T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARASAL RİSK ÖLÇÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ZEYNEP ÖZMEN

ARALIK 2017
UŞAK

T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARASAL RİSK ÖLÇÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA ZEYNEP ÖZMEN

UŞAK 2017

Fatma Zeynep ÖZMEN tarafından hazırlanan **"Parasal Risk Ölçüleri"** adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM, ...
Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği/ oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK ....
Matematik Anabilim Dalı, Anadolu Üniversitesi
Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM ....
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi
Prof. Dr. Elçin YUSUFOĞLU, ...
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi
Yrd. Doç. Dr. Mustafa Seyyit SEYYİDOĞLU ....
Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi
Yrd. Doç. Dr. Medine YEŞİLKAYAGİL ....
Uluslararası Lojistik ve Taşımacılık Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Tarih: ...../...../.......

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. İsa YEŞİLYURT
....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma Zeynep ÖZMEN

PARASAL RİSK ÖLÇÜLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma Zeynep ÖZMEN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2017

ÖZET

Bu tez çalışmasında, belli bir olasılık dağılımına göre bir yatırımın riskinin ölçülmesi farklı şekillerde gösterilmiştir. Bu gösterimlerde matematiksel yöntemler kullanılmıştır. Portfolyo optimizasyonunda getiriyi en çok yaparken riski en düşük şekilde tutmak amaçlanır. Tabi ki çözümlerin tutarlı olması için riskin doğru ve etkin biçimde ölçülmesi önemlidir. Bu amaca yönelik olarak bir portfolyo seçildiğinde riskinin, olasılık dağılımlarına göre nasıl ele alınacağı tezin esas konusudur. Tezin genelinde risk ölçüleri ve özellikleri incelenmiştir. En küçük risk ölçüsü olarak riskteki değer ve risk ölçümüne en ihtiyatlı yaklaşım olarak riskteki ortalama değer ele alınmış, özellikleri incelenip karşılaştırılmıştır. Mevcut yatırım imkanları arasındaki tercih ilişkisi ifade edilerek bu tercih sıralamasının neye göre yapılacağından bahsedilmiştir.

Bilim Kodu	**:**	403.04.00.TOPOLOJİ
Anahtar Kelimeler	**:**	Risk ölçüleri, Riskteki değer, Stokastik finans
Sayfa Adedi	**:**	130
Tez Yöneticisi	**:**	Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM

MONETARY MEASURES OF RİSK

(M. Sc. Thesis)

Fatma Zeynep ÖZMEN

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

December 2017

ABSTRACT

In this thesis, according to a random variable (or a class of random variables), measurements of the risk of an investment is presented in different forms. Mathematical methods are used in these notations. In a portfolio optimization, the aim is to minimize the risk while maximizing the profit. Of course, to find appropriate solutions the correct and efficient measurement of the risk is important. For this purpose when a portfolio is chosen its risk, with respect to a random variable, is the main subject of this thesis. Throughout the thesis risk measures and its properties are analyzed. Value at risk can be regarded as the smallest risk measure and average value at risk can be regarded as the best conservative approximation to value at risk. Their properties are inquired and compared. Preference relation among the available investment opportunities are stated.

Science Code : 403.04.00.TOPOLOGY

Key Words : Risk measures, Value at risk, Stochastic finance

Page Number : 130

Adviser : Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında büyük emekleri olan ve her türlü desteklerini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Yard. Doç. Dr. Mustafa SOYERTEM'e ve çalışmam boyunca her zaman yanımda olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Fatma Zeynep ÖZMEN
Aralık 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}$	:	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	:	n boyutlu gerçel vektörler kümesi
$L(X)$	:	X durumunun risk ölçüsü açısından kayıp fonksiyonu
$U(X)$	:	X durumunun bir tercih ilişkisini temsil eden fayda fonksiyonu
$\mathcal{Q}$	:	Olasılık ölçülerinin bir sınıfı
$\rho(X)$	:	X'in riski
$\rho_{max}(Q)$	:	En kötü durum risk ölçüsü
$\alpha(Q)$	:	Ceza fonksiyonu
$\alpha_{min}(Q)$	:	Minimal ceza fonksiyonu
$conv\ A$	:	A'nın konveks örtüsü
$f'_-(y)$	:	f'in y'deki soldan türevi
$f'_+(y)$	:	f'in y'deki sağdan türevi
f^*	:	f'in eşlenik fonksiyonu
$P[A]$	:	A'nın P'ye göre ölçüsü
$(\Omega, \mathscr{F})$	:	Ölçü uzayı
$(\Omega, \mathscr{F}, P)$	:	Olasılık uzayı
q_X	:	X için bir dağılım dilimi fonksiyonu
F_X	:	X'in sürekli dağılım fonksiyonu
$E[X]$	:	X'in beklenen değeri
$\mu(A)$	:	A'nın ölçüsü
Φ	:	$(\Omega, \mathscr{F}, P)$'deki rassal değişkenlerin bir kümesi
$ess \sup \Phi$	:	Φ'nin esas supremumu
$ess \inf \Phi$	:	Φ'nin esas infimumu
$B_\varepsilon(x)$	:	x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
B_1	:	Birim yuvar

$C_b(S)$	:	S üzerindeki tüm sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathscr{M} := \mathscr{M}(S, \mathscr{S})$	:	$(S, \mathscr{S})$ üzerindeki tüm negatif olmayan sonlu ölçülerin kümesi
$\mathscr{M}_{1,f} := \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F})$	:	Tüm sonlu toplamsal küme fonksiyonlarının kümesi
$X^{'}$	:	X'in duali
$V@R_\lambda$	:	λ seviyesinde riskteki değer
$AV@R_\lambda$	:	λ seviyesinde riskteki ortalama değer
WCE_λ	:	λ seviyesinde en kötü koşullu beklenti
$\mathcal{Q}_c$	:	c'nin çekirdeği
$\mathscr{A}_\rho$	:	ρ'nun kabul kümesi
$q_X^-(t)$	:	X'in alt dağılım dilimi fonksiyonu
$q_X^+(t)$	:	X'in üst dağılım dilimi fonksiyonu

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, bir finansal durumun risk ölçümü probleminden bahsedildi. X olası senaryoların bir kümesi olmak üzere, senaryolar üzerinde bir olasılık ölçüsü ile ifade edilen bir olasılık modelinde, X'in elde edilen dağılımı üzerinde momentler veya dağılımlar açısından risk ölçümü amaçlandı. Bir klasik risk ölçüsü, varyans gibi, X'in finansal yorumunda basit asimetriyi ifade edemez. Burada önemli olan **aşağı yönlü (olumsuz) risk** (downside risk)tir. Bu asimetri, aşağıdaki dağıtım kuyruğu için dağılım üzerinde temellendirilmiş olan böyle riskteki değer gibi ölçüler tarafından dikkate alındı. Bölüm 6'da bu konu ile ilgilenildi. Riskteki değer (value at risk), ancak, bazı doğal tutarlı gereklilikleri karşılamaz. Böyle gözlemler, kesin temel aksiyomları karşılayan risk ölçülerinin sistematik araştırmalarını harekete geçirir.

Bir yatırımcıya göre, bir X durumunun risk ölçüsü açısından kayıp fonksiyonu

$$L(X) = -U(X)$$

dir. Burada U, finansal durumlar üzerinde verilen bir $\succ$ tercih ilişkisini temsil eden fayda fonksiyonelidir. Kuvvetli tercihler varsayımı bizi,

$$L(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[\ \ell(-X)]$$

şeklinde tanımlanan **kuvvetli eksik risk** (robust shortfall risk) kavramına götürür. Ki burada $\ell(x) := -u(-x)$ bir konveks artan kayıp fonksiyonu ve $\mathcal{Q}$ olasılık ölçülerinin bir sınıfıdır. Bu şekildeki kayıp fonksiyonları, tercih sıralamasının konvekslik ve monotonluk özellikleri cinsinden tanımlanabilir. Özellikle, eğer X'in bir güçlü eksik riski verilen bir sınırı aşmıyorsa **kabul edilebilir** (acceptable) olarak görülebilir.

Bir yatırım danışmanlık şirketinin bakış açısından, belirli bir miktarda parasal hedef meydana çıkar. Bu açıdan risk ölçüsü gerekli sermaye ihtiyacı olarak görülür. Yani, pozisyona eklendiğinde ve bu para üzerinden risksiz yatırım yapıldığında pozisyonu kabul edilebilir yapacak minimal sermaye miktarını arıyoruz. Bu parasal yorum, **nakit değişmezliği** (cash invariance)nin bir ek aksiyomu tarafından elde edilir. Bu, konvekslik ve monotonlukla birlikte **riskin konveks ölçüleri**nin sınıfını belirler. Bu ölçüler

$$\rho(X) = \sup_{Q} \ (\ E_Q[\ -X\ ] - \alpha(Q)\ )$$

şeklinde ifade edilebilir, ki burada α, Ω'da olasılık ölçüleri üzerinde tanımlanan ceza fonksiyonudur. **Pozitif homojenlik** ek koşulu altında, **tutarlı** (coherent) risk ölçülerinin sınıfı elde edilir. Burada Q, Ω'da bazı olasılık ölçülerinin sınıfı olmak üzere ifade,

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \ E_Q\ [\ -X\ ]$$

şeklini alır, Önerme 3.7'da görülebilir.

Böyle parasal risk ölçülerine aksiyomatik yaklaşım P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, ve D. Heath [3] tarafından başlatıldı ve bu aksiyomatik yaklaşım tezin ilk üç bölümünde geliştirildi. Bölüm 6'da riskteki değerle ilişkili bazı tutarlı risk ölçülerinden bahsedildi. Bu risk ölçüleri sadece, verilen bir olasılık ölçüsü altındaki bir durumun dağılımını içerir. Bölüm 7'de yasa değişmezinin paylaşılan bu özelliğine sahip konveks risk ölçüleri sınıfı belirlendi. Bölüm 8'de konkav çarpıklıkların rolü tartışıldı ve Bölüm 9'da elde edilen risk ölçüleri, bir komonotonluk özelliği tarafından belirlendi. Bölüm 10'da, bir finansal piyasa modelinin şartında doğal olarak ortaya çıkan risk kavramı tarafından sonuçlandırılan, parasal risk ölçülerinin yapısı analiz edildi. Bölüm 11'de, güçlü eksik risk kavramı ile sonuçlandırılan, parasal risk ölçülerinin yapısı analiz edildi. Bunun için [16]'ten faydalanıldı.

2. ÖNBİLGİ

Burada tezde kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi.

2.1. Konvekslik

Bir $x \in \mathbb{R}^n$ için Euclid normu

$$|x| := \sqrt{x \cdot x}$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.1. *Bir $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Her $x, y \in \mathfrak{C}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda\ x + (1-\lambda)\ y \in \mathfrak{C}$ ise, $\mathfrak{C}$ kümesine **konveks küme** denir.*

*$\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $f : \mathfrak{C} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in \mathfrak{C}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ ise f fonksiyonuna **konveks fonksiyon** denir.*

Aşağıdaki önerme konveks küme ile dışındaki bir noktanın doğrusal fonksiyon yardımıyla ayrılmasını gösterir. Fonksiyonel analizdeki oldukça önemli olan bu önermenin kanıtı pek çok kitapta mevcuttur.

Önerme 2.1. *[16] $\mathfrak{C} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \notin \mathfrak{C}$ olacak şekilde boştan farklı konveks bir küme olsun. O halde bir $\eta \in \mathbb{R}^n$ vardır öyle ki her $x \in \mathfrak{C}$ için $\eta \cdot x \geq 0$ ve en az bir $x_0 \in \mathfrak{C}$ için $\eta \cdot x_0 > 0$ olur. Üstelik, $\inf_{x \in \mathfrak{C}} |x| > 0$ ise, $\inf_{x \in \mathfrak{C}}\ \eta \cdot x > 0$ olacak şekilde bir $\eta \in \mathbb{R}^n$ vardır.*

Tanım 2.2. *A, bir E lineer uzayının herhangi bir alt kümesi olsun.*

$$convA = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ x_i \;\middle|\; x_i \in A\ ,\ \alpha_i \geq 0\ ,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

*kümesine A**'nın konveks örtüsü** (convex hull) denir ve bu küme $convA$ ile gösterilir. $convA$, A'yı içeren en dar konveks kümedir.*

Tanım 2.3. *Konveks bir f fonksiyonu tüm noktalarda $+\infty$ değerini almıyorsa bu fonksiyona **has konveks fonksiyon** (proper convex function) denir.*

Önerme 2.2. *[16] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir has konveks fonksiyon olsun ve f'in tanım kümesinin içi D ile gösterilsin.*

(a) f, f'in tanım kümesi üzerinde üstten yarı sürekli ve D üzerinde yerel Lipschitz süreklidir.

(b) Her bir $y \in D$'de f'in soldan ve sağdan türevleri vardır:

$$f_-^{'}(y) := \lim_{x \uparrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad ve \quad f_+^{'}(y) := \lim_{z \downarrow y} \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

dir. $f_+^{'}$ ve $f_-^{'}$ artan fonksiyonlardır ve $f_-^{'} \leq f_+^{'}$ olur.

(c) Sağdan türev olan $f_+^{'}$, sağdan sürekli ve soldan türev olan $f_-^{'}$, soldan süreklidir.

(d) f, D'de hemen hemen her yerde diferansiyellenebilirdir ve herhangi bir $x_0 \in D$ için $x \in D$ olmak üzere,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_+^{'}(y)\ dy = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_-^{'}(y)\ dy$$

dir.

Tanım 2.4. *Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun Fenchel-Legendre dönüşümü bir $y \in \mathbb{R}$ için,*

$$f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} (y\ x - f(x))$$

olarak tanımlanır.

$f \not\equiv +\infty$ ise $y \mapsto y\ x - f(x)$ afin fonksiyonların supremumu iken f^* konveks ve alttan yarı süreklidir. Özellikle f^*, kendi etkin tanım kümesi üzerinde sürekli olan bir has konveks fonksiyondur. f'in kendisi bir has konveks fonksiyon ise f^* da f'in ***eşlenik (conjugate) fonksiyonu*** *adını alır.*

Önerme 2.3. *f bir has konveks fonksiyon olsun.*

(a) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x\ y \leq f(x) + f^*(y)$$

olur. x, f'in tanım kümesinin iç noktası ve $y \in [\ f_-^{'}(x), f_+^{'}(x)\ ]$ ise

$$x\ y = f(x) + f^*(y)$$

olur.

(b) f alttan yarı sürekli ise, $f^{**} = f$'tir, yani $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \, (x\ y - f^*(y))$$

dir.

2.2. Dağılım Dilimi Fonksiyonları

$F : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$'nin bir azalmayan fonksiyon olduğunu kabul edelim.

$$c := \lim_{x \downarrow a} F(x) \ \text{ ve } \ d := \lim_{x \uparrow b} F(x)$$

olsun. Burada bir $s \in (c, d)$ için

$$s- := \lim_{x \uparrow s} x \quad \text{ ve } \quad s+ := \lim_{x \downarrow s} x \ ,$$

bir $e \in (a, b)$ için

$$F(e-) := \lim_{x \uparrow e} F(x) \quad \text{ ve } \quad F(e+) := \lim_{x \downarrow e} F(x)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. *Bir $q : (c, d) \to (a, b)$ fonksiyonu, her $s \in (c, d)$ için*

$$F(q(s)-) \leq s \leq F(q(s)+)$$

*ise q'ya F için bir **ters fonksiyon** (inverse function) denir.*

$$q^-(s) := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < s\} \ \ \textit{ve} \ \ q^+(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > s\}$$

*fonksiyonları, **soldan ve sağdan sürekli ters fonksiyonlar** (left- and right-continious inverse functions)dır.*

Aşağıdaki yardımcı teorem, F'nin soldan ve sağdan sürekli ters fonksiyonlarının q^- ve q^+ isimlendirmesinin sebebini açıklar.

Yardımcı Teorem 2.1. *Bir $q : (c, d) \to (a, b)$ fonksiyonunun F'nin bir ters fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul, her $s \in (c, d)$ için*

$$q^-(s) \leq q(s) \leq q^+(s)$$

olmasıdır. Özellikle, q^- ve q^+ kendileri de birer ters fonksiyondur. Üstelik, q^- soldan sürekli, q^+ sağdan sürekli ve her bir q ters fonksiyonu artandır, her $s \in (c, d)$ için $q(s-) = q^-(s)$ ve $q(s+) = q^+(s)$ olur. Herhangi iki ters fonksiyon (c, d) üzerinde hemen hemen heryerde çakışır, yani q_1 ve q_2 iki ters fonksiyon ise her $s \in (c, d)$ için $q_1(s) = q_2(s)$ (P-hhk) olur.

Uyarı 2.1. *Soldan ve sağdan sürekli fonksiyonlar ayrıca*

$$q^-(s) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq s\} \quad ve \quad q^+(s) = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \leq s\}$$

olarak da ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 2.2. *U, bir $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde, $(0, 1)$ uzayında düzgün dağılan bir rassal değişken olsun. Yani her $s \in (0, 1)$ için $P[\ U \leq s\ ] = s$ olsun. q bir normalleştirilmiş ($\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$), artan, sağdan sürekli $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ fonksiyonunun ters fonksiyonu ise,*

$$X(\omega) := q(U(\omega))$$

rassal değişkeninin dağılım fonksiyonu F'dir.

Tanım 2.6. *Bir F dağılım fonksiyonunun bir $q : (0, 1) \to \mathbb{R}$ ters fonksiyonu, bir* ***dağılım dilimi fonksiyonu*** *(quantile function) olarak adlandırırlır. Yani q, her $s \in (0, 1)$ için*

$$F(q(s)-) \leq s \leq F(q(s)+)$$

yı sağlayan bir fonksiyondur. Soldan ve sağdan sürekli

$$q^-(s) = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < s\} \quad ve \quad q^+(s) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) > s\}$$

ters fonksiyonları, ***alt ve üst dağılım dilimi fonksiyonları*** *(lower and upper* *quantile functions) adını alır.*

Yardımcı Teorem 2.3. *X bir F_X sürekli dağılım fonksiyonuna ve q_X dağılım dilimi fonksiyonuna sahip olan bir rassal değişken olsun. O halde $U := F_X(X)$, $(0,1)$ üzerinde düzgün olarak dağılmıştır ve P-hemen hemen kesin (bundan sonra bu ifade yerine hhk kısaltması kullanılacaktır) olmak üzere $X = q_X(U)$'dur.*

Yardımcı Teorem 2.4. *X, $E[\ |X|\ ] < \infty$ olacak şekilde, F_X dağılım fonksiyonu ve q_X dağılım dilimi fonksiyonu ile bir rassal değişken olsun. O halde*

$$\Psi(x) := \int_{-\infty}^{x} F_X(z)\ dz = E[\ (x - X)^+\ ]$$

konveks fonksiyonunun Fenchel-Legendre dönüşümü

$$\Psi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(x\ y - \Psi(x)\right) \ = \begin{cases} \int_0^y q_X(t)dt & , \quad 0 \le y \le 1 \\ +\infty & , \quad \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile verilir. Üstelik $0 < y < 1$ olmak üzere üstteki supremum değerine bir x'te ulaşılabilmesi için gerek ve yeter şart, X'in y-dağılım dilimi değerinin x olmasıdır. Yani $x = q_X(y)$ olmasıdır.

Yardımcı Teorem 2.5. *Bir f artan fonksiyonu için $X = f(Y)$ ve Y için q_Y, bir dağılım dilimi fonksiyonu ise, $f(q_Y(t))$, X için bir dağılım dilimi fonksiyonudur. Özellikle, X'in herhangi bir q_X dağılım dilimi fonksiyonu ve $t \in (0,1)$ için hemen hemen heryerde*

$$q_X(t) = q_{f(Y)}(t) = f(q_Y(t))$$

dir. f azalansa $f(q_Y(1-t))$, X için bir dağılım dilimi fonksiyonudur. Özellikle $t \in (0,1)$ için hemen hemen heryerde

$$q_X(t) = q_{f(Y)}(t) = f(q_Y(1-t))$$

dir.

Aşağıdaki teorem Hardy-Littlewood eşitsizliğinin bir versiyonudur. $E[XY]$ beklentisi, q_X ve q_Y dağılım dilimi fonksiyonları açısından hesaplanmıştır.

Teorem 2.1. *X ve Y, q_X ve q_Y dağılım dilimlerine sahip $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde iki rassal değişken olsun. O halde aşağıdaki integraller iyi tanımlı ise*

$$\int_0^1 q_X(1-s)q_Y(s)ds \leq E[XY] \leq \int_0^1 q_X(s)q_Y(s)ds$$

sağlanır. $X = f(Y)$ ve alt(üst) sınırı sonlu ise, alt(üst) sınırının elde edilmesi için gerek ve yeter şart f'in bir azalan(artan) fonksiyon olarak seçilebilmesidir.

Tanım 2.7. *$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. $\mu(A) > 0$ olacak şekilde bir $A \in \mathscr{F}$ verilsin. $B \subset A$ olacak şekildeki her $B \in \mathscr{F}$ için ya $\mu(B) = 0$ veya $\mu(A \setminus B) = 0$ ise A'ya **atom** denir.*

*Bir $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayı hiçbir atom içermiyorsa **atomsuz** (atomless) olarak adlandırılır. Yani $P[A] = X > 0$ olacak şekildeki her $A \in \mathscr{F}$ ve her $\alpha \in [0, X]$ için*

$$\exists B \subset A \; : \; B \in \mathscr{F} \quad \text{ve} \quad P(B) = \alpha$$

olur.

Önerme 2.4. *Herhangi bir olasılık ölçüsü için aşağıdaki koşullar denktir:*

(a) *$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ atomsuzdur.*

(b) *Birbirinden bağımsız,*

$$P[X_1 = 1] = P[X_1 = 0] = \frac{1}{2}$$

olmak üzere aynı Bernoulli dağılımına sahip rassal değişkenlerin bir $X_1, X_2, \cdots$ dizisi vardır.

(c) *Herhangi bir $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ için birbirinden bağımsız ortak μ dağılımına sahip (independent identically distributed) $Y_1, Y_2, \cdots$ rassal değişkenleri vardır.*

(d) *$(\Omega, \mathscr{F}, P)$, düzgün dağılıma sahip bir rassal değişkene sahiptir.*

2.3. Bir Rassal Değişkenler Ailesinin Esas Supremumu

Bu bölümde verilen bir $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde rassal değişkenlerin bir keyfi Φ ailesinin esas supremumundan bahsedelim. Öncelikle Φ kümesinin sayılabilir olduğu durumu düşünelim. O halde $\varphi^*(\omega) := \sup_{\varphi\in\Phi} \ \varphi(\omega)$'da bir rassal değişkendir yani φ^* ölçülebilirdir. Ancak Φ sayılamazsa noktasal supremumun ölçülebilirliği sağlanamayabilir. Noktasal supremum ölçülebilir olsa bile, hhk özelliklere odaklandığımızda doğru kavram olmayabilir. Buna bir örnek verelim: $\Omega := [0,1]$ üzerinde P'yi Lebesgue ölçüsü olarak alalım ve $\Phi := \{I_{\{x\}} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ seçelim. Her $\varphi \in \Phi$ için P-hhk $\varphi = 0$ iken $\sup_{\varphi\in\Phi} \ \varphi(x) = 1$ olur. Bu, hhk eşitsizlikler ile tanımlı bir esas supremumun aşağıdaki gösterimini verir.

Teorem 2.2. *$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde rassal değişkenlerin herhangi bir kümesi Φ olsun.*

(a) Her $\varphi \in \Phi$ için

$$\varphi^* \geq \varphi \quad , \quad P\text{-}hhk \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir φ^* rassal değişkeni vardır. Üstelik, φ^* aşağıdaki anlamda hhk olarak tektir. (2.1) özelliğine sahip herhangi diğer Ψ rassal değişkeni, P-hhk olmak üzere $\Psi \geq \varphi^*$'ı sağlar.

(b) Φ yönlendirilmiş bir küme, yani $\varphi, \tilde{\varphi} \in \Phi$ için, $\Psi \geq \varphi \vee \tilde{\varphi}$ olacak şekilde $\Psi \in \Phi$ olduğunu varsayalım. O halde, P-hhk olmak üzere $\varphi^* = \lim_n \ \varphi_n$ olacak şekilde Φ'de bir $\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots$ artan dizisi vardır.

Tanım 2.8. *Teorem 2.2'teki φ^* rassal değişkeni, P'ye göre* ***Φ'nin esas supremumu*** *olarak adlandırılır ve*

$$ess \ \sup \ \Phi = ess \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi := \varphi^*$$

yazılır. P'ye göre ***Φ'nin esas infimumu***

$$ess \ \inf \ \Phi = ess \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi := -ess \sup_{\varphi\in\Phi} -\varphi$$

olarak tanımlanır.

2.4. Ölçü Uzayları

S bir topolojik uzay olsun. S üzerinde, S'nin topolojisini veren bir d metriği varsa S'ye, **metrikleştirilebilir** (metrizable) denir. Yani, her $x \in S$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in S \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

şeklinde yazılabilen kümelerin ailesi S'nin topolojisinin bir tabanıdır. Bu topolojiye göre bir $U \subset S$ kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart, bu şekildeki d yuvarlarının bir birleşimi olarak yazılabilmesidir. Metrikleştirilebilir uzayların pratik bir özelliği, onların topolojik özelliklerinin yakınsak diziler cinsinden karakterize edilebilir olmasıdır. Örneğin, S metrikleştirilebilir uzayının bir A alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul, A'daki her bir yakınsak dizi için limit noktasının da A'da olmasıdır. Üstelik bir $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $y \in S$'de sürekli olması için gerek ve yeter koşul, y'ye yakınsayan her bir (y_n) dizisi için $f(y_n)$'in $f(y)$'ye yakınsamasıdır. S üzerindeki reel değerli tüm sınırlı ve sürekli fonksiyonların kümesi $C_b(S)$ ile gösterilir.

S'nin sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, S metrikleştirilebilir uzayına **ayrılabilir** (separable) denir. Bu durumda S'nin $\mathscr{S}$ Borel σ-cebiri, $x \in \{x_1, x_2, ...\}$ merkezli, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ yarıçaplı açık d yuvarları ile üretilir ve bu uzay $(S, \mathscr{S})$ ile gösterilir. Bundan sonra her zaman S'yi ayrılabilir ve metrikleştirilebilir kabul edeceğiz. Üstelik $\mathscr{S}$ uzayı d metriğine göre tam ise, yani her bir Cauchy dizisi d'ye göre S'de bir noktaya yakınsıyorsa, S bir **Polish uzayı** (Polish space) olarak adlandırılır. Örneğin, Euclid uzaklığına sahip $(\mathbb{R}, d)$, bir tam ve ayrılabilir metrik uzaydır, dolayısıyla bir Polish uzayıdır.

$(S, \mathscr{S})$ üzerindeki tüm negatif olmayan sonlu ölçülerin kümesini

$$\mathscr{M}(S) := \mathscr{M}(S, \mathscr{S})$$

ile gösterelim. Her $\mu \in \mathscr{M}(S)$, bir $\alpha \in [0, +\infty)$ katsayısı ve $(S, \mathscr{S})$ ölçü uzayı üzerinde bir ν olasılık ölçüsü için $\mu = \alpha\nu$ şeklindedir. $(S, \mathscr{S})$ üzerindeki tüm olasılık ölçülerinin uzayı

$$\mathscr{M}_1(S) = \mathscr{M}_1(S, \mathscr{S})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.9. *$\mathscr{M}(S)$ üzerindeki **zayıf topoloji** (weak topology), her $f \in C_b(S)$ ve bir $\mu \in \mathscr{M}(S)$ için*

$$\mu \mapsto \int f \, d\mu$$

dönüşümlerini sürekli yapan en kaba topoloji olarak tanımlanır.

Teorem 2.3. *Zayıf topoloji için $\mathscr{M}(S)$ uzayı, ayrılabilir ve metrikleştirilebilirdir. S Polish ise, $\mathscr{M}(S)$ de Polish'tir. Üstelik S_0, S'nin bir yoğun alt kümesi ise, rasyonel ağırlıklara sahip olan S_0 üzerinde basit ölçülerin*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i} \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}^+ \ , \ x_i \in S_0 \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

kümesi, zayıf topoloji için $\mathscr{M}(S)$'de yoğundur.

Teorem 2.4. *$\mathscr{M}(S)$'de herhangi $\mu, \mu_1, \mu_2, ...$ ölçüleri için aşağıdaki koşullar denktir:*

(a) $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi zayıf topolojiye göre μ'ye yakınsar.*

(b) $\mu_n(S) \to \mu(S)$*'dir ve her bir kapalı $A \subset S$ için* $\limsup_{n\uparrow\infty} \mu_n(A) \leq \mu(A)$*'dır.*

(c) $\mu_n(S) \to \mu(S)$*'dir ve her bir açık $U \subset S$ için* $\liminf_{n\uparrow\infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$*'dur.*

(d) Sınırı μ ölçüsüne göre 0 olan ($\mu(\partial B) = 0$) her B Borel kümesi için $\mu_n(B) \to \mu(B)$ olur.

(e) μ hemen hemen heryerde sürekli, sınırlı her ölçülebilir f fonksiyonu için $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d_\mu$*'dür.*

(f) Herbir sınırlı ve düzgün sürekli f fonksiyonu için $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d_\mu$*'dür.*

Tanım 2.10. *Bir $M \subset \mathscr{M}(S)$ ve her $\varepsilon > 0$ için*

$$\sup_{\mu\in M} \mu(K^c) \leq \varepsilon$$

*olacak şekilde S'nin kompakt bir K alt kümesi varsa M'ye **sıkı (tight)** denir.*

Teorem 2.5. *(Phorov) S bir Polish uzayı olsun. $\mathscr{M}(S)$'nin bir M alt kümesinin zayıf topolojiye göre göreceli kompakt (relatively compact) olması için gerek ve yeter koşul*

$$\sup_{\mu \in M} \mu(S) < \infty$$

ve M'nin sıkı olmasıdır. Özellikle, S bir kompakt metrik uzay ise $\mathscr{M}_1(S)$ zayıf kompakttır.

Teorem 2.6. *(Riesz) Ω bir kompakt metrik uzay ve I da $C(\Omega)$ üzerinde, negatif olmayan bir lineer fonksiyonel (Ω üzerinde $f \geq 0$ ise $I(f) \geq 0$) olsun. O halde, her $f \in C(\Omega)$ için*

$$I(f) = \int f \, d\mu$$

olacak şekilde Ω üzerinde bir tek μ pozitif Borel ölçüsü vardır.

Tanım 2.11. *$(\Omega, \mathscr{F})$ bir ölçü uzayı olsun. $\mu(\emptyset) = 0$ ve karşılıklı ayrık $A_1, ..., A_n \in \mathscr{F}$ kümelerinin herhangi sonlu kolleksiyonu için*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

*oluyorsa $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ dönüşümü, bir **sonlu toplamsal küme fonksiyonu** (finitely additive set function) olarak adlandırılır. $\mu(\Omega) = 1$ olacak şekilde normalleştirilmiş tüm $\mu : \mathscr{F} \to [0, 1]$ sonlu tolamsal küme fonksiyonlarının kümesini $\mathscr{M}_{1,f} := \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F})$ ile gösterelim. Bir sonlu toplamsal μ küme fonksiyonunun **toplam değişimi** (total variation)*

$$\|\mu\|_{var} := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)| \mid A_1, ..., A_n \ \ \mathscr{F} \text{ 'de ayrık kümeler ve } n \in \mathbb{N}\right\}$$

olarak tanımlanır.

Toplam değişimi sonlu olan tüm sonlu toplamsal μ ölçülerinin uzayı $ba(\Omega, \mathscr{F})$ ile ifade edilir.

$\mathcal{X}$, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerindeki tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların uzayı olsun.

Teorem 2.7. *$F \in \mathcal{X}$ için*

$$\ell(F) = \int F d\mu$$

$\mathcal{X}$ üzerindeki sürekli, lineer ℓ fonksiyonelleri ile $\mu \in ba$ sonlu toplamsal küme fonksiyonları arasında bire-bir bir eşleme tanımlar.

Örnek 2.1. *$(\Omega, \mathscr{F})$, sonlu bir kümeye indirgenebiliyorsa ($\mathscr{F}$, Ω'nın sonlu parçalanışıyla üretilebiliyorsa) $\mathscr{M}_{1,f}$ kümesinin tüm σ-toplamsal olasılık ölçülerinin $\mathscr{M}_1 := \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ kümesiyle çakıştığı açıktır. Diğer durumlarda $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_{1,f}$'nin öz alt kümesidir. Sonsuz sayıda ayrık $A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$ kümesinin var olduğunu varsayalım, $\omega \in A_n$ alalım ve $n = 1, 2, \cdots$ için*

$$\ell_n(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i)$$

tanımlayalım. $\mathcal{X}$ üzerinde ℓ_n sürekli lineer fonksiyonelleri, $\mathcal{X}'$ dual Banach uzayındaki B_1 birim yuvarına aittir. Teorem 2.12'den (ℓ_n)'nin bir ℓ yığılma noktası vardır. Herhangi bir $X \in \mathcal{X}$ için $\ell_{n_k}(X) \to \ell(X)$ olacak şekilde bir (n_k) alt dizisi vardır. Bu durum $X \geq 0$ için $\ell(X) \geq 0$ ve $\ell(1) = 1$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla Teorem 2.7'den bir $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ için $\ell(X) = E_Q[X]$ yazabiliriz. Ancak, $Q[A_n] = \ell(I_{A_n}) = 0$ ve $Q[\ \bigcup_n A_n\ ] = 1$ olduğundan Q, σ-toplamsal değildir.

2.5. Biraz Fonksiyonel Analiz

Bu tezdeki bazı konular, sonsuz boyutlu vektör uzaylarıyla ilgilidir. Bu konu ile ilgili önemli örnekler $0 \leq p \leq \infty$ için L^p uzaylarıdır. Bu bölümde bu uzaylardan bahsedeceğiz.

Öncelikle $p \in (0, \infty]$ alalım. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde bir Z fonksiyonu için

$$\|Z\|_p := \begin{cases} E[\ |Z|^p\ ]^{1/p} & , \quad 0 < p < \infty \text{ ise} \\ \inf \{\ c \geq 0 \mid P[\ |Z| > c\ ] = 0\ \} & , \quad p = \infty \text{ ise} \end{cases} \tag{2.2}$$

tanımlayalım. $\|Z\|_p < \infty$ olacak şekildeki $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde tüm $\mathscr{F}$-ölçülebilir Z fonksiyonlarının kümesini $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ile gösterelim. Ayrıca $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uzayını P-hhk sonlu rassal değişkenlerin kümesi olarak tanımlayabiliriz. σ-cebirine ve ölçüye göre $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ yerine kısaca $\mathscr{L}^p(P)$ ya da sadece $\mathscr{L}^p$ yazabiliriz. $p \in [0, \infty]$ için $L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ya da kısaca L^p uzayını bir P-göz ardı edilebilir (null) kümesi dışında çakışan $\mathscr{L}^p$'deki rassal değişkenler olarak tanımlayabiliriz. Sonuç olarak

$$Z \sim \tilde{Z} \quad :\Longleftrightarrow \quad Z = \tilde{Z} \ , \ P\text{-hhk} \tag{2.3}$$

denklik bağıntısına göre L^p, bu bağıntının denklik sınıflarından oluşur. $p \in [1, \infty]$ ise L^p vektör uzayı (2.2)'te tanımlanan $\| \cdot \|_p$ normuna göre bir Banach uzayıdır, yani $\| \cdot \|_p$ normuna göre her Cauchy dizisi L^P'de bir elemana yakınsar. Temelde, Z bir temsil elemanı olmak üzere, bir $Z \in \mathscr{L}^p$ rastgele değişkeni ve bununla ilişkili $[Z] \in L^P$ denklik sınıfı arasında bir fark olmalıdır. İfadeleri basit tutmak için Z'yi denklik sınıfı yerine kullanacağız ve $Z \in L^p$ şeklinde yazacağız.

$\mathscr{L}^0$ uzayında, P-ölçüsünde yakınsaklığın topolojisini kullanırız. Bu topoloji, $X, Y \in \mathscr{L}^0$ için

$$d(X, Y) := \ E[\ |X - Y| \wedge 1\ ] \tag{2.4}$$

metriği ile üretilir. Ayrıca d'nin bir norm olmadığına dikkat ediniz.

Tanım 2.12. *N, üzerinde bir topoloji tanımlanan vektör uzayı olmak üzere, her $x \in N$ için $\{x\}$ tekil kümesi bir kapalı küme ve vektör uzayı işlemleri aşağıdaki anlamda sürekli ise, bir* topolojik vektör uzayı *adını alır:*

$$(x, y) \longmapsto \ x + y$$

$N \times N$'den N'ye bir sürekli dönüşümdür ve

$$(\alpha, x) \longmapsto \ \alpha x$$

$\mathbb{R} \times N$'den N'ye bir sürekli dönüşümdür.

Teorem 2.8. *Bir N topolojik vektör uzayında, en az birinin içi boştan farklı olan herhangi iki ayrık $\mathscr{B}$ ve $\mathfrak{C}$ konveks kümeleri, N üzerinde sıfır olmayan sürekli lineer ℓ fonksiyoneli ile ayrılabilir, yani her $x \in \mathfrak{C}$ ve her $y \in \mathscr{B}$ için*

$$\ell(x) \leq \ell(y)$$

dir.

Tanım 2.13. *Bir N topolojik vektör uzayı başlangıç noktasında konveks kümelerden oluşan bir tabana sahipse, bu uzay* ***yerel konveks uzay*** *olarak adlandırılır.*

N, $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise; $x \in N$, $r > 0$ olmak üzere,

$$\{\ y \in N \mid \|y - x\| < r\}$$

açık yuvarları N'deki topoloji için bir taban tanımlar. Böyle yuvarlar konveks kümeler olduğundan herhangi bir Banach uzayı yerel konvekstir. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ atomsuzsa, $L^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uzayı P-ölçüsündeki yakınsaklığın topolojisine göre yerel konveks değildir.

Aşağıdaki teorem 'ayırma hiperdüzlemleri'nin varlığı üzerine, klasik Hahn-Banach teoreminin bir versiyonudur.

Teorem 2.9. *(Hahn-Banach) $\mathscr{B}$ ve $\mathfrak{C}$, bir yerel konveks N uzayının boştan farklı, ayrık ve konveks alt kümeleri olsun. O halde, $\mathscr{B}$ kompakt ve $\mathfrak{C}$ kapalı ise*

$$\sup_{x \in \mathfrak{C}} \ell(x) \ < \ \inf_{y \in \mathscr{B}} \ell(y)$$

olacak şekilde N üzerinde bir sürekli lineer ℓ fonksiyoneli vardır.

Tanım 2.14. *N lineer uzay, F, N'nin noktalarını ayıran N üzerinde lineer fonksiyonellerin bir sınıfı olsun. N üzerindeki F-topolojisi ($\sigma(N, F)$ ile gösterilir); $n \in \mathbb{N}$, $x \in N$, $\ell_i \in F$ ve $r > 0$ olmak üzere*

$$\{\ y \in N \mid \ |\ell_i(y) - \ell_i(x)| < r\ ,\ i{=}1, \cdots, n\ \}$$

şeklindeki kümeleri taban olarak kabul eden N üzerindeki topolojidir.

