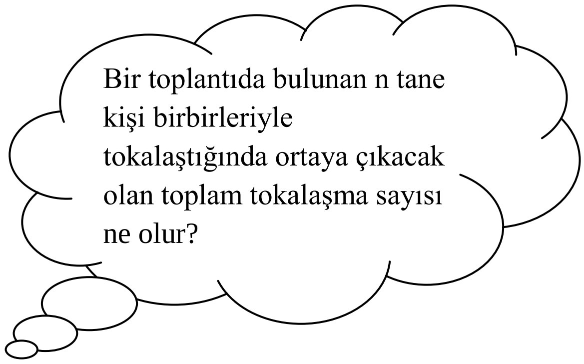


Bu 3 katlı bir kağıt evdir.

En üst kat birbirine yaslanmış iki kart ve altlarındaki bir karttan meydana getirilmiştir. Bir sonraki kat ise 4 karttan meydana gelmiş (birbirine yaslanmış 2'şer kart kümesi) ve tabanlarında yine birer kart vardır. Bu şekilde yapılan n katlı bir kâğıt ev için gerekli olan kart sayısı kaçtır? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

4. Problem

TOKALAŞMA

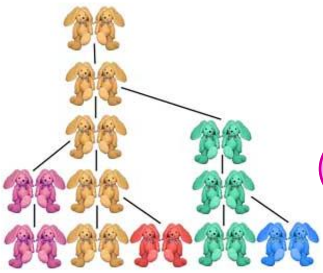


Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Yapılan bir toplantıda bulunan herkesin toplantı öncesi orada bulunan herkesle tokalaştıklarını hayal edin. 2 kişi kendi aralarında tokalaştığında 1 tokalaşma meydana gelir. 3 kişi kendi arasında tokalaştığında ise 3 tokalaşma meydana gelecektir. Bu şekilde düşündüğümüzde toplantıda n kişi olduğunu ve her birinin birbirleriyle tokalaştığını varsayarsak meydana gelecek tokalaşma sayısını bir formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

5. Problem

TAVŞANLAR



Biri erkek, diğeri dişi olan bir çift yavru tavşan bir ayda erginleşiyor. Her çift tavşanın bir çift yavru tavşan doğurabilmesi için, erginleştikten sonra bir ay geçmesi gerekiyor. Hiçbir tavşanın ölmediğini ve her dişi tavşanın ayda bir erkek ve bir dişi tavşan doğurduğunu düşünürsek, bir yılın sonunda kaç çift tavşan olur?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Doğumlarından sonraki ilk ay tavşanlar yavrudur ve üremezler. İkinci aydan itibaren ise artık yetişkin hale gelirler ve her tavşan çifti ayda bir çift yavru (erkek ve dişi) dünyaya getirmeye başlarlar. İlk ay yeni doğmuş bir çift tavşanımız olsun.

1. İlk ayın sonunda, sadece bir çift vardır.

2.İkinci ayda (45. günde, 50. günde) bu tavşanlar henüz yavrulamadıkları için hala bir çift tavşanımız var.

3. Üçüncü ay bunlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşanımız olacak.

4. Yeni doğan çift dördüncü ay doğurmayacak, oysa ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşanımız olacak (Tavşanlardan hiçbirinin ölmediği varsayılacaktır.)

a_n, n. ayda mevcut bulunan tavşan çifti sayısını belirtiyor olsun. Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

6. Problem

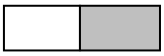
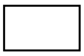
DİKDÖRTGEN SAYISI

n adet dikdörtgenden oluşmuş bir şekilde bulunan toplam dikdörtgen sayısı nedir?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.

Aşağıda yan yana eş dikdörtgenlerden oluşmuş şekillerde

 1 tane dikdörtgen vardır.

 3 tane dikdörtgen vardır   ve 

Aynı düzende devam eden n adet dikdörtgenden oluşmuş bir şekilde bulunan toplam dikdörtgen sayısı nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

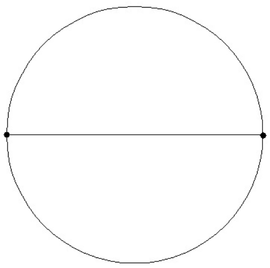
7. Problem

DAİRE ve NOKTALAR

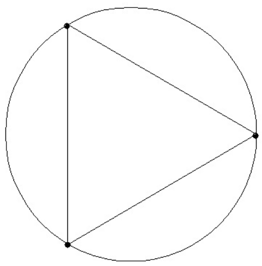
Yapacağınız etkinlikler sonunda aşağıdakisoruya cevapbulacaksınız.