N zaten bir yerel konveks topoloji bulunduruyorsa, N'-topolojisi ($\sigma(N, N')$), N üzerindeki ***zayıf topoloji*** *(weak topology) adını alır.*

N sonsuz boyutlu ise, F topolojisi genellikle metriklenemez. Bu durumda, açık ve kapalı kümeleri tanımlamak için diziler yeterli olmayabilir. Aşağıdaki önerme, F topolojisinin bir çok temel özelliğini özetler.

Önerme 2.5. *a) F topolojisi ile N bir yerel konveks uzaydır.*

b) F topolojisi her $\ell \in F$'yi sürekli yapan N üzerindeki en kaba topolojidir.

c) F topolojisi için N'nin duali F'ye eşittir.

Teorem 2.10. *N'nin yerel konveks uzay ve $\mathfrak{C}$'nin, N'nin bir konveks alt kümesi olduğunu varsayalım. O halde $\mathfrak{C}$'nin zayıf kapalı olması için gerek ve yeter şart, N'nin esas topolojisinde $\mathfrak{C}$'nin kapalı olmasıdır.*

Tanım 2.15. *Bir $f : N \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun Fenchel-Legendre dönüşümü N''de tanımlanan*

$$f^*(\ell) := \sup_{x \in N} (\ell(x) - f(x))$$

fonksiyonudur.

Teorem 2.11. *f yerel konveks bir N uzayı üzerinde bir konveks fonksiyon olsun. f, $\sigma(N, N')$'ye göre alttan yarı sürekli ise $f = f^{**}$'dır.*

Teorem 2.12. *(Banach-Alaoğlu) N, N' duali ile bir Banach uzayı olsun. Bu durumda*

$$\|\ell\|_{N'} := \sup_{\|x\|_N \leq 1} \ell(x)$$

olmak üzere, her $r \geq 0$ için $\{x \in N' \mid \|x\|_{N'} \leq r\}$ zayıf * kompakttır.

Yardımcı Teorem 2.6. *$\mathfrak{C}$, L^∞'un bir konveks alt kümesi olmak üzere, her $r > 0$ için*

$$\mathfrak{C}_r := \mathfrak{C} \cap \{X \in L^\infty \mid \|X\|_\infty \leq r\}$$

L^1'de kapalı ise, $\mathfrak{C}$ zayıf * kapalıdır.

Teorem 2.13. *(James) Bir N Banach uzayında sınırlı, zayıf kapalı ve konveks A alt kümesinin zayıf kompakt olması için gerek ve yeter koşul her sürekli lineer fonksiyonelin A'da supremumunun var olmasıdır.*

Teorem 2.14. *(Dunford-Pettis) L^1'in bir A alt kümesinin zayıf göreceli kompakt olması için gerek ve yeter şart sınırlı ve düzgün integrallenebilir olmasıdır.*

3. RİSK ÖLÇÜLERİ VE KABUL KÜMELERİ

Tutarlı risk ölçüleri ve bu risk ölçülerinin kabul kümelerine aksiyomatik yaklaşım ilk olarak Artzner, Delbaen, Eber, ve Heath [3] tarafından verilmiştir ve bu bölümün sonuçlarının çoğunda bu çalışma temel alınmıştır.

Ω, senaryoların belirli bir kümesi olsun. Bir finansal durum, ticari dönemin sonunda $\omega \in \Omega$ senaryosu gerçekleşirse, durumun indirimli net değeri $X(\omega)$ olmak üzere, X rassal değişkeni $X : \Omega \to \mathbb{R}$ olarak tanımlanır. X, finansal durumların verilen bir $\mathcal{X}$ sınıfına ait olmak üzere amacımız, bazı $\rho(X)$ sayıları tarafından X'in riskini ölçmektir. Bu bölüm boyunca, $\mathcal{X}$, sabitleri içeren sınırlı fonksiyonların bir lineer uzayı olarak alınacak ve Ω üzerinde verilen bir olasılık ölçüsü kabul edilmeyecektir.

Tanım 3.16. *$\forall X, Y \in \mathcal{X}$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, bir* ***parasal risk ölçüsü*** *olarak tanımlanır:*

- ***Monotonluk**: $X \leq Y$ ise $\rho(X) \geq \rho(Y)$*
- ***Nakit değişmezliği** (cash invariance): $m \in \mathbb{R}$ ise $\rho(X + m) = \rho(X) - m$.*

Monotonluğun finansal anlamı açıktır: Ödeme profili arttırıldığında risk azalır. Nakit değişmezliği, **kaydırma değişmezliği** (translation invariance) olarak da tanımlanır. Bu, bir sermaye ihtiyacı olarak $\rho(X)$ ile belirlenir yani m, $\rho(X)$'i bir danışmanlık şirketinin bakış açısından kabul edilebilir seviyeye indirmek için X durumuna eklenmesi gereken nakit miktardır. Sonuç olarak, duruma m miktarı eklenir ve risksiz yola yatırılırsa, aynı miktar tarafından sermaye ihtiyacı düşürülür. Özellikle, nakit değişmezi

$$\rho(X + \rho(X)) = 0 \tag{3.1}$$

ve

$$\forall m \in \mathbb{R} \text{ için } \rho(m) = \rho(0) - m$$

demektir.

Birçok amaç için, genelliği bozmadan, verilen bir parasal risk ölçüsünün

- **Normalleştirme**: $\rho(0) = 0$

şartını sağladığı kabul edilebilir. Ancak bazı durumlarda normalleştirmede ısrar etmek uygun olmayacaktır.

Uyarı 3.2. *X'i, bir finansal durumun bugünkü değerini temsil etmek için kullanıyoruz. Örneğin; r, risksiz bir yatırımın getirisi olduğunda, bugünkü değer için çarpan $1/(1+r)$ olarak seçilebilir. Bir finansal durumun bugünkü değeri X'in riskini ölçmek yerine doğrudan gelecekteki*

$$\tilde{X} = (1+r)X$$

değeri üzerinden de risk ölçülebilir. Bu risk ölçüsüne karşılık gelen $\tilde{\rho}(\tilde{X}) := \rho(X)$, yine monotondur.

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tilde{X} + (1+r)m) &= \tilde{\rho}((1+r)X + (1+r)m) \\
&= \tilde{\rho}((1+r)(X+m)) \\
&= \rho(X+m) \\
&= \rho(X) - m \\
&= \tilde{\rho}(\tilde{X}) - m
\end{aligned}$$

olduğundan nakit değişmezliği, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\tilde{\rho}(\tilde{X} + (1+r)m) = \tilde{\rho}(\tilde{X}) - m \tag{3.2}$$

olur. Yani, bir m ek miktarı, risksiz olarak yatırılırsa risk, m kadar azalır. Aksine, herhangi bir $\tilde{\rho} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ monoton ve 3.2'yi sağlıyorsa, $\rho(X) := \tilde{\rho}((1+r)X)$ bir parasal risk ölçüsü tanımlar.

Yardımcı Teorem 3.7. *Herhangi bir ρ parasal risk ölçüsü, $\|\cdot\|$ supremum normuna göre, Lipschitz süreklidir:*

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|.$$

Kanıt. Monotonluk ve nakit değişmezliğinden $X \leq Y + \|X - Y\|$'dir ve bu yüzden $\rho(Y) - \|X - Y\| \leq \rho(X)$ olur. X ve Y' nin rolleri değiştirilirse, iddia sağlanır.

Gerçekten, $X \leq Y + \|X - Y\|$ ve ρ parasal risk ölçüsü olduğundan monotonluktan;

$$\rho(X) \geq \rho(Y + \|X - Y\|)$$

ve nakit değişmezliğinden;

$$\rho(X) \geq \rho(Y) - \|X - Y\|$$

olur. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$\|X - Y\| \geq \rho(Y) - \rho(X)$$

olur. Benzer şekilde $Y \leq X + \|Y - X\|$ ve ρ'nun monotonluğu ve nakit değişmezliğinden;

$$\rho(Y) \geq \rho(X + \|Y - X\|)$$
$$\rho(Y) \geq \rho(X) - \|Y - X\|$$
$$\rho(Y) \geq \rho(X) - \|X - Y\|$$

olur. Bu ifadeyi düzenlersek, $\|X - Y\| \geq \rho(X) - \rho(Y)$ olur. O halde

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$$

elde ederiz. □

Bundan sonrası itibaren ek olarak konvekslik özelliğine sahip olan parasal risk ölçülerine odaklanalım.

Tanım 3.17. *Bir $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ parasal risk ölçüsü konveks fonksiyonsa yani,*

- ***Konvekslik:*** $0 \leq \lambda \leq 1$ *için* $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$ *şartını sağlıyorsa, ρ fonksiyonuna* ***konveks risk ölçüsü*** *denir.*

Gelecekteki olası sonuçlar düşünülerek, bir yatırımcı için uygun kaynaklar oluşturulabilir. Bir yatırım stratejisi yatırımcıyı X'e yönlendirirken, bir diğeri Y'ye yönlendirir. Yatırımcı yatırımı çeşitlendirirse, λ kadarını birinci seçeneğe ve geriye kalan kısmını ikinci seçeneğe kullandığında $\lambda X + (1-\lambda)Y$ elde edilir. Sonuç olarak, konvekslik aksiyomu, değişiklik riski artırmamalı fikrinin matematiksel ifadesidir. ρ konveks ve normalleştirilmiş ise,

$0 \leq \lambda \leq 1$ için ,

$$\begin{aligned}\rho(\lambda X) &= \rho(\lambda X + (1-\lambda)0) \\ &\leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(0) \\ &= \lambda\rho(X) + (1-\lambda)0 \\ &= \lambda\rho(X)\end{aligned}$$

$\lambda \geq 1$ için ,

$$\begin{aligned}\rho(X) = \rho\left(\tfrac{\lambda X}{\lambda}\right) &\leq \tfrac{1}{\lambda}\rho(\lambda X) \\ \lambda\rho(X) &\leq \rho(\lambda X) \\ \rho(\lambda X) &\geq \lambda\rho(X)\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}0 \leq \lambda \leq 1 \quad &\text{için} \quad \rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X), \\ \lambda \geq 1 \quad &\text{için} \quad \rho(\lambda X) \geq \lambda\rho(X).\end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.18. *ρ bir konveks risk ölçüsü olsun.*

- *$\lambda \geq 0$ olmak üzere $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ (**Pozitif homojenlik**)*

*koşulunu sağlıyorsa **tutarlı (coherent) risk ölçüsü** olarak tanımlanır.*

Bir ρ parasal risk ölçüsü pozitif homojen ise normalleştirilmiştir yani $\rho(0) = 0$ dır.

Önerme 3.6. *Pozitif homojenlik varsayımı altında, konvekslik;*

- *$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ (**Alt toplamsallık**)*

e eşdeğerdir: $\lambda \geq 0$, $X, Y \in \mathcal{X}$ ve $\alpha \in (0,1)$ için $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ olmak üzere,

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y) \Longleftrightarrow \rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y)$$

dır.

Kanıt. $(\Rightarrow)$:

$$\begin{aligned}\rho(\alpha X + (1-\alpha)Y) &\leq \rho(\alpha X) + \rho((1-\alpha)Y) && \text{(Alt toplamsallıktan)} \\ &= \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y) && \text{(Pozitif homojenlikten)}\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$:

$$\begin{aligned}
\rho(X+Y) = \rho\left(2\left(\tfrac{X+Y}{2}\right)\right) &= 2\rho\left(\tfrac{X}{2}+\tfrac{Y}{2}\right) && \text{(Pozitif homojenlikten)} \\
&\leq 2\left(\tfrac{1}{2}\rho(X)+\tfrac{1}{2}\rho(Y)\right) && \text{(Konvekslikten)} \\
&= \rho(X)+\rho(Y)
\end{aligned}$$

□

Bu önerme; farklı durumların toplamından ortaya çıkan riski yönetme işinin belirlenmesini sağlar. Ayrık risk limitleri farklı bölümlere verilmişse; toplam durumun riski, bireysel risk limitlerinin toplamı tarafından sınırlandırılır.

Birçok durumda risk, doğrusal olmadan, durum artışlarının boyutu olarak büyüyebilir. Bu nedenle pozitif homojenlik her zaman sağlanmayabilir. Bunun yerine konveks risk ölçülerine odaklanacağız.

Bir ρ parasal risk ölçüsü, ek sermaye gerektirmeyen anlamda kabul edilebilir durumların

$$\mathscr{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0\}$$

sınıfını ortaya çıkarır. $\mathscr{A}_\rho$ sınıfı, ρ**' nun kabul kümesi** olarak isimlendirilir.

Aşağıdaki iki önerme; parasal risk ölçüleri ve onların kabul kümeleri arasındaki ilişkileri özetler.

Önerme 3.7. *Bir $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonelinin monoton, konkav, pozitif homojen ve nakit değişmezi olması için gerek ve yeter koşul, $X \in \mathcal{X}$ için*

$$J(X) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[\ X\ ]$$

olacak şekilde bir $\mathcal{Q} \subset \mathscr{M}_{1,f}$ kümesinin var olmasıdır.

Üstelik, $\mathcal{Q}$ kümesi her zaman konveks olarak seçilebilir ve üstteki infimumu daima elde edilir, yani $X \in \mathcal{X}$ için

$$J(X) = \min_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[\ X\ ]$$

iyi tanımlıdır.

Önerme 3.8. *Varsayalım ki ρ, $\mathscr{A} := \mathscr{A}_\rho$ kabul kümesine sahip olan bir parasal risk ölçüsü olsun.*

(a) $\mathscr{A}$ boştan farklıdır ve aşağıdaki iki koşulu sağlar:

$$inf\{\ m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathscr{A}\ \} > -\infty \tag{3.3}$$

$$X \in \mathscr{A}, Y \in \mathcal{X}, Y \geq X \Longrightarrow Y \in \mathscr{A}. \tag{3.4}$$

Üstelik, $\mathscr{A}$, aşağıdaki kapalılık özelliğine sahiptir: $X \in \mathscr{A}$ ve $Y \in \mathcal{X}$ için

$$\{\lambda \in [0,1] \mid \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathscr{A}\}\ [0,1] \text{ aralığında kapalıdır.} \tag{3.5}$$

(b) ρ, $\mathscr{A}$'dan aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\rho(X) = inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\} \tag{3.6}$$

(c) ρ'nun bir konveks risk ölçüsü olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{A}$'nın konveks olmasıdır.

(d) ρ'nun pozitif homojen olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{A}$'nın bir koni olmasıdır. Özellikle, ρ'nun tutarlı olması için gerek ve yeter şart, $\mathscr{A}$'nın bir konveks koni olmasıdır.

Kanıt. (a)

- $$\begin{aligned} Y \geq X \quad &\Rightarrow \quad \rho(Y) \leq \rho(X) && (\textit{monotonluktan}) \\ &\Rightarrow \quad \rho(Y) \leq 0 && (X \in \mathscr{A} \text{ ise } \rho(X) \leq 0 \text{ olduğundan}) \\ &\Rightarrow \quad Y \in \mathscr{A} \end{aligned}$$
- $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ ve $m_1 \leq m_2$ olsun. O halde (3.4)'ten $m_1 \in \mathscr{A}$ ise $m_2 \in \mathscr{A}$'dır. Burada $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ keyfi olduğundan $\mathbb{R} \subset \mathscr{A}$ elde edilir. inf $\{m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathscr{A}\} = \inf\{m \in (\mathbb{R} \cap \mathscr{A})\} = \inf(\mathbb{R} \cap \mathscr{A}) = \inf \mathbb{R} = -\infty$ olur. Bu durumda $\forall m \in \mathbb{R}$ için $\rho(m) = \rho(0) - m \leq 0$, buradan da $\rho(0) \leq m$ yani $\rho(0) = -\infty$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

- $f(\lambda) = \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y)$, $[0,1]$'de sürekli olduğunu gösterelim. Yardımcı Teorem 3.7'den ρ parasal risk ölçüsü iken Lipschitz süreklilikten $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|$ olur. O halde;

$$\begin{aligned} |f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| &= |\rho(\lambda_1 X + (1-\lambda_1)Y) - \rho(\lambda_2 X + (1-\lambda_2)Y)| \\ &\leq \|\lambda_1 X + (1-\lambda_1)Y - \lambda_2 X - (1-\lambda_2)Y\| \\ &= \|(\lambda_1 - \lambda_2)X - (\lambda_1 - \lambda_2)Y\| \\ &= \|X - Y\| |\lambda_1 - \lambda_2| \end{aligned}$$

elde edilir.

$\mathscr{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} B &= \{\lambda \in [0,1] \mid \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathscr{A}\} \\ &= \{\lambda \in [0,1] \mid \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq 0\} \\ &= \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda) \leq 0\} \\ &= [0,1] \cap f^{-1}((-\infty, 0]) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde B, $[0,1]$'de kapalıdır.

(b) $X \in \mathcal{X}$ için

$$\begin{aligned} \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}_\rho\} &\overset{\mathscr{A}_\rho = \mathscr{A}}{=} \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\} \\ (\mathscr{A}\text{'nın tanımından}) &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \rho(m + X) \leq 0\} \\ (\text{nakit değişmezliğinden}) &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \rho(X) - m \leq 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \rho(X) \leq m\} \\ &= \rho(X) \end{aligned}$$

elde edilir.

(c) ρ konveks risk ölçüsü ise $\mathscr{A}$'nın konveks olduğunu gösterelim:

ρ konveks risk ölçüsü, $X, Y \in \mathcal{X}$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda konvekslikten

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$$

olur. $\mathscr{A}$'nın konveksliğini göstermek için $X, Y \in \mathscr{A}$ ve $\lambda \in [0,1]$ alalım.

$$
\begin{aligned}
X \in \mathscr{A} \Rightarrow \rho(X) \le 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda\rho(X) \le 0 \\
Y \in \mathscr{A} \Rightarrow \rho(X) \le 0 \quad &\Rightarrow \quad (1-\lambda)\rho(Y) \le 0 \\
\text{(alt alta toplanırsa)} \quad &\Rightarrow \quad \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \le 0 \\
\text{(ρ'nun konveksliğinden)} \quad &\Rightarrow \quad \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le 0 \\
\text{($\mathscr{A}$'nın tanımından)} \quad &\Rightarrow \quad \lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathscr{A} \\
&\Rightarrow \quad \mathscr{A} \text{ konveks olur.}
\end{aligned}
$$

Tersi (3.8) ile beraber Önerme 3.9'dan sonra yapılacaktır.

(d) ρ pozitif homojen ise $\mathscr{A}$'nın bir koni olduğunu gösterelim:

ρ pozitif homojen, $X \in \mathscr{A}$ ve $\lambda \ge 0$ olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
X \in \mathscr{A} \quad &\Rightarrow \quad \rho(X) \le 0 \\
(\lambda \ge 0 \text{ olduğundan}) \quad &\Rightarrow \quad \lambda\rho(X) \le 0 \\
\text{(ρ'nun pozitif homojenliğinden)} \quad &\Rightarrow \quad \rho(\lambda X) = \lambda\, \rho(X) \le 0 \\
&\Rightarrow \quad \rho(\lambda X) \le 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda X \in \mathscr{A} \\
&\Rightarrow \quad \mathscr{A} \text{ koni}
\end{aligned}
$$

Tersi (c)'dekine benzer şekilde elde edilir.

- ρ tutarlı risk ölçüsü ise $\mathscr{A}$' nın konveks koni olduğunu gösterelim:

$$
\begin{aligned}
\rho \text{ tutarlı risk ölçüsü} \quad &\Rightarrow \quad \rho \text{ konveks ve pozitif homojen} \\
\text{(c) ve (d)'den} \quad &\Rightarrow \quad \mathscr{A} \text{ konveks ve koni} \\
&\Rightarrow \quad \mathscr{A} \text{ konveks koni}
\end{aligned}
$$

$\square$

Diğer taraftan,verilen kabul edilebilir durumların bir $\mathscr{A} \subset \mathcal{X}$ sınıfı, temel amaç olarak alınabilir. Bir $X \in \mathcal{X}$ durumu için sermaye ihtiyacını, $m + X$ kabul edilebilir olacak şekildeki minimal m miktarı olarak tanımlayabiliriz:

$$\rho_{\mathscr{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\}. \tag{3.7}$$

Dikkat edilirse, bu gösterime sahip olan (3.6)

$$\rho_{\mathscr{A}_\rho} := \rho \tag{3.8}$$

şeklini alır.

Önerme 3.9. *(3.3) ve (3.4)'ü sağlayan $\mathscr{A}$, $\mathcal{X}$'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $\rho_{\mathscr{A}}$ fonksiyoneli, aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(a) $\rho_{\mathscr{A}}$ bir parasal risk ölçüsüdür.

(b) $\mathscr{A}$ bir konveks küme ise, $\rho_{\mathscr{A}}$ bir konveks risk ölçüsüdür.

(c) $\mathscr{A}$ bir koni ise, $\rho_{\mathscr{A}}$ pozitif homojendir. Özellikle $\mathscr{A}$ bir konveks koni ise, $\rho_{\mathscr{A}}$ bir tutarlı risk ölçüsüdür.

(d) $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_{\rho_{\mathscr{A}}}$'nın bir alt kümesidir. $\mathscr{A}$ (3.5)'teki kapalılık özelliğini sağlıyorsa, $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{\rho_{\mathscr{A}}}$'dır.

Kanıt. (a) $\rho_{\mathscr{A}}$'nın monotonluğu ve nakit değişmezliğini sağladığını göstermeliyiz:

- Nakit değişmezliği: $X \in \mathcal{X}$ ve $n \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathscr{A}}(X+n) &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X + n \in \mathscr{A}\} \\
&= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + n + X \in \mathscr{A}\} \\
&= \inf\{m - n \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\} \\
&= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\} - n \\
&= \rho_{\mathscr{A}}(X) - n
\end{aligned}$$

- Monotonluk: $X \in \mathscr{A}$ ve $X \leq Y$ ise, $Y \in \mathscr{A}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre,

$$X \leq Y \text{ ve } X + m \in \mathscr{A} \Rightarrow Y + m \in \mathscr{A}$$

ve

$$X \leq Y \Rightarrow X + m \leq Y + m$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathscr{A}\} &\subset \{m \in \mathbb{R} \mid Y + m \in \mathscr{A}\}\\ \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathscr{A}\} &\geq \inf\{m \in \mathbb{R} \mid Y + m \in \mathscr{A}\}\\ \rho_{\mathscr{A}}(X) &\geq \rho_{\mathscr{A}}(Y)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da bize $\rho_{\mathscr{A}}$'nın monotonluğunu verir.

- $\rho_{\mathscr{A}}$'nın sonlu değerler aldığını gösterelim. Boştan farklı $\mathscr{A}$ kümesinde bir Y alıp sabitleyelim. Verilen bir $X \in \mathcal{X}$ için $m + X > Y$ olacak şekilde bir sonlu sayı vardır, çünkü X ve Y sınırlıdır. O halde

$$\rho_{\mathscr{A}}(X) - m = \rho_{\mathscr{A}}(m + X) \leq \rho_{\mathscr{A}}(Y) \leq 0$$

ve dolayısıyla $\rho_{\mathscr{A}}(X) \leq m < \infty$'dur. Dikkat edilirse, (3.3) $\rho_{\mathscr{A}}(0) > -\infty$'a denktir. Keyfi $X \in \mathcal{X}$ için $\rho_{\mathscr{A}}(X) > -\infty$ olduğunu göstermek için, $X + m^{'} \leq 0$ olacak şekilde $m^{'}$ alalım. Monotonluk ile nakit değişmezliğinden $\rho_{\mathscr{A}}(X) \geq \rho_{\mathscr{A}}(0) + m^{'} > -\infty$ ile sonuçlandırılır.

(b) $m_i + X_i \in \mathscr{A}$ olacak şekilde $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ ve $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ olduğunu varsayalım. $\mathscr{A}$'nın konveksliği ve $\rho_{\mathscr{A}}$'nın nakit değişmezliğinden, $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\lambda(m_1 + X_1) + (1 - \lambda)(m_2 + X_2) \in \mathscr{A}\\ \Rightarrow\ &\rho_{\mathscr{A}}(\lambda(m_1 + X_1) + (1 - \lambda)(m_2 + X_2)) \leq 0\\ \Rightarrow\ &\rho_{\mathscr{A}}((\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) + (\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2)) \leq 0\\ \Rightarrow\ &\rho_{\mathscr{A}}(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) - (\lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2) \leq 0\\ \Rightarrow\ &\rho_{\mathscr{A}}(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \leq \lambda m_1 + (1 - \lambda)m_2\\ \Rightarrow\ &\rho_{\mathscr{A}}(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2 \leq \lambda\rho_{\mathscr{A}}(X_1) + (1 - \lambda)\rho_{\mathscr{A}}(X_2)\end{aligned}$$

elde ederiz.

(c) $\mathscr{A}$ koni ise $\rho_{\mathscr{A}}$'nın pozitif homojen olduğunu gösterelim: $\mathscr{A}$ bir koni, $X \in \mathcal{X}$ ve $\lambda \geq 0$ olsun.

- $\lambda > 0$ için

$$\begin{aligned}\rho_{\mathscr{A}}(\lambda X) &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + \lambda X \in \mathscr{A}\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \tfrac{m}{\lambda} + X \in \mathscr{A}\} \\ &= \inf\{\lambda m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\} \\ &= \lambda \inf\{m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}\} \\ &= \lambda \rho_{\mathscr{A}}(X)\end{aligned}$$

- $\lambda = 0$ için $\lambda_n \to 0^+$ olacak şekilde bir λ_n dizisi seçersek $\rho_{\mathscr{A}}$'nun sürekliliğinden $\rho_{\mathscr{A}}(\lambda_n X) \to \rho_{\mathscr{A}}(0) = 0\rho_{\mathscr{A}}(X) = 0$ elde ederiz.

- $\mathscr{A}$'nın konveks koni olması $\rho_{\mathscr{A}}$'nın konveks ve pozitif homojen olmasını yani tutarlı olmasını gerektirir.

(d) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{A}_{\rho_{\mathscr{A}}}$ kapsaması açıktır. Şimdi $\mathscr{A}$'nın (3.5)'i sağladığını varsayalım. $\rho_{\mathscr{A}}(X) \leq 0$ olan bir $X \notin \mathscr{A}$ olduğunu kabul edelim. Sonuç için bir $m > \|X\| = \sup_w |X(w)|$ alalım. Varsayımdan $\varepsilon m + (1-\varepsilon)X \notin \mathscr{A}$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in (0,1)$ vardır. Sonuç olarak,

$$0 \leq \rho_{\mathscr{A}}(\varepsilon m + (1-\varepsilon)X) = \rho_{\mathscr{A}}((1-\varepsilon)X) - \varepsilon m$$

dir. $\rho_{\mathscr{A}}$ parasal risk ölçüsü olduğundan, Yardımcı Teorem 3.7'den

$$|\rho_{\mathscr{A}}((1-\varepsilon)X) - \rho_{\mathscr{A}}(X)| \leq \varepsilon \|X\|$$

tir. Sonuç olarak

$$\rho_{\mathscr{A}}(X) \geq \rho_{\mathscr{A}}((1-\varepsilon)X) - \varepsilon\|X\| \geq \varepsilon(m - \|X\|) > 0$$

dır. Bu ise bir çelişkidir.

□

Aşağıdaki örneklerde $\mathcal{X}$'i, bir $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülebilir uzayı üzerinde tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların lineer uzayı olarak alalım ve $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerindeki tüm olasılık ölçülerinin sınıfını $\mathscr{M}_1 = \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ ile gösterelim.

Örnek 3.2 bir risk ölçüsünden kabul kümesinin elde edilişi ile ilgili olarak verilmiştir.

Örnek 3.2. *En kötü durum risk ölçüsü ρ_{max} her $X \in \mathcal{X}$ için*

$$\rho_{max}(X) = -\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

olarak tanımlansın. $\rho_{max}(X)$ değeri, herhangi bir senaryoda ortaya çıkabilecek olası kayıp için en küçük üst sınırdır. $\mathscr{A}$ kabul kümesi, $\mathcal{X}$'te negatif olmayan fonksiyonların konveks konisi ile verilir. Bu küme konveks koni olduğundan bir tutarlı risk ölçüsüdür. $\mathcal{X}$'te herhangi bir ρ normalleştirilmiş parasal risk ölçüsü,

$$\rho(X) \leq \rho(\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega)) = \rho_{max}(X)$$

i sağlar.

Dikkat edilirse, ρ_{max},

$$\rho_{max}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \tag{3.9}$$

şeklinde gösterilebilir, burada $\mathcal{Q}$, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde tüm olasılık ölçülerinin $\mathscr{M}_1$ sınıfıdır. $(\mathcal{Q} = \mathscr{M}_1)$

Örnek 3.3. *$\mathcal{Q}$, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde olasılık ölçülerinin bir kümesi olsun ve her bir $Q \in \mathcal{Q}$ için bir $\gamma(Q)$ alt seviyesini belirleyen sonlu $\sup_Q \gamma(Q)$ değeriyle $\gamma : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ dönüşümünü düşünün. Varsayalım ki, her $Q \in \mathcal{Q}$ için,*

$$E_Q[X] \geq \gamma(Q)$$

olduğunda, bir X durumu kabul edilebilir olsun. Böyle durumların $\mathscr{A}$ kümesi (3.3) ve (3.4)'ü sağlar ve konvekstir. Sonuç olarak, $\rho = \rho_{\mathscr{A}}$ ilişkili parasal risk ölçüsü konvekstir ve

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} (\gamma(Q) - E_Q[X])$$

şeklini alır. Alternatif olarak, $Q \in \mathcal{Q}$ için $\alpha(Q) = -\gamma(Q)$ ve diğer durumlarda $\alpha(Q) = +\infty$ olarak tanımlanan $\alpha : \mathscr{M}_1 \to (-\infty, +\infty]$ ceza fonksiyonu olmak üzere,

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1} (E_Q[-X] - \alpha(Q)) \tag{3.10}$$

yazabiliriz.

Örnek 3.4. *$\mathbb{R}$'de bir u fayda fonksiyonunu, bir $Q \in \mathscr{M}_1$ olasılık ölçüsünü ve sabit bir $c \in \mathbb{R}$ eşiğini düşünün. Bir X pozisyonunu en azından c'ye denk ise, kabul edilebilir olarak isimlendirelim, yani onun beklenen faydası $E_Q[u(X)]$, $u(c)$ ile alttan sınırlıdır. Açıkçası,*

$$\mathscr{A} := \{X \in \mathcal{X} | E_Q[u(X)] \geq u(c)\}$$

kümesi boştan farklıdır, konvekstir , (3.3) ve (3.4)'ü sağlar. Sonuç olarak, $\rho_{\mathscr{A}}$, bir konveks risk ölçüsüdür. Kaba bir genelleştirmeyle bir pozisyonun kabul edilebilirliğini $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerindeki tüm $\mathcal{Q}$ olasılık ölçüleri sınıfı cinsinden tanımlayabileceğimiz aşikardır. Yani, $\sup_{Q\in\mathcal{Q}} c_Q < \infty$ olacak şekildeki c_Q sabitleri ile

$$\mathscr{A} := \bigcap_{Q\in\mathcal{Q}} \{X \in \mathcal{X} \mid E_Q[u(X)] \geq u(c_Q)\},$$

tanımlayabiliriz. Karşılık gelen risk ölçüleri Bölüm 10'da daha ayrıntılı incelenecektir.

Örnek 3.5. *Bir olasılıksal model belirlediğimizi varsayalım. Yani P, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde bir olasılık ölçüsü olsun. Bu çerçevede, bir kaybın olasılığı verilen bir $\lambda \in (0, 1)$ seviyesi tarafından sınırlıysa yani,*

$$P[X < 0] \leq \lambda$$

ise, bir X durumunun genellikle kabul edilebilir olduğu düşünülür.

$$V@R_\lambda(X) = \inf\{\ m \in \mathbb{R} \mid P[m + X < 0] \leq \lambda\ \}$$

ile tanımlanan $V@R_\lambda$ karşılık gelen parasal risk ölçüsü, λ seviyesinde riskteki değer olarak adlandırılır. P-hhk sonlu olan tüm rastgele değişkenlerin $\mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uzayı üzerinde riskteki değerin iyi tanımlı olduğuna dikkat ediniz. Bununla birlikte Φ^{-1}, $N(0, 1)$'deki Φ dağılım fonksiyonunun tersini göstermek üzere, X, $\sigma^2(X)$ varyansına sahip bir Gauss rastgele değişkeni ise,

$$V@R_\lambda(X) = E[-X] + \Phi^{-1}(1 - \lambda)\sigma(X) \tag{3.11}$$

olur. Açıkçası, $V@R_\lambda$ pozitif homojendir ama genellikle konveks değildir,(ileride Örnek 6.13'te gösterildiği gibi).

Bölüm 6'da, riskteki değer konusu detaylı olarak ele alınacaktır. Özellikle, bazı bunlarla ilişkili, tutarlı ve konveks risk ölçüleri ile çalışılacaktır.

Örnek 3.6. *Önceki örnekteki gibi, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde sabit bir P olasılık ölçüsünü ele alalım. Ödemesi $\tilde{X} \in \mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$, fiyatı $\pi(\tilde{X})$ ve varyansı $\sigma^2(\tilde{X}) \neq 0$, olan bir varlık için Sharpe oranı;*

$$\frac{E[\tilde{X}] - \pi(\tilde{X})(1+r)}{\sigma(\tilde{X})} = \frac{E[X]}{\sigma(X)}$$

olarak tanımlanır. Burada $X := \tilde{X} \cdot (1+r)^{-1} - \pi(\tilde{X})$'e karşılık gelen indirimli net değerdir. Sharpe oranı, bir $c > 0$ sabiti ile alttan sınırlı ise, X durumunu kabul edilebilir bulduğumuzu varsayalım. (3.7)'de tanımlanan $\mathscr{L}^2$ üzerinde ρ_c sonuç fonksiyoneli,

$$\mathscr{A} := \{X \in \mathscr{L}^2 \mid E[X] \geq c\sigma(X)\}$$

sınıfı için

$$\rho_c(X) = E[-X] + c\sigma(X)$$

şeklinde verilir.

$\sigma(\cdot)$, $\mathscr{L}^2$'de konveks fonksiyonel olduğu için nakit değişmezidir, pozitif homojendir ve konvekstir. Ancak ρ_c bir parasal risk ölçüsü değildir, çünkü monoton değildir. Gerçekten, $X = e^Z$ ve Z, $N(0, \sigma^2)$ normal dağılımı ile bir rastgele değişken ise, $X \geq 0$'dır ancak

$$\rho_c(X) = -e^{\sigma^2/2} + ce^{\sigma^2/2}\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$$

yeteri kadar büyük σ için pozitif olur. X normal dağılıma sahipse ve $0 < \lambda \leq 1/2$ için $c = \Phi^{-1}(1-\lambda)$ ise (3.11)'in, $V@R_\lambda(X)$'in $\rho_c(X)$'e eşit olduğunu gösterdiğine dikkat ediniz. Sonuç olarak, ρ_c ve $V@R_\lambda$'nın ikisi de; $\mathscr{L}^2$'nin $\tilde{X}$ Gaussian alt uzayına kısıtlı ise yani normal dağılımlı rastgele değişkenlerden oluşan bir lineer uzay ise, bir tutarlı risk ölçüsünün tüm özelliklerine sahiptir. Ancak Örnek 6.13'te görülebileceği gibi $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde normal rastgele değişkenlerin varlığı, X'in *rastgele değişkenleri de içereceğini gösterdiğinden ne ρ_c ve ne de $V@R_\lambda$, $\mathscr{L}^2$ uzayının tamamında tutarlı olabilir.*

Örnek 3.7. *$c : \mathscr{F} \to [0,1]$, $c(\emptyset) = 0$, $c(\Omega) = 1$ ve $A \subset B$ ise $c(A) \leq c(B)$ anlamında, normalleştirilmiş ve monoton herhangi bir küme fonksiyonu olsun. Örneğin, bir P olasılık ölçüsü ve $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ şartlarını sağlayan bir $\psi : [0,1] \to [0,1]$ artan fonksiyonu için c, $c(A) := \psi(P[A])$ ile verilebilir. Bir $X \geq 0$ sınırlı ölçülebilir fonksiyonunun c'ye göre* ***Choquet integrali****,*

$$\int X dc := \int_0^\infty c(X > x) dx$$

olarak tanımlanır.

c bir olasılık ölçüsü ise, Fubini'nin teoremi'nden; $\int X dc$, Riemann integrali ile denktir. Genel durumda, Choquet integrali X'in bir lineer olmayan fonksiyonelidir ancak, $\lambda, m \geq 0$ sabitleri için biz yine $\int \lambda \cdot X dc = \lambda \cdot \int X dc$ ve $\int (X + m) dc = \int X dc + m$ alacağız. Keyfi $X \in \mathcal{X}$ ve $X + m \geq 0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{R}$ alırsak;

$$\int (X+m) dc - m = \int_{-m}^0 (c(X > x) - 1) dx + \int_0^\infty c(X > x) dx$$

elde ederiz. Sağ taraf $m \geq -inf X$'ten bağımsızdır ve bu yüzden her $X \in \mathcal{X}$ için Choquet integralinin tanımını

$$\int X dc := \int_{-\infty}^0 (c(X > x) - 1) dx + \int_0^\infty c(X > x) dx$$

koyarak genişletmek mantıklıdır. Her $\lambda \geq 0$ ve $m \in \mathbb{R}$ için

$$\int \lambda X dc = \lambda \int X dc \text{ ve } \int (X+m) dc = \int X dc + m$$

dir. Dahası, $Y \geq X$ için

$$\int Y dc \geq \int X dc$$

olur. Sonuç olarak, kaybın Choquet integrali,

$$\rho(X) := \int (-X) dc,$$

$\mathcal{X}$ üzerinde pozitif homojen parasal risk ölçüsüdür. Bölüm 9'da, komonotonluk tanımını kullanarak bunları karakterize edeceğiz. ρ'nun konveks ve dolayısıyla tutarlı olması için gerek ve yeter koşulun c'nin altmodüler (submodular) veya 2'li değişen (2-alternating) yani; $A, B \in \mathscr{F}$ için

$$c(A \cap B) + c(A \cup B) \leq c(A) + c(B)$$

olacağını da göstereceğiz. Bu durumda, ρ ;

$$\rho(X) := \max_{Q \in \mathcal{Q}_c} E_Q[-X] \tag{3.12}$$

şeklini alır ki burada, tüm $A \in \mathscr{F}$'ler için $Q[A] \leq c(A)$ olmak üzere, $Q : \mathscr{F} \to [0,1]$ tüm sonlu toplamsal ve normalleştirilmiş küme fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanan $\mathcal{Q}_c$; c'nin çekirdeğidir. Teorem 9.31'e bakınız.

Sonraki iki bölümde, sistematik biçimde ortaya çıkan tutarlı ve konveks risk ölçüleri için (3.9), (3.12) veya (3.10) şeklinin nasıl temsil edildiğini göstereceğiz.

4. KONVEKS RİSK ÖLÇÜLERİNİN GÜÇLÜ TEMSİLİ

Konveks risk ölçülerine genelleştirme Heath [21], Heath ve Ku [22], Föllmer ve Schied [17] ve Frittelli ve Rosazza Gianin [19] tarafından bahsedilen yayınlarında birbirinden bağımsız şekillerde verilmiştir. Bu bölümdeki güçlü temsil teoremi Föllmer [18]'den alınmıştır. Bu konu ile ilgili daha fazla bilgi için Kratschmer [23]'e bakılabilir.

$\mathcal{X}$, $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülebilir uzayı üzerinde tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda supremum normuna göre bir Banach uzayıdır. $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerindeki tüm olasılık ölçülerinin kümesi $\mathscr{M}_1 := \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ ve $Q[\ \Omega\ ] = 1$ olacak şekilde normalleştirilmiş olan $Q : \mathscr{F} \to [0,1]$ sonlu toplamsal küme fonksiyonlarının kümesi de $\mathscr{M}_{1,f} := \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F})$ ile verilsin. $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$'ye göre, X'in integralini $E_Q[X]$ ile göstereceğiz.

Önerme 4.10. *Bir $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ fonksiyonelinin tutarlı risk ölçüsü olması için gerek ve yeter koşul $X \in \mathcal{X}$ için*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \tag{4.1}$$

olacak şekildeki $\mathscr{M}_{1,f}$'in bir $\mathcal{Q}$ alt kümesinin var olmasıdır.

$\mathcal{Q}$, (4.1)'de elde edilen supremum için bir konveks küme olarak seçilebilir.

Bu bölümdeki ilk amacımız, konveks risk ölçüleri için bu sonucun bir benzerini elde etmektir. İkinci amacımız; bir risk ölçüsünün σ toplamsal olasılık ölçüleri cinsinden ifade edilmesini garantileyen kriter elde etmektir.

$\alpha : \mathscr{M}_{1,f} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\inf_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} \alpha(Q) \in \mathbb{R}$$

şartını sağlayan herhangi bir fonksiyonel olsun. Her bir $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ fonksiyoneli için $X \mapsto E_Q[-X] - \alpha(Q)$, $\mathcal{X}$ üzerinde konveks, monoton ve nakit değişmezidir ve bu üç özellik, $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde supremum alındığında korunur. Bu nedenle,

$$\rho(X) := \sup_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \alpha(Q)) \tag{4.2}$$

$\mathcal{X}$ üzerinde

$$\rho(0) = -\inf_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} \alpha(Q)$$

şartını sağlayan bir konveks risk ölçüsü tanımlar. α fonksiyoneli, $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde ρ için bir **ceza fonksiyonu** (penalty function) olarak adlandırılır ve ρ, $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde α ile temsil edilir.

Teorem 4.15. *$X \in \mathcal{X}$ olmak üzere, $\mathcal{X}$ üzerinde herhangi bir ρ konveks risk ölçüsü*

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)) \tag{4.3}$$

şeklindedir ki burada, α_{min} ceza fonksiyonudur, $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ için

$$\alpha_{min}(Q) := \sup_{x \in \mathscr{A}_\rho} E_Q[-X]$$

dir. Dahası, α_{min}, ρ'yu temsil eden minimal ceza fonksiyonudur yani, $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ olmak üzere, (4.2)'yi sağlayan herhangi bir α ceza fonksiyonu için $\alpha(Q) \geq \alpha_{min}(Q)$ olur.

Kanıt. Birinci adımda, tüm $X \in \mathcal{X}$'ler için

$$\rho(X) \geq \sup_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q))$$

olduğunu gösterelim. (3.1)'den $X' := \rho(X) + X \in \mathscr{A}_\rho$ olduğunu hatırlayalım. Bu nedenle tüm $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$'ler için

$$\alpha_{min}(Q) \geq E_Q[-X'] = E_Q[-X] - \rho(X)$$

tir. Buradan iddiamız çıkar.

Verilen bir X için önceki adımdakine benzer şekilde (4.3)'ü kanıtlayacak olan

$$\rho(X) \leq E_{Q_X}[-X] - \alpha_{min}(Q_X)$$

olacak şekilde bir $Q_X \in \mathscr{M}_{1,f}$ bulacağız. $\rho(X) = 0$'ı sağlayan $X \in \mathcal{X}$ için nakit değişmezliğinden bu kanıtlanır. Üstelik, genelliği bozmadan $\rho(0) = 0$ kabul edebiliriz. Boştan farklı

$$\mathscr{B} := \{Y \in \mathcal{X} \mid \rho(Y) < 0\}$$

konveks kümesi X'i içermez. Bu yüzden, Yardımcı Teorem 3.7'den $\mathscr{B}$ açıktır, Teorem 2.8 ifadesindeki ayırma teoremine başvurabiliriz.

$$\ell(X) \leq \inf_{Y \in \mathscr{B}} \ell(Y) =: b$$

olacak şekildeki $\mathcal{X}$ üzerinde sıfırdan farklı bir ℓ sürekli lineer fonksiyoneli bunu sağlar.

$Y \geq 0$ ise $\ell(Y) \geq 0$ olduğunu iddia ediyoruz. ρ'nun monotonluğu ve nakit değişmezliğinden herhangi bir $\lambda > 0$ için $1 + \lambda \cdot Y \in \mathscr{B}$ sağlanır. Dolayısıyla, tüm $\lambda > 0$'lar için

$$\ell(X) \leq \ell(1 + \lambda \cdot Y) = \ell(1) + \lambda \cdot \ell(Y)$$

dir ki bu, $\ell(Y) < 0$ ise doğru olmayabilir.

Sonraki iddiamız $\ell(1) > 0$. ℓ kendiliğinden yok olmadığından, $0 < \ell(Y) = \ell(Y^+) - \ell(Y^-)$ olacak şekilde bir Y var olmalıdır. Genelliği bozmadan $\|Y\| < 1$ olduğunu varsayalım. ℓ'nin pozitifliğinden $\ell(Y^+) > 0$ ve $\ell(1 - Y^+) \geq 0$ sağlanır. Dolayısıyla $\ell(1) = \ell(1 - Y^+) + \ell(Y^+) > 0$'dır.

Önceki iki adım ve Teorem 2.7'den, tüm $Y \in \mathcal{X}$'ler için

$$E_{Q_X}[\ Y\ ] = \frac{\ell(Y)}{\ell(1)}$$

şartını sağlayan bir $Q_X \in \mathscr{M}_{1,f}$ vardır sonucuna ulaşırız. Dikkat edersek $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}_\rho$'dur, bu nedenle

$$\alpha_{min}(Q_X) = \sup_{Y \in \mathscr{A}_\rho} E_{Q_X}[-Y] \geq \sup_{Y \in \mathscr{B}} E_{Q_X}[-Y] = -\frac{b}{\ell(1)}$$

olur.

Diğer taraftan, herhangi bir $Y \in \mathscr{A}_\rho$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için $Y + \varepsilon \in \mathscr{B}$'dir. Bu da aslında $\alpha_{min}(Q_X)$'in $-b/\ell(1)$'e eşit olduğunu gösterir. Bunun sonucunda

$$E_{Q_X}[-X] - \alpha_{min}(Q_X) = \frac{1}{\ell(1)}(b - \ell(X)) \geq 0 = \rho(X)$$

çıkar. Dolayısıyla, $Q_X$istenildiği gibidir ve (4.3) gösteriminin kanıtı tamamlanır.

Sonuç olarak α, ρ için herhangi bir ceza fonksiyonu olsun. Her $Q_X \in \mathscr{M}_{1,f}$ ve

$X \in \mathcal{X}$ için

$$\rho(X) \geq E_Q[-X] - \alpha(Q)$$

dir ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} \alpha(Q) &\geq \sup_{X \in \mathcal{X}} (E_Q[-X] - \rho(X)) \\ &\geq \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} (E_Q[-X] - \rho(X)) \\ &\geq \alpha_{min}(Q) \end{aligned} \tag{4.4}$$

olur. Sonuç olarak , $\alpha \geq \alpha_{min}$ olur. □

Uyarı 4.3. *(a) (4.4)'te $\alpha = \alpha_{min}$ alırsak, (4.4)'teki tüm eşitsizlikler özdeşlik olmalıdır. Sonuç olarak; α_{min} minimal ceza fonksiyonu için aşağıdaki alternatif formülü elde ederiz:*

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{X}} (E_Q[-X] - \rho(X)) \tag{4.5}$$

(b) α_{min}, $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerindeki afin sürekli fonksiyonların supremumu olur. Bu yüzden Tanım 2.11'de tanımlandığı gibi $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde toplam değişim uzaklığı için, α_{min}'in konveks ve alttan yarı sürekli olduğuna dikkat ediniz.

(c) Verilen bir $\mathscr{A} \subset \mathcal{X}$ için ρ'nun, $\rho := \rho_{\mathscr{A}}$ ile tanımlandığını varsayalım. α_{min}; $\mathscr{A}$ cinsinden aşağıdaki şekilde belirlenir: Her $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ için

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathscr{A}} E_Q[-X].$$

Buradan, $\forall \varepsilon > 0$ için $X \in \mathscr{A}$ olduğunda, $\varepsilon + X \in \mathscr{A}_\rho$ olduğu sonucu çıkar.

Uyarı 4.4. *(4.5) eşitliği $\mathcal{X}$ Banach uzayı üzerindeki ρ konveks fonksiyonunun Fenchel-Legendre formuna veya eşlenik fonksiyonuna karşılık gelen α_{min} ceza fonksiyonunu gösterir. $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ için $\ell_Q(X) = E_Q[-X]$ şeklinde verilen $\ell_Q \in \mathcal{X}'$ olsun. $\mathcal{X}$'in $\mathcal{X}'$ dualinde*

$$\rho^*(\ell) = \sup_{X \in \mathcal{X}} (\ell(X) - \rho(X))$$

şeklinde tanımlanan

$$\rho^* : \mathcal{X}' \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

için

$$\alpha_{min}(Q) = \rho^*(\ell_Q) \tag{4.6}$$

olur. Bu, Teorem 4.15'in kanıtının bir alternatifini akla getirir. Öncelikle, Teorem 2.7'de $\mathcal{X}'$'nün, sonlu toplam değişim ile sonlu toplamsal küme fonksiyonlarının $ba := ba(\Omega, \mathscr{F})$ uzayı ile tanımlanabildiğine dikkat edelim. Dahası, ρ, $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ zayıf topolojisine göre alttan yarı süreklidir, çünkü herhangi bir $\{\rho \leq c\}$ kümesi Yardımcı Teorem 3.7 yüzünden konveks, kuvvetli kapalıdır ve bu nedenle Teorem 2.10'dan zayıf kapalıdır. Sonuç olarak, Teorem 2.11'de belirtildiği gibi eşlenik fonksiyonlar için genel ikilik teoremi (duality theorem),

$$\rho^{**} = \rho$$

yu sağlar, ki burada ρ^{**}, ρ^*'nun eşlenik fonksiyonunu (conjugate function) belirtir yani,

$$\rho(X) = \sup_{\ell \in ba}(\ell(X) - \rho^*(\ell)) \tag{4.7}$$

dir.

İkinci adımda, Teorem 4.15'in kanıtının ikinci bölümündeki iddiaları kullanarak $\rho^*(\ell) < \infty$ olacak şekildeki herhangi bir $\ell \in \mathcal{X}' = ba$ için ρ'nun monotonluğunun ve nakit değişmezliğinin $\ell \leq 0$ ve $\ell(1) = -1$'i gerektirdiği görülebilir. $-\ell$'yi $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ ile tanımlayıp (4.6) eşitliğini kullanırsak (4.7)'nin,

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q))$$

şeklinde ifade edildiğini görürüz. Bu supremum değerini veren maksimal bir $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ vardır. Gerçekten Teorem 2.12'de belirtilen Banach-Alaoğlu teoremi nedeniyle, $\mathscr{M}_{1,f}$, $\mathcal{X}' = ba$'da zayıf (weak) kompakttır ve bu yüzden üstten yarı sürekli $Q \mapsto (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q))$ fonksiyoneli, $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde maksimum değeri alır.*

Bir $\mathcal{Q} \subset \mathscr{M}_{1,f}$ kümesi aracılığıyla bir ρ tutarlı risk ölçüsünün, $X \in \mathcal{X}$ için,

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-X] \tag{4.8}$$

temsilini düşünelim. Ceza fonksiyonunu

$$\alpha(Q) = \begin{cases} 0 & ; Q \in \mathcal{Q} \\ +\infty & ; \text{Diğer Durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde alırsak, bu ceza fonksiyonuna karşılık gelen risk (4.8)'e denktir. Aşağıdaki sonuç; bir tutarlı risk ölçüsünün minimal ceza fonksiyonunun, her zaman bu tipte olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1. *Bir ρ tutarlı risk ölçüsünün minimal ceza fonksiyonu α_{min}, yalnızca* 0 *ile* $+\infty$ *değerlerini alır. Özellikle (4.8) eşitliğini sağlayan en geniş*

$$\mathcal{Q}_{max} := \{Q \in \mathscr{M}_{1,f} | \alpha_{min}(Q) = 0\}$$

konveks kümesi için,

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_{max}} E_Q[-X]$$

olur.

Kanıt. Önerme 3.8'den, bir tutarlı risk ölçüsünün $\mathscr{A}_\rho$ kabul kümesinin bir koni olduğunu hatırlayın. Dolayısıyla, her $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ ve $\lambda > 0$ için minimal ceza fonksiyonu

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} E_Q[-X] = \sup_{\lambda \cdot X \in \mathscr{A}_\rho} E_Q[-\lambda \cdot X] = \lambda \cdot \alpha_{min}(Q)$$

yu sağlar. Sonuç olarak, α_{min} sadece 0 ve $+\infty$ değerlerini alır. □

(4.2) gösteriminde oluşan α ceza fonksiyonu tek değildir. Buna ek olarak; konveks bir risk ölçüsünü, minimal olmayan bir ceza fonksiyonu ile ifade etmek genellikle daha uygundur. Minimal ceza fonksiyonu, belirli sonlu toplamsal küme fonksiyonları için sonlu olabilirken başka bir α, Örnek 3.2 durumunda olduğu gibi, sadece olasılık ölçüleri üzerine tanımlıdır. Bu tipin başka durumu, konveks risk ölçülerinin bir ailesinin supremumu olarak oluşturulan risk ölçüleri için ortaya çıkar.

Önerme 4.11. *Varsayalım ki bir I indeks kümesindeki her i için $\mathcal{X}$ üzerinde α_i ceza fonksiyonu ile ilişkili, bir ρ_i konveks risk ölçüsü verilsin.* $\sup_{i \in I} \rho_i(0) < \infty$ *ise* $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ *için,*

$$\alpha(Q) := \inf_{i \in I} \alpha_i(Q)$$

ceza fonksiyonuna sahip bir konveks risk ölçüsü $X \in \mathcal{X}$ için,

$$\rho(X) := \sup_{i \in I} \rho_i(X)$$

ile ifade edilebilir.

Kanıt. $\rho(0) = \sup_{i \in I} \rho_i(0) < \infty$ koşulu, ρ'nun sadece sonlu değerler almasını gerektirir. Dahası,

$$\begin{aligned}\rho(X) &= \sup_{i \in I} \sup_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \alpha_i(Q)) \\ &= \sup_{Q \in \mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-X] - \inf_{i \in I} \alpha_i(Q))\end{aligned}$$

dır ve iddia sonuçlanır. □

Aşağıda, özellikle σ-toplamsal olasılık ölçüleri cinsinden temsil edilebilen konveks risk ölçüleriyle ilgilenilecektir. Böyle bir ρ risk ölçüsü, $\mathscr{M}_1 := \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ kümesinin dışında sonsuz olan bir ceza fonksiyonu tarafından

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1} (E_Q[-X] - \alpha(Q)) \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda artık yukarıdaki supremumun elde edilmesi beklenemez. Bu, Örnek 3.2'de X'in infimumu almadığı durum için gösterilmiştir.

Olasılık ölçüleri açısından (4.9) gösterimi, ρ'nun bazı süreklilik özellikleri ile ilgilidir. Öncelikle "üstten süreklilik" için gerekli bir koşulu inceleyelim.

Yardımcı Teorem 4.8. *$\mathscr{M}_1$ üzerinde (4.9)'un gösterimini sağlayan bir konveks risk ölçüsü üstten süreklidir. Yani,*

$$X_n \searrow X \Longrightarrow \rho(X_n) \nearrow \rho(X) \tag{4.10}$$

olur. (Burada $\rho(X_n)$'in $\rho(X)$'e artarak yakınsmasının sebebi ρ'nun monotonluğudur.) Dahası, üstten süreklilik; sınırlı noktasal yakınsaklığa göre, alttan yarı sürekliliğe denktir: (X_n), $\mathcal{X}$'de, $X \in \mathcal{X}$'e noktasal yakınsayan bir sınırlı dizi ise;

$$\rho(X) \leq \liminf_{n \uparrow \infty} \rho(X_n) \tag{4.11}$$

dir.

Kanıt. Öncelikle, (4.11) varsayımı altında ρ'nun, olasılık ölçüleri açısından bir gösterime sahip olduğunu gösterelim. Baskın yakınsaklık teoremi, her bir $Q \in \mathscr{M}_1$ için $E_Q[X_n] \to E_Q[X]$'i gerektirir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \sup_{Q\in\mathscr{M}_1} (\lim_{n\uparrow\infty} E_Q[-X_n] - \alpha(Q)) \\ &\leq \liminf_{n\uparrow\infty} \sup_{Q\in\mathscr{M}_1} (E_Q[-X_n] - \alpha(Q)) \\ &= \liminf_{n\uparrow\infty} \rho(X_n) \end{aligned}$$

olur. (4.11) ve (4.10)'un denkliğini göstermek için öncelikle (4.11)'i varsayalım. $X_n \searrow X$ ve monotonluktan, her bir n için $\rho(X_n) \leq \rho(X)$ ise, $\rho(X_n) \nearrow \rho(X)$'tir.

Şimdi ρ'nun üstten sürekli olduğunu varsayalım. X_n, $\mathcal{X}$'te, X'e noktasal yakınsayan sınırlı bir dizi olsun. $Y_m := \sup_{n\geq m} X_n \in \mathcal{X}$ tanımlayalım. Sonra Y_m, P-hhk olarak X'e azalarak yakınsar. Bu nedenle monotonluktan, (4.10) sağlanır ve

$$\liminf_{n\uparrow\infty} \rho(X_n) \geq \lim_{n\uparrow\infty} \rho(Y_n) = \rho(X)$$

tir. $\square$

Aşağıdaki önerme, ρ için herhangi bir ceza fonksiyonunun olasılık ölçülerinin $\mathscr{M}_1$ kümesi üzerinde yoğunlaşmasını garantileyen güçlü bir yeterli şart verecektir. Bu koşul üstten yerine "alttan süreklilik"tir, Bölüm 11'de örneklerin bir bölümünü göreceğiz.

Önerme 4.12. *ρ,*

$$X_n \nearrow X \implies \rho(X_n) \searrow \rho(X)$$

alttan sürekli olan bir konveks risk ölçüsü olsun ve $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde temsil edilen ρ'nun, herhangi bir α ceza fonksiyonu olduğunu varsayalım. α, olasılık ölçülerinin $\mathscr{M}_1$ sınıfı üzerinde yoğunlaştırılmıştır yani

$$\alpha(Q) < \infty \implies Q \text{ bir } \sigma\text{-toplamsaldır.}$$

Kanıt. Q'nun σ-toplamsal olması için gerek ve yeter şart, $\bigcup_n A_n = \Omega$ olacak şekildeki $A_n \in \mathscr{F}$ olaylarının herhangi bir artan dizisi için $Q[A_n] \nearrow 1$ olmasıdır.

Bu nedenle, $X_n := I_{A_n}$ alırsak, aşağıdaki Yardımcı Teorem 4.9'dan varsayımımız sağlanır. □

Yardımcı Teorem 4.9. *ρ, $\mathscr{M}_{1,f}$ üzerinde α ceza fonksiyonu tarafından temsil edilen, $\mathcal{X}$ üzerinde bir konveks risk ölçüsü olsun ve $c > -\rho(0) = \inf_{Q\in\mathscr{M}_{1,f}} \alpha(Q)$ için*

$$\Lambda_c := \{Q \in \mathscr{M}_{1,f} \mid \alpha(Q) \leq c\}$$

seviye kümelerini düşünelim. $0 \leq X_n \leq 1$ olacak şekildeki herhangi bir (X_n) dizisi için, aşağıdaki iki koşul denktir:

(a) Her bir $\lambda \geq 1$ için $\rho(\lambda X_n) \longrightarrow \rho(\lambda)$

(b) Tüm $c > -\rho(0)$ için $\inf\limits_{Q\in\Lambda_c} E_Q[X_n] \longrightarrow 1$

Kanıt. $(a) \Rightarrow (b)$: İlk adımda, her $Y \in \mathcal{X}$ ve her $\lambda > 0$ için

$$\inf_{Q\in\Lambda_c} E_Q[Y] \geq -\frac{c + \rho(\lambda Y)}{\lambda} \tag{4.12}$$

olduğunu gösterelim. Aslında, α, ρ'yu temsil ettiğinden $Q \in \Lambda_c$ için

$$c \geq \alpha(Q) \geq E_Q[-\lambda Y] - \rho(\lambda Y)$$

elde ederiz. Bu ifadenin $-\lambda$ ile bölümü (4.12)'yi sağlar.

Şimdi (a)'yı sağlayan bir X_n dizisini düşünelim. (4.12)'den her $\lambda \geq 1$ için

$$\liminf_{n\uparrow\infty} \inf_{Q\in\Lambda_c} E_Q[X_n] \geq \lim_{n\uparrow\infty} \frac{c + \rho(\lambda X_n)}{\lambda} = 1 - \frac{c + \rho(0)}{\lambda}$$

dır.

$\lambda \to \infty$ alırsak, $X_n \leq 1$ varsayımı (b)'yi sağlar.

$(b) \Rightarrow (a)$: Her n için,

$$\rho(\lambda) \leq \rho(\lambda X_n) = \sup_{Q\in\mathscr{M}_{1,f}} (E_Q[-\lambda X_n] - \alpha(Q))$$

olduğu açıktır.

Her Q için $E_Q[-\lambda X_n] \leq 0$ olduğundan

$$c := 1 - \rho(\lambda) = 1 + \lambda - \rho(0)$$

olarak seçersek, sağdaki supremuma, sadece $\alpha(Q) \leq c$ olacak şekildeki Q'lar etki eder. Dolayısıyla her n için

$$\rho(\lambda X_n) = \sup_{Q \in \Lambda_c} (E_Q[-\lambda X_n] - \alpha(Q))$$

dır. Ancak (b) koşulu, $Q \in \Lambda_c$'de düzgün olarak $E_Q[-\lambda X_n] \to -\lambda$ yakınsamasını sağlar ve bu yüzden (a) ortaya çıkar. $\square$

Uyarı 4.5. *ρ, alttan sürekli olan bir konveks risk ölçüsü olsun. Önerme 4.12 ve Yardımcı Teorem 4.8'i birlikte ele aldığımızda görülebileceği gibi ρ, ayrıca üstten süreklidir. Sonuç olarak, X'e noktasal olarak yakınsayan $\mathcal{X}$'te her (X_n) sınırlı dizisi için $\rho(X_n) \longrightarrow \rho(X)$ doğrudan elde edebileceğimiz bir sonuç olur.*

Örnek 4.8. *$\mathbb{R}$'de bir u fayda fonksiyonunu, $Q \in \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F})$ bir olasılık ölçüsünü ve sabit bir $c \in \mathbb{R}$ alt sınırını düşünelim. Örnek 3.4'te olduğu gibi, $E_Q[u(X)]$ beklenen faydası, $u(c)$ tarafından alttan sınırlı olduğunda, bir X durumunun kabul edilebilir olduğunu varsayalım. Bunun yerine, konveks artan kayıp fonksiyonunu $\ell(x) = -u(-x)$ şeklinde ve $x_0 := -u(c)$ olduğunda kabul edilebilir durumların konveks kümesini*

$$\mathscr{A} := \{ \ X \in \mathcal{X} \mid E_Q[\ \ell(-X) \ ] \leq x_0 \ \}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $\rho := \rho_{\mathscr{A}}$, $\mathscr{A}$ tarafından verilen konveks risk ölçülerini simgelesin. Bölüm 11'de, ρ'nun üstten sürekli olduğunu göstereceğiz ve ρ'nun minimal ceza fonksiyonu için bir formül üreteceğiz.

Bu bölümün geri kalanı için, Ω'nın bir ayrık metrik uzay ve $\mathscr{F}$'nin Borel kümelerinin σ-cebiri olduğunu varsayacağız. Öncesinde olduğu gibi, $\mathcal{X}$, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerindeki tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların lineer uzayıdır. Ω üzerinde, sınırlı sürekli fonksiyonların alt uzayını $C_b(\Omega)$ simgesiyle gösterelim ve konveks risk ölçülerinin $C_b(\Omega)$ üzerindeki fonksiyoneller olarak görüldüğü gösterimler üzerine odaklanalım.

Önerme 4.13. *ρ, $\mathcal{X}$ üzerinde bir konveks risk ölçüsü olsun. Öyle ki;*

$$C_b(\Omega)\text{'da } \lambda > 0 \text{ sabit rassal değişkenine artarak yakınsayan herhangi bir } (X_n) \text{ dizisi için } \rho(X_n) \searrow \rho(\lambda) \text{ olsun.} \tag{4.13}$$

O halde, $\mathscr{M}_1$ üzerinde, $X \in C_b(\Omega)$ için

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{M}_1} (E_Q[-X] - \alpha(Q)) \tag{4.14}$$

olacak şekilde bir α ceza fonksiyonu vardır. Gerçekten,

$$\alpha(Q) := \inf\{ \ C_b(\Omega)\text{' da } \ \alpha_{min}(\tilde{Q}) E_{\tilde{Q}}[\ \cdot\ ] = E_Q[\ \cdot\ ] \ \} \tag{4.15}$$

olarak alınabilir.

Kanıt. α_{min}, $\mathscr{M}_{1,f}$'de ρ'nun minimal ceza fonksiyonu olsun. $\alpha_{min}(\tilde{Q}) < \infty$'u sağlayan herhangi bir $\tilde{Q}$ için, her $X \in C_b(\Omega)$ olmak üzere $E_{\tilde{Q}}[X] = E_Q[X]$ olacak şekilde bir $Q \in \mathscr{M}_1$ var olduğunu gösterelim. Bir $Y \in C_b(\Omega)$'ya artan, $C_b(\Omega)$'da bir (Y_n) dizisi alalım ve her n için $X_n := 1 + \delta(Y_n - Y) \geq 0$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim. Gerçekten Yardımcı Teorem 4.9'dan X_n, (a) koşulunu sağlar ve dolayısıyla $E_{\tilde{Q}}[X_n] \to 1$'dir yani

$$E_{\tilde{Q}}[Y_n] \nearrow E_{\tilde{Q}}[Y]$$

dir.

$C_b(\Omega)$ üzerindeki $E_{\tilde{Q}}[\ \cdot\ ]$ lineer fonksiyonelinin bu süreklilik özelliği, Daniel-Stone temsil teoreminden ([15]'te Teorem 4.5.2), bir σ-toplamsal ölçüye göre $C_b(\Omega)$ üzerinde bir integralle ifade edilebilir. Bunun için α'yı, (4.15)'teki gibi almamız yeterlidir. □

Uyarı 4.6. *Ω kompakt ise, herhangi bir konveks risk ölçüsü $C_b(\Omega) = C(\Omega)$ uzayı üzerinde (4.14)'teki gibi bir gösterime sahiptir. (4.13) koşulu için Dini'nin lemmasını ([16]) hatırlayalım: Kompakt bir küme üzerinde, artan sürekli fonksiyonların bir X_n dizisi, bir X sürekli fonksiyonuna yakınsıyorsa, bu yakınsama düzgündür. Gerçekten, $K_n := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq X(\omega) - \varepsilon\}$ kompakt kümeleri $\bigcap_n K_n = \emptyset$'yi sağlar, dolayısıyla bir n_0 için $K_{n_0} = \emptyset$'dir. Çünkü Yardımcı Teorem 3.7'den ρ, $C(\Omega)$*

üzerinde Lipschitz süreklidir ve (4.13) koşulunu sağlar.

Alternatif olarak, α'yı Uyarı 4.4'teki gibi Fenchel-Legendre dönüşümünün genel duallik teoremini uygulayarak elde edersek, (4.14) gösterimine ulaşırız. Burada $C(\Omega)$ üzerinde pozitif ve normal herhangi bir ℓ fonksiyoneli için $\ell(X) = E_Q[X]$ yazımını sağlayacak şekilde en az bir $Q \in \mathscr{M}_1$ olasılık ölçüsü olduğuna dikkat etmeliyiz. (Teorem 2.6'da görünüz)

Tanım 4.19. *$\mathcal{X}$ üzerinde bir ρ konveks risk ölçüsü, her $\lambda \geq 1$ için*

$$\rho(\lambda \cdot I_{K_n}) \longrightarrow \rho(\lambda)$$

yı sağlayan Ω'nın kompakt alt kümelerinin $K_1 \subset K_2 \subset ...$ artan bir dizisi varsa, ***sıkı*** *(tight) olarak adlandırılır. Ω kompakt ise, her konveks risk ölçüsü sıkı olur.*

Önerme 4.14. *$\mathcal{X}$ üzerinde ρ konveks risk ölçüsünün sıkı olduğunu varsayalım. O halde (4.13) sağlanır ve Önerme 4.13'nin sonucu geçerlidir. Dahası, Ω bir Polish uzayı ve $\mathscr{M}_1$ üzerindeki bir α ceza fonksiyonu, $X \in C_b(\Omega)$ için*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1} (E_Q[-X] - \alpha(Q))$$

şartını sağlıyorsa, $\Lambda_c = \{Q \in \mathscr{M}_1 | \alpha(Q) \leq c\}$ seviye kümeleri, $\mathscr{M}_1$ üzerine indirgenen topolojiye göre kompakttır.

Kanıt. Öncelikle (4.13)'ü gösterelim. $X_n \nearrow \lambda > 0$ olacak şekilde $X_n \in C_b(\Omega)$ varsayalım. Genelliği bozmadan ρ'nun normalleştirilmiş olduğunu kabul edebiliriz. Konvekslik ve normalleştirme ($\rho(0) = 0$); c, 1'den daha büyük keyfi bir sabit olmak üzere, her $\lambda \geq c$ için sağlanmakla birlikte her $\lambda > 0$ için (4.13) koşulunun sağlanmasını garantiler. Bu nedenle, ρ'nun nakit değişmezliği, genelliği bozmadan her n için varsayımdaki $X_n \geq 0$'ın varlığını gerektirir. Sonuç olarak $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ aldığımızda $\rho(X_n) \leq \rho(\lambda) + 2\varepsilon$ olduğunu göstermeliyiz.

Varsayımdan;

$$\rho((\lambda - \varepsilon)I_{K_n}) \leq \rho(\lambda - \varepsilon) + \varepsilon = \rho(\lambda) + 2\varepsilon$$

olacak şekilde bir kompakt K_n kümesi vardır. Uyarı 4.6'da Dini'nin lemmasından hatırlanacağı gibi her $n \geq n_0$ için K_n üzerinde $\lambda - \varepsilon \leq X_n$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Sonuç olarak monotonluk,

$$\rho(X_n) \leq \rho((\lambda - \varepsilon) I_{K_n}) \leq \rho(\lambda) + 2\varepsilon$$

u gerektirir.

Λ_c'nin göreceli kompaktlığını kanıtlamak amacıyla, her $c > -\rho(0)$ için

$$\inf_{Q \in \tilde{\Lambda}_c} Q[\ K_\varepsilon\ ] \geq 1 - \varepsilon(c + \rho(0) + 1)$$

olmak üzere, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $K_\varepsilon \subset \Omega$ kompakt kümesinin var olduğunu göstereceğiz.

Λ_c'nin göreceli kompaktlığı, $\mathscr{M}_1$'deki zayıf kompakt kümeler için Prohorov'un karakterizasyonunun bir sonucu olacaktır. Ω'nın topolojisini oluşturan bir δ tam metriğini ve bir sayılabilir yoğun $\{w_1, w_2, ...\} \subset \Omega$ kümesini belirleyelim. $r > 0$ için, Ω'da Δ_i^r sürekli fonksiyonlarını

$$\Delta_i^r(w) := 1 - \frac{\delta(w, w_i) \wedge r}{r}$$

şeklinde tanımlarız. Δ_i^r fonksiyonu

$$\bar{B}_r(w_i) := \{w \in \Omega \mid \delta(w, w_i) \leq r\}$$

kapalı metrik yuvarının karakteristik fonksiyonu ile üstten sınırlıdır.

$$X_n^r(w) := \max_{i \leq n} \Delta_i^r(w)$$

olsun. Açıkçası, X_n^r süreklidir ve $n \uparrow \infty$ için $0 \leq X_n^r \leq 1$ ile birlikte $X_n^r \nearrow 1$'i sağlar. (4.12)'ye göre, her $\lambda > 0$ için

$$\inf_{Q \in \Lambda_c} Q\left[\bigcup_{i=1}^{n} \bar{B}_r(w_i)\right] \geq \inf_{Q \in \Lambda_c} E_Q[X_n^r] \geq -\frac{c + \rho(\lambda X_n^r)}{\lambda}$$

yazabiliriz.

Şimdi $\lambda_k := 2^k/\varepsilon$ ve $r_k := 1/k$ alalım. Bu kanıtın ilk kısmı ve (4.13),

$$\rho(\lambda_k X_{n_k}^{r_k}) \leq \rho(\lambda_k) + 1 = -\lambda_k + 1$$

olacak şekilde $n_k \in \mathbb{N}$'nin varlığını sağlar ve dolayısıyla

$$\sup_{Q\in\Lambda_c} Q\left[\bigcap_{i=1}^{n_k} \Omega\backslash\bar{B}_{r_k}(w_i)\right] \leq \frac{c+1}{\lambda_k} = \varepsilon 2^{-k}(c+1)$$

dir.

$$K_\varepsilon := \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n_k} \bar{B}_{r_k}(w_i)$$

alalım. O halde her bir $Q \in \Lambda_c$ için

$$\begin{aligned} Q[\ K_\varepsilon\ ] &= 1 - Q\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{n_k} \Omega\backslash\bar{B}_{r_k}(w_i)\right] \\ &\geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-k}(c+1) \\ &= 1 - \varepsilon(c+1) \end{aligned}$$

dir. K_ε kapalı, tamamen sınırlı ve bu nedenle kompakttır. Bu durumun kısa bir kanıtı aşağıda belirtildiği gibidir: (x_j), K_ε'da bir dizi olsun. (x_j)'nin bir yakınsak alt diziye sahip olduğunu göstermeliyiz. Her bir k için $\bar{B}_{r_k}(w_1), ..., \bar{B}_{r_k}(w_{n_k})$ ile K_ε kapalı olduğundan, $\bar{B}_{r_k}(w_{i_k})$'da yeterince çok x_j'yi içeren bir $i_k \leq n_k$ vardır. Köşegenleştirme iddiası, bir $\bar{B}_{r_k}(w_{i_k})$'da her bir k'yı içine alan, bir tek $(x_{j'})$ alt dizisini sağlar. Bu nedenle, $(x_{j'})$ δ tam metriğine göre bir Cauchy dizisidir ve dolayısıyla, bir $w \in \Omega$ elemanına yakınsar. $\square$

Uyarı 4.7. *(4.14) gösteriminin, $C_b(\Omega)$'dan tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların $\mathcal{X}$ uzayına genişletilemez olduğuna dikkat ediniz. Ω'nın kompakt olup sonlu olmadığını düşünelim, böylece Uyarı 4.6'da açıklandığı gibi (4.13) koşulu sağlanır. $\mathscr{M}_1$'e ait olmayan bir sonlu toplamsal $Q_0 \in \mathscr{M}_{1,f}$ vardır; Örnek 2.1'de görünüz. Önerme 4.13'nin kanıtı, $X \in C_b(\Omega)$ için $E_{\tilde{Q}}[-X]$'e denk gelen $\rho(X) := E_{Q_0}[-X]$ şeklinde tanımlanan bir ρ tutarlı risk ölçüsü olacak şekilde bir $\tilde{Q} \in \mathscr{M}_1$'in var olduğunu* *gösterir. Ama ρ, her $X \in \mathcal{X}$ için*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q) \right)$$

şeklinde gösterilemez. Aslında, bu, $Q \in \mathscr{M}_1$ ve bir $X \in \mathcal{X}$ için

$$\begin{aligned} E_{Q_0}[X] = \rho(X) &= \sup_{Q \in \mathscr{M}_1} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q) \right) \\ E_{Q_0}[X] &\geq E_Q[-X] - \alpha(Q) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\alpha(Q) \geq E_{Q_0}[X] - E_Q[X]$$

i gerektirir, dolayısıyla bir $Q \in \mathscr{M}_1$ için $\alpha(Q) = \infty$'dur.

5. L^{∞} ÜZERİNDE KONVEKS RİSK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde L^{∞}'daki temsil teoremi Delbaen [9], [10] tarafından geliştirilmiştir. Uyarı 4.4 ve 5.8'de açıklanan genel duallik teorisiyle bağlantısı için [9], [10], [19], [20]'e bakılabilir.

Tezin kalanı için, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde belirli bir P olasılık ölçüsü alalım ve P-hhk olmak üzere

$$X = Y \quad \text{ise} \quad \rho(X) = \rho(Y) \tag{5.1}$$

şeklindeki ρ risk ölçüsünü düşünelim.

Bu bölümde sadece P'nin gözardı edilebilir (null) kümeleri dikkate alınacaktır.

Yardımcı Teorem 5.10. *ρ, (5.1)'i sağlayan ve (4.2)'deki gibi bir α ceza fonksiyonu ile temsil edilen bir konveks risk ölçüsü olsun. O halde, P'ye göre kesin sürekli olmayan bir $Q \in \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathcal{F})$ için $\alpha(Q) = +\infty$'dur.*

Kanıt. $Q \in \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F})$, P'ye göre kesinlikle sürekli değilse, $Q[A] > 0$ ama $P[A] = 0$ olacak şekilde $A \in \mathscr{F}$ vardır. Bir $X \in \mathscr{A}_{\rho}$ alalım ve $X_n := X - nI_A$ tanımlayalım. O halde $\rho(X_n) = \rho(X)$'tir yani X_n yine $\mathscr{A}_{\rho}$'nun içindedir. Sonuç olarak,

$$\alpha(Q) \geq \alpha_{min}(Q) \geq E_Q[-X_n] = E_Q[-X] + nQ[\ A\ ] \longrightarrow \infty$$

dur. $\square$

(5.1)'in ışığında $\mathcal{X}$'i, $L^{\infty} := L^{\infty}(\Omega, \mathscr{F}, P)$ Banach uzayı ile tanımlayabiliriz. ρ'ya göre kesinlikle sürekli olan, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde tüm olasılık ölçülerinin kümesi

$$\mathscr{M}_1(P) := \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F}, P)$$

ile gösterilsin. Yardımcı Teorem 5.10'dan olasılık ölçüleri üzerinde ve dolayısıyla $\mathscr{M}_1(P)$ üzerinde yoğunlaşmış bir ceza fonksiyonu ile gösterilebilen L^{∞} üzerindeki konveks risk ölçüleri aşağıdaki teoremle gösterilir.

Teorem 5.16. *$\rho : L^{\infty} \to \mathbb{R}$'nun bir konveks risk ölçüsü olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*

(a) ρ, $\mathscr{M}_1(P)$ üzerinde bir ceza fonksiyonu ile temsil edilebilir.

(b) ρ, α_{min} *minimal ceza fonksiyonunun* $\mathscr{M}_1(P)$*'ye kısıtlanması ile temsil edilebilir:* $X \in L^\infty$ *için*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)) \tag{5.2}$$

olur.

(c) ρ*, üstten süreklidir:* P*-hhk olmak üzere,* $X_n \searrow X$ *ise,* $\rho(X_n) \nearrow \rho(X)$*'tir.*

(d) ρ*'nun "Fatou özelliği" vardır: Herhangi bir* X*'e* P*-hhk olmak üzere, yakınsak bir sınırlı* (X_n) *dizisi için*

$$\rho(X) \leq \liminf_{n \uparrow \infty} \rho(X_n)$$

dir.