Üzerinde n tane nokta olan bir dairenin üzerindeki her nokta ikilisinin doğru parçaları ile birleştirilmesiyle oluşacak bölge sayısı en çok kaç olur?

n tane noktayı bir dairenin etrafına yerleştirin ve her nokta ikilisini doğru parçalarıyla birleştirin.



2 nokta, 2 bölge



3 nokta, 4 bölge

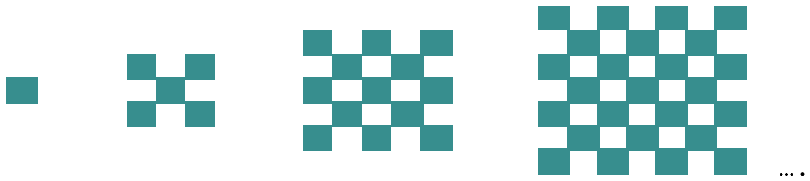
Bu duruma göre daire etrafındaki n tane noktanın oluşturduğu bölge sayısı en çok kaçtır? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

8. Problem

DESEN

Aşağıdaki örüntüde görüldüğü gibi küçük karelerden kare şeklinde daha büyük bir yapı oluşturulmaktadır. Kullanılan turkuaz kare sayısı nedir?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



1. Adım 2. Adım 3. Adım 4. Adım n. Adım

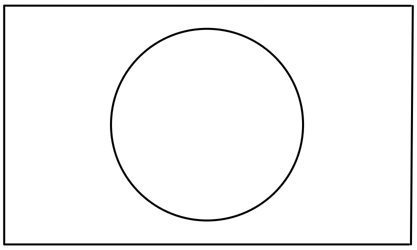
Yukarıdaki modellere göre n. adımda oluşan yapıda kullanılan turkuaz kare sayısı değeri nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

9. Problem

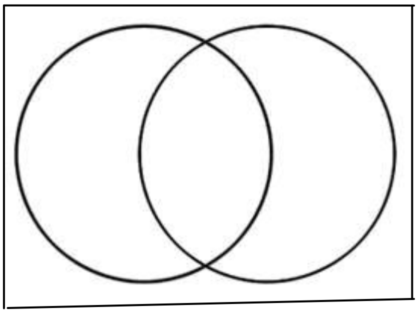
DAİRE ve BÖLGE

ntane dairenin kesişimiyle oluşacak olan bölge sayısının en büyük değeri nedir?

Yapacağınız etkinlikler sonunda bu soruya cevap bulacaksınız. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen soruyu dikkatlice okuyunuz.



Bir daire bir düzlemi 2 bölgeye ayırır.



Kesişen iki daire ise düzlemi 4 bölgeye ayırır.

Buna göre n tane dairenin kesişimi ile oluşacak olan bölge sayısının en büyük değeri nedir? Bunu formülle ifade ediniz. Matematiksel olarak bu formülü nasıl doğrularsınız (ispatlarsınız) açıklayınız.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : GÖL, Resul

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 21.01.1979 Karabük

Medeni hali : Evli

e-mail : rmail@mynet.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Uşak Üniversitesi /Matematik Eğitimi	2017
Lisans	19Mayıs Üniversitesi/ Matematik Öğretmenliği	2002
Lise	Anadolu Lisesi	1997

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Duru, A., Göl, R. (2016). Öğretmen Adaylarının Matematik, Matematik Öğretimi ve Matematik Öğrenmeye İlişkin İnançları. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 6(2*), 255-282.

Yıldız, C., Göl, R., & Hacısalihoğlu Karadeniz, M. (2016). Matematik dersi öğretim programlarında kadın matematikçilere yer verilme durumunun incelenmesi. *Karadeniz Sosyal Bilimler Dergisi, 14,* 191-214.

Yıldız, C., Hacısalihoğlu Karadeniz, M., & Göl, R. (2015). Contemporary Approaches in Education. Norley, K., Icbay, M. A., & Arslan, H. (Eds). *The usage of the biographies of mathematicians in elementary and secondary mathematics textbooks* (pp.193-207). Frankfurt: Peter Lang. ISBN 978-3-631-66164-2.