(e) ρ*,* $\sigma(L^\infty, L^1)$ *zayıf* * *toplojisi için alttan süreklidir.*

(f) ρ*'nun* $\mathscr{A}_\rho$ *kabul kümesi* L^∞*'da zayıf** *kapalıdır, yani* $\mathscr{A}_\rho$*,* $\sigma(L^\infty, L^1)$ *topolojisine göre kapalıdır.*

Kanıt.

$(f) \Rightarrow (b)$: Bir $X \in \mathcal{X}$ belirleyelim ve

$$m = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} (E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)) \tag{5.3}$$

olsun. Teorem 4.15 ışığında, $m \geq \rho(X)$ veya buna denk olarak $m + X \in \mathscr{A}_\rho$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $m + X \notin \mathscr{A}_\rho$ olsun. Varsayımdan, boştan farklı $\mathscr{A}_\rho$ konveks kümesi zayıf * kapalı olsun. Teorem 2.9'da $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ yerel konveks uzayı için $\mathfrak{C} := \mathscr{A}_\rho$ ve $\mathscr{B} := \{m + X\}$ alalım. $(L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$ üzerinde

$$\beta := \inf_{Y \in \mathscr{A}_\rho} \ell(Y) > \ell(m + X) =: \gamma > -\infty \tag{5.4}$$

olacak şekilde bir sürekli lineer ℓ fonksiyonelini elde ederiz. Önerme 2.5'ten, bir $Z \in L^1$ için ℓ, $\ell(Y) = E[YZ]$ şeklindedir. Gerçekten, $Z \geq 0$'dır. Bunu göstermek için $Y \geq 0$ seçelim ve monotonluktan $\lambda \geq 0$ için $\rho(\lambda Y) \leq \rho(0)$ olduğuna dikkat edelim.

Dolayısıyla, her $\lambda \geq 0$ için $\lambda Y + \rho(0) \in \mathscr{A}_\rho$'dur. Bundan

$$-\infty < \gamma < \ell(\lambda Y + \rho(0)) = \lambda \ell(Y) + \ell(\rho(0))$$

sonucu çıkar. $\lambda \uparrow \infty$ alınarak $\ell(Y) \geq 0$ sağlanır ve dolayısıyla $Z \geq 0$'dır. Dahası, ℓ sıfırdan farklı olduğundan $P[Z > 0] > 0$'dır. Böylece, bir $Q_0 \in \mathscr{M}_1(P)$ olasılık ölçüsü

$$\frac{dQ_0}{dP} := \frac{Z}{E[Z]}$$

olarak tanımlanır.(5.4)'ten

$$\alpha_{min}(Q_0) = \sup_{Y \in \mathscr{A}_\rho} E_{Q_0}[-Y] = -\frac{\beta}{E[Z]}$$

olduğunu görürüz. Ancak,

$$E_{Q_0}[\ X\ ] + m = \frac{\ell(m+X)}{E[Z]} = \frac{\gamma}{E[Z]} < \frac{\beta}{E[Z]} = -\alpha_{min}(Q_0)$$

ifadesi (5.3) ile çelişir. Dolayısıyla, $m + X \in \mathscr{A}_\rho$'dur ve bu nedenle $m \geq \rho(X)$'tir.

$(b) \Rightarrow (a)$: ρ, $\alpha_{min}(Q)$ ile temsil edildiğinden (b) kabul edildiğinde, (a) açıktır.

$(a) \Rightarrow (c)$, $(c) \Leftrightarrow (d)$: Yardımcı Teorem 4.8'den (a), (c)'yi gerektirir ve (c) ile (d) birbirine denktir. (Noktasal yakınsaklık yerine P-hhk yakınsaklık alındığında.)

$(c) \Rightarrow (e)$: $c \in \mathbb{R}$ için $\mathfrak{C} := \{\rho \leq c\}$'nin zayıf * kapalı olduğunu gösterelim. Bu amaçla, $r > 0$ için $\mathfrak{C}_r := \mathfrak{C} \cap \{X \in L^\infty \mid \|X\|_\infty \leq r\}$ alalım. (X_n), L^1'de bir X rassal değişkenine yakınsayan, $\mathfrak{C}_r$'de bir dizi ise, P-hhk olmak üzere yakınsak bir alt dizi vardır ve ρ'nun Fatou özelliği, $X \in \mathfrak{C}_r$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\mathfrak{C}_r$, L^1'de kapalıdır ve Yardımcı Teorem 2.6, $\mathfrak{C} := \{\rho \leq c\}$'nin zayıf * kapalı olmasını gerektirir.

$(e) \Rightarrow (f)$: $c = 0$ alırsak $\mathfrak{C} = \mathscr{A}_\rho$ olur. Bu nedenle açıktır.

$\square$

Tanım 5.20. *$P[X > 0] > 0$ olacak şekildeki her $X \in L^{\infty}_{+}$ için*

$$\rho(-X) > \rho(0)$$

*oluyorsa L^{∞} üzerindeki bir ρ konveks risk ölçüsüne ρ'ya göre **duyarlıdır** (sensitive) denir. Duyarlılık,* alakalı *olarak da isimlendirilir.*

Üstteki teorem, L^{∞}'un üstten sürekli herhangi bir konveks risk ölçüsünün aşağıdaki şekilde elde edildiğini gösterir. Herhangi bir $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ olasılık modelini düşünelim, ancak bu modeller bir ceza fonksiyonu tarafından tanımlandığından, daha fazla veya daha az ciddiye alınır. Bu nedenle $\rho(X)$ değeri tüm $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ modelleri üzerinde $E_Q[-X]$ beklenen kaybının en kötü durumu olarak hesaplanır, ancak $\alpha(Q)$ kadar azaltılır. Örnek 5.9'da, P modeli en ciddiye alınan modeldir ve $\alpha(Q)$ ceza fonksiyonu, bağıl entropi ile ölçülen Q'nun P'den sapması ile orantılıdır.

Tanım 5.21. *[16] Bir $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülebilir uzayı üzerinde iki olasılık ölçüsü P ve Q olsun. Her $A \in \mathscr{F}$ için*

$$P[\ A\ ] = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q[\ A\ ] = 0$$

*ise (yani P'ye göre ölçüsü 0 olan her kümenin Q'ya göre de ölçüsü 0 ise) Q'ya, $\mathscr{F}$ σ-cebiri üzerinde P'ye göre **kesin sürekli** (absolutely continuous) denir ve $Q \ll P$ şeklinde yazılır. $Q \ll P$ ve $P \ll Q$, ikisi birlikte sağlanıyorsa, Q ile P **denktir** denir ve $Q \approx P$ şeklinde yazılır.*

Teorem 5.17. *(Radon-Nikodym) Q'nun $\mathscr{F}$ üzerinde P'ye göre kesin sürekli olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\textit{Her } \ F \geq 0 \ \mathscr{F}\textit{-ölçülebilir fonksiyonu için } \int F\, dQ = \int F\, \varphi\, dP \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir $\varphi \geq 0$ $\mathscr{F}$-ölçülebilir fonksiyonunun varlığıdır.

Tanım 5.22. *P'ye göre bir Q olasılık ölçüsünün **bağıl entropi** (relative* *entropy)si*

$$H(Q \mid P) := \begin{cases} E\left[\dfrac{dQ}{dP}\log\dfrac{dQ}{dP}\right] & , \quad Q \ll P \\ +\infty & , \quad \textit{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Yardımcı Teorem 5.11. *Herhangi bir Q olasılık ölçüsü için,*

$$\begin{aligned} H(Q|P) &= \sup_{Z \in L^\infty(\Omega,\mathscr{F},P)} (E_Q[\ Z\ ] - \log E[\ e^Z\ ]) \\ &= \sup\{\ E_Q[\ Z\ ] - \log E[\ e^Z\ ] \mid e^Z \in \mathscr{L}^1(P)\ \} \end{aligned}$$

dir. İkinci supremum, $Q \ll P$ ise $Z := \log \frac{dQ}{dP}$'de elde edilir.

Örnek 5.9.

$$\alpha(Q) := \frac{1}{\beta} H(Q|P)$$

şeklinde tanımlanan $\alpha : \mathscr{M}_1(P) \to (0,\infty]$ ceza fonksiyonunu düşünelim. Burada $\beta > 0$ sabit ve P'ye göre $Q \in \mathscr{M}_1(P)$'nin bağıl entropisi

$$H(Q \mid P) = E_Q\left[\log\frac{dQ}{dP}\right]$$

dir, Tanım 5.22'de görülebilir. Entropik risk ölçüsüne karşılık gelen ρ

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} (E_Q[-X] - \frac{1}{\beta} H(Q|P))$$

ile verilir. Bağıl entropi için Yardımcı Teorem 5.11'de belirtilen varyasyonel ilke,

$$E_Q[-X] - \frac{1}{\beta} H(Q|P) \leq \frac{1}{\beta} \log E[e^{-\beta X}]$$

dir ve üst sınır $e^{-\beta X}/E[e^{-\beta X}]$ yoğunluğuna sahip olan ölçü ile elde edilir. Bu nedenle, entropik risk ölçüsü

$$\rho(X) = \frac{1}{\beta}\log E[e^{-\beta X}]$$

şeklini alır.

Özel olarak, ρ, P'ye göre duyarlıdır. ρ'yu temsil eden α minimal ceza fonksiyonu, *Yardımcı Teorem 5.11'den*

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X\in L^\infty}\left(E_Q[-X] - \frac{1}{\beta}\log E[e^{-\beta X}]\right) = \frac{1}{\beta}H(Q \mid P)$$

dir. Entropik risk ölçümünün finansal yorumu, eksik risk tabiri ile Örnek 11.16'da ele alınacak.

Teorem 5.16, tutarlı risk ölçüsü için Sonuç 5.2'ye dönüşür, kanıtı Sonuç 4.1 için yapılanla aynıdır.

Sonuç 5.2. *L^∞ üzerinde bir tutarlı risk ölçüsünün bir $\mathcal{Q} \subset \mathscr{M}_1(P)$ kümesi ile gösterilebilmesi için gerek ve yeter şart, Teorem 5.16'nın denk koşullarının sağlanmasıdır. Bu durumda, $\mathscr{M}_1(P)$'yi maksimal gösteren alt kümesi*

$$\mathcal{Q}_{max} := \{Q \in \mathscr{M}_1(P) \mid \alpha_{min}(Q) = 0\}$$

şeklindedir. Ek olarak, ρ'nun duyarlı olmasının gerek ve yeter şartı; herhangi bir $A \in \mathscr{F}$ ve her $Q \in \mathcal{Q}_{max}$ için

$$P[\ A\ ] = 0 \iff Q[\ A\ ] = 0$$

anlamında $\mathcal{Q}_{max} \approx P$ olmasıdır.

L^∞ üzerindeki alttan sürekli tutarlı risk ölçülerinin karakterizasyonunu da verebiliriz.

Sonuç 5.3. *L^∞ üzerinde bir ρ tutarlı risk ölçüsü için aşağıdaki özellikler denktir:*

(a) ρ alttan süreklidir: $X_n \nearrow X \Longrightarrow \rho(X_n) \searrow \rho(X)$.

(b) ρ ile belirlenen bir $\mathcal{Q} \subset \mathscr{M}_1(P)$ kümesi vardır öyle ki maksimum elde edilir. Yani her $X \in \mathcal{X}$ için

$$\rho(X) = \max_{Q\in\mathcal{Q}} E_Q[-X]$$

dir.

(c) ρ ile gösterilen bir $\mathcal{Q} \subset \mathscr{M}_1(P)$ kümesi vardır öyle ki

$$\mathscr{D} := \left\{ \frac{dQ}{dP} \;\middle|\; Q \in \mathcal{Q} \right\}$$

yoğunluklar kümesi, $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ de zayıf kompakttır.

Kanıt.

$(c) \Rightarrow (a)$: Dini'nin lemmasından çıkar (X_n'ler X'e düzgün yakınsar); Uyarı 4.6'ya bakınız.

$(a) \Rightarrow (b)$: Önerme 4.12 ve Sonuç 4.1'den çıkar.

$(b) \Rightarrow (c)$: Genelliği bozmadan, $\mathscr{D}$'nin L^1'de zayıf kapalı olduğunu varsayabiliriz. Herhangi bir $X \in L^\infty$ için, $\mathscr{D}$ üzerinde infimumu elde edilen, L^1 üzerindeki sürekli lineer J_X fonksiyoneli

$$J_X(Z) := E[XZ]$$

olarak tanımlanır. Önbilgi 2.5'te belirtilen James'in teoremine (Teorem 2.13) göre bu, $\mathscr{D}$' nin zayıf kompaktlığını gösterir.

$\square$

Şimdi Bölüm 6'da daha detaylı çalışılacak olan tutarlı risk ölçüsünün örneklerini verelim.

Önceki sonuç kullanılarak risk ölçüsünün alttan sürekli olmadığının gösterilmesi amacıyla aşağıdaki örnek verilmiştir:

Örnek 5.10. *Şimdiki durumumuzda, (5.1) koşulunun gerektirdiği, en kötü durum risk ölçüsü*

$$\rho_{max}(X) := -ess \inf X = \inf\{\ m \in \mathbb{R} \mid X + m \geq 0,\ \ P\text{-}hhk\ \}$$

şeklini alır. ρ_{max}'ın tutarlı olduğu ve Fatou özelliğini sağladığı basitçe kontrol edilebilir. Ek olarak, ρ_{max}'ın kabul kümesi, L^∞'daki L^∞_+ pozitif konisine eşittir ve bu, herhangi bir $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ için $\alpha_{min}(Q) = 0$ olduğunu gösterir. Bu nedenle

$$\rho_{max}(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} E_Q[-X]$$

tir.

Fakat $(\Omega, \mathscr{F}, P)$'nin sonlu bir modele indirgenemediği durumda sağ taraftaki supremum, maksimum ile yer değiştiremez. Gerçekten X, esas infimumu kendisine ait olmayacak şekilde $X \in L^\infty$ olsun. O halde $E_Q[X] = ess \inf X = -\rho_{max}(X)$ olacak şekilde bir $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ yoktur. Bu durumda, önceki sonuçtan ρ_{max} alttan sürekli değildir.

Sonuç 5.3'te (c) şıkkını sağlayan bir risk örneği olarak aşağıdaki örnek verilmiştir:

Örnek 5.11. *$\mathcal{Q}_\lambda$, bir $\lambda \in (0,1)$ sabit parametresi için $1/\lambda$ ile sınırlı olan dQ/dP yoğunluklu tüm $Q \in \mathscr{M}_1(P)$'lerin sınıfı olsun. Tutarlı risk ölçüsüne uyan*

$$AV@R_\lambda(X) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X] \tag{5.6}$$

*λ seviyesinde **riskteki ortalama değer** (Average Value at Risk at level λ) olarak adlandırılır. Bu terminoloji, $AV@R_\lambda$'nın detaylı bir çalışmasını içeren Bölüm 6'da açıklanacaktır. $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$ için dQ/dP yoğunluklarının kümesi L^1'de zayıf kapalıdır. Ek olarak, Dunford-Pettis teoremi nedeniyle zayıf kompakttır (Teorem 2.14). Bu nedenle (5.6)'daki supremum elde edilir. Maksimalleştiren ölçünün açık bir şekilde elde edilişi, Teorem 6.21'in kanıtında verilecektir.*

Bir $\mathcal{Q} \subset \mathscr{M}_1(P)$ kümesi ve Sonuç 5.3 (b) şıkkı kullanılarak bir risk ölçüsünün elde edilişi alttaki örnekte verimiştir:

Örnek 5.12. *Sabit bir $\lambda \in (0,1)$ seviyesi için $A \in \mathscr{F}$'nin $P[A] > \lambda$ olacak şekildeki tüm koşullu $P[\,\cdot \mid A]$ olasılık dağılımlarının sınıfı olarak $\mathcal{Q}$'yu alalım. $\mathcal{Q}$'dan elde edilen tutarlı risk ölçüsü*

$$WCE_\lambda(X) := \sup \{\ E\ [-X \mid A\ ] \mid A \in \mathscr{F},\ P[\ A\ ] > \lambda\ \} \tag{5.7}$$

*λ seviyesinde **en kötü koşullu beklenti** (worst conditional expectation at level λ) adını alır. Bölüm 6'da, λ seviyesinde en kötü koşullu beklentinin olasılık uzayı yeterince zenginse Örnek 5.11'deki riskteki ortalama değer ile çakıştığını göstereceğiz.*

Uyarı 5.8. *Uyarı 4.4'e benzer şekilde, Teorem 5.16 temsil teoreminde (e) $\Rightarrow$ (a) gerektirmesi bir parasal risk ölçüsünün özellikleri ile birleştirildiğinde, L^∞'daki konveks ρ foksiyonunun Fenchel-Legendre dönüşümü için Teorem 2.11'deki genel dualliğin özel bir durumu olarak görülebilir. Bu genel bakış açısından, $1 \leq p < \infty$ için $L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ Banach uzayları üzerinde konveks risk ölçüleri için temsil teoremlerinin* *nasıl ifade edileceği açıktır.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *olacak şekilde* $q \in (1, \infty]$ *olsun ve*

$$\mathscr{M}_1^q(P) := \left\{ Q \in \mathscr{M}_1(P) \;\middle|\; \frac{dQ}{dP} \in L^q \right\}$$

olarak tanımlansın. ρ*'nun* L^p *üzerinde*

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1^q(P)} \left(E_Q[-X] - \alpha(Q) \right)$$

şeklinde bir konveks risk ölçüsü olması için gerek ve yeter şart L^p*'de alttan yarı sürekli olmasıdır. Yani Fatou şartı sağlanıyorsa,*

$$L^p\text{'de} \quad X_n \longrightarrow X \Longrightarrow \rho(X) \le \liminf_{n \uparrow \infty} \rho(X_n)$$

dir.

6. RİSKTEKİ DEĞER

Riskteki değerin bazı sonuçları ve bu bölüm, Önerme 6.15 ve Teorem 7.25'teki bazı uygulamaları [3] ve [9]'dan alınmıştır. Riskteki ortalama değer Acerbi ve Tasche [1], Delbaen [9] ve Rockafellar ve Uryasev [30] tarafından incelenmiştir. Uyarı 6.9, Ruszczynski tarafından verilmiştir; [27]. $V@R$ notasyonu Pflug ve Ruszczynski [28]'den alınmıştır.

Bir X finansal pozisyonunun risk ölçümü problemine genel bir yaklaşım, verilen bir P olasılık ölçüsü altında, X dağılımının bir dağılım dilimini belirlemeyi içerir. $\lambda \in (0,1)$ için, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde bir X rassal değişkeninin λ-dağılım dilimi

$$P[X \leq q] \geq \lambda \quad \text{ve} \quad P[X < q] \leq \lambda$$

özelliğini sağlayan herhangi bir q reel sayısıdır ve X'in tüm λ-dağılım dilimlerinin kümesi X'in

$$q_X^-(t) = \sup\{\ x \mid P[X < x] < t\} = \inf\{\ x \mid P[X \leq x] \geq t\ \}$$

en düşük ve

$$q_X^+(t) = \inf\{\ x \mid P[X \leq x] > t\ \} = \sup\{\ x \mid P[X < x] \leq t\ \}$$

en yüksek dağılım dilimi fonksiyonu olmak üzere, bir $[\ q_X^-(\lambda)\ ,\ q_X^+(\lambda)\ ]$ aralığıdır, Önbilgi 2.2'den görülür. Bu bölümde, X finansal pozisyonlarının uzayı üzerinde bir fonksiyonel olarak görülen, $q_X^+(\lambda)$'nın özellikleri üzerine odaklanacağız.

Tanım 6.23. *Bir $\lambda \in (0,1)$ seviyesi alalım. Bu durumda*

$$V@R_\lambda(X) := -q_X^+\ (\lambda) = q_{-X}^-\ (1-\lambda) = \inf\{\ m \mid P[\ X + m < 0\ ] \leq \lambda\ \} \qquad (6.1)$$

eşitliğine X finansal pozisyonu için λ ***seviyesinde riskteki değer*** *denir.*

Finansal olarak, X'e eklendiğinde ve risksiz varlığa yatırıldığında bir negatif çıktının olasılığını λ seviyesinin altında tutacak şekildeki yatırımın en küçük miktarı $V@R_\lambda(X)$'tir. Ancak riskteki değer sadece bir kaybın olasılığını kontrol eder;

eğer varsa, böyle bir kaybın boyutunu yansıtmaz. Açıkçası; $V@R_\lambda$, $\mathcal{X} = L^0$ üzerinde pozitif homojen bir parasal risk ölçüsüdür. Aşağıdaki örnek, $V@R_\lambda$'nın kabul kümesinin tipik olarak konveks olmadığını ve bu nedenle $V@R_\lambda$'nın bir konveks risk ölçüsü olmadığını gösterir. Sonuç olarak $V@R_\lambda$, yatırımlardaki farklılaştırmayı teşvik etmek yerine caydırabilir.

Örnek 6.13. *Şüpheli iki şirket senedine bir yatırımı düşünelim, $r \geq 0$ risksiz yatırımın ödemesi olmak üzere, her birinin getirisi $\tilde{r} > r$ olsun. i. senette $\omega > 0$ olan bir yatırımın indirimli net kazancı*

$$X_i = \begin{cases} -\omega & ; \textit{ödenmediği durumda} \\ \frac{\omega(\tilde{r}-r)}{1+r} & ; \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile verilir. $p \leq \lambda$ olasılığıyla ilk senedin borcu ödenmezse

$$P\left[X_1 - \frac{\omega(\tilde{r}-r)}{1+r} < 0\right] = P[\textit{1.senedin ödenmemesi}] = p \leq \lambda$$

dır. Dolayısıyla,

$$V@R_\lambda(X_1) = -\frac{\omega(\tilde{r}-r)}{1+r} < 0$$

dır.Bunun anlamı, tüm ω yatırımını kaybetme olasılığı olmasına rağmen, X_1 pozisyonu pozitif bir riskte değer taşımadığı anlamında kabul edilebilir bir pozisyondur.

Her iki yatırımı da $\omega/2$ miktarınca yatırım yaparak portfolyoyu çeşitlendirebiliriz. Bu bizi $Y := (X_1 + X_2)/2$ pozisyonuna götürür. Kabul edelim ki, iki senedin ödenmemeleri birbirinden bağımsız ve p olasılıklı olsunlar. Gerçekçi bir $\tilde{r}$ için Y'nin negatif olması olasılığı en azından bir senedin ödenmemesi olasılığına eşittir: $P[Y < 0] = p(2-p)$. Özel olarak; $p = 0,009$ ve $\lambda = 0,01$ ise, $p < \lambda < p(2-p)$ olur, dolayısıyla,

$$V@R_\lambda(Y) = \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{\tilde{r}-r}{1+r}\right)$$

dir. Görüldüğü gibi bu değer, yatırılan ω sermayesinin yarısına yakındır. Bu örnekte $V@R_\lambda$'nın kabul kümesi konveks değildir. Bu örnek ayrıca, $V@R_\lambda$'nın güçlü bir şekilde farklı araçlara yatırım yapmaktan caydırdığını gösterir. Olayların beklenen şekilde gerçekleşmesi durumunda, beklenilen kaybın önemli bir miktarda azaltılmasını ödüllendirmediği gibi, bazı şeylerin ters gidebilme olasılığının artmasını da şiddetle *cezalandırır. Sonuç olarak, $V@R_\lambda$'ya göre bir portfolyonun optimizasyonu, yeteri kadar küçük borcun ödenmemesi olasılığına sahip büyük kayıplara yol açabilecek bir tekil varlık üzerine yoğunlaşan bir portfolyoya sebep olabilir.*

Bu bölümün geri kalanında; $\mathcal{X} = L^\infty$ üzerinde $V@R_\lambda$'nın aksine konveks veya bununla birlikte tutarlı olan parasal risk ölçüsü üzerine odaklanacağız. Özel olarak, $V@R_\lambda$'ya yaklaşan konveks risk ölçülerini arıyoruz. İlk tahmin, $V@R_\lambda$'yı üstten sınırlayan, üstten sürekli en küçük konveks risk ölçüsünü almak olabilir. Ancak, $V@R_\lambda$'nın kendisi konveks olmadığından aşağıdaki önerme, böyle bir $V@R_\lambda$'yı üstten sınırlayan en küçük konveks risk ölçüsünün var olmadığını gösterir.

Önerme 6.15. *Her $X \in \mathcal{X}$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için,*

$$V@R_\lambda(X) = \min \{ \rho(X) \mid \rho \text{ konveks, üstten sürekli ve } \geq V@R_\lambda\}$$

dır.

Kanıt. $q := -V@R_\lambda(X) = q_X^+(\lambda)$ olsun. Dolayısıyla $P[\ X < q\ ] \leq \lambda$'dır. $A \in \mathscr{F}$, $P[\ A\ ] > \lambda$'yı sağlıyorsa, $P[\ A \cap \{X \geq q\}\ ] > 0$'dır. Bu nedenle bir Q_A ölçüsünü

$$Q_A := P[\ \cdot \mid A \cap \{\ X \geq q\ \}\ ]$$

ile tanımlayabiliriz. Buradan, $E_{Q_A}[-X] \leq -q = V@R_\lambda(X)$ sonucu çıkar.

$\mathcal{Q} := \{Q_A \mid P[\ A\ ] > \lambda\ \}$ olsun ve

$$\rho(Y) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[-Y]$$

olacak şekilde bir ρ tutarlı risk ölçüsü tanımlamak için bu kümeyi kullanalım. O halde $\rho(X) \leq V@R_\lambda(X)$'tir. Dolayısıyla her $Y \in \mathcal{X}$ için $\rho(Y) \geq V@R_\lambda(Y)$ olduğunu gösterebilirsek varsayımımız çıkar. $\varepsilon > 0$ olsun ve $A := \{\ Y \leq -V@R_\lambda(Y) + \varepsilon\ \}$ alalım. $P[\ A\ ] > \lambda$ olduğu açıktır ve bu nedenle $Q_A \in \mathcal{Q}$'dur. Buna ek olarak, $Q_A[\ A\ ] = 1$'dir ve

$$\rho(Y) \geq E_{Q_A}[-Y] \geq V@R_\lambda(Y) - \varepsilon$$

elde ederiz. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan sonuç çıkar. □

Bu bölümün geriye kalan kısmında riskteki değer kullanılarak tanımlanan ancak, bir tutarlı risk ölçüsünün aksiyomlarını sağlamayan aşağıdaki risk ölçüsüne yoğunlaşacağız.

Tanım 6.24. *Bir X pozisyonunun $\lambda \in (0,1]$* ***seviyesinde riskteki ortalama değeri*** *(the Average Value at Risk at level $\lambda \in (0,1]$);*

$$AV@R_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda V@R_\gamma(X)d\gamma$$

ile ifade edilir.

Riskteki ortalama değer **koşullu riskteki değer** (conditional value at risk) veya **beklenen eksiklik** (expected shortfall) olarak da adlandırılabilir ve $CV@R_\lambda(X)$ ya da $ES_\lambda(X)$ ile gösterilir. Bu ifadeler daha sonra (6.6) ve (6.2) ile formülize edilecektir. Ama muhtemelen yanlış anlaşılabilir: "Koşullu riskteki değer", koşullu bir dağılıma göre, riskteki değeri göstermek için de kullanılabilir ve beklenen eksiklik, X^- eksikliğinin beklentisi olarak anlaşılabilir. Bu yüzden, **riskteki ortalama değer** (Average Value at Risk) terimini tercih ediyoruz. (6.1)'den

$$AV@R_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda qx(t)dt$$

olduğuna dikkat ediniz. Özel olarak, $AV@R_\lambda(X)$ tanımı her bir $X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ için uyarlanabilir ve Lemma 2.2 ışığında

$$AV@R_1(X) = -\int_0^1 q_X^+(t)dt = E[-X]$$

elde ederiz.

Tanım 6.25. *$Q : \mathbb{R} \to \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ dönüşümü her $A \subset \mathbb{R}$ Borel kümesi için $x \mapsto Q(x, A)$ ölçülebilir fonksiyon oluyorsa, Q'ya $\mathbb{R}$ üzerinde bir* ***stokastik çekirdek*** *(stochastic kernel)denir.*

Tanım 6.26. *μ ve ν, $\mathbb{R}$ üzerinde keyfi iki olasılık ölçüsü olsun. Tüm sınırlı artan $f \in C(\mathbb{R})$ fonksiyonları için*

$$\int f d\mu \;\geq\; \int f d\nu$$

ise, μ, ***ν'yü stokastik olarak bastırır*** *(μ stochastically dominates ν) denir ve $\mu \succeq_{mon} \nu$ yazılır.*

Ayrıca ν ve μ, $\mathscr{M}$'de piyangolar olsun. Eğer tüm u fayda fonksiyonları için

$$\int u d\mu \ \geq \ \int u d\nu$$

oluyorsa μ, ***ν'ye göre düzgün tercih edilir*** *(μ is uniformly preferred over ν) denir ve $\mu \succeq_{uni} \nu$ ile gösterilir.*

Teorem 6.18. *Herhangi bir $\mu, \nu \in \mathscr{M}$ için aşağıdaki koşullar denktir:*

(a) $\mu \succcurlyeq_{uni} \nu$*'dür.*

(b) Her f artan fonksiyonu için $\int f d\mu \geq \int f d\nu$*'dür.*

(c) Her $c \in \mathbb{R}$ için

$$\int (c-x)^{+}\mu(dx) \leq \int (c-x)^{+}\nu(dx)$$

tir.

(d) F_μ ve F_ν, μ ve ν'nün dağılım fonksiyonları ise, $\forall c \in \mathbb{R}$ için

$$\int_{-\infty}^{c} F_\mu(x)dx \leq \int_{-\infty}^{c} F_\nu(x)dx$$

tir.

(e) q_μ ve q_ν, μ ve ν için dağılım dilimi fonksiyonları ise, $0 < t < 1$ için

$$\int_{0}^{1} q_\mu(s)ds \geq \int_{0}^{1} q_\nu(s)ds$$

dir.

(f) Sırasıyla μ ve ν dağılımlarına sahip X_μ ve X_ν rassal değişkenlerinin tanımlı olduğu bir $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayı vardır ve

$$E[\ X_\nu \mid X_\mu\ ] \leq X_\mu \quad (P\text{-}hhk)$$

dir.

(g) $\mathbb{R}$ üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir $Q(x, dy)$ stokastik çekirdeği vardır:

- $Q(x, \cdot) \in \mu$
- $\forall x$ *için* $m()Q(x, \cdot) \leq x$
- $\forall A \subset \mathbb{R}$ *Borel kümesi için* $\mu Q(A) := \int Q(x, A)\mu(dx)$ *ile tanımlanan* μQ *ölçüsü için* $\nu = \mu Q$*'dur.*

Uyarı 6.9. *Teorem 6.18, $\mathbb{R}$'de sonlu ortalamaya sahip olasılık ölçüleri üzerindeki $\succcurlyeq_{uni}$ kısmi sıralamanın riskteki ortalama değer açısından karakterize edilebilir olduğunu gösterir: X_μ ve X_ν, μ ve ν dağılımlarına sahip rastgele değişkenler olmak üzere, $\forall \lambda \in (0, 1]$ için*

$$\mu \succcurlyeq_{uni} \nu \iff AV@R_\lambda(X_\mu) \leq AV@R_\lambda(X_\nu)$$

dür.

Uyarı 6.10. *$X \in L^\infty$ için*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} V@R_\lambda(X) = -ess \inf X = \inf\{\ m \mid P[\ X + m < 0\ ] \leq 0\ \}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, Örnek 5.10'da tanımlanan L^∞ üzerindeki en kötü durum risk ölçüsünü

$$AV@R_0(X) := V@R_0(X) := -ess \inf X$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Hatırlayalım ki, bunlar üstten süreklidir ama genellikle alttan sürekli değildir.

Yardımcı Teorem 6.12. *$\lambda \in (0, 1)$ ve X'in herhangi bir q λ-dağılım dilimi için,*

$$AV@R_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}E\ [\ (q - X)^+\ ] - q = \frac{1}{\lambda}\inf_{r \in \mathbb{R}}(E\ [\ (r - X)^+\ ] - \lambda r) \tag{6.2}$$

dir.

Kanıt. q_X, $q_X(\lambda) = q$ olarak ifade edilen bir dağılım dilimi fonksiyonu olsun. Yardımcı

Teorem 2.2'den

$$\frac{1}{\lambda}E\,[\,(q-X)^+\,]-q=\frac{1}{\lambda}\int_0^1 (q-q_X(t))^+dt-q=-\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X(t)dt=AV@R_\lambda(X)$$

tir. Bu ilk özdeşliği kanıtlar. İkincisi de Yardımcı Teorem 2.4'ten çıkar. $\square$

Teorem 6.19. *$(\Omega,\mathscr{F})$ üzerinde herhangi iki Q ve P olasılık ölçüleri için bir $N\in\mathscr{F}$ kümesi ve bir $\varphi\geq 0$ $\mathscr{F}$ ölçülebilir fonksiyonu vardır öyle ki her $Q(N)=0$ ve her $A\in\mathscr{F}$ için*

$$P[\,A\,]=P[\,A\cap N\,]+\int_A \varphi\,dQ$$

olur. Burada

$$\frac{dP}{dQ}:=\begin{cases}\varphi & ,\ N^c\text{'de ise}\\ +\infty & ,\ N\text{'de ise}\end{cases}$$

olur.

Yardımcı Teorem 6.13. *(Neyman-Pearson Lemması) $(\Omega,\mathscr{F})$ üzerinde P ve Q iki olasılık ölçüsü olsun ve Teorem 6.19'daki gibi Q'ya göre P'nin Lebesgue ayrıştırmasını, $A\in\mathscr{F}$ için*

$$P[\,A\,]=P[\,A\cap N\,]+\int_A \frac{dP}{dQ}\,dQ$$

ile tanımlayalım. $c\geq 0$ sabiti için

$$A^0:=\left\{\frac{dP}{dQ}>c\right\}$$

olsun. Burada, N üzerinde $dP/dQ=\infty$ düzenlemesinden faydalanılmıştır.

Bir kümenin karakteristik fonksiyonu 0 ve 1 değerlerini alır. Sadece $\mathscr{F}$ ölçülebilir $\psi:\Omega\to[0,1]$ fonksiyonlarını dikkate alalım. $\mathscr{R}$ bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesi olsun.

Teorem 6.20. $\Pi:=\frac{1}{2}(P+Q)$ *olsun ve $\varphi:=dP/dQ$ yoğunluğunu yukarıdaki gibi tanımlayalım.*

(a) $c\geq 0$ alalım ve Π-hhk olmak üzere, $\psi^0\in\mathscr{R}$ olduğunu kabul edelim.

$$\psi^0(\omega)=\begin{cases}1 & ,\ \varphi(\omega)>c\\ 0 & ,\ \varphi(\omega)<c\end{cases}\tag{6.3}$$

olur. O halde herhangi bir $\psi \in \mathscr{R}$ için

$$\int \psi \, dQ \;\leq\; \int \psi^0 \, dQ \quad \Longrightarrow \quad \int \psi \, dP \;\leq\; \int \psi^0 \, dP \tag{6.4}$$

dir.

(b) *Herhangi bir $a_0 \in (0,1)$ için $\int \psi^0 \, dQ = a_0$ olacak şekilde (6.3)'te ifade edildiği gibi bir $\psi^0 \in \mathscr{R}$ vardır. Daha açık olarak, c, Q altında φ'nin bir $(1-a_0)$-dağılım dilimi ise ψ^0'ı,*

$$\psi^0 = I_{\{\varphi > c\}} + \kappa I_{\{\varphi = c\}}$$

ile tanımlayabiliriz. Burada κ,

$$\kappa := \begin{cases} 0 & , \quad Q[\varphi = c] = 0 \text{ ise} \\ \dfrac{a_0 - Q[\varphi > c]}{Q[\varphi = c]} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

(c) *(6.4)'ü sağlayan herhangi bir $\psi^0 \in \mathscr{R}$, bir $c \geq 0$ için (6.3)'te tanımlandığı gibidir.*

Teorem 6.21. *$\lambda \in (0,1]$ için, $AV@R_\lambda$ alttan sürekli bir tutarlı risk ölçüsüdür ve $X \in \mathcal{X}$ olmak üzere,*

$$AV@R_\lambda(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X] \tag{6.5}$$

gösterimine sahiptir. Burada P-hhk olmak üzere $\mathcal{Q}_\lambda$, dQ/dP yoğunluklu $1/\lambda$ ile sınırlı olan tüm $Q \ll P$ olasılık ölçülerinin kümesidir. Buna ek olarak, Sonuç 5.2'den $\mathcal{Q}_\lambda$, $\mathcal{Q}_{max}$ maksimal kümesine eşittir.

Kanıt. $\mathcal{Q}_1 = \{P\}$ olduğundan, $\lambda = 1$ için varsayım açıktır. $0 < \lambda < 1$ için $\rho_\lambda(X) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X]$ tutarlı risk ölçüsünü düşünelim. Öncelikle $X < 0$ verildiğini varsaylım. $d\tilde{P}/dP = X/E[\ X\ ]$'den bir $\tilde{P} \approx P$ ölçüsü tanımlayalım. O halde,

$$\rho_\lambda(X) = \frac{E[-X]}{\lambda} \sup \{ \ \tilde{E}[\ \varphi\ ] \mid 0 \leq \varphi \leq 1, \ E[\ \varphi\ ] = \lambda \ \}$$

dır. Şüphesiz, sağdaki $E[\varphi] = \lambda$ koşulu $E[\varphi] \leq \lambda$ ile değiştirilebilir. Bu durumda Teorem 6.20'deki şekliyle Neyman-Pearson yardımcı teoremini kullanabiliriz.

$E[\varphi_0] = \lambda$ olduğunda X'in bir q λ-dağılım dilimi ve bir $\kappa \in [0,1]$ için supremum;

$$\varphi_0 = I_{\{X<q\}} + \kappa I_{\{X=q\}}$$

ile elde edilir. Sonuç olarak

$$\rho_\lambda(X) = \frac{E[-X]}{\lambda} \cdot \tilde{E}[\ \varphi_0\ ] = \frac{1}{\lambda} E[-X\varphi_0]$$

dır. $dQ_0 = \lambda^{-1}\varphi_0 dP$, $\mathcal{Q}_\lambda$'da bir olasılık ölçüsü tanımladığından

$$\begin{aligned}
\rho_\lambda(X) &= \max_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda} E_Q[-X] = E_{Q_0}[-X] \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(E[\ -X;\ X<q\ ] - q\lambda + qP[\ X<q\ ]\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}E[(q-X)^+] - q \\
&= AV@R_\lambda(X)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Buradaki son adımda (6.2)'yi kullandık. Bu, $X < 0$ için (6.5)'i kanıtlar. Keyfi $X \in L^\infty$ için, ρ_λ ve $AV@R_\lambda$'nın her ikisinin de nakit değişmezliğini kullanırız. Geriye Sonuç 5.2'nin maksimal kümesi $\mathcal{Q}_\lambda$'yı kanıtlamak kalır. Bu doğrultuda, $Q \notin \mathcal{Q}_\lambda$ için

$$\sup_{X\in\mathcal{X}} \left(E_Q[-X] - AV@R_\lambda(X)\ \right) = +\infty$$

olduğunu gösterelim. dQ/dP yoğunluğunu φ ile gösterelim. $P[\ \varphi \wedge k \geq 1/\lambda'\ ] > 0$ şartını sağlayan $\lambda' \in (0,\lambda)$ ve $k > 1/\lambda'$ vardır. $c > 0$ için $X^{(c)} \in \mathcal{X}$'i

$$X^{(c)} := -c(\varphi \wedge k) I_{\{\varphi \geq 1/\lambda'\}}$$

ile tanımlayalım.

$$P[\ X^{(c)} < 0\ ] = P\left[\ \varphi \geq \frac{1}{\lambda'}\ \right] \leq \lambda' < \lambda$$

olduğundan, $V@R_\lambda(X^{(c)}) = 0$ elde ederiz ve (6.2)

$$AV@R_\lambda(X^{(c)}) = \frac{1}{\lambda}E[-X^{(c)}] = \frac{c}{\lambda}E\left[\varphi \wedge k;\ \varphi \geq \frac{1}{\lambda'}\right]$$

yü sağlar. Diğer taraftan

$$E_Q[-X^{(c)}] = c \cdot E\left[\varphi \cdot \varphi \wedge k;\ \varphi \geq \frac{1}{\lambda'}\right] \geq \frac{c}{\lambda'}\ E\left[\varphi \wedge k;\ \varphi \geq \frac{1}{\lambda'}\right]$$

dür. Sonuç olarak, $E_Q[-X^{(c)}]$ ve $AV@R_\lambda(X^{(c)})$ arasındaki fark, $c \uparrow \infty$ iken belirli olur. □

Uyarı 6.11. *Yukarıdaki kanıttan, $\lambda \in (0,1)$ için (6.5)'te*

$$\frac{dQ_0}{dP} = \frac{1}{\lambda}\left(I_{\{X<q\}} + \kappa I_{\{X=q\}}\right)$$

yoğunluğuna sahip olan $Q_0 \in \mathcal{Q}_\lambda$ ölçüsü tarafından maksimum elde edilir. Burada, q, X'in λ-dağılım dilimi ve κ,

$$\kappa := \begin{cases} 0 & ;\ P[X=q]=0 \textit{ ise} \\ \dfrac{\lambda - P[X<q]}{P[X=q]} & ;\ \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir.

Sonuç 6.4. *WCE_λ, (5.7)'de tanımlanan tutarlı risk ölçüsü olmak üzere, her $X \in \mathcal{X}$ için,*

$$\begin{aligned} AV@R_\lambda(X) &\geq WCE_\lambda(X) \\ &\geq E[\ -X \mid -X \geq V@R_\lambda(X)\ ] \qquad (6.6) \\ &\geq V@R_\lambda(X) \end{aligned}$$

olur. Dahası, X sürekli bir dağılıma sahip ise

$$P[\ X \leq q_\lambda^+(X)\ ] = \lambda \qquad (6.7)$$

olur. Bu durumda ise

$$AV@R_\lambda(X) = WCE_\lambda(X) = E[-X \mid -X \geq V@R_\lambda(X)]$$

olur.

Kanıt. $P[\ A\ ] \geq \lambda$ ise, P'ye göre $P[\ \cdot \mid A\ ]$ yoğunluğu $1/\lambda$ ile sınırlıdır. Dolayısıyla

Teorem 6.21, $WCE_\lambda(X) \leq AV@R_\lambda(X)$ olmasını gerektirir.

$$P[-X \geq V@R_\lambda(X) - \varepsilon\ ] > \lambda$$

olduğundan,

$$WCE_\lambda(X) \geq E\ [-X \mid -X \geq V@R_\lambda(X) - \varepsilon\ ]$$

elde ederiz ve ikinci eşitsizlik, $\varepsilon \downarrow 0$ için limit alındığında çıkar. Buna ek olarak, (6.7) sağlandığı sürece (6.2)'den

$$AV@R_\lambda(X) = E\ [-X \mid\ -X \geq V@R_\lambda(X)\ ]$$

tir. □

Uyarı 6.12. *Sonuç 7.7'de, eğer alttaki olasılık uzayı yeterince zenginse iki tutarlı risk ölçüsü olan $AV@R_\lambda$ ve WCE_λ'nın özdeş olduğunu göreceğiz. Olmadığı durumda ise, (6.6)'daki ilk eşitsizlik bir X için eşitlik olabilir, [1]. Buna ek olarak,*

$$E\ [\ -X \mid\ -X \geq V@R_\lambda(X)\ ]$$

fonksiyoneli bir konveks risk ölçüsü tanımlamaz. Sonuç olarak; (6.6)'daki ikinci eşitsizlikte, eşitlik durumu pek gözlenemez.

Uyarı 6.13. *Önerme 6.15'te, $V@R_\lambda$'dan büyük en küçük konveks risk ölçüsünün var olmadığını gördük. Ama dikkatimizi $V@R_\lambda$'dan daha büyük konveks risk ölçülerinin sınıfına odaklarsak ve sadece bir rastgele değişkenin dağılımını dikkate alırsak durum farklıdır. Aslında, alttaki olasılık uzayı yeterince zengin olduğunda Teorem 7.25'te, $AV@R_\lambda$'nın bu sınıfın en küçüğü olduğunu göreceğiz. Bu anlamda, riskteki ortalama değer, riskteki değere en ihtiyatlı yaklaşım olarak kabul edilebilir.*

7. YASA DEĞİŞMEZ RİSK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde verilen yasa değişmezi risk ölçülerinin temsilleri ilk olarak tutarlı durumda Kusuoka [26] tarafından ifade edilmiştir; ayrıca genel konveks duruma genelleştirmesi için Kunze [25], Frittelli ve Rosazza Gianin [20]'e bakılabilir.

$V@R_\lambda$ ve $AV@R_\lambda$ sadece verilen P olasılık ölçüsü altında bir durumun dağılımını içerir. Bu bölümde, yasa değişmezinin bu özelliğini taşıyan tüm risk ölçülerinin sınıfını inceleyeceğiz.

Tanım 7.27. *$\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, P)$ üzerinde bir ρ parasal risk ölçüsü, X ve Y, P altında aynı dağılıma sahip olduğunda $\rho(X) = \rho(Y)$ ise* ***yasa değişmezi*** *(law-invariant) diye isimlendirilir.*

Bu bölüm boyunca, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayının, sürekli bir dağılıma sahip bir rastgele değişkenin desteklenmesi bakımından yeterince zengin olduğunu varsayıyoruz. Bu koşul, ancak ve ancak $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ atomsuz olduğunda sağlanır.

Teorem 7.22. *$\mu, \nu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ için aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) $\mu \succeq_{mon} \nu$'dür.

(b) Tüm x'ler için μ ve ν'nün dağılım fonksiyonları $F_\mu(x) \leq F_\nu(x)$'i sağlar.

(c) μ ve ν için dağılım dilimi fonksiyonlarının herhangi bir çifti, hemen hemen heryerde $t \in (0,1)$ için $q_\mu(t) \geq q_\nu(t)$'yi sağlar.

(d) P-hhk olmak üzere $X_\mu \geq X_\nu$ olacak şekilde μ ve ν dağılımlarına sahip X_μ ve X_ν rassal değişkenleri olan bir $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayı vardır.

(e) $\mathbb{R}$ üzerinde $Q(x, (-\infty, x]) = 1$ ve $\nu = \mu Q$ olacak şekilde bir $Q(x, dy)$ stokastik çekirdeği vardır. Özellikle, $\mu \succeq_{mon} \nu$ olması, $\mu \succeq_{uni} \nu$ olmasını gerektirir.

Uyarı 7.14. *Herhangi bir ρ yasa değişmezi parasal risk ölçüsü, Tanım 6.26'de tanımlanan $\succeq_{mon}$ kısmi sıralamasına göre monotondur. Daha açık bir ifadeyle X_μ ve X_ν, μ ve ν dağılımlarına sahip rastgele değişkenlerse,*

$$\mu \succeq_{mon} \nu \quad \Longrightarrow \quad \rho(X_\mu) \leq \rho(X_\nu)$$

dür. Bunu kanıtlamak amacıyla, μ ve ν için q_μ ve q_ν dağılım dilimi fonksiyonları olsun ve $(0,1)$ üzerinde düzgün dağılıma sahip bir U rastgele değişkenini alalım. O halde Teorem 7.22'den $\tilde{X}_\mu := q_\mu(U) \geq q_\nu(U) =: \tilde{X}_\nu$'dür ve Lemma 2.2'den $\tilde{X}_\mu$ ve $\tilde{X}_\nu$,X_μ ve X_ν gibi aynı dağılıma sahiptir. Dolayısıyla, ρ'nun yasa değişmezliği ve monotonluğu, $\rho(X_\mu) = \rho(\tilde{X}_\mu) \leq \rho(\tilde{X}_\nu) = \rho(X_\nu)$ olmasını gerektirir.

Yardımcı Teorem 7.14. *$X \in L^\infty$ ve $Y \in L^1$ için,*

$$\int_0^1 q_X(t) q_Y(t) dt = \sup_{\tilde{X} \sim X} E[\ \tilde{X} Y\ ]$$

dir. Burada $\tilde{X} \sim X$ olması, $\tilde{X}$ in X gibi aynı dağılıma sahip olan bir rastgele değişken olduğunu gösterir.

Kanıt. Teorem 2.1'deki Hardy-Littlewood eşitsizliğinin üst tarafından "$\geq$" sağlanır. Eşitsizliğin tersini kanıtlamak için, öncelikle Y'nin bir sürekli dağılıma sahip olduğunu varsayalım. O halde Yardımcı Teorem 2.3, $U := F_Y(Y)$'nin bir düzgün dağılıma sahip olmasını ve P-hhk olmak üzere, $Y = q_Y(U)$ olmasını gerektirir. Yardımcı Teorem 2.2'den $\tilde{X} := q_X(U) \sim X$ olduğundan

$$E[\ \tilde{X} Y\ ] = E[\ q_X(U) q_Y(U)\ ] = \int_0^1 q_X(t) q_Y(t) dt$$

yi elde ederiz ve dolayısıyla "$\leq$"tir.

Genel durumda, $P[\ Y = y\ ] > 0$ şartını sağlayan tüm y'lerin kümesi D olsun ve bir sürekli dağılıma sahip olan bir $Z \in L^1_+$ rastgele değişkenini alalım. Önerme 2.4'ten böyle bir rastgele değişken vardır.

$$Y_n := Y + \frac{1}{n} Z I_{\{Y \in D\}}$$

dağılımını süreklidir. Gerçekten, herhangi bir y için

$$P[\ Y_n = y\ ] = P[\ Y = y, Y \notin D\ ] + \sum_{X \in D} P[\ Y = x, Z = n(y - x)\ ] = 0$$

dır. Dolayısıyla, $U_n := F_{Y_n}(Y_n)$, $(0,1)$ üzerinde düzgün dağılır. $X_n := q_X(U_n)$, X ile aynı dağılıma sahiptir. X'e uygun bir sabit eklenerek, genelliği bozmadan $X \geq 0$

olduğunu varsayabiliriz. $Y_n \geq Y$ olduğundan neredeyse her yerde $q_{Y_n} \geq q_Y$'dir ve kanıtın ilk bölümünden anlaşıldığı gibi

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_X(t)q_Y(t)dt &\leq \liminf_{n\uparrow\infty} \int_0^1 q_X(t)q_{Y_n}(t)dt \\ &= \liminf_{n\uparrow\infty} \sup_{\tilde{X}\sim X} E\,[\ \tilde{X}Y_n\ ] \\ &= \sup_{\tilde{X}\sim X} E\,[\ \tilde{X}Y\ ]\end{aligned}$$

dir. Burada her $\tilde{X} \sim X$ için son özdeşlikten

$$|\ E[\ X\tilde{Y}_n\ ] - E[\ \tilde{X}Y\ ]\ | \leq \frac{1}{n}\|Z\|_1\|X\|_\infty$$

sonucu çıkar. □

Artık konveks risk ölçülerinin yasa değişmezliği için bir karakterizasyon elde edebiliriz.

Teorem 7.23. *ρ bir konveks risk ölçüsü olsun ve ρ'nun üstten sürekli olduğunu varsayalım. O halde, ρ'nun yasa değişmezi olması için gerek ve yeter şart, $\alpha_{min}(Q)$ minimal ceza fonksiyonunun $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ olduğunda P altında yalnızca $\varphi_Q := \frac{dQ}{dP}$ yoğunluğunun yasasına bağlı olmasıdır. Bu durumda ρ,*

$$\rho(X) = \sup_{Q\in\mathscr{M}_1(P)} \left(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_Q}(t)dt - \alpha_{min}(Q)\right)$$

gösterimine sahiptir ve minimal ceza fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\alpha_{min}(Q) &= \sup_{X\in\mathscr{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_Q}(t)dt \\ &= \sup_{X\in L^\infty} \left(\int_0^1 q_{-X}(t)q_{\varphi_Q}(t) - \rho(X)\right)\end{aligned} \tag{7.1}$$

i sağlar.

Kanıt. Öncelikle ρ'nun yasa değişmezi olduğunu varsayalım. O halde $X \in \mathscr{A}_\rho$ olması her $\tilde{X} \sim X$ için $\tilde{X} \in \mathscr{A}_\rho$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem 7.14'ün son adımını kullandığımızda,

$$\alpha_{min}(Q) = \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} E\left[-X_{\varphi_Q}\right] = \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} \sup_{\tilde{X} \sim X} E\left[-\tilde{X}_{\varphi_Q}\right] = \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} \int_0^1 q_{-X}(t) q_{\varphi_Q}(t) dt$$

dir. Buradan $\alpha_{min}(Q)$'nun sadece φ_Q yoğunluğunun yasasına bağlı olduğu sonucu çıkar. (7.1)'deki ikinci özdeşliği kontrol etmek amacıyla, her $X \in L^\infty$ için $\tilde{X} := X + \rho(X)$, $\mathscr{A}_\rho$'ya aittir ve $q_{-X} - \rho(X)$, $-\tilde{X}$ için bir dağılım dilimi fonksiyonudur.

Tersine, $\alpha_{min}(Q)$'nun sadece φ_Q yoğunluğunun yasasına bağlı olduğunu varsayalım. Aynı yasaya sahip olan φ_Q ve $\varphi_{\tilde{Q}}$'yu göstermek için $\tilde{Q} \sim Q$ yazalım. O halde Yardımcı Teorem 7.14,

$$\begin{aligned}
\rho(X) &= \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} \left(E_Q[-X] - \alpha_{min}(Q)\right) \\
&= \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} \sup_{\tilde{Q} \sim Q} \Big(E\left[-X_{\varphi_{\tilde{Q}}}\right] - \alpha_{min}(Q)\Big) \\
&= \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} \left(\int_0^1 q_{-X}(t) q_{\varphi_Q}(t) dt - \alpha_{min}(Q)\right)
\end{aligned}$$

yu sağlar. □

Örnek 7.14. *$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir artan konkav fonksiyon olsun ve c, $u(\mathbb{R})$'nin içinde verilen bir sabit olduğunda $E[\ u(X)\ ] \geq c$ ise bir $X \in L^\infty$ pozisyonunun kabul edilebilir olduğunu varsayalım. Örnek 3.4'te kabul kümesinden bir ρ konveks risk ölçüsü elde edilebileceğini görmüştük. X ve Y aynı dağılıma sahip iki rassal değişken ise $u(X) = u(Y)$ olacağından tanımladığımız kabul kümesine göre aynı risk değerine sahip olurlar. Bu nedenle ρ'nun yasa değişmezi olduğu açıktır ve bu, Önerme 11.23'de ρ'nun alttan ve dolayısıyla üstten sürekliliğiyle gösterilecektir. Dahası, karşılık gelen minimal ceza fonksiyonu*

$$\alpha_{min}(Q) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}\left(x_0 + \int_0^1 \ell^*(\lambda \cdot q_{\varphi_Q}(t)\ ) dt\right)$$

olarak hesaplanabilir. Burada,

$$\ell^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(xy + u(-x)\right) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(xy - \ell(x)\right)$$

konveks artan $\ell(x) := -u(-x)$ kayıp fonksiyonunun Fenchel-Legendre dönüşümüdür.

Aşağıdaki teorem, $AV@R_\lambda$ risk ölçülerinin çok önemli rolünü açıklar. Bu risk ölçüleri, L^∞ üzerinde riskin yasa değişmezi konveks ölçüleri için yapı malzemesi olarak görülebilir. Burada $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ uzayı atomsuz varsayılacaktır.

Teorem 7.24. *Bir ρ konveks risk ölçüsünün yasa değişmezi ve üstten sürekli olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta_{min}(\mu) = \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} \int_{(0,1]} AV@R_\lambda(X)\mu(d\lambda)$$

olmak üzere,

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathscr{M}_1((0,1])} \left(\int_{(0,1]} AV@R_\lambda(X)\mu(d\lambda) - \beta_{min}(\mu) \right) \tag{7.2}$$

olmasıdır.

Kanıt. (7.2)'nin sağ tarafı, bir yasa değişmezi konveks risk ölçüsünün üstten sürekli olduğunu tanımlar. Tersine ρ, yasa değişmezi ve üstten sürekli olsun. $\varphi := \varphi_Q = \frac{dQ}{dP}$ olmak üzere, $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ için,

$$\int_0^1 q_{-X}(t) q_\varphi(t) dt = \int_{(0,1]} AV@R_s(X)\mu(ds)$$

olacak şekilde bir $\mu \in \mathscr{M}_1((0,1])$ ölçüsünün var olduğunu göstereceğiz. Sonra varsayımı, Teorem 7.23'ten sonuçlandıracağız. $q_{-X}(t) = V@R_{1-t}(X)$ ve $q_\varphi(t) = q_\varphi^+(t)$ olduğundan, hemen hemen heryerde $t \in (0,1)$ için

$$\int_0^1 q_{-X}(t) q_\varphi(t) dt = \int_0^1 V@R_t(X) q_\varphi^+(1-t) dt$$

dir. q_φ^+ artan ve sağdan sürekli olduğundan $(0,1]$ üzerindeki sınırlı aralıklarda sonlu değer alan bir pozitif ν ölçüsü için $q_\varphi^+(t) = \nu((1-t, 1])$ şeklinde yazabiliriz. Üstelik $\mu(dt) = t\ \nu(dt)$ şeklinde verilen μ ölçüsü, $(0,1]$ üzerinde bir olasılık ölçüsüdür:

$$\int_{(0,1]} t\ \nu(dt) = \int_0^1 \nu((s,1]) ds = -\int_0^1 q_\varphi^+(1-t) dt = \int_0^1 q_\varphi^+(s) ds = E[\ \varphi\ ] = 1$$

dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_{-X}(t)q_\varphi(t)dt &= \int_0^1 V@R_t(X)\int_{(t,1]}\frac{1}{s}\;\mu(ds)\;dt \\ &= \int_{(0,1]}\frac{1}{s}\int_0^s V@R_t(X)\;dt\;\mu(ds) \\ &= \int_{(0,1]} AV@R_s(X)\;\mu(ds)\end{aligned} \tag{7.3}$$

dir.

Tersine, $(0,1]$ üzerinde herhangi bir μ olasılık ölçüsü için, $q(t) := \int_{(1-t,1]} s^{-1}\;\mu(ds)$ ile tanımlı q fonksiyonu, bir $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ ölçüsünün $\varphi := q(U)$ yoğunluğunun dağılım dilimi fonksiyonu olarak görülebilir. Burada U, $(0,1)$ üzerinde bir düzgün dağılıma sahiptir. Bunlarla birlikte, $(0,1]$ üzerinde μ olasılık ölçüleri ile φ yoğunluklarının dağılımları arasında birebir bir eşleme elde ederiz. □

Teorem 7.24 tutarlı konveks risk ölçüleri için aşağıdaki şekli alır.

Sonuç 7.5. *Bir ρ tutarlı risk ölçüsünün üstten sürekli ve yasa değişmezi olması için gerek ve yeter koşul, bir $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}_1((0,1])$ kümesi için,*

$$\rho(X) = \sup_{\mu\in\mathscr{M}}\int_{(0,1]} AV@R_{\lambda(X)}\;\mu(d\lambda)$$

olmasıdır.

Bir $\mathcal{G} \subset \mathscr{F}$ σ-cebirine göre bir pozisyon yerine koşullu beklentisini kullandığımızda, pozisyonun değişkenliği P ölçüsüne göre azalır. Konveks bir risk ölçüsü yasa değişmezi ise, değişkenliğin bu şekilde azaltılmasını riskteki azalma ile gösterecektir.

Sonuç 7.6. *ρ'nun üstten sürekli ve yasa değişmezi olan bir konveks risk ölçüsü olduğunu varsayalım. Bu durumda ρ,*

$$X \succcurlyeq_{uni} Y :\Longleftrightarrow \textit{Her } u \textit{ fayda fonksiyonu için } E[u(X)] \geq E[u(Y)]$$

şeklinde ifade edilen $\succcurlyeq_{uni}$ sıralamasına göre monotondur: $Y, X \in \mathcal{X}$ için

$$Y \succcurlyeq_{uni} X \quad\Longrightarrow\quad \rho(Y) \leq \rho(X)$$

dir. Özellikle, $X \in \mathcal{X}$, herhangi bir $\mathcal{G} \subset \mathscr{F}$ σ-cebiri için

$$\rho(E[\ X \mid \mathcal{G}\ ]) \leq \rho(X)$$

ve

$$\rho(E[\ X\ ]) = \rho(0) - E[\ X\ ] \leq \rho(X)$$

tir.

Kanıt. İlk eşitsizlik, Teorem 7.24 ile Uyarı 6.9'un birleşiminden çıkar. İkinci eşitsizlik, Teorem 6.18'e göre $E[\ X \mid \mathcal{G}\ ] \succcurlyeq_{uni} X$ olduğundan, ilk eşitsizliğin özel bir durumudur. Üçüncüsü, ikincide $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ alınarak elde edilir. $\square$

Teorem 7.22'den $\mu \succcurlyeq_{mon} \nu$ olması, $\mu \succcurlyeq_{uni} \nu$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla, konveks risk ölçüleri için verilen yukarıdaki sonuç, parasal risk ölçüleri için verilen Uyarı 7.14'ten daha güçlüdür.

Uyarı 7.15. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset ... \subset \mathscr{F}$ olacak şekilde artan σ-cebirleri olsun. $n \uparrow \infty$ iken*

$$\rho(E[\ X \mid \mathcal{G}_n\ ]) \longrightarrow \rho(E[\ X \mid \mathcal{G}_\infty\ ])$$

olur. Burada ρ, Sonuç 7.6'da verildiği gibi ve $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\bigcup_n \mathcal{G}_n)$'dir. Gerçekten Doob'un martingale yakınsaklık teoreminden ([4]) P-hhk olmak üzere, $n \uparrow \infty$ iken $E[\ X \mid \mathcal{G}_n\ ] \to E[\ X \mid \mathcal{G}_\infty\ ]$'dur. Dolayısıyla Fatou özelliği ve ve Sonuç 7.6;

$$\begin{aligned} \rho(E[\ X \mid \mathcal{G}_\infty]) &= \rho(\lim_{n\uparrow\infty} E[\ X \mid \mathcal{G}_n\ ]) \\ &\leq \liminf_{n\uparrow\infty} \rho(\ E[\ X \mid \mathcal{G}_n\ ]) \\ &\leq \rho(\ E[\ X \mid \mathcal{G}_\infty\ ]) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir.

Önerme 6.15'in aksine aşağıdaki teorem, üstten sınırlı olan tüm yasa değişmezi konveks risk ölçüleri sınıfında $AV@R_\lambda$'nın $V@R_\lambda$'ya en korumacı (conservative) yaklaşımı olduğunu gösterir.

Teorem 7.25. *$AV@R_\lambda$, üstten sürekli olan ve $V@R_\lambda$ yı üstten sınırlayan en küçük yasa değişmezi konveks risk ölçüsüdür.*

Kanıt. $AV@R_\lambda$'nın $V@R_\lambda$'yı üstten sınırladığı zaten (6.6)'da verildi. ρ'nun $V@R_\lambda$'yı üstten sınırlayan ve üstten sürekli olan başka bir yasa değişmezi konveks risk ölçüsü olduğunu varsayalım. Verilen bir $X \in \mathcal{X}$ için

$$\rho(X) \geq AV@R_\lambda(X) \tag{7.4}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\varepsilon > 0$ alalım ve $A := \{\omega \in \Omega : -X(\omega) \geq V@R_\lambda(X) - \varepsilon\}$ ve

$$Y := E[\ X \mid XI_{A^c}] = X \cdot I_{A^c} + E[\ X \mid A\ ] \cdot I_A$$

olsun. A^c üzerinde $Y > q_X^+(\lambda) + \varepsilon \geq E[\ X \mid A\ ]$ olduğundan, $P[\ Y < E[\ X \mid A\ ]\ ] = 0$ elde ederiz. Diğer taraftan $P[\ Y \leq E[\ X \mid A\ ]\ ] \geq P[\ A\ ] > \lambda$'dır ve bu $V@R_\lambda(Y) = E[\ -X \mid A\ ]$ olmasını gerektirir. ρ, $V@R_\lambda$'yı üstten sınırladığından $\rho(Y) \geq E[\ -X \mid A\ ]$'dır. Sonuç olarak, Sonuç 7.6'dan

$$\rho(X) \geq \rho(Y) = E[\ -X \mid -X \geq V@R_\lambda(X) - \varepsilon\ ]$$

dur. $\varepsilon \downarrow 0$ alınarak,

$$\rho(X) \geq E[\ -X \mid -X \geq V@R_\lambda(X)\ ] \geq V@R_\lambda(X)$$

sağlanır. X'in dağılımı sürekli ise, Sonuç 6.4'te belirtilen sağdaki koşullu beklenti, $AV@R_\lambda(X)$'e eşittir ve buradan (7.4)'ü elde ederiz. X'in dağılımı sürekli değilse, $P[\ X = x\ ] > 0$ olacak şekildeki tüm x noktalarının kümesini D ile ifade edelim ve sürekli dağılıma sahip bir $Z \geq 0$ sınırlı rastgele değişkenini alalım. Önerme 2.4'ten böyle bir rastgele değişken vardır. Yardımcı Teorem 7.14'ün kanıtında $X_n := X + \frac{1}{n}ZI_{\{X\in D\}}$'nın bir sürekli dağılıma sahip olduğunu gördük. Üstelik X_n, X'e azalarak yaklaşır. Her X_n için (7.4) eşitsizliği sağlanır ve üstten süreklilikten X_n'ler X'e genişler. □

Sonuç 7.7. *Olasılık uzayı atomsuz ise $AV@R_\lambda$ ile WCE_λ denktir.*

Kanıt. Biz Sonuç 6.4'ten X bir sürekli dağılıma sahip olduğunda $WCE_\lambda(X) = AV@R_\lambda(X)$ olduğunu biliyoruz. Önceki kanıtın sonundaki tekrarlı yaklaşımdan her $X \in \mathcal{X}$ için $WCE_\lambda(X) = AV@R_\lambda(X)$ sağlanır. □

8. KONKAV ÇARPIKLIK

Bu bölümdeki Teorem 8.26, ilk olarak [26]'da kanıtlanmıştır. Teorem 8.27 ve Sonuç 8.11'deki konkav çarpıklığın çekirdeğinin temsilleri Carlier ve Dana [5] tarafından verilmiştir. Ayrıca, bununla ilgili daha ayrıntılı uygulamalar için [6]'ya bakılabilir.

Şimdi yasa değişmezi konveks risk ölçüleri için Temsil Teoremi 7.24'te belirtilen

$$\rho_\mu(X) := \int AV@R_\lambda(X)\ \mu(d\lambda) \tag{8.1}$$

tutarlı risk ölçülerine yakından bakalım. Bu ρ_μ risk ölçülerini iki şekilde karakterize edeceğiz, ilki ölçü uzayının P olasılık ölçüsünün bazı Choquet integralleri olarak, sonraki bölümde ise, komotonluğun bir özelliği ile ifade edilecektir.

Önceki bölümde olduğu gibi, bu bölüm boyunca $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayının atomsuz olduğunu varsayacağız. $AV@R_\lambda$ tutarlı, alttan sürekli ve yasa değişmezi olduğundan herhangi bir μ dağılımından elde edilen ρ_μ karışımı, $(0,1)$ üzerinde en az bir μ olasılık ölçüsü için aynı özelliklere sahiptir. Uyarı 6.10'a göre $AV@R_0(X) = -ess\inf X$ olduğunda Tanım 6.24'ü $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde μ olasılık ölçülerine genişletebiliriz. Ancak, $\mu(\{0\}) > 0$ ise, $AV@R_0$ alttan sürekli olmadığından ρ_μ, sadece üstten sürekli olup alttan sürekli olmayacaktır.

ψ aşağıdaki lemmada tanımlanan konkav fonksiyon olsun. Buradaki ilk amacımız $\rho_\mu(X)$'in, $c_\psi(A) := \psi(P[\ A\ ])$ küme fonksiyonuna göre $-X$ kaybının Choquet integrali ile tanımlanabilir olduğunu göstermektir. Her ψ konkav fonksiyonunun bir sağdan sürekli, ψ'_+ sağdan türevine sahip olduğunu hatırlayın; Önerme 2.2'de görünüz. Öncesinde has konveks fonksiyonunun tanımına ihtiyacımız olacak.

Yardımcı Teorem 8.15. $0 < t < 1$ *için*

$$\psi'_+(t) = \int_{(t,1]} s^{-1}\ \mu(ds) \tag{8.2}$$

özdeşliği $[0,1]$ *üzerinde* μ *olasılık ölçüleri ile* $\psi : [0,1] \to [0,1]$, $\psi(0) = 0$ *ve* $\psi(1) = 1$ *olacak şekildeki artan konkav fonksiyonların arasında bire bir eşleme tanımlar. Dahası* $\psi(0+) = \mu(\{0\})$*'dır.*

Kanıt. Öncelikle (8.2) ve $\psi(1) = 1$ ile tanımlı ψ ve μ verilsin. O halde ψ, $[0,1]$'de de konkav ve artandır. Üstelik,

$$1 - \psi(0+) = \int_0^1 \psi^{'}(t)\ dt = \int_{(0,1]} \frac{1}{s} \int_0^1 I_{\{t<s\leq 1\}} dt\ \mu(ds) = \mu((0,1]) \leq 1$$

dir. Sonuç olarak, $\psi(0) := 0$ diyebiliriz ve $[0,1]$'de artan konkav bir fonksiyon elde ederiz.

Tersine, ψ verilirse $\psi^{'}_{+}(t)$, $(0,1)$ üzerinde azalan sağdan sürekli bir fonksiyondur ve $(0,1)$ üzerinde bazı ν yerel sonlu pozitif ölçüsü için $\psi^{'}_{+}(t) = \nu((t,1])$ olarak yazabiliriz. İlk olarak $(0,1]$'de μ'yü, $\mu(dt) = t\ \nu(dt)$ ile tanımlayalım. O halde (8.2)'yi sağlar ve Fubini'nin teoreminden

$$\mu((0,1]) = \int_0^1 \int_{(0,1]} I_{\{t<s\}}\ \nu\ (ds)\ dt = 1 - \psi(0+) \leq 1$$

dir. Sonuç olarak, $\mu(\{0\}) := \psi(0+)$ seçersek $[0,1]$ üzerinde bir μ olasılık ölçüsü tanımlar. □

Teorem 8.26. $[0,1]$ *üzerinde bir* μ *olasılık ölçüsü için,* ψ*, Yardımcı Teorem 8.15'te tanımlanan konkav fonksiyon olsun.* $X \in \mathcal{X}$ *için,*

$$\begin{aligned} \rho_\mu(-X) &= \psi(0+) AV@R_0(-X) + \int_0^1 q_X(t)\psi^{'}(1-t)\ dt \\ &= \int_{-\infty}^0 (\psi(P[\ X > x\ ]) - 1)\ dx + \int_0^\infty \psi(P[\ X > x\ ])\ dx \end{aligned}$$

tir.

Kanıt. $V@R_\lambda(-X) = q_X^-(1-\lambda)$'yı kullanarak, (7.3)'te olduğu gibi

$$\int_{(0,1]} AV@R_\lambda(-X)\ \mu(d\lambda) = \int_0^1 q_X(t)\ \psi^{'}(1-t)\ dt$$

yi elde ederiz. Dolayısıyla ilk özdeşliği elde etmiş oluruz. İkincisi için, öncelikle $X \geq 0$ olduğunu varsayalım. O halde F_X, X'in dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$q_X^+(t) = \sup\{\ x \geq 0 \mid F_X(x) \leq t\ \} = \int_0^\infty I_{\{F_X(x)\leq t\}}\ dx$$

tir. $\int_0^y \psi^{'}(t)\ dt = (\psi(y) - \psi(0+))\ I_{\{y>0\}}$ olduğundan, Fubini'nin teoremini kullanarak,

$$\begin{aligned}\int_0^1 q_X(t)\ \psi^{'}(1-t)\ dt &= \int_0^\infty \int_0^1 I_{\{F_X(x)\leq 1-t\}}\ \psi^{'}(t)\ dt\ dx \\ &= \int_0^\infty \psi(1-F_X(x))\ dx - \psi(0+)\ \text{ess sup}\ X\end{aligned}$$

elde ederiz. $\psi(0+) = \mu(\{0\})$ ve ess sup X $= AV@R_0(-X)$ olduğundan, $X \geq 0$ için bu, ikinci özelliği kanıtlar. $X \in L^\infty$ keyfi ise, $C := -$ess inf X olmak üzere, $X+C$'yi düşünelim. ρ_μ'nün nakit değişmezliğinden

$$\begin{aligned}C + \rho_\mu(-X) &= \int_0^1 \psi(P[\ X > x - C\ ])\ dx \\ &= \int_{-C}^0 \psi(P[\ X > x\ ])\ dx + \int_0^\infty \psi(P[\ X > x\ ])\ dx \\ &= C + \int_{-\infty}^0 (\psi(P[\ X > x\ ]) - 1)\ dx + \int_0^\infty \psi(P[\ X > x\ ])\ dx\end{aligned}$$

sağlanır. □

Örnek 8.15. *$\mu = \delta_\lambda$ olmak üzere, $AV@R_\lambda$ risk ölçüsünün, $\rho\mu$ şeklinde olduğu açıktır. $\lambda > 0$ için, karşılık gelen konkav çarpıklık fonksiyonu*

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{\lambda}\right) \wedge 1 = \frac{1}{\lambda}\ (t \wedge \lambda)$$

ile verilir. Sonuç olarak, $AV@R_\lambda$'nın başka bir gösterimini elde ederiz: $X \in L_+^\infty$ için;

$$AV@R_\lambda(-X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty P[\ X > x\ ] \wedge \lambda\ dx$$

tir.

Sonuç 8.8. *φ, ψ'nin Tanım 2.5 tanımından alınan bir ters fonksiyonu olmak üzere, Teorem 8.26'da $\mu(\{0\}) = 0$ ise,*

$$\rho_\mu(X) = -\int_0^1 q_X(\varphi(t))\ dt$$

dir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 2.1 nedeniyle, Lebesgue ölçüsü altında φ dağılımı, ψ dağılım fonksiyonuna ve dolayısıyla $\psi^{'}$ yoğunluğuna sahiptir. Dolayısıyla Yardımcı Teorem

2.5'in son adımını kullandığımızda

$$\int_0^1 q_X(\varphi(t))\, dt = \int_0^1 q_X(t)\, \psi'(t)\, dt = -\int_0^1 q_{-X}(1-t)\, \psi'(t)\, dt$$

olur. Teorem 8.26'nın bir uygulaması, kanıtı sonuçlandırır. $\square$

$c_\psi(A) = \psi(P[\ A\ ])$ küme fonksiyonunun kısa bir çalışmasıyla devam edelim.

Tanım 8.28. *$\psi : [0,1] \to [0,1]$, $\psi(0) = 0$ ve $\psi(1) = 1$ şartlarını sağlayan artan bir fonksiyon olsun. $A \in \mathscr{F}$ olmak üzere,*

$$c_\psi(A) := \psi(P[\ A\ ])$$

*küme fonksiyonu, ψ **çarpıklık (distortion) fonksiyonu**'na göre, P olasılık ölçüsünün **çarpıklığı** (distortion) olarak isimlendirilir.*

Tanım 8.29. *Bir $c : \mathscr{F} \to [0,1]$ küme fonksiyonu $A \subset B$ için*

$$c(A) \leq c(B)$$

*ise **monoton** (monotone),*

$$c(\emptyset) = 0 \quad ve \quad c(\Omega) = 1$$

*ise **normalleştirilmiş** (normalized) olarak isimlendirilir. Bir monoton küme fonksiyonu,*

$$c(A \cup B) + c(A \cap B) \leq c(A) + c(B)$$

*ise **altmodüler** (submodular) veya **ikili değişen** (2-alternating) olarak isimlendirilir.*

Herhangi bir c_ψ çarpıklığının, normalleştirilmiş ve monoton olduğu açıktır.

Önerme 8.16. *c_ψ, ψ çarpıklık fonksiyonuna göre, P'nin çarpıklığı olsun. ψ konkav ise, c_ψ altmodülerdir. Üstelik, olasılık uzayı atomsuz ise, tersi de doğrudur.*

Kanıt. Öncelikle ψ'nin konkav olduğunu varsayalım. $P[\ A\ ] \leq P[\ B\ ]$ olacak şekilde $A, B \in \mathscr{F}$ alalım. $c := c_\psi$'nin

$$c(A) - c(A \cap B) \geq c(A \cup B) - c(B)$$

yi sağladığını göstermeliyiz.

$$r := P[\ A\ ] - P[\ A \cap B\ ] = P[\ A \cup B\ ] - P[\ B\ ]$$

olmak üzere, $r = 0$ ise bu önemsizdir. $r > 0$ için ψ'nin konkavlığından

$$\frac{c(A) - c(A \cap B)}{P[\ A\ ] - P[\ A \cap B\ ]} \geq \frac{c(A \cup B) - c(B)}{P[\ A \cup B\ ] - P[\ B\ ]}$$

sağlanır. İki taraf r ile çarpılarak sonuç elde edilir.

Şimdi $c = c_\psi$'nin alt modüler ve $(\Omega, \mathscr{F}, P)$'nin atomsuz olduğunu varsayalım. $0 \leq x \leq z \leq 1$ ve $y = (x + z)/2$ olduğunda $\psi(y) \geq (\psi(x) + \psi(z))/2$ olduğunu göstermeliyiz. Sonuçlandırmak için, $P[\ A\ ] = P[\ B\ ] = y$, $P[\ A \cap B\ ] = x$ ve $P[\ A \cup B\ ] = z$ olacak şekilde $A, B \subset \mathscr{F}$ kümelerine ihtiyacımız olacaktır. Alt modülerlik ayrıca $\psi(x) + \psi(z) \leq 2\ \psi(y)$'yi ve dolayısıyla ψ'nin konkavlığını verir.

A ve B kümelerini oluşturmak amacıyla, $[0, 1]$'de düzgün dağılıma sahip bir rassal U değişkeni alalım, ki Önerme 2.4'den böyle bir değişken vardır. O halde,

$$A := \{0 \leq U \leq y\} \quad \text{ve} \quad B := \{z - y \leq U \leq z\}$$

istenilen şartları sağlar. □

Şimdi Örnek 3.7'de tanımlanan Choquet integralinin gösterimini hatırlayalım:

Tanım 8.30. *$c : \mathscr{F} \to [0, 1]$, normalleştirilmiş ve monoton herhangi bir küme fonksiyonu olsun. c'ye göre $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde bir sınırlı ölçülebilir X fonksiyonunun Choquet integrali,*

$$\int X dc := \int_{-\infty}^{0} (c(\ X > x\ ) - 1)\ dx + \int_{0}^{\infty} c(\ X > x\ )\ dx$$

şeklinde tanımlanır.

c bir σ-toplamsal olasılık ölçüsü ise Choquet integralinin klasik integralle çakıştığına dikkat ediniz.(İleride Yardımcı Teorem 9.19'da görünüz.)

Bu tanımla Teorem 8.26, ρ_μ risk ölçüsünü, zemini oluşturan P olasılık ölçüsünün bir c_ψ konkav çarpıklığına göre kaybın Choquet integrali olarak tanımlamamıza izin verir.

Sonuç 8.9. $[0,1]$ *üzerinde bir* μ *olasılık ölçüsü için* ψ*, Yardımcı Teorem 8.15'te tanımlanan konkav çarpıklık fonksiyonu ve* c_ψ*,* ψ *ye göre* P *nin çarpıklığı olsun. Bu durumda* $X \in L^\infty$ *için*

$$\rho_\mu(X) = \int (-X)\ dc_\psi$$

dir.

Sonuç 8.9 ile Teorem 7.24'ten, konkav çarpıklıklar açısından yasa değişmezi konveks risk ölçülerinin aşağıdaki gösterimini elde ederiz:

Sonuç 8.10. *Bir* ρ *konveks risk ölçüsünün yasa değişmezi ve alttan sürekli olması için gerek ve yeter şart,*

$$\rho(X) = \sup_{\psi} \left(\int (-X)\ dc_\psi - \gamma_{min}(\psi) \right)$$

olmasıdır. Burada, tüm ψ *konkav çarpıklık fonksiyonlarının sınıfı üzerinden alınan supremum,*

$$\gamma_{min}(\psi) := \sup_{X \in \mathscr{A}_\rho} \int (-X)\ dc_\psi$$

dir.

Teorem 8.26'nın diğer bir sonucu olarak, ρ_μ tutarlı risk ölçüsü için $\mathcal{Q}_\mu \subset \mathscr{M}_1(P)$ maksimal temsil kümesinin açık bir tanımını elde ederiz.

Teorem 8.27. μ*,* $[0,1]$ *üzerinde bir olasılık ölçüsü ve* ψ*, Yardımcı Teorem 8.15'te tanımlanan konkav fonksiyon olsun. O halde,* $\mathcal{Q}_\mu$ *kümesi,*

$$\mathcal{Q}_\mu := \left\{ Q \in \mathscr{M}_1(P) \mid t \in (0,1) \ \ \text{için} \ \int_t^1 q_\varphi(s)ds \le \psi(1-t)\text{' yi sağlayan } \ \varphi := \frac{dQ}{dP} \right\}$$

olarak verildiğinde, ρ_μ*,*

$$\rho_\mu(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\mu} E_Q[-X]$$

olarak gösterilebilir. Dahası, $\mathcal{Q}_\mu$*,* ρ_μ*'yü temsil eden* $\mathscr{M}_1(P)$*'nin maksimal alt kümesidir.*

Kanıt. ρ_μ risk ölçüsü tutarlıdır ve üstten süreklidir. Sonuç 5.2'den, $\mathcal{Q}_{max} = \{Q \in \mathscr{M}_1(P) \mid \alpha_{min}(Q) = 0\}$ kümesi üzerinde beklentilerin supremumu alınarak temsil edilebilir. (7.1) ve Teorem 8.26 kullanılarak bir $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ ölçüsünün $\varphi := dQ/dP$ yoğunluğuyla $\mathcal{Q}_{max}$'a ait olması için gerek ve yeter şart, her $X \in L^\infty$ için

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_X(s)\ q_\varphi(s)\ ds &\leq \rho_\mu(-X) \\ &= \psi(0+)\ AV@R_0(-X) + \int_0^1 q_X(s)\ \psi^{'}(1-s)\ ds \end{aligned} \tag{8.3}$$

olmasıdır. $X \equiv t$ sabit rastgele değişkenleri için $q_X = I_{[t,1]}$'dir yani her $t \in (0,1)$ için

$$\int_t^1 q_\varphi(s)\ ds \leq \psi(0+) + \int_t^1 \psi^{'}(1-s)\ ds = \psi(1-t)$$

elde ederiz. Sonuç olarak $\mathcal{Q}_{max} \subset \mathcal{Q}_\mu$'dür. Ters kapsamın kanıtı için verilen bir sabit $Q \in \mathcal{Q}_\mu$ ölçüsünün φ yoğunluğunun herhangi bir $X \in L^\infty$ için (8.3)'ü sağladığını gösterelim. ν, $q_X^+(s) = \nu([0,s])$ olacak şekilde $[0,1]$ üzerinde pozitif yönlü ölçü olsun. $\mathcal{Q}_\mu$'nün tanımını ve Fubini'nin teoremini kullanarak,

$$\begin{aligned} \int_0^1 q_X(s)\ q_\varphi(s)\ ds &= \int_{[0,1]} \int_t^1 q_\varphi(s)\ ds\ \nu\ (dt) \\ &\leq \int_{[0,1]} \psi(1-t)\ \nu\ (dt) \\ &= \psi(0+)\ \nu\ ([0,1]) + \int_0^1 \psi^{'}(1-s) \int_{[0,s]} \nu\ (dt)\ ds \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu (8.3)'ün sağ tarafına eşittir. □

Teorem 8.28. *$X \succcurlyeq_{uni} X_0$ olacak şekildeki herhangi bir $X \in \mathcal{X}$ için*

$$E^*[\ X\ ] \geq \int_0^1 q_\varphi\ (1-s)\ q_{X_0}(s)\ ds$$

dir. Alt sınır $X^* = f(\varphi)$'den elde edilir. Burada f; F_φ x'te sürekli ise,

$$f(x) := q_{X_0}\ (1 - F_\varphi(x))$$

ile, diğer durumlarda

$$f(x) := \frac{1}{F_\varphi(x) - F_\varphi(x-)} \int_{F_\varphi(x-)}^{F_\varphi(x)} q_{X_0}\ (1-t)\ dt$$

ile tanımlanan $[0, \infty)$ üzerindeki artan fonksiyondur.

Uyarı 8.16. *X^* çözümü, P altında X_0 ile aynı beklentiye sahiptir.*

Sonuç 8.11. *Teorem 8.27 şartları altında, aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) ρ_μ, alttan süreklidir.

(b) $\mu(\{0\}) = 0$'dır.

(c) Her $X \in L^\infty$ için $\rho_\mu(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_\mu} E_Q[-X]$'tir.

Bu denk koşullar sağlandığında, yoğunluğu $dQ_X/dP = f(X)$ olan $Q_X \in \mathcal{Q}_\mu$ ölçüsü ile (c)'deki maksimum elde edilir. x, F_X in bir süreklilik noktası ise, f azalan fonksiyonunu

$$f(x) := \psi^{'}(F_X(x))$$

olarak, diğer durumlarda,

$$f(x) := \frac{1}{F_X(x) - F_X(x-)} \int_{F_X(x-)}^{F_X(x)} \psi^{'} dt$$

şeklinde tanımlarız. Dahası, λ, $(0,1)$ üzerinde Lebesgue ölçüsünü göstermek üzere,

$$\mathcal{Q}_\mu = \left\{ Q \ll P \mid P \circ \left(\frac{dQ}{dP}\right)^{-1} \succcurlyeq_{uni} \lambda \circ (\psi^{'})^{-1} \right\} \tag{8.4}$$

olur.

Kanıt. (a) ve (c) koşullarının denkliği Sonuç 5.3'te zaten kanıtlandı. (b) sağlanırsa, Teorem 6.21 ve monoton yakınsaklık nedeniyle ρ_μ alttan süreklidir. Şimdi $\delta := \mu(\{0\}) > 0$ ise (a) koşulunun sağlanmadığını gösterelim. Bu durumda, $\mu^{'} := \mu(\,\cdot \mid (0,1])$ olmak üzere,

$$\rho_\mu = \delta\ AV@R_0 + (1-\delta)\ \rho_{\mu'}$$

yazabiliriz. O halde $\mu'(\{0\}) = 0$ olduğundan $\rho_{\mu'}$ alttan süreklidir ancak $AV@R_0$ değildir ve bu yüzden Uyarı 6.10'dan ρ_μ, (a)'yı sağlamaz.

Şimdi kalan iddiaları kanıtlayalım. $\psi(0+) = \mu(\{0\}) = 0$ olduğundan, $\varphi = dQ/dP$ yoğunluğuna sahip bir Q ölçüsünün $\mathcal{Q}_\mu$'ye ait olması için gerek ve yeter şart, her t için $\int_t^1 q_\varphi(s)\, ds \leq \int_t^1 \psi'(1-s)\, ds$ olmasıdır. $\psi'(1-t)$, λ altında ψ' dağılımı için bir dağılım dilimi fonksiyonu olduğundan Teorem 6.18'in (e) şıkkı (8.4) eşitliğini gerektirir. $P\circ\varphi^{-1} \succcurlyeq_{uni} \lambda\circ(\psi')^{-1}$ olacak şekilde φ yoğunluk fonksiyonu kısıtı altında maksimalleştirici Q_X tanımlama problemi $E[\ \varphi X\ ]$'in minimalleştirilmesine denktir.

Öncelikle $X \geq 0$ kabul edelim. O halde Teorem 8.28'den $P\circ Y^{-1} \succcurlyeq_{uni} \lambda\circ(\psi')^{-1}$ olacak şekilde $Y \in L^1_+$ 'yı $f(X)$ olarak seçersek, $E[\ YX\ ]$'i minimalleştirir. Üstelik Uyarı 8.16, $E[\ f(X)\ ] = \int_0^1 \psi'(t)\ dt = 1$ ve dolayısıyla $\varphi_X := f(X) \geq 0$'ın bir $Q_X \in \mathcal{Q}_\mu$ optimal olasılık ölçüsünün yoğunluğu olduğunu gösterir. X pozitif değilse, $X + c \geq 0$ olacak şekilde bir c sabiti alabilir ve önceki ifadeleri uygulayabiliriz. f için $F_{X+c}(X+c) = F_X(X)$ sonucu çıkar. □

Uyarı 8.17. *Bir yasa değişmezi risk kavramı ile ilgilendiğimiz sürece, bir $X \in L^\infty$ finansal durumunu, onun F_X dağılım fonksiyonu ile veya denk olarak*

$$G_X(t) := 1 - F_X(t) = P[\ X > t\ ]$$

fonksiyonu ile gösterebiliriz.

G sınıfı $G(1) = 0$ ve $G(0) \leq 1$ şartını sağlayan $[0,1]$ üzerindeki sağdan sürekli azalan fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda X pozisyonlarını sadece $[0,1]$'de düşünürsek, G_X temsilleri G sınıfında farklı şekillerde gösterilebilir. Teorem 8.26 nedeniyle, bir ρ_μ yasa değişmezi tutarlı risk ölçüsü,

$$U(G_X) := \rho_\mu(-X) = \int_0^1 \psi(G_X(t))\ dt$$

aracılığıyla temsilcilerin sınıfı üzerinde bir U fonksiyonelini ifade eder. ψ, artan ve konkav olduğundan, U fonksiyoneli, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde Lebesgue ölçüsü ile verilen olasılık uzayı üzerinde bir von Neumann-Morgenstern fayda fonksiyoneli gösterimine sahiptir. Daha genel olarak, $[0,1]$ üzerinde bir u fayda fonksiyonunu

$u(0) = 0$ *ile tanımlayabiliriz ve Quiggin tarafından tanımlanan [29]*

$$U(G_X) := \int_0^1 \psi(G_X(t))\ du(t)$$

fonksiyonelini düşünebiliriz. $u(x) = x$ *için bu, "ikili teori (dual theory)"ye indirger,* $\psi(x) = x$ *için,*

$$\begin{aligned} U(G_X) &= \int_0^1 G_X(t)\ du(t) \\ &= -\int_0^1 u(t)\ d\ G_X(t) \\ &= E[\ u(X)\ ] \end{aligned}$$

klasik fayda fonksiyonellerini elde ederiz.

9. KOMONOTONİK RİSK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde genel küme fonksiyonlarına göre Choquet integralleri, Choquet [8] tarafından verilmiştir. Tutarlı risk ölçüleri ile bağlantılar Delbaen [9], [10] tarafından incelenmiştir. Teorem 9.29'daki gerek şart Dellacherie [11], yeter şartsa Schmeidler [31] tarafından verilmiştir. Yardımcı Teorem 9.17'den elde edilen kanıt, Denneberg [13]'ten alınmıştır. Teorem 9.30, Kusuoka [26]'dan alınmıştır. Teorem 9.31'de (b) ve (d) arasındaki denklik, ilk olarak [31]'de kanıtlanmış, (c) maddesi de [8]'de eklenmiştir. Burada verilen kanıt [13]'ten alınmıştır.

Çoğu durumda, bir $X + Y$ birleştirilmiş pozisyonunun riski, bireysel risklerin toplamından kesinlikle daha düşük olacaktır. Çünkü bir pozisyon, diğer pozisyonlarda olumsuz değişimlere karşı bir önlem olarak görülür. Diğer taraftan X'in Y için bir sigorta olarak çalışmasının herhangi bir yolu yoksa, riski basitçe toplamak isteyebiliriz. Bu fikri kesinleştirmek amacıyla, komonotoniklik kavramını tanımlayacağız. Bu bölümde bizim esas amacımız, komonotonikliğin bu özelliğini paylaşan tüm konveks risk ölçüleri sınıfını karakterize etmektir.

Bu kısmın ilk iki bölümü için, $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülebilir uzayı üzerinde tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların lineer uzayını $\mathcal{X}$ ile göstereceğiz.

Tanım 9.31. *$(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde X ve Y ölçülebilir fonksiyonları, her $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ için*

$$(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0 \tag{9.1}$$

*şartını sağlıyorsa **komonoton** (comonotone) adını alır. $\mathcal{X}$ üzerindeki bir ρ parasal risk ölçüsü, $X, Y \in \mathcal{X}$ komonoton olduğunda,*

$$\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$$

*şartını sağlıyorsa **komonotonik** (comonotonic) diye isimlendirilir.*

Yardımcı Teorem 9.16. *ρ, $\mathcal{X}$ üzerinde komonotonik parasal risk ölçüsü ise, pozitif homojendir.*

Kanıt. (X, X)'in bir komonoton çift olur. Dolayısıyla $\rho(2X) = 2\rho(X)$'tir. Bu iddianın bir tekrarı her $r \geq 0$ rasyonel sayısı için $\rho(r\ X) = r\ \rho(X)$'i sağlar. Yardımcı

Teorem 3.7'deki Lipschitz sürekliliğinden ρ, pozitif homojendir. $\square$

Aşağıda her komonotonik parasal risk ölçüsünün, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde belli bir küme fonksiyonuna göre Choquet integrali olarak ortaya çıktığını göstereceğiz. $c : \mathscr{F} \to [0,1]$, her zaman normalleştirilmiş ve monoton bir küme fonksiyonunu gösterir. Aksi söylenmedikçe, biz c'nin toplamsal özelliklerinin olduğunu kabul etmeyeceğiz.. Tanım 8.30'dan, c'ye göre $X \in \mathcal{X}$'in Choquet integralinin

$$\int X dc = \int_{-\infty}^{0} (c(X > x) - 1)dx + \int_{0}^{\infty} c(X > x)dx$$

olarak tanımlandığını hatırlayın.

Sonraki önermenin kanıtı Örnek 3.7'de verildi.

Önerme 9.17. *Kaybın Choquet integrali olan*

$$\rho(X) := \int (-X)\ dc,$$

$\mathcal{X}$ üzerinde pozitif homojen bir parasal risk ölçüsüdür.

Tanım 9.32. *X, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon olsun. Tanım 2.5'e göre alınan $G_X(x) := 1 - c(X > x)$ artan fonksiyonunun bir $r_X : (0,1) \to \mathbb{R}$ ters fonksiyonu, c'ye göre X için bir* ***dağılım dilimi fonksiyonu*** *(quantile function) olarak adlandırılır.*

c bir olasılık ölçüsü ise, $G_X(x) = c(X \leq x)$'tir. Bu nedenle önceki tanım, Tanım 2.6'da verilen bir dağılım dilimi fonksiyonu kavramına genişletilir. Aşağıdaki önerme, c'ye göre dağılım dilimi fonksiyonları hakkında Choquet integralinin alternatif bir gösterimini açığa çıkarır.

Önerme 9.18. *r_X, $X \in \mathcal{X}$ için c'ye göre bir dağılım dilimi fonksiyonu olsun. O halde,*

$$\int X dc = \int_0^1 r_X(t)\ dt$$

dir.

Kanıt. $\int (X + m)\ dc = \int X\ dc + m$'dir ve her $m \in \mathbb{R}$ ve $X + m$'nin her r_{X+m} dilim fonksiyonu için (neredeyse her yerde) $r_{X+m} = r_X + m$ olduğu kolayca kontrol edilebilir. Dolayısıyla genelliği bozmadan $X \geq 0$ kabul edebiliriz. Bu durumda Uyarı 2.1 ve Yardımcı Teorem 2.1

$$r_X^+(t) = \sup\{\ x \geq 0 \mid G_X(x) \leq t\ \} = \int_0^\infty I_{\{G_X(x) \leq t\}}\ dx$$

ile verilen r_X^+ dağılım dilimi fonksiyonunun en büyük olmasını gerektirir. $(0,1)$ üzerinde neredeyse her yerde $r_X = r_X^+$ olduğundan Fubini'nin teoremi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 r_X(t)\ dt &= \int_0^1 \int_0^\infty I_{\{G_X(x) \leq t\}}\ dx\ dt \\ &= \int_0^\infty (1 - G_X(x))\ dx \\ &= \int X\ dc\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. □

Tanım 8.28'de tanımlandığı gibi bir olasılık ölçüsünün sürekli bir çarpıklığına önceki önerme uygulandığında, Sonuç 8.8'in aşağıdaki genellemesini verir.

Sonuç 9.12. *$c_\psi(A) = \psi(P[\ A\ ])$, ψ sürekli çarpıklık fonksiyonuna göre, P olasılık ölçüsünün çarpıklığı olsun. φ, Tanım 2.5 anlamındaki ψ artan fonksiyonu için bir ters fonksiyon ise, P'ye göre alınan $X \in \mathcal{X}$ için q_X bir dağılım dilimi fonksiyonu olduğunda, c_ψ'ye göre Choquet integrali*

$$\int X\ dc_\psi = \int_0^1 q_X\ (1 - \varphi(t))\ dt$$

yi sağlar.

Kanıt. ψ'nin sürekliliği nedeniyle, $\psi(a) \leq t$ olması için gerek ve yeter şart $a \leq \varphi^+(t) = \inf\{\ x \mid \psi(x) > t\ \}$ olmasıdır. Sonuç olarak, c_ψ'ye göre X'in en küçük dağılım dilimi fonksiyonunu,

$$\begin{aligned}r_X^-(t) &= \inf\{\ x \in \mathbb{R} \mid 1 - c_\psi(X > x) \geq t\ \} \\ &= \inf\{\ x \in \mathbb{R} \mid \psi(P[\ X > x\ ]) \leq 1 - t\ \} \\ &= \inf\{\ x \in \mathbb{R} \mid P[\ X > x\ ] \leq \varphi^+(1 - t)\ \} \\ &= q_X^-(1 - \varphi^+(1 - t))\end{aligned}$$

olarak hesaplayabiliriz. Neredeyse tüm t'ler için $\varphi^+(t) = \varphi(t)$ olduğuna dikkat ediniz. Üstelik φ, Lebesgue ölçüsü altında ψ sürekli dağılım fonksiyonuna sahiptir ve bu yüzden q_X^-'i, keyfi q_X dağılım dilimi fonksiyonu yerine kullanabiliriz. □

Yardımcı Teorem 9.17. *$(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde ölçülebilir X ve Y fonksiyonlarının komonoton olması için gerek ve yeter şart; $(\Omega, \mathscr{F})$'de üçüncü bir Z ölçülebilir fonksiyonunun ve $X = f(Z)$ ve $Y = g(Z)$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ üzerinde f ve g artan fonksiyonlarının var olmasıdır.*

Kanıt. Verilen Z, f ve g için $X := f(Z)$ ve $Y := g(Z)$'nin komonoton olduğu açıktır. Tersine, X ve Y'nin komonoton olduğunu varsayalım ve $Z := X + Y$ şeklinde Z tanımlayalım. Her $\omega \in \Omega$ için $z := Z(\omega)$ olmak üzere, bir $\omega' \in \Omega$ vardır öyle ki, $(x, y) = (X(\omega'), Y(\omega'))$ ve $z = x + y$ olacak şekilde tek bir ayrıştırma vardır. Bunu sağladıktan sonra $f(z) := x$ ve $g(z) := y$ diyebiliriz. $z = x + y$ gibi bir ayrıştırmanın varlığı $x := X(\omega)$ ve $y := Y(\omega)$ seçiminin bir sonucudur. Dolayısıyla geriye sadece x ve y olası değerlerinin var olduğunu göstermek kalır. Sonuca ulaşmak için, $\omega' \in \Omega$ için $X(\omega) + Y(\omega) = z = X(\omega') + Y(\omega')$ olduğunu varsayalım. O halde,

$$X(\omega) - X(\omega') = -(Y(\omega) - Y(\omega'))$$

dür ve komonotonluk, bu ifadenin olamayacağını gösterir.

$$X(\omega_1) + Y(\omega_1) = z_1 \leq z_2 = X(\omega_2) + Y(\omega_2)$$

olduğunu varsayalım. Bu

$$X(\omega_1) - X(\omega_2) = -(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))$$

olmasını gerektirir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını $(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))$ ile çarparsak;

$$\begin{aligned}
(X(\omega_1) - X(\omega_2)) \cdot (Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) &= -(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \cdot (Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \\
(X(\omega_1) - X(\omega_2)) \cdot (Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) &= -(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))^2
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned} (Y(\omega_1) - Y(\omega_2)))^2 &\geq 0 \\ -(Y(\omega_1) - Y(\omega_2))^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $(X(\omega_1) - X(\omega_2)) \cdot (Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \leq 0$ çıkar. Komonotonluktan, $(X(\omega_1) - X(\omega_2)) \cdot (Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0$ olması gerektiğinden $Y(\omega_1) - Y(\omega_2) \leq 0$ ve $X(\omega_1) - X(\omega_2) \leq 0$ olmasını ve dolayısıyla $f(z_1) \leq f(z_2)$, $g(z_1) \leq g(z_2)$'yi sağlar. O halde f ve g, $Z(\Omega)$ üzerinde artandır ve bunun $\mathbb{R}$'de tanımlı artan fonksiyonlara genişletilebileceği açıktır. $\square$

Yardımcı Teorem 9.18. *X, $Y \in \mathcal{X}$, bir çift komonoton fonksiyon ve r_X, r_Y, r_{X+Y}, c'ye göre dağılım dilimi fonksiyonları ise, neredeyse tüm t'ler için*

$$r_{X+Y}(t) = r_X(t) + r_Y(t)$$

dir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 9.17'deki gibi $X = f(Z)$ ve $Y = g(Z)$ yazalım. Yardımcı Teorem 2.5'in kanıtında olduğuna benzer bir şekilde, Z için r_Z bir dağılım dilimi fonksiyonu ise, c altında X ve Y için $f(r_Z)$ ve $g(r_Z)$'nin dağılım dilimi fonksiyonları olduğunu gösterir. Aynı iddianın $h := f+g$ artan fonksiyonuna uygulanması, $X+Y$ için $h(r_Z) = f(r_Z) + g(r_Z)$'nin bir dağılım dilimi fonksiyonu olduğunu gösterir. Yardımcı Teorem 2.1'den, rastgele bir değişkenin tüm dağılım dilimi fonksiyonlarının neredeyse her yerde çakıştığı gerçeğinden sonuç elde edilir. $\square$

Uyarı 9.18. *Bir önceki yardımcı teorem bir olasılık ölçüsüne göre, bir dağılım dilimi fonksiyonunun özel durumuna uygulandığında, $V@R_\lambda$ ve $AV@R_\lambda$'nın komonotonik olmasını sağlar.*

Teorem 9.29. *$\mathcal{X}$ üzerindeki bir ρ parasal risk ölçüsünün komonotonik olması için gerek ve yeter şart, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde, $X \in \mathcal{X}$ için*

$$\rho(X) = \int (-X) dc$$

şartını sağlayan normalleştirilmiş monoton bir c küme fonksiyonunun var olmasıdır. Bu durumda c, $c(A) = \rho(-I_A)$ ile verilir.

Kanıt. Önerme 9.17'dan kaybın Choquet integralinin bir parasal risk ölçüsü olduğunu zaten biliyoruz. Önerme 9.18 ile Yardımcı Teorem 9.18'den komonotonluk sonucu çıkar.

Tersine, ρ'nun komonotonik olduğunu varsayalım. O halde, Yardımcı Teorem 9.16'ya göre, ρ tutarlıdır. Sonuç olarak, bir $c(A) := \rho(-I_A)$ normalleştirilmiş monoton küme fonksiyonunu elde ederiz. Üstelik, $\rho_c(X) := \int(-X)\ dc$, $\mathcal{X}$ üzerinde bir komonotonik parasal risk ölçüsüdür ve işaret fonksiyonu üzerindeki ρ ile örtüşür: $\rho(-I_A) = c(A) = \rho_c(-I_A)$. Şimdi, $x_i \in \mathbb{R}$ ve $A_i \in \mathscr{F}$ için

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i\ I_{A_i}$$

şeklindeki basit rastgele değişkenler üzerinde ρ ile ρ_c'nin eşit olduğunu gösterelim. Bu rastgele değişkenler L^∞'da yoğun olduğundan Yardımcı Teorem 3.7, $\rho = \rho_c$ olmasını gerektirir. Yukarıdaki gibi bir X verildiğinde $\rho_c(X) := \rho(X)$ olduğunu göstermek için genelliği bozmadan $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n$ olduğunu ve A_i kümelerinin ayrık olduğunu varsayabiliriz. Nakit değişmezliğinden ayrıca $X \geq 0$ yani $x_n \geq 0$ kabul edebiliriz. Dolayısıyla, $b_i := x_i - x_{i+1} \geq 0$, $x_{n+1} := 0$ ve $B_i := \bigcup_{k=1}^{i} A_k$ olmak üzere, $X = \sum_{i=1}^{n} b_i\ I_{B_i}$ yazabiliriz. $b_i\ I_{B_i}$ ve $b_k\ I_{B_k}$'nın bir komonoton fonksiyon çifti olduğuna dikkat ediniz. Bunun sonucu olarak, ayrıca $\sum_{i=1}^{k-1} b_i\ I_{B_i}$ ve $b_k\ I_{B_k}$ komonotondur ve tümevarımla

$$\rho(-X) = \sum_{i=1}^{n} b_i\ \rho(-I_{B_i}) = \sum_{i=1}^{n} b_i\ \rho_c(-I_{B_i}) = \rho_c(-X)$$

i elde ederiz. □

Sonuç 8.9 ışığında önceki teorem

$$\rho_\mu = \int_{[0,1]} AV@R_\lambda\ \mu(d\lambda)$$

şeklindeki tüm karışımlarının komonotonik olmasını gerektirir. Tüm konveks risk ölçülerinin yasa değişmezi ve komonotonik olduğunu Teorem 9.30'da göreceğiz.

Uyarı 9.19. *Önceki kanıtın sonundaki çıkarım,* $B_0 := \emptyset$ *ve* $i = 1, \cdots, n$ *için* $B_i :=$

$\bigcup_{k=1}^{i} A_k$ *olduğunda,* $x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1} := 0$ *olmak üzere, bir basit rassal*

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \; I_{A_i}$$

değişkeninin Choquet integrali,

$$\int X \; dc = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i+1}) \; c(B_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; (c(B_i) - c(B_{i-1}))$$

olarak hesaplanabilir.

Şu ana kadar, komonotonik parasal risk ölçülerinin normalleştirilmiş küme fonksiyonlarının Choquet integralleri ile tanımlanabildiğini gösterdik. Şimdi amacımız, konvekslik ek şartı ile risk ölçüsü tanımlayan küme fonksiyonlarını karakterize etmektir. Bu amaçla, ilk olarak yasa değişmezi risk ölçülerini dikkate alacağız. Aşağıdaki sonuç L^∞ üzerinde komonotonik olan tüm yasa değişmezi konveks risk ölçülerinin konveks sınıfında $AV@R_\lambda$ risk ölçülerinin uç noktalar olarak görülebileceğini gösterir.

Teorem 9.30. *Bir atomsuz olasılık uzayı üzerinde,* $\mu \in \mathscr{M}_1([0,1])$ *için*

$$\rho_\mu(X) := \int AV@R_\lambda(X) \; \mu \; (d\lambda)$$

risk ölçülerinin sınıfı komonotonik olan L^∞ *üzerinde tüm yasa değişmezi konveks risk ölçülerinin sınıfıdır. Özel olarak, yasa değişmezi ve komonotonik olan herhangi bir konveks risk ölçüsü, ayrıca tutarlı ve üstten süreklidir.*

Kanıt. ρ_μ'nün komonotonluğu Sonuç 8.9 ve Teorem 9.29'dan çıkar. Tersine, ρ'nun ayrıca komonotonik olan bir yasa değişmezi konveks risk ölçüsü olduğunu varsayalım. Teorem 9.29'dan, $c(A) := \rho(-I_A)$ için $\rho(X) = \int(-X) \; dc$'dir. ρ'nun yasa değişmezliği $c(A)$'nın, $P[\; A \;]$ olasılığının bir fonksiyonu olmasını gerektirir, yani $[0,1]$ üzerinde, $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 1$ ve $c(A) = \psi(P[\; A \;])$ olacak şekilde bir ψ artan fonksiyonu vardır. Her $A, B \in \mathscr{F}$ için $I_{A\cup B}$ ve $I_{A\cap B}$'nin bir komonoton fonksiyon çifti olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle ρ'nun komonotonluğu ve alt toplamsallığı

$$\begin{aligned} c(A \cap B) + c(A \cup B) &= \rho(-I_{A\cap B}) + \rho(-I_{A\cup B}) = \rho(-I_{A\cap B} - I_{A\cup B}) \\ &= \rho(-I_A - I_B) \\ &\leq c(A) + c(B) \end{aligned} \tag{9.2}$$

olmasını gerektirir. Önerme 8.16'ten ψ konkavdır. Sonuç 8.9; Yardımcı Teorem 8.15 ışığında ψ'den elde edilen μ için bir ρ_μ risk ölçüsüne sahip c'ye göre Choquet integrali tanımlanabildiğini gösterir. □

Şimdi, $\mathcal{X}$ üzerindeki tüm komonotonic konveks risk ölçülerinin karakterizasyonuna dönelim. Bir pozitif homojen parasal risk ölçüsü için, konveksliğin alt toplamsallığa eşit olduğunu hatırlayın. Ayrıca, tüm sonlu toplamsal normalleştirilmiş $Q : \mathscr{F} \to [0,1]$ küme fonksiyonlarının kümesinin $\mathscr{M}_{1,f} := \mathscr{M}_{1,f}(\Omega, \mathscr{F})$ ile gösterildiğini ve Teorem 2.7'de oluşturulduğu gibi $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$'ye göre $X \in \mathcal{X}$'in integralinin $E_Q[\ X\ ]$ ile gösterildiğini hatırlayalım.

Sonuç 9.13. *$\mathcal{X}$ üzerinde bir konveks risk ölçüsünün komonotonik olması için gerek ve yeter koşul, bir alt modüler, normalleştirilmiş ve monoton c küme fonksiyonuna göre kaybın, Choquet integrali olarak ifade edilmesidir. Bu durumda, $\mathcal{Q}_c = \{\ Q \in \mathscr{M}_{1,f} \mid \forall A \in \mathscr{F}\ \text{ için }\ Q[\ A\ ] \leq c(A)\ \}$, $\mathcal{Q}_{max}$ maksimal temsil kümesine eşit olduğunda c, $c(A) = \rho(-I_A)$ ile verilir ve ρ,*

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_c} E_Q[-X]$$

gösterimine sahiptir.

Kanıt. c alt modüler, normalleştirilmiş ve monoton bir küme fonksiyonu olduğunda Teorem 9.29 ve 9.31, $\rho(X) := \int(-X)dc$'nin bir komonotonik tutarlı risk ölçüsü olacağını ifade eder. Bu risk ölçüsü, sonucun ifadesinde söylendiği gibi de gösterilebilir.

Tersine, herhangi bir ρ konveks risk ölçüsü tutarlıdır ve Teorem 9.29'dan $c(A) := \rho(-I_A)$'nın Choquet integrali olarak ortaya çıkar. Teorem 9.31, c'nin alt modülerliğini verir. □

Uyarı 9.20. *c, normalleştirilmiş monoton, alt modüler bir küme fonksiyonu olsun. Teorem 9.31, özellikle c'nin $\mathcal{Q}_c$ çekirdeğinin boştan farklı olmasını geretirir. Üstelik*

c, $\mathcal{Q}_c$'den, her $A \in \mathscr{F}$ için

$$c(A) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_c} Q[\ A\ ]$$

şeklinde elde edilebilir. $\bigcap_n A_n = \emptyset$ şartını sağlayan olayların herhangi bir azalan A_n dizisi için $c(A_n) \to 0$ olacak şekilde c, süreklilik özelliğine sahipse, bu özellik herhangi bir $Q \in \mathcal{Q}_c$ için de geçerlidir. Bu, Q'nun σ-toplamsal olmasını gerektirir. Bu nedenle, karşılık gelen $\rho(X) = \int(-X)\ dc$ tutarlı risk ölçüsü, σ-toplamsal olasılık ölçüleri cinsinden bir gösterime sahiptir. Yardımcı Teorem 4.8'den ρ'nun üstten sürekli olduğu ortaya çıkar.

Yardımcı Teorem 9.19. *$X \in \mathcal{X}$ ve $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$ için, $E_Q[\ X\ ]$ integrali, $\int X\ dQ$ Choquet integraline eşittir.*

Kanıt. $X \geq 0$ için kanıtlamak yeterlidir. Öncelikle Uyarı 9.19'da olduğu gibi $X = \sum_{i=1}^n x_i\ I_{A_i}$ olduğunu varsayalım. O halde

$$\int X\ dQ = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})\ Q\left[\bigcup_{k=1}^i A_k\right] = \sum_{i=1}^n x_i\ Q[\ A_i\ ] = E_Q[\ X\ ]$$

olur. Daha genel bir $X \in \mathcal{X}$ için sonucu elde etmek istediğimizde X'e düzgün yakınsayan, sadece sonlu sayıda değer alan X_n dizisini seçersek, $E_Q[\ \cdot\ ]$ ve $\int\ \cdot\ dQ$' nun supremum normuna göre Lipschitz sürekliliğinden sonuca ulaşılır. □

Yardımcı Teorem 9.20. *$A_1, \cdots, A_n$, Ω'nın ayrık ölçülebilir kümelere bir parçalanması olsun ve normalleştirilmiş monoton c küme fonksiyonunun alt modüler olduğunu varsayalım. $\mathscr{F}_0 := \sigma(A_1, \cdots, A_n)$ üzerinde bir Q olasılık ölçüsünü,*

$$B_0 := \emptyset \text{ ve } k \geq 1 \text{ olmak üzere } B_k := \bigcup_{j=1}^k A_j \text{ 'lar için } Q[\ A_k\ ] := c(B_k) - c(B_{k-1}) \tag{9.3}$$

olarak tanımlayalım. O halde, tüm sınırlı $\mathscr{F}_0$-ölçülebilir $X = \sum_{i=1}^n x_i\ I_{A_i}$ için $\int X\ dc \geq E_Q[\ X\ ]$'tir ve X'in değerleri $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ şeklinde artan sıralamada düzenlenmişse eşitlik sağlanır.

Kanıt. Sadece $X \geq 0$ durumunu dikkate almak yeterlidir. O halde X'in değerleri azalan bir sırada düzenlendiğinde Uyarı 9.19, $\int X\ dc = E_Q[\ X\ ]$'i gerektirir.

Şimdi keyfi $\mathscr{F}_0$-ölçülebilir X için $\int X \ dc \geq E_Q[\ X\ ]$ olduğunu kanıtlayalım. $\{1, \cdots, n\}$'nin herhangi bir σ permütasyonu, yeniden düzenlenen $A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(n)}$ parçalanmasına Q'nun tanımını uygulayarak $\mathscr{F}_0$ üzerinde bir Q_σ olasılık ölçüsünü elde ederiz. Eğer σ, $x_{\sigma(1)} \geq \cdots \geq x_{\sigma(n)}$ olacak şekilde bir permütasyon ise $\int X \ dc = E_{Q_\sigma}[\ X\ ]$ olur. Bu durumda $E_{Q_\sigma}[\ X\ ] \geq E_Q[\ X\ ]$ olduğunu gösterebilirsek sonucu elde ederiz. Bunun için $x_i < x_{i+1}$ olacak şekildeki i ve $i+1$ indislerinin yerlerini değiştiren bir τ düzenlemesi için $E_{Q_\tau}[\ X\ ] \geq E_Q[\ X\ ]$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü σ, böyle yer değişikliklerinin bir sonlu çarpımı olarak ifade edilebilir.

$$E_{Q_\tau}[\ X\ ] - E_Q[\ X\ ] = x_i\ (Q_\tau[\ A_i\ ] - Q[\ A_i\ ]) + x_{i+1}\ (Q_\tau[\ A_{i+1}\ ] - Q[\ A_{i+1}\ ]) \tag{9.4}$$

olduğuna dikkat ediniz. $Q_\tau[\ A_k\ ]$ olasılıklarını hesaplamak için $k = 1, \cdots, n$ için

$$B_0^\tau := \emptyset \ \text{ ve } \ B_k^\tau := \bigcup_{j=1}^{k} A_\tau(j)$$

tanımlayalım. O halde $k \neq i$ için $B_k^\tau = B_k$'dır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} Q_\tau[\ A_i\ ] + Q_\tau[\ A_{i+1}\ ] &= Q_\tau[\ A_{\tau(i)}\ ] + Q_\tau[\ A_{\tau(i+1)}\ ] = c(B_{i+1}^\tau) - c(B_{i-1}^\tau) \\ &= c(B_{i+1}) - c(B_{i-1}) = Q[\ A_i\ ] + Q[\ A_{i+1}\ ] \end{aligned} \tag{9.5}$$

olur. Üstelik $B_i^\tau \cap B_i = B_{i-1}$, $B_i^\tau \cup B_i = B_{i+1}$'dir ve bu nedenle c'nin alt modülerliğinden $c(B_{i-1}) + c(B_{i+1}) \leq c(B_i^\tau) + c(B_i)$'dir. Dolayısıyla,

$$Q[\ A_{i+1}\ ] = c(B_{i+1}) - c(B_i) \leq c(B_i^\tau) - c(B_{i-1}^\tau) = Q_\tau[\ A_{\tau(i)}\ ] = Q_\tau[\ A_{i+1}\ ]$$

dir. (9.4), (9.5) ve $x_i < x_{i+1}$ varsayımımızı kullanırsak $E_{Q_\tau}[\ X\ ] \geq E_Q[\ X\ ]$ sağlanır.

$\square$

Teorem 9.31. *Bir normalleştirilmiş monoton c küme fonksiyonuna göre, Choquet integrali için aşağıdaki koşullar denktir.*

(a) $\rho(X) := \int(-X)\ dc$, *$\mathcal{X}$ üzerinde bir konveks risk ölçüsüdür.*

(b) $\rho(X) := \int(-X)\ dc$, *$\mathcal{X}$ üzerinde bir tutarlı risk ölçüsüdür.*

(c) $\mathcal{Q}_c := \{\ Q \in \mathscr{M}_{1,f} \mid \forall A \in \mathscr{F}$ *için* $Q[\ A\ ] \leq c(A)\ \}$ *olmak üzere* $X \in \mathcal{X}$ *için*

$$\int X\ dc = \max_{Q \in \mathcal{Q}_c}\ E_Q[\ X\ ]$$

olur.

(d) *c küme fonksiyonu, alt modülerdir.*

Bu durumda, $\mathcal{Q}_c$*,* ρ *için* $\mathcal{Q}_{max}$ *maksimal kümesine eşittir.*

Kanıt.

$(a) \Rightarrow (b)$: Önerme 9.17'ya göre, tüm Choquet integralleri ile verilen risk ölçüleri pozitif homojendir. Pozitif homojenlik altında tutarlılık ve konvekslik dektir.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sonuç 4.1'den $Q \in \mathscr{M}_{1,f}$, $\mathcal{Q}_{max}$'a ait olmak üzere, $\rho(-X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_{max}} E_Q[\ X\ ]$ olması için gerek ve yeter koşul, her $X \in \mathcal{X}$ için

$$E_Q[\ X\ ] \leq \rho(-X) = \int X\ dc \tag{9.6}$$

olmasıdır. Şimdi bu $\mathcal{Q}_{max}$ kümesinin $\mathcal{Q}_c$'ye eşit olduğunu göstereceğiz. Eğer $Q \in \mathcal{Q}_{max}$ ise, özel olarak her $A \in \mathscr{F}$ için $Q[\ A\ ] \leq \int I_A\ dc = c(A)$'dır. Bu nedenle $Q \in \mathcal{Q}_c$'dir. Tersine $Q \in \mathcal{Q}_c$ varsayalım. $X \geq 0$ ise Yardımcı Teorem 9.19'u kullanırsak,

$$\int X\ dc = \int_0^\infty c(X > x)\ dx \geq \int_0^\infty Q[\ X > x\ ]\ dx = E_Q[\ X\ ]$$

olur. Nakit değişmezliği (9.6)'yı verir.

$(c) \Rightarrow (b)$: Sonuç 9.13'ten, ρ'nun konveksliği ve Choquet integralinin pozitif homojenliği çıkar. Bu da bize ρ'nun tutarlılığını verir.

$(b) \Rightarrow (d)$: (9.2)'yi kullanırsak;

$$\begin{aligned} c(A\cap B)+c(A\cup B) &= \rho(-I_{A\cap B})+\rho(-I_{A\cup B}) \\ &= \int -I_{A\cap B}\ dc+\int -I_{A\cup B}\ dc \\ &= \int (-I_{A\cap B}-I_{A\cup B})\ dc \\ &= \rho(-I_{A\cap B}-I_{A\cup B}) \\ &= \rho(-I_A-I_B) \\ &\leq \int -I_A\ dc+\int -I_B\ dc \\ &= c(A)+c(B) \end{aligned}$$

olduğundan c alt modülerdir.

$(d) \Rightarrow (a)$: Choquet integralinin alt toplamsal olduğunu göstermeliyiz. Yardımcı Teorem 3.7'den, benzer şekilde sadece sonlu sayıda değer alan rassal değişkenler için bunu göstermemiz yeterli olacaktır. Bu nedenle $A_1, \cdots, A_n$, ω'nın sonlu sayıda ayrık ölçülebilir kümelere bir parçalanması olsun. $X = \sum_i x_i\ I_{A_i}$, $Y = \sum_i y_i\ I_{A_i}$ yazalım ve $x_1+y_1 \geq \cdots \geq x_n+y_n$ olacak şekildeki $i = 1, \cdots, n$ indislerinin düzenlendiğini varsayalım. O halde, Yardımcı Teorem 9.20'de yapılandırdığımız Q olasılık ölçüsü için

$$\int (X+Y)\ dc = E_Q[\ X+Y\ ] = E_Q[\ X\ ]+E_Q[\ Y\ ] \leq \int X\ dc+\int Y\ dc$$

olur. Bu, Choquet integralinin alt toplamsallığını verir.

□

10. BİR FİNANSAL PİYASADA RİSK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümün ilk kısmı Föllmer ve Schied [17]'den, ikinci kısmı Carr, Geman ve Madan [7]'den alınmıştır.

Bu bölümde, finansal piyasa modelinde ortaya çıkan risk ölçülerini dikkate alacağız. Bu modelde, $d+1$ varlık, $t=0$ ve $t=1$ zamanlarında fiyatlandırılır. 1 anındaki fiyatlar, $S^0 \equiv 1+r$ (risksiz yatırım) olmak üzere, bir $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde negatif olmayan $S^0, S^1, \cdots, S^d$ rastgele değişkenleriyle modellenir. 0 anındaki fiyatlar, $\pi = (\pi^1, \cdots, \pi^d)$ olmak üzere bir $\overline{\pi} = (1, \pi)$ vektörü ile verilir. Bir $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ ticari stratejisinin net kazancının günümüzdeki karşılığı, $\xi \cdot Y$ ile verilir. Burada, $Y = (Y^1, \cdots, Y^d)$ rastgele vektörü, $i = 1, \cdots, d$ için

$$Y^i = \frac{S^i}{1+r} - \pi^i$$

ile tanımlanır.

Bir X finansal pozisyonu $X \geq 0$ ise, risksiz olarak görülebilir. Bununla birlikte, daha genel olarak X, ek maliyetler olmaksızın riskten arındırılabiliyorsa, yani $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = 0$ iken

$$X + \frac{\overline{\xi}.\overline{S}}{1+r} = X + \xi.Y \geq 0 \quad P\text{ -hhk} \tag{10.1}$$

olacak şekilde bir $\overline{\xi} = (\xi^0, \xi)$ ticaret stratejisi varsa X yine risksiz olarak görülebilir. Dolayısıyla, L^∞ üzerinde kabul edilebilir durumların aşağıdaki kümesini tanımlarız:

$$\mathscr{A}_0 := \{X \in L^\infty \mid \text{Bir } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ için } X + \xi \cdot Y \geq 0 \quad P - \text{hhk}\}.$$

Teorem 10.32. *Arbitrajsız bir piyasa modelinde, meydana gelmesi şüpheli bir C olayına bağlı talebin arbitraj sınırları*

$$\begin{aligned}\pi_{\inf}(C) &= \inf_{P^* \in \mathscr{P}} E^*\left[\frac{C}{1+r}\right] \\ &= \max\left\{ m \in [0,\infty) \mid \exists\, \xi \in \mathbb{R}^d \ \textit{için} \ m + \xi\, Y \leq \frac{C}{1+r}\ ,\ P\text{-}hhk \right\}\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\pi_{\sup}(C) &= \sup_{P^* \in \mathscr{P}} E^*\left[\frac{C}{1+r}\right] \\
&= \min\left\{ m \in [0,\infty) \mid \exists\, \xi \in \mathbb{R}^d \ \ \textit{için} \ \ m + \xi\, Y \geq \frac{C}{1+r}\ ,\ P\text{-}hhk \right\}
\end{aligned}
$$

ile verilir.

Önerme 10.19. $\inf\{\ m \in \mathbb{R}^d \mid m \in \mathscr{A}_0\ \} > -\infty$ *olduğunu varsayalım. O halde* $\rho_0 := \rho_{\mathscr{A}_0}$ *bir tutarlı risk ölçüsüdür. Üstelik* ρ_0*'ın Tanım 5.20 anlamında duyarlı olması için gerek ve yeter şart, piyasa modelinin arbitrajsız olmasıdır. Bu durumda,* ρ_0 *üstten süreklidir ve denk riske duyarsız ölçülerin* $\mathscr{P}$ *kümesi cinsinden elde edilebilir:*

$$
\rho_0(X) = \sup_{P^* \in \mathscr{P}} E^*\,[-X]. \tag{10.2}
$$

Kanıt. $\lambda > 0$ ve $X \in \mathscr{A}_0$ olsun. O halde bir $\xi \in \mathbb{R}^d$ için $X + \xi\, Y \geq 0$'dır. Burada $\lambda\, \xi \in \mathbb{R}^d$ olduğundan $\lambda\, X + \lambda\, \xi\, Y \geq 0$ olur. Bu da bize $\mathscr{A}_0$'ın koni olduğunu gösterir.

$X_1, X_2 \in \mathscr{A}_0$ alalım. Bu durumda $\exists\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ öyle ki $X_1 + \xi_1\ Y \geq 0$ ve $X_2 + \xi_2\, Y \geq 0$'dir. Taraf tarafa toplarsak, $(X_1 + X_2) + (\xi_1 + \xi_2) \cdot Y \geq 0$ olur. Burada $X_1 + X_2 \in \mathscr{A}_0$ ve $\xi_1 + \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ olduğundan $\mathscr{A}_0$ konvekstir.

$\mathscr{A}_0$ konveks koni olduğundan Önerme 3.9'den, ρ_0 bir tutarlı risk ölçüsüdür. Eğer model arbitrajsızsa, Teorem 10.32, (10.2) gösterimini sağlar ve buradan ρ_0'ın duyarlı ve üstten sürekli olduğu çıkar.

Tersine, ρ_0'ın duyarlı olduğunu ve piyasa modelinde bir arbitraj fırsatı olduğunu varsayalım. O halde P-hhk olmak üzere, $0 \leq \xi \cdot Y$ olacak şekilde $\xi \in \mathbb{R}^d$ ve $\varepsilon > 0$ vardır ve $A := \{\xi \cdot Y \geq \ \varepsilon\}$, $P[\ A\ ] > 0$'ı sağlar. Buradan $\xi \cdot Y - \varepsilon\ I_A \geq 0$ sonucu çıkar, yani $-\varepsilon\ I_A$ kabul edilebilirdir. Ancak $\mathscr{A}_0$ bir koni olduğundan ρ_0'ın tutarlılığını kullanırsak, ρ_0'ın duyarlılığı

$$
\rho_0(-\varepsilon\ I_A) = \varepsilon\ \rho_0(-I_A) > \rho_0(0) = 0
$$

olmasını gerektirir. Ancak kabul edilebilir olması için riskin ≤ 0 olması gerekir. Burada $\rho_0(-\varepsilon\ I_A) > 0$ çıktığından çelişki elde ederiz. □

Sadece tüm stratejilerin $\mathbb{R}^d$ sınıfının bir $\mathscr{S}$ öz alt kümesine ait olan ξ stratejilerinin (10.1)'de alınmasının birkaç sebebi vardır. Örnek olarak; bir yatırımcı için uygun kaynaklar sınırlıysa, riskli araçlardaki başlangıç yatırımları belli bir miktarın altında olacak şekildeki stratejiler dikkate alınmalıdır. Böyle bir sınırlama, $\xi \cdot \pi$ üzerinde bir üst sınıra karşılık gelir. Başka kısıtlamalar da olabilir. Örneğin, karşılıksız satış (açığa satış) kısıtlamaları portfolyodaki hisselerin sayısı üzerinde alt sınırlardır. Piyasadaki nakit akışının az olduğu durumlarda, yatırımcı sadece tek bir araçtan çok fazla bulundurmaktan kaçınmak isteyebilir. Çünkü piyasanın kapasitesi tüm payların satılması için yeterli olmayabilir. Böyle kısıtlamalar gözönüne alınacak olursa, bu bölümün geri kalanı boyunca $\mathscr{S}$, aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $0 \in \mathscr{S}$'dir.
- $\mathscr{S}$ konvekstir.
- $\xi \cdot Y$ P-hhk alttan sınırlı olması bakımından her bir $\xi \in \mathscr{S}$ kabul edilebilirdir.

Bu koşullar altında,

$$\mathscr{A}^{\mathscr{S}} := \{X \in L^\infty \mid \exists\, \xi \in \mathscr{S} \;\text{ için }\; X + \xi \cdot Y \geq 0 \;,\; P\text{-hhk}\} \tag{10.3}$$

kümesi boştan farklıdır, konvekstir ve bazı $Z \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}$'den daha büyük olan tüm $X \in \mathcal{X}$'leri bulundurur. Dahası, bundan sonra

$$\inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid m \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}} \,\} > -\infty \tag{10.4}$$

olduğunu varsayacağız. Önerme 3.9,

$$\rho^{\mathscr{S}}(X) := \inf\{\, m \in \mathbb{R} \mid m + X \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}} \,\}$$

olarak verilen risk ölçüsünün L^∞ üzerinde bir konveks risk ölçüsü olmasını garantiler. Bu durumda (10.4)'ün sağlandığına dikkat ediniz. $\mathscr{S}$ bir arbitraj fırsatı bulundurmuyorsa, (P-hhk$\xi \cdot Y \geq 0$ olacak şekildeki $\xi \in \mathscr{S}$'nin, $P[\, \xi \cdot Y = 0 \,] = 1$ gerektirmesi anlamında) özel olarak sağlanır.

Uyarı 10.21. *Portfolyoların kabul edilebilirliği önemli bir kısıtlamadır. Özellikle, herhangi bir sınırsız varlığın önlem alınmadan kısa vadeli satışlarını engeller. An-*

cak, $X + \xi \cdot Y \geq 0$, $\xi \cdot Y \geq -\|X\|$'i gerektirdiğinden bunun, bizim (10.3)'teki sınırlı iddialarımız için kabul edilebilirlik kavramımızla tutarlı olduğuna dikkat ediniz.

Burada $\rho^{\mathscr{S}}$ ile ilgili iki soruyla ilgileneceğiz: $\rho^{\mathscr{S}}$ ne zaman üstten süreklidir ve böylece, olasılık ölçüleri cinsinden (5.2) gösterimine ne zaman sahiptir? Ve eğer böyle bir gösterim varsa, $\mathscr{M}_1(P)$ üzerinde $\alpha_{min}^{\mathscr{S}}$ minimal ceza fonksiyonunu nasıl tanımlayabiliriz? $\mathscr{S} = \mathbb{R}^d$ durumunda, her iki soru, Önerme 10.19'de irdelendi. Genel bir $\mathscr{S}$ için, sadece ikinci sorunun doğrudan bir cevabı vardır. Bu cevap Önerme 10.20'da verilecektir. Önerme 10.19'in kanıtından görülebileceği gibi, portfolyo sınırlamalarının durumu için, ilk sorunun analizi, arbitraj teorisinin bir genişlemesini gerektirir.Bu sonuç, bu bölümün basit bir-periyotlu modeli için aşağıdaki teoremi sağlar.

Tanım 10.33. *$\overline{\pi}$ fiyat faktörü, $\overline{\xi}$ portfolyo vektörü, $\overline{S}$ olasılığa bağlı getiri vektörü olmak üzere, arbitrajsız bir piyasa modelinde portfolyonun getirisinin neredeyse her yerde kesinlikle* 0 *olacağı durum ($\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0$, P-hhk) portfolyonun şu andaki durumunun ($\overline{\xi} = 0$) sıfır olmasını gerektirir. Aslında genelliği bozmadan*

$$\overline{\xi} \cdot \overline{S} = 0 \quad , \quad P\text{-}hhk \quad \Longrightarrow \quad \overline{\xi} = 0 \tag{10.5}$$

*kabul edilebilir. (10.5)'in sağlandığı piyasa modellerine **gereksiz araçların olmadığı (non-redundant) piyasa modeli** denir.*

Teorem 10.33. *Yukarıdaki varsayımlara ek olarak; piyasa modelinin Tanım 10.33'te ifade edildiği gibi ve $\mathscr{S}$'nin, $\mathbb{R}^d$'de kapalı bir küme olduğunu varsayalım. O halde $\rho^{\mathscr{S}}$'nin duyarlı olması için gerek ve yeter şart, $\mathscr{S}$'nin arbitraj fırsatı içermemesidir. Bu durumda, $\rho^{\mathscr{S}}$ üstten süreklidir ve*

$$\rho^{\mathscr{S}}(X) = \sup_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} \left(E_Q[\ -X\ ] - \sup_{\xi \in \mathscr{S}} E_Q[\ \xi \cdot\ Y\ ] \right) \tag{10.6}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Aşağıdaki önermede, (10.6)'daki ceza fonksiyonunun özel şeklini açıklayacağız. Bu sonuç, Teorem 10.33'ün ek varsayımlarını gerektirmeyecek.

Önerme 10.20. *$Q \in \mathscr{M}_1(P)$ için, $\rho^{\mathscr{S}}$'nin $\alpha_{min}^{\mathscr{S}}$ minimal ceza fonksiyonu,*

$$\alpha_{min}^{\mathscr{S}}(Q) = \sup_{\xi \in \mathscr{S}} E_Q[\ \xi \cdot Y\ ]$$

ile verilir. Özel olarak, eğer $\rho^{\mathscr{S}}$ üstten sürekli ve özellikle $\mathscr{S}$'de bir arbitraj fırsatı yoksa $\rho^{\mathscr{S}}$, (10.6)'daki gibi gösterilebilir.

Kanıt. $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ alalım. Kabul edilebilirlikten her bir $\xi \in \mathscr{S}$ için $E_Q[\ \xi \cdot Y\ ]$ beklentisinin iyi tanımlılığı açıktır. P-hhk olmak üzere $X \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}$ ise, $-X \leq \eta \cdot Y$ olacak şekilde $\eta \in \mathscr{S}$ vardır. Bu nedenle herhangi bir $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ için

$$E_Q[\ -X\ ] \leq E_Q[\ \eta \cdot Y\ ] \leq \sup_{\xi \in \mathscr{S}} E_Q[\ \xi \cdot Y\ ]$$

olur. Dolayısıyla minimal ceza fonksiyonunun tanımı

$$\alpha_{min}^{\mathscr{S}}(Q) \leq \sup_{\xi \in \mathscr{S}} E_Q[\ \xi \cdot Y\ ]$$

yi sağlar.

Eşitsizliğin tersini kanıtlamak için $\xi \in \mathscr{S}$ alalım. ξ kabul edilebilir olduğundan $X_k := -((\xi \cdot Y) \wedge k)$ sınırlıdır. Üstelik

$$X_k + \xi \cdot Y = (\xi \cdot Y - k)\ I_{\{\xi \cdot Y \geq k\}} \geq 0$$

olduğunda $X_k \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}$ olur. Dolayısıyla

$$\alpha_{min}^{\mathscr{S}}(Q) \geq E_Q[\ -X_k\ ] = E_Q[\ (\xi \cdot Y) \wedge k\ ]$$

olur ve bu yüzden monoton yakınsaklıktan $\alpha_{min}^{\mathscr{S}}(Q) \geq E_Q[\ \xi \cdot Y\ ]$'dir. □

Uyarı 10.22. *$\mathscr{S}$'nin bir koni olduğunu varsayalım. O halde $\mathscr{A}^{\mathscr{S}}$ kabul kümesi de bir konidir ve $\rho^{\mathscr{S}}$ bir tutarlı risk ölçüsüdür. Eğer $\rho^{\mathscr{S}}$ üstten sürekli ise Sonuç 5.2'den, boştan farklı $\mathscr{Q}_{max}^{\mathscr{S}} = \{Q \in \mathscr{M}_1(P) \mid \alpha_{min}^{\mathscr{S}}(Q) = 0\}$ kümesi için,*

$$\rho^{\mathscr{S}}(X) = \sup_{Q \in \mathscr{Q}_{max}^{\mathscr{S}}} E_Q[\ -X\ ]$$

gösterimine sahiptir. Önerme 10.20'dan $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ için

$$Q \in \mathcal{Q}^{\mathscr{S}}_{max} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{her } \ \xi \in \mathscr{S} \ \ \textit{için} \ \ E_Q[\ \xi \cdot Y\ ] \leq 0$$

olmasıdır.

Eğer $\rho^{\mathscr{S}}$ duyarlı ise, $\mathscr{S}$ kümesi herhangi bir arbitraj fırsatını içermez ve tüm denk martingale ölçülerinin (böyle ölçüler varsa) $\mathscr{P}$ kümesi, $\mathcal{Q}^{\mathscr{S}}_{max}$'nin içindedir. Daha açık bir şekilde ifade edersek, $\mathcal{Q}^{\mathscr{S}}_{max}$, $\mathscr{S}$'ye göre kesin sürekli süpermartingale ölçülerinin kümesi olarak tanımlanabilir.

Şimdi (10.3)'teki kabul edilebilirlik koşulunu esnetelim. Artık kabul edilebilir bir pozisyonun (uygun bir şekilde sigortalanmış) son getirisinin her zaman pozitif olmasında ısrar etmeyeceğiz. Bunun yerine, bir $\mathscr{A}$ kabul kümesiyle verilen $\rho_{\mathscr{A}}$ konveks risk ölçüsü cinsinden sınırlı bir pozisyonun kabul edilebilirliğini isteyeceğiz. Dolayısıyla

$$\overline{\mathscr{A}} := \{\ X \in L^{\infty} \mid X + \xi.Y \geq A\ ,\ P\text{ -hhk olacak şekildeki } \ \xi \in \mathscr{S}, A \in \mathscr{A} \text{ vardır } \} \tag{10.7}$$

kümesini tanımlayalım. $\mathscr{A} \subset \overline{\mathscr{A}}$ olduğu açıktır ve dolayısıyla,

$$\rho_{\mathscr{A}} \geq \overline{\rho} := \rho_{\overline{\mathscr{A}}}$$

dır. Bundan sonra, $\mathscr{A}^{\mathscr{S}}$ için (10.4)'teki varsayımımızı gerektiren

$$\overline{\rho} > -\infty$$

olduğunu kabul edelim.

Önerme 10.21. *$\alpha^{\mathscr{S}}_{min}$, $\rho^{\mathscr{S}}$ için minimal ceza fonksiyonu ve α_{min}, $\rho_{\mathscr{A}}$ için minimal ceza fonksiyonu olmak üzere, $\overline{\rho}$ için $\overline{\alpha}_{min}$ minimal ceza fonksiyonu,*

$$\overline{\alpha}_{min}(Q) = \alpha^{\mathscr{S}}_{min}(Q) + \alpha_{min}(Q)$$

ile verilir.

Kanıt.

$$\overline{\mathscr{A}} = \{X^{\mathscr{S}} + A \mid X^{\mathscr{S}} \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}} \ , A \in \mathscr{A}\} \tag{10.8}$$

olur. $X \in \overline{\mathscr{A}}$ ise, $X + \xi \cdot Y \geq A$ olacak şekilde $A \in \mathscr{A}$ ve $\xi \in \mathscr{S}$ vardır. Dolayısıyla $X^{\mathscr{S}} := X - A \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}$'dir. Tersine, $X^{\mathscr{S}} \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}$ ise, bir $\xi \in \mathscr{S}$ için $X^{\mathscr{S}} + \xi \cdot Y \geq 0$'dır. Bu nedenle, herhangi bir $A \in \mathscr{A}$ için $X^{\mathscr{S}} + A + \xi \cdot Y \geq A \in \mathscr{A}$ elde ederiz, yani $X := X^{\mathscr{S}} + A \in \overline{\mathscr{A}}$'dır.

(10.8) ışığında,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{min}(Q) &= \sup_{X \in \overline{\mathscr{A}}} E_Q[\,-X\,] \\
&= \sup_{X^{\mathscr{S}} \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}} \ \sup_{A \in \mathscr{A}} E_Q[\,-X^{\mathscr{S}} - A\,] \\
&= \sup_{X^{\mathscr{S}} \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}} \sup_{A \in \mathscr{A}} \big(E_Q[\,-X^{\mathscr{S}}\,] + E_Q[\,-A\,]\big) \\
&= \sup_{X^{\mathscr{S}} \in \mathscr{A}^{\mathscr{S}}} E_Q[\,-X^{\mathscr{S}}\,] + \sup_{A \in \mathscr{A}} E_Q[\,-A\,] \\
&= \alpha^{\mathscr{S}}_{min}(Q) + \alpha_{min}(Q)
\end{aligned}$$

elde ederiz. □

Bu bölümün geri kalanında, [7]'de ifade edilen aşağıdaki örnek olayı dikkate alalım. [7]'de olduğu gibi, $|Y| \in L^1(Q_i)$ olmak üzere $Q_i \approx P$ denk olasılık ölçülerinin bir

$$\mathcal{Q}_0 = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$$

sonlu sınıfını belirleyelim. $\mathcal{Q}_0$'daki ölçüleri **değer biçme ölçüleri** (valuation measures) olarak adlandırırız.

$$\mathscr{B} := \{X \in L^0 \mid i = 1, \cdots, n \ \text{ için } \ E_{Q_i}[\,X\,] \geq 0\} \tag{10.9}$$

ve

$$\mathscr{B}_0 := \{X \in \mathscr{B} \mid i = 1, \cdots, n \ \text{ için } \ E_{Q_i}[X] = 0\}$$

kümelerini tanımlayalım. $Q_i \approx P$ denkliği nedeniyle, $X \geq 0$ P-hhk ve $E_{Q_i}[X] = 0$ olduğunda, $X = 0$ P-hhk olacağından

$$\mathscr{B}_0 \cap L^0_+ = \{0\} \tag{10.10}$$

olduğuna dikkat edelim.

İlk kabul kümesi olarak,

$$\mathscr{A} := \mathscr{B} \cap L^{\infty} \tag{10.11}$$

konveks konisini alalım. (10.7)'de tanımlandığı gibi uygun bir sigortalama ile birleştirildiğinde kabul edilebilir olan pozisyonların kümesi:

$$\overline{\mathscr{A}} := \{X \in L^{\infty} \mid X + \xi \cdot Y \in \mathscr{B} \text{ olacak şekilde } \ \exists\, \xi \in \mathbb{R}^d \text{ vardır } \}$$

olur. $\mathscr{K} := \{\xi \cdot Y \mid \xi \in \mathbb{R}^d\}$ olmak üzere, $\mathscr{K} \cap L^0_+ = \{0\}$ arbitrajsız koşulunun aşağıdaki güçlü versiyonunu tanımlayalım:

$$\mathscr{K} \cap \mathscr{B} = \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0. \tag{10.12}$$

Diğer bir deyişle, (10.9)'daki eşitsizliklerden herhangi birini kesin yapacak bir $\xi \in \mathbb{R}^d$ portfolyosu yoktur.

(10.10) ve $\mathscr{B} \cap L^0_+ = L^0_+$'ı kullandığımızda; (10.12)'nin, arbitraj fırsatının yokluğunu gerektirdiğine dikkat edelim:

$$\mathscr{K} \cap L^0_+ = \mathscr{K} \cap \mathscr{B} \cap L^0_+ = \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0 \cap L^0_+ = \{0\}$$

dır. Dolayısıyla (10.12), özellikle bir denk martingale ölçüsünün varlığını sağlar, yani $\mathscr{P} \neq \emptyset$'dir. Aşağıdaki önerme, **varlık fiyatlandırmasının temel teoremi** (fundamental theorem of asset pricing)'nin bir genişlemesi olarak görülebilir. $\mathcal{Q}_0$ sınıfı için tüm **temsilci** (representative) modellerinin sınıfını yani tüm karışımları

$$\mathscr{R} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, Q_i \mid \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

ile gösterelim. Yani her bir $Q \in \mathcal{Q}_0$ için bunların pozitif ağırlık ile elde edebileceğimiz tüm karışımların kümesi $\mathscr{R}$ olsun.

Önerme 10.22. *Aşağıdaki iki özellik denktir:*

(a) $\mathscr{K} \cap \mathscr{B} = \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0$.

(b) $\mathscr{P} \cap \mathscr{R} \neq \emptyset$.

Kanıt.

$(b) \Rightarrow (a)$: $R \in \mathscr{P} \cap \mathscr{R}$ ve $V \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B}$ olsun. Bu durumda $R \in \mathscr{R}$ olduğundan

$$E_R[\ V\ ] = \sum_{i=1}^{n} E_{Q_i}[\ V\ ] \geq 0$$

ve $R \in \mathscr{P}$ olduğundan da $E_R[\ V\ ] = 0$ olur. Sonuç olarak $V \in \mathscr{B}_0$ olur.

$(a) \Rightarrow (b)$:

$$\mathfrak{C} := \{E_R[\ Y\ ] \mid R \in \mathscr{R}\} \subset \mathbb{R}^d$$

konveks kümesini dikkate alalım. $\mathfrak{C}$'nin başlangıç noktasını içerdiğini göstermeliyiz. Eğer değilse, $\mathfrak{C}$'nin konveksliğinden

$$\forall x \in \mathfrak{C} \text{ için } \xi \cdot x \geq 0 \tag{10.13}$$

ve

$$\exists\ x^* \in \mathfrak{C} \text{ için } \xi \cdot x^* \geq 0$$

olacak şekilde $\xi \in \mathbb{R}^d$ vardır, Önerme 2.1'de görünüz. $V := \xi \cdot Y \in \mathscr{K}$ olsun. 10.13) koşulu

$$\forall\ R \in \mathscr{R} \ \text{ için } \ E_R[\ V\ ] \geq 0$$

olmasını gerektirir. Böylece $V \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B}$'dir. $x^* = E_{R^*}[\ Y\ ]$ olacak şekilde $R^* \in \mathscr{R}$ vardır. Bu durumda V, $E_{R^*}[\ V\ ] > 0$'ı sağlar ve $V \notin \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0$ olur. Bu, (a) varsayımı ile çelişir.

$\square$

Şimdi $\overline{\mathscr{A}}$ konveks konisine uyan $\overline{\rho}$ tutarlı risk ölçüsü için bir temsil teoremi verebiliriz. Bu teorem, Teorem 10.35'in özel bir durumudur.

Teorem 10.34. *(10.12) varsayımı altında, $\overline{\mathscr{A}}$ kabul kümesine karşılık gelen $\overline{\rho} := \rho_{\overline{\mathscr{A}}}$ tutarlı risk ölçüsü*

$$\overline{\rho}(X) = \sup_{P^* \in \mathscr{P} \cap \mathscr{R}} E^*[\ -X\ ]$$

ile verilir.

Şimdi [7]'de olduğu gibi ikinci bir sonlu $\mathcal{Q}_1 \subset \mathscr{M}_1(P)$ kümesini $|Y| \in \mathscr{L}^1(Q)$ olacak şekilde $Q \ll P$ olasılık ölçülerinin kümesi olarak tanımlayalım ve ***gerilim testi ölçüleri*** *(stress test measures) olarak adlandıralım. (10.9)'daki değerlendirme eşitsizliklerine ek olarak, uygun bir pozisyonun bir* ***seviye*** *(floor) ile belirlenen her bir $Q \in \mathcal{Q}_1$ için*

$$\gamma(Q) < 0$$

gerilim testinden geçmesini bekliyoruz. Dolayısıyla,

$$\mathscr{B}_1 := \{\ X \in L^0 \mid Q \in \mathcal{Q} \ \ \textit{için} \ \ E_Q[\ X\ ] \geq \gamma\ (Q)\ \}$$

olmak üzere, (10.11)'deki $\mathscr{A}$ konveks konisi,

$$\mathscr{A}_1 := \mathscr{A} \cap \mathscr{B}_1 = L^\infty \cap (\mathscr{B} \cap \mathscr{B}_1)$$

konveks kümesine indirgenir. Bir uygun sigortalama ile birleştirilmiş durumlar için en son elde edilen kabul kümesini

$$\overline{\mathscr{A}}_1 := \{X \in L^\infty \mid X + \xi \cdot Y \in \mathscr{B} \cap \mathscr{B}_1 \ \textit{olacak şekilde} \ \ \xi \in \mathbb{R}^d \ \textit{vardır}\ \}$$

ile ifade edelim.

Uyarı 10.23.

$$\mathscr{K} \cap (\mathscr{B} \cap \mathscr{B}_1) = \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0 \tag{10.14}$$

daha zayıf görünen (10.12) koşulunun benzeridir, ancak aslında (10.12)'ye denktir. Gerçekten, $X \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B}$ için $X_1 := \varepsilon X$ olacak şekilde,

$$Q \in \mathcal{Q}_1 \ \textit{için} \ E_Q[\ X_1\ ] \geq \gamma\ (Q)$$

ek kısıtlamalarını sağlayan $\varepsilon > 0$ bulabiliriz. $X_1 \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{B}_1$ olduğundan, (10.14) koşulu, $X_1 \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0$'ı sağlar, dolayısıyla $\mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0$ bir koni olduğundan $X = \frac{1}{\varepsilon} X_1 \in \mathscr{K} \cap \mathscr{B}_0$'dır.

Şimdi, $\overline{\mathscr{A}}_1$ konveks kabul kümesi tarafından ifade edilmiş olan $\overline{\rho}_1$ konveks risk ölçüsünü tanımlayalım.

$$\mathscr{R}_1 := \left\{ \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \lambda(Q)\cdot Q \;\middle|\; \lambda(Q) \geq 0 \;,\; \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \lambda(Q) = 1 \right\} \supset \mathscr{R}$$

yi $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 \cup \mathcal{Q}_1$'in konveks örtüsü olarak, $Q \in \mathcal{Q}_0$ için $\gamma(Q) := 0$ ve $R = \sum_Q \lambda(Q)\, Q \in \mathscr{R}_1$ için

$$\gamma\,(R) := \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \lambda(Q)\,\gamma\,(Q)$$

olarak tanımlarız.

Teorem 10.35. *(10.12) varsayımı altında, $\overline{\mathscr{A}}_1$ kabul kümesi tarafından ifade edilen $\overline{\rho}_1$ konveks risk ölçüsü*

$$\overline{\rho}_1(X) = \sup_{P^*\in\mathscr{P}\cap\mathscr{R}_1} \left(E^*[\, -X\,] + \gamma\,(P^*)\right) \tag{10.15}$$

ile verilir, yani $\overline{\rho}_1$,

$$\overline{\alpha}_1(Q) := \begin{cases} +\infty & ;Q \notin \mathscr{P}\cap\mathscr{R}_1 \text{ için} \\ -\gamma\,(Q) & ;Q \in \mathscr{P}\cap\mathscr{R}_1 \text{ için} \end{cases}$$

ceza fonksiyonu ile belirlenir.

Kanıt. ρ^*, (10.15)'in sağ tarafında tanımlanan konveks risk ölçüsünü ve $\mathscr{A}^*$, karşılık gelen kabul kümesini simgelesin:

$$\mathscr{A}^* := \{X \in L^\infty \mid \forall\; P^* \in \mathscr{P}\cap\mathscr{R}_1 \;\text{ için }\; E^*[\,X\,] \geq \gamma\,(P^*)\}.$$

$\mathscr{A}^* = \overline{\mathscr{A}}_1$ olduğunu göstermek yeterlidir.

(a) $\overline{\mathscr{A}}_1 \subset \mathscr{A}^*$'ı göstermek için $X \in \overline{\mathscr{A}}_1$ ve $P^* \in \mathscr{P}\cap\mathscr{R}_1$ alalım. $X + \xi\cdot Y \geq A_1$ olacak şekilde $\xi \in \mathbb{R}^d$ ve $A_1 \in \mathscr{A}_1$ vardır. Dolayısıyla $P^* \in \mathscr{R}_1$ olduğundan

$$E^*[\,X + \xi\cdot Y\,] \geq E^*[\,A_1\,] \geq \gamma\,(P^*)$$

dır.

$$E^*[\,X\,] + E^*[\,\xi\cdot Y\,] \geq \gamma\,(P^*)$$

olur. Burada $P^* \in \mathscr{P}$ olduğundan $E^*[\ \xi \cdot Y\ ] = 0$'dır ve $E^*[\ X\ ] \geq \gamma\ (P^*)$ elde ederiz. Bu nedenle, $X \in \mathscr{A}^*$ çıkar.

(b) $\mathscr{A}^* \subset \overline{\mathscr{A}}_1$ olduğunu göstermek için $X \in \mathscr{A}^*$ alalım ve $X \notin \overline{\mathscr{A}}_1$ olduğunu kabul edelim. Bu, $N \geq n$ için $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 \cup \mathcal{Q}_1 = \{Q_1, \cdots, Q_N\}$ olmak üzere,

$$x_i^* := E_{Q_i}[\ X\ ] - \gamma\ (Q_i)$$

bileşenlerine sahip $x^* = (x_1^*, \cdots, x_N^*)$ vektörünün

$$\mathfrak{C} := \{\ (E_{Q_i}[\ \xi \cdot Y\ ])_{i=1,\cdots,N} + y \mid \xi \in \mathbb{R}^d\ ,\ y \in \mathbb{R}_+^N\ \} \subset \mathbb{R}^N$$

konveks konisine ait olmadığı anlamına gelir. Bu kanıtın (c) kısmında $\mathfrak{C}$'nin kapalı olduğunu göstereceğiz. Dolayısıyla Önerme 2.1'den

$$\lambda \cdot x^* < \inf_{x \in \mathfrak{C}}\ \lambda \cdot x \tag{10.16}$$

olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^N$ vardır. $\mathfrak{C} \supset \mathbb{R}_+^N$ olduğundan $i : 1, \cdots, N$ için $\lambda_i \geq 0$ elde ederiz ve $\lambda \neq 0$ için $\Sigma_i \lambda_i = 1$ kabul edebiliriz.

$$R := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\ Q_i \in \mathscr{R}_1$$

tanımlayalım. $\mathfrak{C}$, $V \in \mathscr{K}$ için $(E_{Q_i}[\ V\ ])_{i=1,\cdots,N}$ vektörlerinin lineer uzayını kapsadığından (10.16)'dan

$$V \in \mathscr{K} \quad \text{için} \quad E_R[\ V\ ] = 0$$

olmasını gerektirir ve bu nedenle $R \in \mathscr{P}$ olur. Üstelik, (10.16)'nın sağ tarafı sıfır olmak zorundadır. Bu durumda (10.16) koşulu $\lambda \cdot x^* < 0$ olacağından

$$E_R[\ X\ ] < \gamma\ (R)$$

olur. Bu, bizim $X \in \mathscr{A}^*$ varsayımımızla çelişir.

(c) Geriye $\mathfrak{C}$'nin kapalılığını göstermek kaldı. $\xi \in \mathbb{R}^d$ için $y_i(\xi) = E_{Q_i}[\ \xi \cdot Y\ ]$

koordinatlarıyla $y(\xi)$'yi $\mathbb{R}^N$'de bir vektör olarak tanımlayalım.

$$N := \{ \ \eta \in \mathbb{R}^d \mid i = 1, \cdots, N \ \text{ için } \ E_{Q_i}[\ \eta \cdot Y \ ] = 0 \ \}$$

olmak üzere,

$$N^{\perp} := \{ \ \xi \in \mathbb{R}^d \mid \forall \ \eta \in N \ \text{ için } \ \xi \cdot \eta = 0 \ \}$$

olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in \mathfrak{C}$; $z \in \mathbb{R}^N_+$ ve $\xi \in N^{\perp}$ için

$$x = y(\xi) + z$$

gösterimine sahiptir.

x_n, $x \in \mathbb{R}^N$'e yakınsayacak şekildeki $\xi_n \in N^{\perp}$, $z_n \in \mathbb{R}^N_+$ ve $n = 1, 2, \cdots$ için bir

$$x_n = y(\xi_n) + z_n$$

dizisi alalım. $\liminf_n |\xi_n| < \infty$ ise gerektiğinde bir alt diziye geçerek ξ_n'in $\xi \in \mathbb{R}^d$'ye yakınsadığını kabul edebiliriz. Bu durumda, z_n bir $z \in \mathbb{R}^N_+$'ya yakınsamalı ve $x = y(\xi) + z \in \mathfrak{C}$ olmalıdır. Şimdi $\lim_n | \ \xi_n \ | = \infty$ durumunun bu şartlarda gerçekleşmeyeceğini gösterelim. Bu durumda $\alpha_n := (1 + | \ \xi_n \ |)^{-1}$, 0'a yakınsar ve $\zeta_n := \alpha_n \xi_n$ vektörleri sınırlıdır. Dolayısıyla ζ_n'in $\zeta \in N^{\perp}$'ye yakınsadığını varsayabiliriz. Burada,

$$\zeta := \alpha_n \ \xi_n = \frac{1}{1 + | \ \xi_n \ |} \ \xi_n$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
y(\zeta_n) &= y\left(\frac{\xi_n}{1 + | \ \xi_n \ |} \right) \\
&= \frac{y(\xi_n)}{1 + | \ \xi_n \ |} \\
&= \frac{x_n - z_n}{1 + | \ \xi_n \ |} \\
&= \frac{x_n}{1 + |\xi_n|} - \frac{1}{1 + | \ \xi_n \ |} \cdot z_n \\
&= \frac{x_n}{1 + | \ \xi_n \ |} - \alpha_n \ z_n
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu, $\dfrac{x_n}{1+|\xi_n|} \to 0$ ve $\alpha_n\ z_n \in \mathbb{R}^N_+$ olduğundan,

$$y(\zeta) = \lim_{n\uparrow\infty}\ y(\zeta_n) = -\lim_{n\uparrow\infty}\ \alpha_n\ zn \in -\mathbb{R}^N_+$$

olmasını gerektirir. $\zeta \in N^{\perp}$ ve $|\ \zeta\ | = \lim_n |\ \zeta_n\ | = 1$ olduğundan $y(\zeta) \neq 0$'ı elde ederiz. Dolayısıyla

$$E_{Q_i}[\ (-\zeta)\cdot Y\ ] = -y_i(\zeta) \geq 0$$

eşitsizliği her i için sağlanır ve en az bir i için kesindir. O halde $-\zeta \in \mathscr{K} \cup \mathscr{B}$'dir ancak $-\zeta \neq \mathscr{B}_0$'dır. Bu, (10.12) varsayımımızla çelişir.

□

11. EKSİK RİSK

Bu bölümde, Föllmer ve Schied [17]'den alınmıştır. Teorem 11.36, Orlicz uzaylarının klasik bir sonucunun bir genelleştirmesidir, Krasnoselskii ve Rutickii [24]'e bakılabilir. Sigortadaki getiri ilkeleri ve risk ölçüleri arasındaki bazı matematiksel bağlantılar için Denneberg [14] ve Wang ve Dhaene [32]'ye bakılabilir. Risk ölçüleri bakımından piyasa dengesi Heath ve Ku [22] tarafından çalışılmıştır.

Bu bölümde, beklenen fayda fonksiyonu ve konveks risk ölçüleri arasında bir bağlantı kuracağız. Riskten kaçınan bir yatırımcının bir $X \in \mathcal{X}$ finansal pozisyonunun eksilen X^-'den elde edilen beklenen getirisi $E[\ u(-X^-)\ ]$'yi alarak veya pozisyonun beklenen getirisi $E[\ u(X)\ ]$'i düşünerek aşağı yönlü riski uyguladığını kabul edelim. Eğer aşağı yönlü risk üzerine odaklanıyorsak, işaretini değiştirmek ve u yerine $\ell(x) := -u(-x)$ fonksiyonu kullanılabilir. O halde ℓ kesinlikle konveks ve artan fonksiyondur. Beklenen değerin maksimasyonu $E[\ \ell(X^-)\ ]$ eksik riskine veya $E[\ \ell(-X)\ ]$ beklenen kaybın minimizasyonuna denktir. Her iki durumu birleştirmek için, kesin konvekslik şartını kaldıralım. Özellikle $(-\infty, 0]$'da ℓ tanımlı olmayabilir ve bu durumda eksik risk

$$E[\ \ell(X^-)\ ] = E[\ \ell[\ (-X)\ ]$$

şeklini alır.

Tanım 11.34. *$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer sabit değilse ve artansa, bir* ***kayıp fonksiyonu*** *(loss function) olarak adlandırılır.*

Bu bölümde sadece konveks kayıp fonksiyonlarını dikkate alacağız. Verilen bir $(\Omega, \mathscr{F})$ ölçülebilir uzayında tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların $\mathcal{X}$ sınıfı üzerinde tanımlanan risk ölçülerini dikkate aldığımız yapıya geri dönelim.

İlk olarak, $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde bir P olasılık ölçüsü belirleyelim. Verilen bir ℓ konveks kayıp fonksiyonu ve ℓ görüntüsünün bir x_0 iç noktası için aşağıdaki kabul kümesini tanımlayalım:

$$\mathscr{A} := \{\ x \in \mathcal{X} \mid E[\ \ell(-X)\ ] \leq x_0\ \}. \tag{11.1}$$

Önerme 11.23. *$\mathscr{A}$ kabul kümesi, alttan sürekli bir $\rho := \rho_{\mathscr{A}}$ konveks risk ölçüsü tanımlar. Üstelik, ρ için α_{min} minimal ceza fonksiyonu, $\mathscr{M}_1(P)$ üzerinde yoğunlaştırılmıştır ve ρ,*

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathscr{M}_1(P)} \left(E_Q[\ -X\ ] - \alpha_{min}(Q) \right) \tag{11.2}$$

şeklinde gösterilebilir.

Kanıt. $\mathscr{A}$ konveks kümesinin Önerme 3.8 (a)'nın ilk iki özelliğini sağladığı ve böylece ρ'nun bir konveks risk ölçüsü olduğu açıktır. ρ'nun alttan sürekli olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle

$$E[\ \ell(-z - X)\ ] = x_0 \tag{11.3}$$

eştliğinin tek çözümü

$$\rho(X) = \inf\{\ m \in \mathbb{R} \mid E[\ \ell(-m - X)\ ] \leq x_0\ \}$$

dır. Gerçekten ℓ sonlu konveks fonksiyonu sürekli olduğundan baskın yakınsaklıktan $\rho(X)$, (11.3)'ün çözümüdür. Bir $\varepsilon > 0$ için ℓ, $(\ell^{-1}(x_0) - \varepsilon, \infty)$ üzerinde artan olduğundan çözüm tektir.

Şimdi (x_n), $\mathscr{X}$'te bir $x \in \mathscr{X}$'e noktasal artan bir dizi olsun. O halde $\rho(X_n)$, sonlu bir R sınırına azalarak yakınsar. ℓ'nin sürekliliği ve baskın yakınsaklığı kullanıldığında

$$E[\ \ell(-\rho(X_n) - X_n)\ ] \longrightarrow E[\ \ell(-R - X)\ ]$$

sonucu çıkar. Ancak bu beklentilerin her biri x_0'a eşittir ve bu nedenle R, (11.3)'ün bir çözümüdür. Dolayısıyla $R = \rho(X)$ tir ve bu, alttan sürekliliği kanıtlar. ρ, (5.1)'i sağladığından Önerme 4.12 ve Yardımcı Teorem 5.10'dan (11.2) gösterimi çıkar. $\square$

Şimdi α_{min} minimal ceza fonksiyonunu hesaplayalım.

Örnek 11.16. *Bir $\ell(x) = e^{\beta x}$ üstel kayıp fonksiyonu için minimal ceza fonksiyonu, bağıl entropi cinsinden ifade edilebilir ve ortaya çıkan risk ölçüsü bir toplamsal sabite kadar Örnek 5.9'da verilen entropik risk ölçüsüyle çakışır. Aslında,*

$$\rho(X) = \inf\{\ m \in \mathbb{R} \mid E[\ e^{-\beta(m+X)}\ ] \leq x_0\ \} = \frac{1}{\beta}\left(\ \log E[\ e^{-\beta X}\ ] - \ \log x_0\right)$$

dır. Bu özel durumda, α_{min} için verilen (4.5) genel formülü P'ye göre Q'nun $H(Q \mid P)$ bağıl entropisi için varyasyonel formüle indirgenir.

$$\begin{aligned}\alpha_{min}(Q) &= \sup_{X\in\mathcal{X}}\left(E_Q[\ -X\ ] - \frac{1}{\beta}\ \log\ E[\ e^{-\beta X}\ ]\right) - \frac{\log x_0}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta}\ (H(Q \mid P) - \ \log x_0)\,;\end{aligned}$$

Lemma 5.11'de görünüz. (11.2)'de

$$\rho(X) = \frac{1}{\beta}\ (\log\ E[\ e^{-\beta X}\ ] - \ \log x_0) \qquad ve \qquad \alpha_{min}(Q) = \frac{1}{\beta}\ (H(Q \mid P) - \ \log x_0)$$

yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}\ (\log\ E[\ e^{-\beta X}\ ] - \ \log x_0) &= \max_{Q\in\mathscr{M}_1(P)}\left(\frac{1}{\beta}\ E_Q[\ -\beta X\ ] - \frac{1}{\beta}\ (H(Q \mid P) - \ \log x_0)\right) \\ \frac{1}{\beta}\ (\log\ E[\ e^{-\beta X}\ ] - \ \log x_0) &= \frac{1}{\beta}\ \left(\max_{Q\in\mathscr{M}_1(P)}(\ E_Q[\ -\beta X\ ] - H(Q \mid P)) - \ \log x_0\right) \\ \log\ E[\ e^{-\beta X}\ ] &= \max_{Q\in\mathscr{M}_1(P)}(\ E_Q[\ -\beta X\ ] - H(Q \mid P))\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, ρ'nun (11.2)'deki gösterimi aşağıdaki ikili varyasyonel özdeşliğe denktir:

$$\log\ E[\ e^{X}\ ] = \max_{Q\in\mathscr{M}_1(P)}(\ E_Q[\ X\ ] - H(Q \mid P)\ ).$$

Genellikle, $\mathscr{M}_1(P)$ üzerinde α_{min} minimal ceza fonksiyonu,

$$\ell^*(z) := \sup_{x\in\mathbb{R}}\ (\ z\ x - \ell(x)\ )$$

ile tanımlanan ℓ konveks fonksiyonunun ℓ^* eşlenik fonksiyonu (Fenchel-Legendre dönüşümü) cinsinden ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 11.21. *(ℓ_n), ℓ konveks kayıp fonksiyonuna noktasal azalarak yakınsayan konveks kayıp fonksiyonlarının bir dizisi olsun. O halde, bunlara karşılık gelen ℓ^* eşlenik fonksiyonları, ℓ^*'a noktasal artarak yakınsar.*

Kanıt. Her bir ℓ_n^*'ın ℓ^* ile bastırıldığı ve $\ell_n^*(z)$ sınırına artarak yakınsadığı, Fenchel-Legendre dönüşümüne ait tanımın bir sonucudur. Biz $\ell_\infty^* = \ell^*$ olduğunu göstermeliyiz.

$z \mapsto \ell_\infty^*(z)$ dönüşümü alttan yarı sürekli fonksiyonların artan limiti olduğundan, kendisi de bu özellikleri sağlar. Üstelik ℓ_∞^*, ℓ^* has konveks fonksiyonu ile bastırıldığından bir has konveks fonksiyondur. ℓ_∞^*'ın ℓ_∞^{**} eşlenik fonksiyonunu dikkate alalım. Önerme 2.3'ten $\ell^{**} = \ell$ olduğundan ve ℓ_∞^*, ℓ^* tarafından bastırıldığından $\ell_\infty^{**} \geq \ell$ olur. Burada, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ için $g(x) \leq f(x)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
g(x) &\leq f(x)\\
-f(x) &\leq -g(x)\\
y\,x - f(x) &\leq y\,x - g(x)\\
\sup_{x\in\mathbb{R}}\,(y\,x - f(x)) &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\,(y\,x - g(x))\\
f^*(y) &\leq g^*(y)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\ell_\infty^* \leq \ell^* \Longrightarrow \ell_\infty^{**} \geq \ell^{**} = \ell \Longrightarrow \ell_\infty^{**} \geq \ell$$

dir.

Diğer taraftan her bir n için benzer şekilde $\ell^{**} \leq \ell_n$ olur. $n \uparrow \infty$ için limit alınırsa bu, sırasıyla $\ell_\infty^* = \ell^*$ ve $\ell_\infty^{**} = \ell$'yi verir. □

Yardımcı Teorem 11.22. *ℓ ve ℓ^* fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(a) $\ell^*(0) = -\inf_{x\in\mathbb{R}}\ \ell(x)$ ve $\forall\, z$ için $\ell^*(z) \geq -\ell(0)$'dır.

(b) $z \geq z_1$ olduğunda

$$\ell^*(z) = \sup_{x\geq 0}\,(x\ z - \ell(x))$$

olacak şekilde bir $z_1 \in [0,\infty)$ vardır. Özellikle, ℓ^*, $[z_1,\infty)$ üzerinde artandır.

(c) $z \uparrow \infty$ için limit alınırsa $\dfrac{\ell^*(z)}{z} \to \infty$ olur.

Kanıt. (a) $z = 0$ için

$$\begin{aligned}
\ell^*(0) &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\,(0\cdot x - \ell(x))\\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\,(-\ell(x))\\
\ell^*(0) &= -\inf_{x\in\mathbb{R}}\,(\ell(x))
\end{aligned}$$

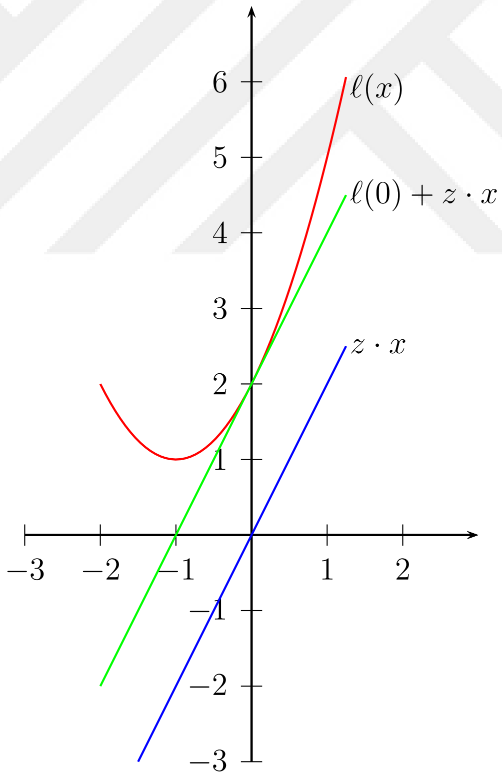
olur.

$x = 0$ için

$$\begin{aligned} \ell^*(z) &= \sup_{x\in\mathbb{R}} (z\ x - \ell(x)) \\ &\geq z \cdot 0 - \ell(0) \\ \ell^*(z) &\geq -\ell(0) \end{aligned}$$

olur.

(b) $N := \{\ z \in \mathbb{R} \mid \ell^*(z) = -\ell(0)\ \}$ olsun. İlk adımda $N \neq \emptyset$ olduğunu gösterelim. ℓ'nin konveksliği, tüm $x \in \mathbb{R}$'ler için $z\ x \leq \ell(x) - \ell(0)$ olacak şekildeki tüm z'lerin S kümesinin boştan farklı olmasını gerektirir. Şekil 1'de de görülebileceği gibi konveks fonksiyonları her noktada destekleyen bir teğet doğrusu vardır. Bu teğet doğrusunu dikkate alırsak $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için $\ell(x) \geq \ell(0) + z\ x$ olacağından $z\ x \leq \ell(x) - \ell(0)$ olur. $z \in S$ için,



Şekil 11.1. Konveks fonksiyonun destek teğet doğrusu

$\ell^*(z) \leq -\ell(0)$ olur. Diğer taraftan, (a)'dan $\ell^*(z) \geq -\ell(0)$'dır. Bu, N kümesinin boştan farklı olduğunu göstermek için yeterlidir.

Şimdi $z_1 = \sup N$ alalım. $z_1 \geq 0$ olduğu açıktır.

Eğer $z > z_1$ ve $x < 0$ ise,

$$x\ z - \ell(x) \leq x\ z_1 - \ell(x) \leq \ell^*(z_1) \leq -\ell(0)$$

dır. Buradaki son eşitsizlik ℓ^*'ın alttan yarı sürekliliğinden çıkar. Ancak $\ell^*(z) > -\ell(0)$'dır, bu nedenle

$$\sup_{x<0} (x\ z - \ell(x)) < \ell^*(z)$$

olur.

(c) (b)'den $z > z_1$ için

$$\ell^*(z)/z = \sup_{x \geq 0} (x - \ell(x)/z)$$

dir. Bu nedenle $x_z := \sup \{\ x \mid \ell(x) \leq z\ \}$ olmak üzere,

$$\frac{\ell^*(z)}{z} \geq x_z - 1$$

olur. ℓ konveks, artan olduğundan ve sonlu değerler aldığından $z \uparrow \infty$ için limit alınırsa $x_z \to \infty$ olur.

□

Teorem 11.36. *Herhangi bir ℓ konveks kayıp fonksiyonu için, (11.2) gösterimindeki minimal ceza fonksiyonu, $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ için*

$$\alpha_{min}(Q) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left(x_0 + E\left[\ \ell^*\left(\lambda\ \frac{dQ}{dP}\right)\ \right]\right) \tag{11.4}$$

ile verilir.

Teorem 11.36'nın kanıtını hazırlamak için, Önbilgi 2.1'de ifade edilen ℓ ve ℓ^* fonksiyonlarının bazı özelliklerini özetleyelim. İlk olarak, ℓ^*'ın bir has konveks fonksiyon yani konveks olduğuna ve bazı sonlu değerler aldığına dikkat edelim. Sağdan sürekli türevini $J := (\ell^*)'_+$ ile ifade edelim. O halde, $x, z \in \mathbb{R}$ için,

$$x = J(z) \quad \textit{ise} \quad x\ z \leq \ell(x) + \ell^*(z) \tag{11.5}$$

dir.

Kanıt. $Q \in \mathscr{M}_1(P)$ alalım ve yoğunluğunu $\varphi := dQ/dP$ ile gösterelim. Öncelikle, $x_0 > \ell(0)$ için iddiamızı kanıtlamanın yeterli olduğunu gösterelim. Aksi halde x_0, $\ell(\mathbb{R})$'nin bir iç noktası olarak kabul edildiğinden $\ell(-a) < x_0$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ bulabiliriz. $\tilde{\ell}(x) := \ell(x-a)$ ve

$$\tilde{\mathscr{A}} := \{ \ \tilde{X} \in \mathcal{X} \mid E[\ \tilde{\ell}(-\tilde{X}) \ ] \leq x_0 \ \}$$

olsun. $\tilde{\ell}(X) = \ell(X-a)$ ve $X = \tilde{X} + a$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \{ \ X \in \mathcal{X} \mid E[\ \ell(-X) \ ] \leq x_0 \ \} \\
\tilde{\mathscr{A}} &= \{ \ \tilde{X} \in \mathcal{X} \mid E[\ \tilde{\ell}(-\tilde{X}) \ ] \leq x_0 \ \} \\
\tilde{\mathscr{A}} &= \{ \ \tilde{X} \in \mathcal{X} \mid E[\ \ell(-\tilde{X} - a) \ ] \leq x_0 \ \} \\
\tilde{\mathscr{A}} &= \{ \ X - a \in \mathcal{X} \mid E[\ \ell(-X) \ ] \leq x_0 \ \} - a \\
\tilde{\mathscr{A}} &= \mathscr{A} - a
\end{aligned}$$

olur. O halde, $\tilde{\mathscr{A}} = \{ \ X - a \mid X \in \mathscr{A} \ \}$'dır ve bu nedenle

$$\sup_{\tilde{X} \in \tilde{\mathscr{A}}} E_Q[\ -\tilde{X} \ ] = \sup_{X \in \mathscr{A}} E_Q[\ -X \ ] + a \tag{11.6}$$

olur. $\tilde{\ell}(0) < x_0$ gerektirmesi, $\tilde{\ell}$ konveks kayıp fonksiyonu tarafından da sağlanır. Dolayısıyla bu durumda varsayım kurulursa

$$\sup_{\tilde{X} \in \tilde{\mathscr{A}}} E_Q[\ -\tilde{X} \ ] = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \ (x_0 + E[\ \tilde{\ell}^*(\lambda\varphi) \ ]) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \ (x_0 + E[\ \ell^*(\lambda\varphi) \ ]) + a$$

buluruz. Burada aslında $\tilde{\ell}$'nin $\tilde{\ell}^*$'ın Fenchel-Legendre dönüşümünün $\tilde{\ell}^*(z) = \ell^*(z) + a \ z$'yi sağladığı kullanıldı. (11.6) ile birlikte bu, $\ell(0) < x_0$ indirgemesinin gerçekten doğru olduğunu kanıtlar.

Herhangi bir $\lambda > 0$ ve $X \in \mathscr{A}$ için (11.5)'te $x \ z \leq \ell(x) - \ell^*(z)$ olduğundan burada x yerine $-X$ ve z yerine $\lambda \ \varphi$ yazılırsa bu,

$$-X\varphi = \frac{1}{\lambda} \ (-X) \ (\lambda \ \varphi) \leq \frac{1}{\lambda} \ (\ell(-X) + \ell^*(\lambda \ \varphi))$$

olmasını gerektirir. Bu nedenle herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\alpha_{min}(Q) \leq \sup_{X \in \mathscr{A}} \frac{1}{\lambda} \left(E[\ \ell(-X)\ ] + E[\ \ell^*(\lambda\ \varphi)\ ]\right) \leq \frac{1}{\lambda} \left(x_0 + E[\ \ell^*(\lambda\ \varphi)\ ]\right)$$

dır. Dolayısıyla, geriye $\alpha_{min}(Q) < \infty$ durumunda

$$\alpha_{min}(Q) \geq \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left(x_0 + E[\ \ell^*(\lambda\ \varphi)\ ]\right) \tag{11.7}$$

olduğunu kanıtlamak kalır. Bu, öncelikle aşağıdaki koşullar altında yapılacaktır:

$$\text{Her } \ X \leq \kappa \text{ için } \ell(x) = \inf \ell \text{ olacak şekilde } \kappa \in \mathbb{R} \text{ vardır.} \tag{11.8}$$

$$\ell^*,\ (0, \infty) \text{ üzerinde sonludur.} \tag{11.9}$$

$$J,\ (0, \infty) \text{ üzerinde süreklidir.} \tag{11.10}$$

Bu varsayımların $\ell^*(0) < \infty$ ve $J(0+) \geq \kappa$'yı gerektirdiğine dikkat edelim. Üstelik $z \uparrow \infty$ için limit alınırsa $J(z)$, $+\infty$'a artarak yakınsar ve bu nedenle $\ell(J(z))$ de $+\infty$'a artarak yakınsar.

$$\text{Her } z \text{ için } \ell^*(z) \geq -\ell(0) > -x_0 \tag{11.11}$$

olduğundan (11.5)'ten

$$\lim_{z \downarrow 0} \ell(J(z)) - x_0 < \lim_{z \downarrow 0} \left(\ell(J(z)) + \ell^*(z)\right) = \lim_{z \downarrow 0} zJ(z) = 0$$

çıkar. Bu gerçekler ve J'nin sürekliliği, yeterince büyük n için

$$E[\ \ell(J(\lambda_n\ \varphi)\ I_{\{\varphi \leq n\}})\ ] = x_0$$

olacak şekilde bir $\lambda_n > 0$'ın var olmasını gerektirir.

$$X^n := -J(\lambda_n\ \varphi)\ I_{\{\varphi \leq n\}}$$

tanımlayalım. O halde X^n sınırlıdır ve $\mathscr{A}$'ya aittir. Bu nedenle (11.5)'te $z = \lambda_n\ \varphi$

ve $X = J(\lambda_n\ \varphi)$ alırsak, (11.11)'den

$$\begin{aligned}
\alpha_{min}(Q) &\geq E_Q[\ -X^n\ ] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\ E[\ I_{\{\varphi\leq n\}}\ J(\lambda_n\ \varphi)\ (\lambda_n\ \varphi)\ ] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\ E[\ (\ell(-X^n) + \ell^*\ (\lambda_n\ \varphi))\ I_{\{\varphi\leq n\}}\ ] \\
&= \frac{1}{\lambda_n}\ (x_0 - \ell(0)\cdot P[\varphi > n] + E[\ \ell^*(\lambda_n\ \varphi)\ I_{\{\varphi\leq n\}}\ ]) \\
&\geq \frac{x_0 - \ell(0)}{\lambda_n}
\end{aligned}$$

çıkar. $\alpha_Q < \infty$ olduğunu varsaydığımız için λ_n'nin λ_∞ azalan limiti kesin pozitif olmalıdır. ℓ^* alttan sınırlı olduğundan Fatou Lemmasını uygulayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\alpha_{min}(Q) &\geq \liminf_{n\uparrow\infty}\frac{1}{\lambda_n}(x_0 - \ell(0)\cdot P[\ \varphi > n\ ] + E[\ \ell^*(\lambda_n\ \varphi)\ I_{\{\varphi\leq n\}}\ ]) \\
&\geq \frac{1}{\lambda_\infty}(x_0 + E[\ \ell^*(\lambda_\infty\ \varphi)\ ]).
\end{aligned}$$

(11.8), (11.9) ve (11.10) varsayımlarımız altınsa bu, (11.7)'yi kanıtlar.

(11.8) ve (11.9) sağlansın ancak J sürekli olmasın. $z \geq 0$ için

$$\ell^*(z) \leq \tilde{\ell}^*(z) \leq \ell^*((1+\varepsilon)\ z)$$

eşitsizliğini sağlayan

$$\tilde{\ell}^*(z) := \ell^*(0) + \int_0^z \tilde{J}(y)dy$$

olacak şekilde üstten yarı sürekli J fonksiyonuna üstten yakınsayan değerler alan $[0,\infty)$ aralığındaki J artan sürekli fonksiyonunu bulabiliriz. $\tilde{\ell}^{**}$, $\tilde{\ell}^*$'ın Fenchel-Legendre dönüşümü olsun. $\tilde{\ell} := \tilde{\ell}^{**}$ olur. Çünkü Önerme 2.3'ten $\ell^{**} = \ell$'dir ve burada z yerine $\dfrac{x}{1+\varepsilon}$ yazılarak

$$\ell\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right) \leq \tilde{\ell}(x) \leq \ell(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\tilde{\mathscr{A}} := \{X \in \mathcal{X}\ |\ E[\ \tilde{\ell}(-X)\ ] \leq x_0\} \subseteq \{(1+\varepsilon)\ X\ |\ X \in \mathscr{A}\} =: \mathscr{A}_\varepsilon$$

olur. $\tilde{\ell}$ için varsayımımızın zaten sağlandığını bildiğimizden

$$\begin{aligned}
\inf_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\left(x_0+E\left[\ \ell^*\left(\lambda\,\frac{dQ}{dP}\right)\ \right]\right) &\leq \inf_{\lambda>0}\frac{1}{\lambda}\left(x_0+E\left[\ \tilde{\ell}^*\left(\lambda\,\frac{dQ}{dP}\right)\ \right]\right)\\
&= \sup_{X\in\tilde{\mathscr{A}}} E_Q[\ -X\ ]\\
&\leq \sup_{X\in\mathscr{A}_\varepsilon} E_Q[\ -X\ ]\\
&= (1+\varepsilon)\ \alpha_{min}(Q)
\end{aligned}$$

buluruz. $\varepsilon\downarrow 0$ için limit alırsak (11.7)'yi elde ederiz.

Son olarak, (11.8) ve (11.9) koşullarını kaldıralım. Bir z için $\ell^*(z)=+\infty$ ise, ℓ'nin eğimi için z, bir üst sınır olmalıdır. Bu nedenle ℓ'ye, eğimi sınırsız olan konveks kayıp fonksiyonlarının bir (ℓ_n) dizisi ile yaklaşacağız. Aynı anda ℓ'nin infimumunu almadığı durumu da ele alabiliriz. Bu amaçla $\kappa_n\leq\ell(0)<x_0$ olacak şekilde bir $\kappa_n\downarrow\inf\ell$ dizisi seçelim. Örneğin

$$\ell_n(x):=\ell(x)\vee\kappa_n+\frac{1}{n}\ (e^x-1)^+$$

tanımlayabiliriz. O halde ℓ_n, ℓ'ye noktasal azalarak yakınsar.

Her bir ℓ_n kayıp fonksiyonu (11.8) ve (11.9)'u sağlar. Dolayısıyla $\alpha^n_{min}(Q)$, ℓ_n'den elde edilen ceza fonksiyonu olmak üzere, her bir n ve her $\varepsilon>0$ için

$$\infty>\alpha_{min}(Q)\geq\alpha^n_{min}(Q)\geq\frac{1}{\lambda^\varepsilon_n}(x_0+E[\ \ell^*_n(\lambda^\varepsilon_n\ \varphi)\ ])-\varepsilon$$

olacak şekilde bir λ^ε_n vardır. Yardımcı Teorem 11.21'den $\ell^*_n\nearrow\ell^*$ olduğuna dikkat ediniz. $\alpha_{min}(Q)<\infty$ varsayımımız,

$$\inf_{z\in\mathbb{R}}\ \ell^*_n(z)\geq-\ell_n(0)=-\ell(0)>-x_0$$

gerçeği ve Yardımcı Teorem 11.22'nin (c) kısmı, $(\lambda^\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin 0 ve sonsuzdan ayrık olarak sınırlı olması gerektiğini gösterir.

Dolayısıyla λ^ε_n'nin, bir $\lambda^\varepsilon\in(0,\infty)$'a yakınsadığını varsayabiliriz. n ve z'ler için

$\ell_n^*(z) \geq -\ell(0)$ gerçeğini tekrar kullanacak olursak Fatou Lemması

$$\alpha_{min}(Q) + \varepsilon \geq \liminf_{n\uparrow\infty} \frac{1}{\lambda_n^\varepsilon}(x_0 + E[\ \ell_n^*(\lambda_n^\varepsilon\ \varphi)\ ]) \geq \frac{1}{\lambda^\varepsilon}(x_0 + E[\ \lambda^\varepsilon\ \varphi)\ ])$$

ifadesini sağlar. Bu, teoremin kanıtını tamamlar. □

Örnek 11.17. *$p > 1$ olmak üzere*

$$\ell(x) := \begin{cases} \frac{1}{p}x^p & ; x \geq 0 \textit{ ise} \\ 0 & ; \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

alalım. O halde, $q = p/(p-1)$ olağan ikil katsayı olmak üzere,

$$\ell^*(z) := \begin{cases} \frac{1}{q}z^q & ; z \geq 0 \textit{ ise} \\ +\infty & ; \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Herhangi bir $x_0 > 0$ için Teorem 11.36'yı uygulayabiliriz. $Q \in \mathscr{M}_1(P)$, $\ell := dQ/dP$ yoğunluğuna sahip olsun. Açıkçası, eğer $\varphi \notin L^q(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ise,

$$\begin{aligned} \alpha_{min}(Q) &= \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left(x_0 + E\left[\ \ell^*(\lambda\frac{dQ}{dP})\ \right]\right) \\ &= \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left(x_0 + E\left[\ \frac{1}{q}(\lambda\varphi)^q\ \right]\right) \\ &= \inf_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda}\left(x_0 + \frac{\lambda^q}{q}E[\ \varphi^q\ ]\right) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha_{min}(Q) = +\infty$'dur. Diğer durumlarda

$$\lambda_Q = \left(\frac{px_0}{E[\ \varphi^q\ ]}\right)^{1/q}$$

için, (11.4)'teki infimum elde edilir. Yani $\lambda_Q = \left(\frac{px_0}{E[\ \varphi^q\ ]}\right)^{1/q}$ olmak üzere,

$$\alpha_{min}(Q) = \frac{1}{\lambda_Q}(x_0 + E[\ \ell^*(\lambda_Q\ \varphi)\ ])$$

olur. Dolayısıyla herhangi bir $Q \ll P$ için $\alpha_{min}(Q)$'yu,

$$\alpha^p_{min}(Q) = (px_0)^{1/p}.E\left[\left(\frac{dQ}{dP}\right)^q\right]^{1/q}$$

olarak ifade edebiliriz. $p \downarrow 1$ limiti alındığında riski, beklenen eksik risk açısından ölçersek, $\ell(x) = x^+$ durumunu elde ederiz. Burada

$$\alpha^1_{min}(Q) = x_0.\left\|\frac{dQ}{dP}\right\|_\infty$$

elde ederiz.

Önerme 4.11 ile birlikte Teorem11.36, sınırlı eksik riskin güçlü notasyonu açısından tanımlanmış olan risk ölçüleri için aşağıdaki sonucu sağlar. Burada $\ell^*(\infty) := \infty$ tanımlamak uygundur.

Sonuç 11.14. *$\mathcal{Q}$'nun $(\Omega, \mathscr{F})$ üzerinde olasılık ölçülerinin bir ailesi olduğunu ve ℓ, ℓ^* ve x_0'ın Teorem 11.36'daki gibi olduğunu varsayalım. Kabul edilebilir pozisyonların bir*

$$\mathscr{A} := \{X \in \mathcal{X} \mid \forall P \in \mathcal{Q} \text{ için } \; E_p[\ \ell(-X)\ ] \leq x_0, \}$$

kümesini tanımlayalım. dQ/dP, Teorem 6.19'da olduğu gibi Q'nun P'ye göre Lebesgue ayrıştırmasında ortaya çıkan yoğunluğu olsun. Bu durumda karşılık gelen konveks risk ölçüsü, $Q \in \mathscr{M}_1(\Omega, \mathscr{F})$ olmak üzere,

$$\alpha(Q) = \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda}\left(x_0 + \inf_{P \in \mathcal{Q}} E_P\left[\ \ell^*\left(\lambda\frac{dQ}{dP}\right)\ \right]\right)$$

ceza fonksiyonu şeklinde ifade edilebilir.

Örnek 11.18. *Örnek 11.16 durumunda, Sonuç 11.14'te ifade edilen problem aşağıdaki entropi minimizasyon problemini ortaya çıkarır: Verilen bir Q ve olasılık ölçülerinin bir $\mathcal{Q}$ kümesi için*

$$\inf_{P \in \mathcal{Q}} H(Q \mid P)$$

bulunur.

Örnek 11.19. *(11.1)'de* $x_0 = 0$ *ve* $\ell(x) := x$ *alalım. O halde*

$$\ell^*(z) := \begin{cases} 0 & ; z = 1 \textit{ ise} \\ +\infty & ; \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. Bu nedenle, $Q \neq P$ *ise* $\alpha(Q) = \infty$ *ve* $\rho(X) = E[\ -X\ ]$*'tir. Eğer* $\mathcal{Q}$*, olasılık ölçülerinin bir kümesi ise, Sonuç 11.14'teki risk ölçüsü* ρ *tutarlıdır ve*

$$\rho(X) = \sup_{P \in \mathcal{Q}} E_P[\ -X\ ]$$

ile verilir.

KAYNAKÇA

[1] Acerbi, C., Tasche, D.,On the coherence of expected shortfall. J. Banking Finance 26 (7), 2002, 1487-1503.

[2] Aliprantis, C. D., Border, K. C., Infinite dimensional Analysis. A hitchhiker's guide, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D., Coherent measures of risk. Math. Finance 9 (1999), 203-228.

[4] Bauer, H., Probability theory. De Gruyter Stud. Math. 23, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1996.

[5] Carlier, G., Dana, R. A.,Core of convex distortions of a probability. J. Econom. Theory 113 (2) (2003), 199-222.

[6] Carlier, G., Dana, R. A., Insurance contracts with deductibles and upper limits. Preprint, Ceremade, Université Paris Dauphine (2002).

[7] Carr, P., Geman, H., Madan, D., Pricing and hedging in incomplete markets. J. Financial Econom. 62 (2001), 131-167.

[8] Choquet, G., Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier 5 (1953/54), 131-295.

[9] Delbaen, F., Coherent risk measures on general probability spaces. In: Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 1-37.

[10] Delbaen, F., Coherent risk measures. Cattedra Galileiana. Scuola Normale Superiore, Classe di Scienze, Pisa, 2000.

[11] Dellacherie, C., Quelques commentaires sur les prolongements de capacités. Séminaire Probabilités V, Sttrasbourg, Lecture Notes in Math. 191, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[12] Dembo, A., Zeitouni, O., Large deviations techniques and applications. Second edition. Appl. Math. 38. Springer-Verlag, New York, 1998.

[13] Denneberg, D., Non-additive measure and integral. Theory Decis. Lib. Ser. B Math. Statist. Meth. 27, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

[14] Denneberg, D., Distorted probabilities and insurance premium. Methods Operations Research 52 (1990), 21-42.

[15] Dudley, R., Real analysis and probability. Wadsworth Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 1989.

[16] Föllmer, H., Schied, A., Stochastics Finance. An Introduction Discrete Time, Kenig, C., Ranicki, A., Röckner, M., Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

[17] Föllmer, H., Schied, A., Convex measures of risk and trading constraints. Finance Stoch. 6 (4) (2002).

[18] Föllmer, H., Schied, A., Robust representation of convex measures of risk. In: Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 39-56.

[19] Frittelli, M., Rosazza Gianin, E., Putting order in risk measures. J. Banking Finance 26 (2002), 1473-1486.

[20] Frittelli, M., Rosazza Gianin, E., Dynamic convex risk measures. In: New Risk Measures in Investment and Regulation, G. Szegö ed., John Wiley Sons, New York, 2003.

[21] Heath, D., Back to the future. Plenary lecture, First World Congress of the Bachelier Finance Society, Paris, 2000.

[22] Heath, D., Ku, H., Pareto equilibria with coherent measures of risk. Math. Finance 14 (2) (2004), 163-172.

[23] Krätschmer, V., Robust representation of convex risk measures by probability. Preprint, Universität des Saarlandes (2004).

[24] Krasnosel'skii, M., Rutickii, Ya., Convex functions and Orlicz spaces. Gordon and Breach Science Publishers, 1961.

[25] Kunze, M., Verteilungsinvariante konvexe Risikomaße. Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, 2003.

[26] Kusuoka, S., On law invariant coherent risk measures. Adv. Math. Econ. 3 (2001), 83-95.

[27] Ogryczak, W., Ruszczynski, A., Dual stochastic dominance and related mean-risk models. SIAM J. Optim. 13 (1) (2002), 60-78.

[28] Pflug, G., Ruszczynski, A., Risk measures for income streams. Preprint, Universität Wien (2001).

[29] Quiggin, J., A Theory of Anticipated Utility. J. Economic Behavior and Organization 3 (1982), 225-243.

[30] Rockafellar, R. T., Uryasev, S., Conditional value-at-risk for general lost distributions. Research report 2001-5, ISE Dept., University of Florida, 2001.

[31] Schmeidler, D., Integral representation without additivity. Proc. Amer. Math. Soc. 97 (2) (1986), 255-261.

[32] Wang, S., Dhaene, J., Comonotonicity, correlation order and premium principles. Insurance Math. Econom. 22 (1998), 235-242.

[33] Yaari, M., The dual theory of choice under risk. Econometrica 55 (1987), 95-116.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: ÖZMEN, Fatma Zeynep
Uyruğu	: T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	: 06.01.1983 Uşak
E-Posta	: zeynepozmen064@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Uşak Üniversitesi/Matematik Bölümü	2017
Lisans	Balıkesir Ünv./Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği	2006
Lise	Şehit Abdülkadir Klavuz Anadolu Öğretmen Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013-2017	Uşak Atatürk Anadolu Lisesi	Öğretmen
2011-2013	Uşak Alper Günbayram Anadolu Lisesi	Öğretmen
2010-2011	Manisa Soma Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi	Öğretmen
2010-2010	Uşak Banaz Şehit Tuncay Durmuş Çok Programlı Lisesi	Öğretmen
2008-2010	Erzurum İspir Lisesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce