T.C.
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AFİN UZAYDA EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ABDÜSSAMED BALKIŞ

NİSAN 2018
UŞAK

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Abdüssamed BALKIŞ

AFİN UZAYDA EĞRİLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Abdüssamed BALKIŞ

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2018

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, afin uzayda düzlemsel eğriler, düzlem eğrileri için afin çatı, afin yay parametresi ve bunların Öklid uzayındaki karşılıkları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve düzlemsel afin eğrileri sınıflandırılmıştır.

Üçüncü bölümde, afin uzay eğrileri, afin uzay eğrileri için afin çatı, afin yay parametresi ve bunların Öklid uzayındaki karşılıkları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve sabit afin eğriliklere sahip bazı uzay eğri denklemleri elde edilmiştir. Bölümün son kısmında afin küresel eğriler için bir karakterizasyon verilmiştir.

Bilim Kodu **:** 403.02.01

Anahtar Kelimeler : Afin uzay , Afin çatı, Shengjin Yöntemi, Equi-afin eğri

Sayfa Adedi **:** 45

Tez Yöneticisi **:** Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER

DIFFERENTIAL GEOMETRY OF CURVES IN AFFINE SPACE

(M. Sc. Thesis)

Abdüssamed BALKIŞ

UŞAK UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

April 2018

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In first chapter, basic definitions and theorems related to the subject are given.

In second chapter, planar curves in affine space, affine frame for plane curves, affine arc parameters and their equivalents in Euclidean space are investigated and planar affine curves are classified.

In third chapter, affine space curves, affine frame for affine space curves, affine arc parameter and relations between their Euclidean space equivalents are examined and some space curve equations with constant affine curvatures are obtained. At the end of the chapter, a characterization for affine spherical curves are given.

Science Code **:** 403.02.01

Key Words **:** Affine space, Affine frame, Shengjin Formula, Eque-affine curve

Page Number **:** 45

Adviser **:** Assoc. Prof. Dr. Yılmaz TUNÇER

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendirip yardım eden Hocam Doç. Dr. Yılmaz TUNÇER’ e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve bana güç veren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
E^n	Öklid uzay
T	E^n de teğet vektör
N	E^n de asli normal vektör
B	E^n de binormal vektör
t	E^n de afin teğet vektör
n	E^n de afin asli normal vektör
b	E^n de afin binormal vektör
κ	E^n de eğrilik fonksiyonu
τ	E^n de burulma (torsiyon)
$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$	Öklidiyen yay parametresine göre türev
$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$	Afin yay parametresine göre türev
$\det(x, y)$	$\mathbb{R}^2$ nin standart alan formu
$\det(x, y, z)$	$\mathbb{R}^3$ ün standart hacim formu

1. GİRİŞ

Afin diferensiyel geometri çalışmaları A. Transon un 1841 de yayınladığı afin diferensiyel geometri kitabına kadar dayanır. 1872 de F. Klein geometrik dönüşümler grubu altında invaryant kalan özellikleri inceledi. Afin diferensiyel geometri afin dönüşümler grubunun invaryantlarının bir çalışmasıdır. L. Berwalt ve W. Blaschke hacim koruyan afin dönüşümlerinin grubu olan equi-afin (unimodular) dönüşümleri altında eğri ve yüzeyleri çalıştılar [1]. Afin geometrinin içerisinde var olan diğer dönüşüm grubu ötelemesi olmayan ve $L(n, \mathbb{R})$ ie gösterilen centro-afin dönüşümler grubudur. Schirokow 1962 de bu konudaki kaynağını yayınlamıştır [2]. 1991 de K. Nomizu ve T. Sasaki $\mathbb{R}^3$ uzayında equi-afin homojen yüzeyleri sınıflandırmış ve afin konneksiyonları incelemiştir [3,4]. Benzer çalışmayı $\mathbb{R}^4$ uzayında F. Dillen ve L. Vrancken 1993 yılında yapmıştır [5,6]. 3 boyutlu equi-afin uzayında eğri teorisi bir bölüm olarak ele alınmıştır. Na Hu 2012 yılında homojen uzaylar ve uzay eğrilerinin afin geometrisi konusunda doktora tezi hazırlamıştır [7,8]. G. Cansu 2015 de Afin diferensiyel geometride eğriler teorisi konusunda bir yüksek lisans tezi hazırlayarak afin uzayda eğrileri incelemiştir [9].

Bu tezde afin uzayda düzlemsel ve uzay equi-afin eğrilerin diferensiyel geometrik özellikleri incelenecektir.

1.1.Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. $A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi : A \, x \, A \longrightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \longrightarrow (\overrightarrow{PQ}) \in V$$

Şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir **afin uzay** denir.

i. $\forall \, P, Q, R \in A$ için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir,
ii. $\forall \, P \in A$ ve $\forall \, \alpha \in V$ için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

$\overrightarrow{PQ}$ vektöründe P noktasına **başlangıç noktası** ve Q noktasına **uç noktası** denir. Diğer yandan A nın boyutu

$$boy \, A = boy \, V$$

olarak tanımlanır [10,11].

Tanım 1.1.2. Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörlerinin sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ - lisine A afin uzayının bir **afin çatısı** (afine frame) denir. Burada P_0 noktasına **çatının başlangıç noktası** ve P_1 noktalarına da **çatının birim noktaları** denir [10,11].

Teorem 1.1.1. Bir vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri A olsun. Belli bir $P_0 \in A$ noktası seçildiğinde başlangıcı P_0 olan bir afin çatı vardır [10,11].

İspat: V nin bir bazı $\{a_1, \dots, a_n\}$ olsun. Her bir $i, 1 \leq i \leq n$, için $\overrightarrow{P_0P_i} = a_i$ olacak şekilde bir tek $P_i \in A$ noktasının var olduğunu biliyoruz. O halde $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ – lisi bir afin çatıdır ve $\{a_1, \dots, a_n\}$ bazı verildiğinde tektir.

Sonuç 1.1.1. Bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayı verildiğinde A da bir $P_0 \in A$ noktası ve V de bir $\{a_1, \dots, a_n\}$ bazı verildiğinde başlangıcı P_0 olan afin çatı ile V deki $\{a_1, \dots, a_n\}$ bazı birbirine karşılık gelirler [10,11].

Tanım 1.1.3. n - boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen bir A afin uzayının afin çatılarından biri

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

olsun. Bu çatı A da aşağıdaki gibi afin koordinat sistemi denen bir koordinat sistemi belirtir.

V nin bir bazı $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ olduğundan $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ vektörünü bu baza göre tek türlü

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i} \ , \quad a_i \in \mathcal{F}$$

ifade edebiliriz. A nın birleştiği V vektör uzayı $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlandığına göre

$$x_i : A \longrightarrow \mathcal{F} \ , \ 1 \le i \le n$$

fonksiyonlarını $\forall P \in A$ için

$$P \longrightarrow x_i(P) = a_i \ , \ 1 \le i \le n$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $P \in A$ noktasına $\mathcal{F}^n$ standart afin uzayının bir

$$(x_1(P), x_2(P), \dots, x_n(P))$$

elemanını karşılık tutmuş oluruz; bu sıralı n - liye **P noktasının koordinatları** denir.

Tersine n tane $a_1, a_2 \ \dots, a_n \in \mathcal{F}$ sayıları verildiğinde koordinatları $\{a_1, \dots, a_n\}$ olan bir tek $P \in A$ noktası vardır. Gerçekten

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i} \right) \in V$$

vektörünü ele alalım. Bu halde ikinci afin aksiyom uyarınca

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

olacak biçimde bir tek $P \in A$ noktası vardır.

Böylece $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n : A \longrightarrow \mathcal{F}$ fonksiyonlarının bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemini elde etmiş oluruz. Bu sistem yardımıyla bir

$$A \xrightarrow{birebir} \mathcal{F}^n \ \ (standart\ afin\ uzay)$$

dönüşümü elde edilmiş olur. Bu fonksiyonlar sistemine A nın bir **afin koordinat sistemi** denir. O halde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ afin koordinat sisteminde $x_i : A \longrightarrow \mathcal{F}$ fonksiyonları afin anlamda koordinat fonksiyonlarıdırlar. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemini belirleyen $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ afin çatısındaki $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktalarından P_0 başlangıç noktası ve diğerleri birim noktalardır [10,11].

Örnek 1.1.1. n - boyutlu bir A afin uzayında bir afin çatı $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ise $P_0, P_1, \dots, P_n$ noktalarının koordinatları $P_0 = (0,0,\dots,0)$, $P_1 = (1,0,\dots,0)$, $\dots$, $P_n = (0,0,\dots,1)$ dır. Buradan da P_0 ın A da başlangıç noktası ve P_i nin de A da i – yinci birim nokta olduğu görülmektedir [10,11].

Örnek 1.1.2. n – boyutlu standart afin uzay $\mathcal{F}^n$ de

$E_0 = (0,0,\dots,0)$, $E_1 = (1,0,\dots,0)$, $\dots$, $E_n = (0,0,\dots,1)$ noktalarını alalım. $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart afin çatı ve bu çatıya karşılık gelen afin koordinat sistemine de **standart koordinat sistemi** denir. Bu koordinat sisteminde $\forall P \in \mathcal{F}^n$ noktasına $a_1, a_2 \dots, a_n \in \mathcal{F}$ sayıları, P nin koordinatları olarak $P = (a_1, \dots, a_n)$ biçiminde karşılık gelir [10,11].

Tanım 1.1.4. (Afin Koordinat Sistemlerinin Değişimi) A n - boyutlu bir afin uzay ve $\{P_i\} = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ ile $\{Q_i\} = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ de A da farklı iki afin çatı olsun. $\{P_i\}$ çatısının $\{Q_i\}$ çatısına göre konumu aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$\{Q_i\}$ afin çatısı yardımıyla belirlenen afin koordinat sisteminde $P_0 \in A$ olduğundan $\overrightarrow{Q_0P_0} \in V$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_0Q_i} \tag{1.1.1}$$

ve benzer şekilde $P_0, P_i \in A$ olduğundan $\overrightarrow{P_0P_i} \in V$ ve dolayısıyla

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \overrightarrow{Q_0Q_i}\ , \ \ 1 \le i \le n\,, \tag{1.1.2}$$

yazılabilir. (1.1.1) ifadesinden görülmektedir ki $\{P_i\}$ çatısındaki P_0 başlangıç noktasının $\{Q_i\}$ çatısına göre afin koordinatları $[a_i]$ dir. Benzer olarak (1.1.2) ifadesinden görülmektedir ki $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ matrisinin i - yinci kolonu $\overrightarrow{P_0P_i} \in V$ vektörünün V deki $\{\overrightarrow{Q_0Q_i}\}$ bazına göre koordinatlarından oluşur. Diğer yandan $\{\overrightarrow{P_0P_i}\,,\ 1 \le i \le n\}$ ve $\{\overrightarrow{Q_0Q_i}\,,\ 1 \le i \le n\}$ sistemleri V nin birer bazı olduklarından $\mathcal{A}$ matrisi regülerdir. O halde $\{P_i\}$ ve $\{Q_i\}$ afin çatılarının rollerini değiştirerek (1.1.1) ve (1.1.2) ifadeleri yerine, sırası ile,

$$\overrightarrow{P_0Q_0} = \sum_{i=1}^{n} b_i \overrightarrow{P_0P_i} \tag{1.1.3}$$

$$\overrightarrow{Q_0Q_i} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} \overrightarrow{P_0P_i}\ , \ \ 1 \le i \le n\,, \tag{1.1.4}$$

elde edilir. (1.1.4) deki $\mathfrak{B} = [b_{ji}] = \mathcal{F}_n^n$ matrisi (1.1.2) deki $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{F}_n^n$ matrisinin inversidir. Dolayısıyla

$$\mathcal{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathcal{A} = I_n = [\delta_{ij}] \in \mathcal{F}_n^n$$

dir. $P \in A$ keyfi bir nokta olmak üzere birinci afin aksiyomdan

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} \tag{1.1.5}$$

yazabiliriz. Burada P nin $\{Q_i\}$ çatısına göre koordinatları $[y_i]$ olmak üzere

$$\overrightarrow{Q_0P} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_0Q_\iota} \tag{1.1.6}$$

dır. Aynı biçimde P nin $\{P_i\}$ çatısına göre koordinatları $[x_i]$ olmak üzere

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{P_0Q_\iota} \tag{1.1.7}$$

dır. (1.1.1), (1.1.6) ve (1.1.7) nin (1.1.5) de yerlerine yazılması ile

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_0Q_\iota} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_0Q_\iota} + \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{P_0P_J}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_0Q_\iota} + \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \overrightarrow{Q_0Q_\iota} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \overrightarrow{Q_0Q_\iota} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_i \right) \overrightarrow{Q_0Q_\iota}$$

veya iki vektörün eşitliği tanımından

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + a_i \ , \ \ 1 \leq i \leq n \, , \tag{1.1.8}$$

veya matris formundaki ifade ile

$$Y = \mathcal{A}X + C \, , \qquad Y = [y_i] \in \mathcal{F}_1^n \, , \qquad \mathcal{A} = [a_{ij}] \tag{1.1.9}$$

elde edilir. Burada $\det \mathcal{A} \neq 0$ dır.

(1.1.5) ifadesinde $P \in A$ noktası keyfi olduğundan $\{P_i\}$ ve $\{Q_i\}$ çatıları tarafından belirtilen iki koordinat sistemi arasındaki bağıntı (1.1.8) ile verilebilir. Bu ifadenin (1.1.9) ile verilen matris formu açık olarak yazılırsa

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.1.10)$$

elde edilir [10,11].

Teorem 1.1.2. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A da iki afin çatı olsun. Bu iki çatı

$$\overrightarrow{Q_0P_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{Q_0Q_\iota} \quad ve \quad \overrightarrow{P_0P_\iota} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \overrightarrow{Q_0Q_\iota} \ , \qquad 1 \leq i \leq n$$

biçiminde bağıntılı ise bu çatıların belirlediği afin koordinat sistemleri olan $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ de

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \ \ ve \ \ \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{-1} & -\mathcal{A}^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde bağıntılıdırlar.

$P_0 = Q_0$ olması özel halinde şu sonuç elde edilir [10,11].

Teorem 1.1.3. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A uzayında iki afin çatı olsun. $P_0 = Q_0$ ise bu iki çatının belirlediği $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ afin koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$Y = \mathcal{A}X \ \ veya \ \ X = \mathcal{A}^{-1}Y$$

dır, burada $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{F}_n^n$ dır [10,11].

Teorem 1.1.4. A bir afin uzay ve $\{P_i\}$ ile $\{Q_i\}$ de A uzayında iki afin çatı olsun. $\forall i$, $1 \leq i \leq n$ için $\overrightarrow{P_0P_\iota} = \overrightarrow{Q_0Q_\iota}$ ise bu çatıya karşılık gelen $\{x_i\}$ ve $\{y_i\}$ koordinat sistemleri arasındaki bağıntı

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \ \ veya \ \ \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & -C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ifadeleri koordinat eksenlerinin ötelenmesi hareketine karşılık gelir [10,11].

Örnek 1.1.3. İki boyutlu bir reel vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay A olsun.

$$y_1 = 3x_1 + 2$$

$$y_2 = 4x_2 - 7$$

dönüşümü A daki iki afin koordinat sistemi arasındaki bağıntıyı göstermektedir. Gerçekten bu sistemi matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olduğunu görürüz ki bu da (1.1.10) formundadır. Buradan x_1 , x_2 yi y_1 , y_2 cinsinden hesaplarsak

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

matrislerine karşılık

$$B = \mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \ , \ b = -\mathcal{A}^{-1}C = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

olduğu görülür [10,11].

Teorem 1.1.5. $\mathcal{F}$ standart afin uzayında bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta sisteminin bir afin çatı olması için gerek ve yeter şart

$$det \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

olmasıdır, burada

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_{ni} \end{bmatrix} \ , \ 1 \leq i \leq n$$

dır [10,11].

İspat:

$$\overrightarrow{P_0 P_i} = \begin{bmatrix} P_{1i} - P_{10} \\ P_{2i} - P_{20} \\ \vdots \\ P_{ni} - P_{n0} \end{bmatrix}$$

dır. Biliyoruz ki $\{\overrightarrow{P_0 P_i}\}$ vektörlerinin $\mathcal{F}^n$ standart vektör uzayında bir baz olması için gerek ve yeter koşul, kolonları

$$\overrightarrow{P_0P_i} = \begin{bmatrix} P_{1i} - P_{10} \\ P_{2i} - P_{20} \\ \vdots \\ P_{ni} - P_{n0} \end{bmatrix} \;, \;\; 1 \leq i \leq n$$

olan nxn matrisinin determinantının sıfırdan farklı olmasıdır, yani,

$$det \begin{bmatrix} P_{11} - P_{10} & P_{12} - P_{10} & \cdots & P_{1n} - P_{10} \\ P_{21} - P_{20} & P_{22} - P_{20} & \cdots & P_{2n} - P_{20} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} - P_{n0} & P_{n2} - P_{n0} & \cdots & P_{nn} - P_{n0} \end{bmatrix}$$

$$(-1)^n \, det \begin{bmatrix} P_{10} & P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n0} & P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

dır. Diğer taraftan $\{\overrightarrow{P_0P_i}\}$ sistemi $\mathcal{F}^n$ vektör uzayında bir baz oluşturursa $\{P_i\}$ $1 \leq i \leq n$, nokta sistemi de $\mathcal{F}^n$ vektör uzayı ile birleştirilen $\mathcal{F}^n$ standart afin uzayında bir çatı oluşturur.

Tanım 1.1.5. (Afin Dönüşümler) Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı V_1 ve V_2 ile birleştirilmiş afin uzaylar, sırası ile, A_1 ve A_2 olsun.

$$f: A_1 \longrightarrow A_2$$

bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $P \in A_1$ noktası için bir

$$\psi_p: V_1 \longrightarrow V_2$$

dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım: $\alpha \in V_1$ vektörü için $\alpha = \overrightarrow{PQ}$ olacak şekilde ikinci afin aksiyoma göre tek olarak var olan nokta, $Q \in A_1$ olduğuna göre

$$\psi_p(\alpha) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

dır [10,11].

Tanım 1.1.6. A_1 ve A_2 birer afin uzay olmak üzere bir

$$f: A_1 \longrightarrow A_2$$

afin dönüşümü birebir ve üzerine ise afin izomorfizm adını alır. $A_1 = A_2$ olması özel halinde afin izomorfizme **afin otomorfizm** adı verilir. Afin otomorfizm kavramı yerine kısaca **afinite** de denir [10,11].

Tanım 1.1.7. Bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanan n – boyutlu afin uzaylardan biri A olsun. $A(n,\mathcal{F}) = Ot(A) = \{f | f: A \longrightarrow A$, afin otomorfizm (afinite)$\}$ cümlesini ele alalım. $A(n,\mathcal{F})$ cümlesinde otomorfizmlerin çarpımı işleminin bir grup işlemi olduğu kolayca gösterilebilir. A da bir afin koordinat sistemi tespit edilirse bu grup, $\mathcal{A} \in GL(n,\mathcal{F})$ ve $C \in \mathcal{F}_1^n$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_{n+1}^{n+1}$$

biçimindeki matrislerin grubu ile temsil edilebilir.

$\mathcal{F}$ cismi üzerinde n – boyutlu bir afin uzay A olsun. $\mathcal{A} \in GL(n,\mathcal{F})$ ve $C \in \mathcal{F}_1^n$ olmak üzere, elemanları

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_{n+1}^{n+1}$$

olan matris grubuna **afin grup** denir ve $A(n,\mathcal{F})$ veya $Ot(A)$ ile gösterilir [10,11].

Tanım 1.1.8. $B \neq \emptyset$ olmak üzere $B \subset A$ olsun. A afin bir uzayı ile birleşen vektör uzayı V ile gösterildiğine göre herhangi bir $P \in B$ noktası seçildiğinde $\forall X \in B$ için

$$W_P(B) = \left\{\overrightarrow{PX} \mid X \in B\right\}$$

vektör cümlesi V nin bir alt uzayı ise B cümlesine A afin uzayının bir **afin altuzayı** denir [10,11].

Tanım 1.1.9. n – boyutlu bir A afin uzayının iki altuzayı B_1 , B_2 ve $boy\ B_1 = boy\ B_2 = r \leq n$ olsun. Eğer

$$B_1 = B_2$$

veya

$$boy(B_1 \cup B_2) = r + 1 \quad ve \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

ise $\boldsymbol{B_1}$ **ile** $\boldsymbol{B_2}$ **paraleldir** denir [10,11].

Tanım 1.1.10. (r – boyutlu Paralelyüzün Hacmi): Bu paragrafta E^n Öklid uzayında r – boyutlu paralelyüzün r –boyutlu hacmini hesaplayacağız. $\alpha_i = \overrightarrow{P_0P_i}$, $1 \leq i \leq r$, vektörleri lineer bağımsız olmak üzere $P_0, P_1, \dots, P_r \in E^n$ noktalarını alalım. Bu halde bu $r + 1$ nokta E^n den seçilmiş lineer bağımsız noktalar olurlar.

$$P = \left\{X \in E^n \mid \overrightarrow{P_0X} = \sum_{i=1}^{r} t_i \overrightarrow{P_0P_i}, 0 \leq t_i \leq 1\right\}$$

cümlesi E^n de köşeleri $P_0, P_1, \dots, P_r$ olan r – boyutlu bir paralelyüzdür. Bu paralelyüzü kısaca

$$P = (P_0, P_1, \dots, P_r)$$

şeklinde gösterelim. r üzerinde tümevarım metodu ile r – boyutlu hacim diyeceğimiz

$$V_r(P_0, P_1, \dots, P_r)$$

hacmini tanımlayacağız.

$r = 1$ için 1 – boyutlu hacim diye $V_1(P_0, P_1) = \|\overrightarrow{P_0P_1}\|$ tanımlıyoruz.

$r = 2$ için 2 – boyutlu hacim $V_2(P_0, P_1, P_2)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

P_2 noktasının 1 – boyutlu $F = Sp\{P_0, P_1\}$ alt uzayına olan uzaklığını h ile gösterirsek h ya yükseklik olarak bakabiliriz ve

$$V_2(P_0, P_1, P_2) = \mathrm{h}V_1(P_0, P_1)$$

diyelim. Bu şekilde devam ederek kabul edelim ki

$$V_{r-1}(P_0, P_1, \dots, P_{r-1})$$

tanımlanmış olsun. O zaman P_r noktasının $(r-1)$ boyutlu $F = Sp\{P_0, P_1, \dots, P_{r-1}\}$ alt uzayına olan uzaklığı $h = d(P_r, F)$ ile gösterilirse r – boyutlu hacim diyeceğimiz $V_r(P_0, P_1, \dots, P_r)$ hacmi

$$V_r(P_0, P_1, \dots, P_r) = hV_{r-1}(P_0, P_1, \dots, P_{r-1})$$

olarak tanımlanmış olur. Burada $V_r(P_0, P_1, \dots, P_r)$ hacmi $P_0, P_1, \dots, P_r$ köşe noktalarının sırasından bağımsızdır.

(1.1.9) eşitliği ile verilen afin dönüşüm hacim (alan) koruyorsa afin dönüşüme **eş-afin (equi-afin) dönüşüm** denir [10,11].

Tanım 1.1.11. n – boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n – boyutlu **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [10,11].

Tanım 1.1.12. E^n n – boyutlu Öklid uzayında bir nokta X olsun. E^n de bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun.

$$x_i : E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bileşenine E^n in **i – yinci koordinat fonksiyonu** denir [10,11].

Tanım 1.1.13. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ eğrisi için $\vec{T}(s) = \alpha'(s)$ eşitliğiyle belirli $\vec{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin s noktasındaki **birim teğet vektörü** denir. $\vec{T}$, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **birim teğet vektör alanı** denir [10,11].

Tanım 1.1.14. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^n$ eğrisi için,

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longrightarrow \kappa(s) = \left\|\overrightarrow{T'}(s)\right\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **eğriliği** denir.

Düzlemde α regüler bir eğri olsun.

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ eğrisinin eğriliği:

i) $t \in I$ yay parametresi olmak üzere $\kappa = \|\ddot{\alpha}(t)\|$,
ii) $t \in I$ yay parametresi değilse

$$\kappa = \frac{|\dot{\alpha}_1(u)\ddot{\alpha}_2(u) - \ddot{\alpha}_1(u)\dot{\alpha}_2(u)|}{\left(\dot{\alpha}_1^2(u)\dot{\alpha}_2^2(u)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

olarak tanımlanır [10,11].

Uzayda α regüler bir eğri olsun.

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ eğrisinin eğriliği:

i) $t \in I$ yay parametresi olmak üzere $\kappa = \|\ddot{\alpha}(t)\|$,
ii) $t \in I$ yay parametresi değilse

$$\kappa = \frac{\|\dot{\alpha}(u) \wedge \ddot{\alpha}(u)\|}{\|\dot{\alpha}(u)\|^3}$$

olarak tanımlanır [10,11].

Tanım 1.1.15. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\vec{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\overrightarrow{T'}(s)$$

eşitliği ile belirli $\vec{N}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **asli normali** denir. $\vec{N}$, α eğrisi üzerinde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına **asli vektör alanı** denir [10,11].

Tanım 1.1.16. 3-boyutlu Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ eğrisi için,

$$\vec{B}(s) = \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s)$$

eşitliği ile tanımlı $\vec{B}(s)$ vektörüne, eğrinin s noktasındaki **binormali** denir. $\vec{B}$ vektör alanına da α eğrisinin **binormal vektör alanı** denir [10,11].

Tanım 1.1.17. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektörleri $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ olmak üzere,

$$\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle \vec{B}(s), \overrightarrow{N'}(s) \rangle$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin s noktasındaki **burulması** denir [10,11].

Teorem 1.1.6.

$$\alpha : (a,b) \longrightarrow E^2$$

regüler eğri olsun.

i) α , bir doğru parçasıdır $\Leftrightarrow \kappa(t) = 0$

ii) $\alpha, r > 0$ yarıçaplı bir çemberin parçasıdır $\Leftrightarrow |\kappa(t)| = \frac{1}{r}$ olmasıdır [12].

Tanım 1.1.18. Düzlemde α regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{T}(t) = \dot{\alpha}(t)$, α nın birim teğet vektörü ve $\vec{N}(t)$ birim normal vektörü olmak üzere,

$$\dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t)$$

dir. $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t)\}$ sistemi ortogonal bir sistemdir.

$t \in I$ yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\vec{T} = \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\vec{N} = \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|}$$

olmak üzere $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t)\}$ eğrinin Frenet 2-ayaklısıdır.

α eğrisinin Öklid düzlem Serret-Frenet çatısı $\dot{\alpha} = \vec{T}$ olmak üzere,

$$\dot{T} = \kappa\vec{N}$$

$$\dot{N} = -\kappa\vec{T}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

Burada det $\left[\vec{T}, \vec{N}\right] = 1$ ve türevler Öklidiyen yay parametresine göre alınmıştır [10,11].

Not 1.1.1. $\alpha : (a, b) \longrightarrow E^3$ regüler bir eğri olsun.

i) $\kappa = 0 \Leftrightarrow \alpha$, bir doğrudur.

ii) $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$, bir düzlemsel eğridir.

iii) $\kappa = sabit > 0$ ve $\tau = sabit \Leftrightarrow \alpha$ eğrisi bir dairesel helistir.

iv) $\frac{\tau}{\kappa} = sabit \Leftrightarrow \alpha$ eğrisi bir silindirik helistir [12].

Tanım 1.1.19. (Öklid Uzayı Serret-Frenet Formülleri)

Uzayda α regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{T}(t) = \dot{\alpha}(t)$, α nın birim teğet vektörü, $\vec{N}(t)$ birim normal vektörü ve $\vec{B}(t)$ birim binormal vektörü olmak üzere; $\dot{\vec{T}}(t) = \kappa(t)\vec{N}(t)$ şeklindedir ve $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ sistemi ortogonal bir sistemdir.

i) $t \in I$ yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\vec{T}(t) = \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\ddot{\alpha}(t)}{\|\ddot{\alpha}(t)\|}$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t)$$

olmak üzere $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ eğrinin Frenet 3-ayaklısıdır.

ii) $u \in I$ yay parametresi değilse α eğrisi için,

$$\vec{T}(u) = \frac{\dot{\alpha}(u)}{\|\dot{\alpha}(u)\|}$$

$$\vec{N}(u) = \vec{B}(u) \wedge \vec{T}(u)$$

$$\vec{B}(u) = \frac{\dot{\alpha}(u) \wedge \ddot{\alpha}(u)}{\|\dot{\alpha}(u) \wedge \ddot{\alpha}(u)\|}$$

olmak üzere $\{\vec{T}(u), \vec{N}(u), \vec{B}(u)\}$ eğrinin Frenet 3-ayaklısıdır.

α eğrisinin Öklid uzay Serret-Frenet çatısı $\dot{\alpha} = \vec{T}$ olmak üzere;

$$\dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N}$$

$$\dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{N} + \tau\vec{B}$$

$$\dot{\vec{B}} \; = -\,\tau\vec{N}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{T}} \\ \dot{\vec{N}} \\ \dot{\vec{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

Burada $det\left[\vec{T},\vec{N},\vec{B}\right] = 1$ ve türevler Öklidiyen yay parametresine alınmıştır. [10,11].

2. AFİN UZAYDA DÜZLEMSEL EĞRİLER

Bu bölümde de [8] ve [9] nolu kaynaklar temel alınarak hazırlanmıştır.

$\mathbb{R}^2$ uzayında $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ vektörleri ile belli olan paralelkenarın alanı

$$\det\,[x, y] = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

olarak tanımlanır. Bu bölümde alan koruyan afin dönüşümler grubu altında invaryant olan düzlemdeki eğrilerin özelliklerini inceleyeceğiz. Alan koruyan afin dönüşümler grubu, $SL(2,\mathbb{R})$ lineer grubunun elemanları ve $\mathbb{R}^2$ nin öteleme grubu tarafından üretilen gruptur.

$$Y = AX + a$$

olmak üzere $X, Y \in \mathbb{R}^2, A \in\ SL(2,\mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}^2$ dir.

Bu bölümde alan koruyan afin dönüşümler grubu altında invaryant olan düzlemsel eğrilerin afin anlamda ve Öklid anlamında özelliklerini ve birbiri arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

2.1. Afin Düzlem Eğrileri

Tanım 2.1.1.

$$\alpha : I\ \subset\ \mathbb{R}\ \longrightarrow\ \mathbb{R}^2$$

regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det\left[\frac{d\alpha}{dr}(r), \frac{d^2\alpha}{dr^2}(r)\right] \neq 0, \forall r \in I$$

ise α eğrisine **afin eğri** denir [7,8].

Tanım 2.1.2.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

regüler bir eğri olsun.

$$\det\left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s)\right] = 1, \forall s \in I$$

ise s ye **afin yay parametresi** denir [7,8].

Afin eğriler yay parametresi ile yeniden parametrelendirilebilir.

Tanım 2.1.3. Düzlemde regüler bir α eğrisinin afin eğriliği

$$k : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longrightarrow k(s) = \det\left[\alpha''(s), \alpha'''(s)\right]$$

olarak tanımlanır.

s afin yay parametresi, u herhangi bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d\alpha}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2}(s) = \frac{d^2\alpha}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^2u}{ds^2}$$

şeklindedir. Afin yay parametresi olabilmesi için

$$\left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s)\right] = 1$$

olmalıdır. Bu durumda

$$1 = \det\left[\frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds}, \frac{d^2\alpha}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^2u}{ds^2}\right]$$

$$= \det\left[\frac{d\alpha}{du}, \frac{d^2\alpha}{du^2}\right]\left(\frac{du}{ds}\right)^3$$

bulunur. Buradan afin yay parametresi fonksiyonu $u_0 \in I$ için,

$$s = \int_{u_0}^{u} \det\left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u)\right]^{\frac{1}{3}} du$$

şeklinde bulunur.

Regüler her afin eğri parametre değişimi ile birim hızlı hale getirilebilir. $u_0 \in I$ için,

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \longrightarrow f(u) = \int_{u_0}^{u} \det\left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u)\right]^{\frac{1}{3}} du$$

dönüşümü ile verilen α afin eğrisi birim hızlı hale dönüştürülebilir [13].

2.2. Afin Düzlem Eğrileri İçin Çatı

Düzlemde, α afin regüler birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{t} = \alpha'(s)$, α afin eğrisinin birim afin teğet vektörü $\vec{t}(s)$ ve $\vec{n}(s)$ birim afin normal vektörü olmak üzere,

$$\alpha' = \vec{t} \quad \text{ve} \quad \overrightarrow{n'}(s) = k(s)\vec{t}(s)$$

dir. $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir.

$s \in I$ afin yay parametresi olmak üzere α eğrisi için,

$$\vec{t} = \alpha'(s), \qquad \alpha' = \frac{d\alpha}{ds},$$

$$\vec{n} = \alpha''(s)$$

olmak üzere $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$ eğrinin afin Frenet 2-ayaklısıdır.

α eğrisinin afin Düzlem Serret-Frenet çatısı $\alpha' = \vec{t}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{t'} = \vec{n}$$

$$\overrightarrow{n'} = -k\vec{t}$$

olarak tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{t'} \\ \overrightarrow{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

Burada $\det[\vec{t}, \vec{n}] = 1$ ve türevler afin yay parametresine göre alınmıştır. $\det[\alpha'(s), \alpha''(s)] = 1$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\det[\alpha''(s), \alpha''(s)] + \det[\alpha'(s), \alpha'''(s)] = 0$$

bulunur. Buradan düzlemsel afin eğriler için

$$\alpha'''(s) + \kappa(s)\alpha'(s) = 0$$

eşitliğini elde ederiz [9].

Sonuç 2.2.1. Sabit afin eğrilikli α regüler eğrisi, aşağıdaki eşitliklerden birine denktir:

i) $k = 0$ ise parabol,
ii) $k > 0$ ise elips,
iii) $k < 0$ ise hiperbol belirtir.

Düzlemde κ Öklidiyen eğriliği sabit olan sadece çembersel yaylar ve doğru parçalarıdır. Fakat k afin eğriliği sabit olan sadece konik yaylardır [9].

2.2.1. Afin İle Öklid Yay Parametresi Arasındaki İlişki

Düzlemde bir $\alpha(t) = \gamma\big(s(t)\big)$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun.

$\dot{\alpha} = \vec{T}, \ \ \dot{T} = \kappa\vec{N}, \ \ \dot{N} = -\kappa\vec{T}$ ise $det(T, N) = 1$ ve

$\alpha' = \vec{t}, \ \ \vec{t'} = \vec{n}, \ \ \vec{n'} = -k\vec{t}$ ise $det(t, n) = 1$ olduğu bilinmektedir.

$$\vec{T} = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \ \ ve \ \ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\vec{t}$$

eşitliklerinden $\vec{T} = \dot{s}\vec{t} = \dot{\alpha}$ bulunur.

$\dot{\vec{T}} = \ddot{\alpha} = \kappa\vec{N}, \ \ \kappa\vec{N} = (\dot{s})^2\vec{n} + \ddot{s}\vec{t}, \ \ \vec{N} = \big((\dot{s})^2\vec{n} + \ddot{s}\vec{t}\big)\kappa^{-1}$ bulunur.

det $(T, N) = 1$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} \dot{s} & 0 \\ \ddot{s}\kappa^{-1} & (\dot{s})^2\kappa^{-1} \end{vmatrix} = 1$$

olup determinant değeri hesaplanırsa,

$$(\dot{s})^3\kappa^{-1} = 1$$

$$(\dot{s})^3 = \kappa$$

$$\dot{s} \; = \; (\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

elde edilir. Böylece afin yay parametresi ile Öklidiyen yay parametresi arasındaki bağıntı,

$$\frac{ds}{dt} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde elde edilir [9].

Düzlemde bir $\alpha(t) = \; \gamma\big(s(t)\big)$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun. Bölüm 2.2.1 in başında afin yay parametresi ile Öklidiyen yay parametresi arasındaki bağıntıyı $\vec{T} = \dot{s}\vec{t}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\vec{T} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}\,\vec{t}$$

bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılarak $(\dot{s})^3 = \kappa$ elde edilir. $(\dot{s})^3 = \kappa$ eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\vec{s} = \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{2}{3}}\,\kappa$$

bulunur. $\vec{N} = \big((\dot{s})^2\,\vec{n} + \vec{s}\,\vec{t}\big)\kappa^{-1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\vec{N} = \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\,\dot{\kappa}\vec{t} + (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\,\vec{n}$$

bulunur.

Bu durumda çatılar arasındaki geçiş matrisi aşağıdaki gibidir:

Sonuç: Afin çatıdan Öklid çatıya geçiş matrisi,

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \\ \vec{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\,\dot{\kappa} & (\kappa)^{-\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \\ \vec{n} \end{bmatrix}$$

ve

Öklid çatıdan Afin çatıya geçiş matrisi ise;

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \\ \vec{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

şeklindedir [9].

2.2.2. Afin İle Öklid Eğrilikler Arasındaki İlişki

Düzlemde bir $\alpha(t) = \gamma\big(s(t)\big)$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun. α eğrisinin afin türevlerini alalım.

$$\alpha' = (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\vec{T}$$

$$\alpha'' = -\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa}\vec{T} + (\kappa)^{\frac{1}{3}}\vec{N}$$

$$\alpha''' = \left(\frac{5}{9}(\kappa)^{-3}(\dot{\kappa})^2 - \frac{1}{3}(\kappa)^{-2}\ddot{\kappa} - \kappa\right)\vec{T}$$

Afin eğrilik $k = \det\,[\alpha'', \alpha''']$ olarak tanımlıdır. Bulunan türevler yerleri yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} k \;&=\; \begin{vmatrix} \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{5}{9}(\kappa)^{-3}(\dot{\kappa})^2 - \frac{1}{3}(\kappa)^{-2}\ddot{\kappa} - \kappa & 0 \end{vmatrix} \\ &=\; (\kappa)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa} - \frac{5}{9}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}(\kappa)^{-2} \end{aligned}$$

şeklinde olup k ve κ arasındaki ilişki;

$$k = \frac{9\kappa^4 - 5(\dot{\kappa})^2 + 3\ddot{\kappa}}{9\kappa^{\frac{4}{3}}}$$

şeklindedir [9].

Örnek 2.2.1. $\alpha(u) = (u, u^2)$ eğrisini göz önüne alalım.

Türevleri alınırsa,

$$\alpha'(u) = (1, 2u)$$

$$\alpha''(u) = (0, 2)$$

bulunur. Afin yay parametresi ise,

$$s = \int_{u_0}^{u} \det\,[\alpha'(u), \alpha''(u)]^{\frac{1}{3}}\, du$$

olmak üzere

$$s = 2^{\frac{1}{3}}\, u$$

olarak hesaplanır. $u = 2^{-\frac{1}{3}} s$ yerine yazılırsa,

$$\alpha(s) = \left(2^{-\frac{1}{3}} s, 2^{-\frac{2}{3}} s^2\right)$$

olup

$$\vec{t} = \left(2^{-\frac{1}{3}}, 2^{\frac{1}{3}} s\right)$$

$$\vec{n} = \left(0, 2^{\frac{1}{3}}\right)$$

ve

$$\alpha'''(s) = (0, 0)$$

bulunur. Afin eğrilik,

$$k(s) = \det\,[\alpha''(s), \alpha'''(s)]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2^{\frac{1}{3}} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $k(s) = 0$ olduğundan α, bir **parabol** belirtir [9].

Örnek 2.2.2.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ merkezcil elips eğrisi,}$$

$x=a\cos u$, $y=b\sin u$ için $\beta(u)=(a\cos u\,, b\sin u)$ eğrisini ele alalım.

Türevleri alınırsa,

$$\beta'(u)=\ (-a\sin u\,, b\cos u)$$

$$\beta''(u)=(-a\cos u\,, -b\sin u)$$

bulunur. Afin yay parametresi ise,

$$s \ = \int_{u_0}^{u} \det\,[\beta'(u),\beta''(u)]^{\frac{1}{3}}\,du$$

eşitliğinden

$$s \ = \ (ab)^{\frac{1}{3}}\,u$$

olarak hesaplanır. $u=(ab)^{-\frac{1}{3}}\,s$ yerine yazılırsa afin eğri,

$$\beta(s)=\left(a\cos\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\ s\,, b\sin(ab)^{-\frac{1}{3}}\ s\right)$$

olup,

$$\vec{t} \ = \left(-a(ab)^{-\frac{1}{3}}\sin(ab)^{-\frac{1}{3}}s, b(ab)^{-\frac{1}{3}}\cos\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\ s\right)$$

$$\vec{n} \ = \left(-a(ab)^{-\frac{2}{3}}\cos\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\ s, -b(ab)^{-\frac{2}{3}}\sin(ab)^{-\frac{1}{3}}s\right)$$

ve

$$\beta'''(s)=\left(a(ab)^{-1}\sin(ab)^{-\frac{1}{3}}s, -b(ab)^{-1}\cos\,(ab)^{-\frac{1}{3}}\ s\right)$$

bulunur. Afin eğrilik,

$$k(s) \ = \ \det\,[\beta''(s),\beta'''(s)]$$

eşitliğinden

$$k(s) \ = \ (ab)^{-\frac{2}{3}}$$

şeklinde elde edilir ve $k(s)>0$ olduğundan β, bir **elips** belirtir [9].

Örnek 2.2.3.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad x = a\cosh u\,, y = b\sinh u$$

için $\gamma(u) = (a\cosh u\,, b\sinh u)$ eğrisini ele alalım.

Türevleri alınırsa,

$$\gamma'(u) = (a\sinh u\,, b\cosh u)$$

$$\gamma''(u) = (a\cosh u\,, b\sinh u)$$

bulunur. Afin yay parametresi ise,

$$s \;=\; \int_{u_0}^{u} \det\,[\gamma'(u), \gamma''(u)]^{\frac{1}{3}}\,du$$

eşitliğinden

$$s \;=\; (-ab)^{\frac{1}{3}}\,u$$

olarak hesaplanır. $u = (-ab)^{-\frac{1}{3}}s$ yerine yazılırsa,

$$\gamma(s) = \left(a\cosh\,(-ab)^{-\frac{1}{3}}\;s\,, b\sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}}\;s\right)$$

olup,

$$\vec{t} \;=\; \left(a(-ab)^{-\frac{1}{3}}\sinh(ab)^{-\frac{1}{3}}s, b(-ab)^{-\frac{1}{3}}\;\cosh\,(-ab)^{-\frac{1}{3}}\;s\right)$$

$$\vec{n} \;= \left(a(-ab)^{-\frac{2}{3}}\;\cosh\,(-ab)^{-\frac{1}{3}}\;s, b(-ab)^{-\frac{2}{3}}\sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}}s\right)$$

ve

$$\gamma'''(s) = \left(a(-ab)^{-1}\sinh(-ab)^{-\frac{1}{3}}s, b(-ab)^{-1}\cosh\,(-ab)^{-\frac{1}{3}}\;s\right)$$

bulunur. Afin eğrilik,

$$k(s) \;=\; \det\,[\gamma''(s), \gamma'''(s)]$$

eşitliğinden

$$k(s) \;=\; (-ab)^{-\frac{2}{3}}$$

şeklinde elde edilir ve $k(s) < 0$ olduğundan γ, bir **hiperbol** belirtir [9].

3. AFİN UZAY EĞRİLERİ

Bu bölümde de [8] ve [9] nolu kaynaklar temel alınarak hazırlanmıştır.

$\mathbb{R}^3$ uzayında $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörleri ile belirlenen geometrik şeklin hacmi,

$$\begin{aligned} \det\,[x, y, z] &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 \end{aligned}$$

ile tanımlıdır. Burada $X, Y \in \mathbb{R}^3$, $A \in SL(3, \mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^3$ şeklindedir.

Hacim koruyan afin dönüşümler $Y = AX + a$ formundaki dönüşümler olup, bu grup $SL(3, \mathbb{R})$ ve $\mathbb{R}^3$ ün öteleme grubu tarafından üretilen gruptur.

Bu bölümde 3-boyutlu afin uzayda hacim koruyan afin dönüşümler grubu altında invaryant kalan eğrilerin afin anlamda ve Öklid anlamında özelliklerini ve birbirleriyle olan ilişkileri inceleyeceğiz. Bölümün son kısmında, küresel afin eğriler için bir karakterizasyon vereceğiz.

3.1. Afin Uzayda Eğri

Tanım 3.1.1.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det\left[\frac{d\alpha}{dr}(r), \frac{d^2\alpha}{dr^2}(r), \frac{d^3\alpha}{dr^3}(r)\right] \neq 0\,, \qquad \forall\, r \in I \text{ ise}$$

α eğrisine **afin uzay eğrisi** denir [7,8].

Tanım 3.1.2.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

regüler bir eğri olsun. Eğer

$$\det\left[\frac{d\alpha}{ds}(s), \frac{d^2\alpha}{ds^2}(s), \frac{d^3\alpha}{ds^3}(s)\right] = 1$$

ise s ye afin **uzay yay parametresi** denir [7,8].

s afin yay parametresi, u herhangi bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{du}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d^2\alpha}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^2u}{ds^2}$$

$$\frac{d^3\alpha}{ds^3} = \frac{d^3\alpha}{du^3}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2\alpha}{du^2}\frac{d^2u}{ds^2}\frac{du}{ds} + \frac{d\alpha}{du}\frac{d^3u}{ds^3}$$

şeklindedir. Burada s nin afin yay parametresi olabilmesi için

$$\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$$

olmalıdır. Buradan afin yay parametresi fonksiyonu $u_0 \in I$ için,

$$s = \int_{u_0}^{u} \det\left[\frac{d\alpha}{du}(u), \frac{d^2\alpha}{du^2}(u)\frac{d^3\alpha}{du^3}(u)\right]^{\frac{1}{6}} du$$

şeklinde hesaplanabilir [9].

Tanım 3.1.3. (Afin Uzay Eğrinin Eğriliği)

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

uzay eğrisinin afin eğriliği

$$k(s) = \det\left[\alpha'(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s)\right]$$

olarak tanımlanır [8].

Tanım 3.1.4. (Afin Uzay Eğrinin Torsiyonu)

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

uzay eğrisinin afin torsiyonu

$$\tau_\alpha(s) = -\det\left[\alpha''(s), \alpha'''(s), \alpha''''(s)\right]$$

olarak tanımlanır [8].

$\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$ eşitliğinin türevi alınırsa, 3-boyutlu afin uzayda eğriler için,

$$\alpha''''(s) + \tau_\alpha(s)\alpha'(s) + k(s)\alpha''(s) = 0$$

eşitliği elde edilir.

3.2. Afin Uzay Eğrileri İçin Çatı

Uzayda afin yay parametresine göre türevler alınarak afin teğet vektör $\vec{t} = \alpha'$, afin normal vektör $\vec{n} = \alpha''$ ve afin binormal vektör $\vec{b} = \alpha'''$ yardımıyla $\alpha' = \vec{t}$ olmak üzere afin çatı;

$$\overrightarrow{t'} = \alpha'' = \vec{n}$$

$$\overrightarrow{n'} = \alpha''' = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{b'} = \alpha'''' = -\tau_\alpha \alpha' - k\alpha''$$

şeklinde tanımlanır.

Burada,

$$\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$$

dir [8].

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{t'} \\ \overrightarrow{n'} \\ \overrightarrow{b'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tau & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

Burada $\det\left[\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\right] = 1$ ve türevler afin yay parametresine göre alınmıştır.

Tanım 3.2.1. (Afin Uzayında Frenet Düzlemleri)

Afin uzayda birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektörleri t, n, b olsun.

i) $\{t(s), n(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **afin oskülatör düzlem** denir.

ii) $\{t(s), b(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **afin rektifiyan düzlem** denir.

iii) $\{b(s), n(s)\}$ tarafından gerilen düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **afin normal düzlem** denir.

$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı regüler bir afin uzay eğrisi olsun. Burada $s_0 \in I$ olmak üzere eğrinin $\alpha(s_0)$ noktası komşuluğunda Frenet düzlemlerini inceleyeceğiz.

$\alpha(s)$ eğrisinin, $\alpha(s_0)$ noktasındaki afin eğriliğini k ve afin torsiyonu τ_α ile gösterelim. α fonksiyonun s_0 noktası komşuluğunda Taylor açılımı $h = s - s_0$ olmak üzere yazılırsa,

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = \left(s - \frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5\right)\alpha'(s_0) + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{1}{5!}(k' + \tau_\alpha)s^5\right)$$

$$\alpha''(s_0) + \left(\frac{1}{3!}s^3 - \frac{1}{5!}s^5\right)\alpha'''(s_0) + \cdots$$

$$= \left(s - \frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5\right)t + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{1}{5!}(k' + \tau_\alpha)s^5\right)n + \left(\frac{1}{3!}s^3 - \frac{1}{5!}s^5\right)b + \cdots$$

$$\cong \left(s - \frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5\right)t + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{1}{5!}(k' + \tau_\alpha)s^5\right)n + \left(\frac{1}{3!}s^3 - \frac{1}{5!}s^5\right)b$$

bulunur. Burada $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ vektörü, $\alpha(s_0)$ noktasından $\alpha(s)$ noktasına giden vektördür. $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ vektörünün $\{t, n, b\}$ ortonormal çatısına göre bileşenlerine x, y, z denirse;

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) \cong \left(s - \frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5\right)t + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{1}{5!}(k' + \tau_\alpha)s^5\right)n + \left(\frac{1}{3!}s^3 - \frac{1}{5!}s^5\right)b$$

eşitliğine göre yaklaşık olarak

$$x = s - \frac{1}{4!}\tau_\alpha s^4 - \frac{1}{5!}\tau'_\alpha s^5$$

$$y = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{1}{5!}(k' + \tau_\alpha)s^5$$

$$z = \frac{1}{3!}s^3 - \frac{1}{5!}s^5$$

yazılabilir [9].

3.2.1. Afin İle Öklid Yay Parametresi ve Frenet Vektörleri Arasındaki İlişki

Uzayda bir $\alpha(t) = \gamma\big(s(t)\big)$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun. $\dot{\alpha} = \vec{T}$ ve $\alpha' = \vec{t}$ eşitliklerinden,

$\dot{\vec{T}} = \kappa\vec{N},\ \ \dot{\vec{N}} = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B},\ \ \dot{\vec{B}} = -\tau\vec{N}$ ise $\det(\mathrm{T},\mathrm{N},\mathrm{B}) = 1$

$\vec{t'} = \vec{n},\ \ \vec{n'} = \vec{b},\ \ \vec{b'} = -\tau_\alpha\vec{t} + k\vec{n}$ ise $\det(t,n,b) = 1$

şeklinde elde edilir. Bölüm 2.2.1 deki afin ile Öklid yay parametresi arasında bulunan

$$\frac{ds}{dt} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}$$

bağıntısı uzayda da geçerlidir [9].

Uzayda bir $\alpha(t) = \gamma\big(s(t)\big)$ eğrisi alalım. t, Öklid yay parametresi ve s, afin yay parametresi olmak üzere;

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Öklid yay parametresine göre türev ve

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{ds}$$

afin yay parametresine göre türev olsun. Bölüm 2.2.1 de

$$\vec{T} = (\kappa)^{\frac{1}{3}}\,\vec{t} \tag{3.1}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\,\dot{\kappa}\,\vec{t} + (\kappa)^{-\frac{1}{3}}\,\vec{n} \tag{3.2}$$

şeklinde hesaplanmıştır. (3.2) denkleminin türevi alınırsa

$$-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} = \left(-\frac{5}{9}(\kappa)^{-\frac{8}{3}}(\dot{\kappa})^2 + \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}\right)\vec{t} + \vec{b}$$

bulunur. (3.1) deki denklemler kullanılarak,

$$\begin{aligned} -\kappa(\kappa)^{\frac{1}{3}}\,\vec{t} + \tau\vec{B} &= \left(-\frac{5}{9}(\kappa)^{-\frac{8}{3}}(\dot{\kappa})^2 + \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa}\right)\vec{t} + \vec{b} \\ \tau\vec{B} &= \left(-\frac{5}{9}(\kappa)^{-\frac{8}{3}}(\dot{\kappa})^2 + \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa} + (\kappa)^{\frac{4}{3}}\right)\vec{t} + \vec{b} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan uzayda Öklid binormal vektörü ile afin binormal vektörü arasındaki geçiş,

$$\vec{B} = \left(-\frac{5}{9}(\kappa)^{-\frac{8}{3}}(\dot{\kappa})^2 + \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa} + (\kappa)^{\frac{4}{3}}\right)\tau^{-1}\vec{t} + \vec{b}\tau^{-1}$$

şeklinde hesaplanır [9].

Sonuç: Afin çatıdan Öklid çatıya geçiş matrisi,

$$\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{-\frac{1}{3}} & 0 \\ \left(-\frac{5}{9}(\kappa)^{-\frac{8}{3}}(\dot{\kappa})^2 + \frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\ddot{\kappa} + (\kappa)^{\frac{4}{3}}\right)\tau^{-1} & 0 & \tau^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

ve

Öklid çatıdan Afin çatıya geçiş matrisi,

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\kappa)^{-\frac{1}{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3}(\kappa)^{-\frac{5}{3}}\dot{\kappa} & (\kappa)^{\frac{1}{3}} & 0 \\ \left(\frac{5}{9}(\kappa)^{-3}(\dot{\kappa})^2 - \frac{1}{3}(\kappa)^{-2}\ddot{\kappa} - \kappa\right) & 0 & \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix}$$

Şeklindedir [9].

3.2.2. Afin Uzay Eğrilerin Karakterizasyonları

Afin uzay eğrilerini karakterize etmek için,

$$\det\,[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$$

Denkleminin türevini alırsak,

$$\alpha''''(s) + k(s)\alpha''(s) + \tau_\alpha \alpha'(s) = 0 \tag{3.3}$$

denklemini elde ederiz.

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \\ \alpha'''(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\tau_\alpha(s) & -k(s) & 0 \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} \alpha'(s) \\ \alpha''(s) \\ \alpha'''(s) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Afin uzay eğrilerinin temel teoremine göre, afin eğrilikler $\mathbb{R}^3$ deki afin dönüşümler altında belirlenebilir. Aşağıda (3.3) denklemindeki başlangıç değer probleminin çözümü yardımıyla sabit eğrilikli eğriler elde edilir. Bu eğrileri bulmak için aşağıdaki önerme kullanılacaktır.

Önerme 3.2.1. (Shengjin' in Formülü)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

tek değerli kübik denklemi için,

$$A = b^2 - 3ac$$

$$B = bc - 9ad$$

$$C = c^2 - 3bd$$

eşitlikleri tamamlanarak

$$\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}$$

hesaplanırsa aşağıdaki çözümler elde edilir:

(1) Eğer $A = B = 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} = -\frac{c}{b} = -\frac{3d}{c}$$

şeklinde elde edilir.

(2) Eğer $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = -\frac{b}{a} + m, \qquad x_2 = x_3 = \frac{m}{2}, \qquad \left(m = \frac{B}{A}, A \neq 0\right)$$

şeklinde elde edilir.

(3) Eğer $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2}(\sqrt[3]{y_1} - \sqrt[3]{y_2})}{3a}$$

$$x_2 = x_3 = \frac{-2b + \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} \mp \sqrt{3}}{6a}$$

ve

$$\left(y_1, y_2 = Ab + \frac{3a}{2}\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)\right)$$

şeklinde elde edilir.

(4) Eğer $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$ ise denklemin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{A}\cos\frac{\theta}{3}}{3a}$$

$$x_2 = x_3 = \frac{-b + \sqrt{A}\left(\cos\frac{\theta}{3} \pm \sqrt{3}\sin\frac{\theta}{3}\right)}{3a}$$

ve

$$\theta = \arccos t\,, \qquad t = \frac{2Ab - 3aB}{2\sqrt{A^3}}, \qquad A > 0, \qquad -1 < t < 1$$

şeklinde elde edilir.

Shengjin' in bu önermesini kullanarak (3.4) denklemindeki R katsayılar matrisinin özdeğerlerini hesaplamak için,

$$|\lambda I - R| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -\tau_\alpha & -k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + k\lambda + \tau_\alpha = 0 \qquad (3.5)$$

Tek değişkenli 3. dereceden denklem olan (3.5) denkleminde $a = 1$, $b = 0$, $c = k$, $d = \tau_\alpha$ değerleri elde edilir. Bulunan bu değerleri yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} A &= b^2 - 3ac = -3k \\ B &= bc - 9ad = -9\tau_\alpha \\ C &= c^2 - 3bd = k^2 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

olarak hesaplanır.

(3.6) denkleminde hesaplanan bu değerler kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} \\ &= 81\tau_\alpha^2 + 12k^3 \end{aligned} \qquad (3.7)$$

şeklinde ifade edilebilir [7,8].

Yukarıda bulunan değerlerin sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 3.2.1. Sabit afin eğrilikli ve sabit afin torsiyonlu bir nondegenere afin uzay eğrisi α, aşağıdaki eşitliklerden birine eşdeğerdir:

(1) $A^2 + B^2 = 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \left(s, \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{6}s^3\right)$$

şeklinde bulunur.

(2) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \left(e^{\sigma s}, se^{\sigma s}, -\frac{1}{18\sigma^5}e^{-2\sigma s}\right)$$

$$\sigma = \left(\frac{\tau_\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde bulunur.

(3) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \begin{cases} k^2\left(-k^{\frac{1}{2}}s, \sin\left(k^{\frac{1}{2}}s\right), \cos\left(k^{\frac{1}{2}}s\right)\right), & \tau_\alpha = 0 \\ \dfrac{1}{2\sigma_1\sigma_2(9\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}, & \tau_\alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha + \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha - \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha + \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha - \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}}\right)$$

şeklinde bulunur.

(4) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$ ise α eğrisi,

$$\alpha(s) = \begin{cases} -k^2\left(-(-k)^{\frac{1}{2}}s, \sinh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right), \cosh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right)\right), & \tau_\alpha = 0 \\ \dfrac{1}{4\sigma_1\sigma_2(9\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}, & \tau_\alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}\sqrt{-3k}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27}{2}\tau_\alpha(-3k)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{-k}\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27}{2}\tau_\alpha(-3k)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

şeklinde bulunur [7,8].

İspat: Shengjin' in formülünü kullanarak bu dört durumu incelersek:

(1) $A^2 + B^2 = 0$ ise $k = \tau_\alpha = 0$ şeklinde hesaplanır. Bu şartlarda (3.5) denkleminin köklerini,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

şeklinde elde ederiz. Bu kökler yardımıyla (3.5) diferensiyel denkleminin temel çözümleri 1, s ve s^2 olarak bulunur. Bu temel çözümler kullanılarak (3.5) diferensiyel denkleminin çözümünü,

$$\alpha'(s) = c_1 + c_2 s + c_3 s^2 \,, \qquad c_i (i = 1,2,3)$$

$\mathbb{R}^3$ de sabit vektörler şeklinde yazabiliriz. s parametresinin, afin yay parametresi olabilmesi için $\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$ olmalıdır. $\alpha'(s)$ eşitliğinin türevleri alınırsa,

$\alpha'(s) = c_1 + c_2 s + c_3 s^2$, $\quad \alpha''(s) = c_2 + 2c_3 s$, $\quad \alpha'''(s) = 2c_3$ bulunur. Burada $c_0 = (0,0,0)$, $c_1 = (1,0,0)$, $c_2 = (0,1,0)$, $c_3 = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ seçilerek $\det\left[c_1, c_2, c_3\right] = \frac{1}{2}$ bulunur ve s afin yay parametresi olur.

Böylece $A^2 + B^2 = 0$ durumunda afin eğriyi,

$$\alpha(s) = \left(s, \frac{1}{2}s^2, \frac{1}{6}s^3\right) + c_0$$

şeklinde elde edebiliriz.

(2) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$ ise $k = -\left(\frac{3\tau_\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < 0$ şeklinde hesaplanır. Bu şartlarda (3.5) denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \sigma \,, \qquad \lambda_3 = -2\sigma \,, \qquad \sigma = \left(\frac{\tau_\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

şeklinde elde edilir. Bu kökler yardımıyla (3.5) diferensiyel denkleminin temel çözümleri $e^{\sigma s}$, $se^{\sigma s}$ ve $e^{-2\sigma s}$ olarak bulunur. Bu temel çözümler kullanılarak (3.5) diferensiyel denkleminin çözümü,

$$\alpha'(s) = c_1 e^{\sigma s} + c_2 s e^{\sigma s} + c_3 e^{-2\sigma s} \,, \qquad c_i (i = 1,2,3)$$

$\mathbb{R}^3$ de sabit vektörler şeklinde olur. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için $\det\left[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)\right] = 1$ olmalıdır. Türevler alınırsa,

$$\alpha'(s) = c_1 e^{\sigma s} + c_2 s e^{\sigma s} + c_3 e^{-2\sigma s}$$

$$\alpha''(s) = c_1 \sigma e^{\sigma s} + c_2 (e^{\sigma s} + s\sigma e^{\sigma s}) - 2\sigma c_3 e^{-2\sigma s}$$

$$\alpha'''(s) = c_1 \sigma^2 e^{\sigma s} + c_2 (2\sigma e^{\sigma s} + s\sigma^2 e^{\sigma s}) + 4\sigma^2 c_3 e^{-2\sigma s}$$

bulunur. Burada $c_0 = (0,0,0)$, $c_1 = (\sigma, 0, 0)$, $c_2 = (0, \sigma, 0)$, $c_3 = \left(0, 0, \frac{1}{9\sigma^4}\right)$ seçilerek $\det[c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{9\sigma^2}$ bulunur ve s afin yay parametresi olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0$ durumundaki afin eğriyi,

$$\alpha(s) = \left(e^{\sigma s}, s e^{\sigma s}, -\frac{1}{18\sigma^5} e^{-2\sigma s}\right) + c_0$$

şeklinde elde edebiliriz.

(3) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$ ise (3.5) diferensiyel denkleminin kökleri, $\lambda_1 = -2\sigma_1$, $\lambda_2 = \sigma_1 + i\sigma_2$, $\lambda_3 = \sigma_1 - i\sigma_2$ olacaktır. Buna göre,

$$\sigma_1 = \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha + \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha - \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}}\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha + \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}} - \sqrt[3]{\frac{3\left(9\tau_\alpha - \sqrt{12k^3 + 81\tau_\alpha^2}\right)}{2}}\right)$$

olarak bulunur. Buradan (3.5) diferensiyel denkleminin temel çözümleri $e^{-2\sigma_1 s}$, $e^{\sigma_1 s}\cos(\sigma_2 s)$ ve $e^{\sigma_1 s}\sin(\sigma_2 s)$ şeklinde elde edilir. Burada temel çözümler kullanılarak (3.5) diferensiyel denkleminin çözümünü,

$$\alpha'(s) = c_1 e^{-2\sigma_1 s} + c_2 e^{\sigma_1 s}\cos(\sigma_2 s) + c_3 e^{\sigma_1 s}\sin(\sigma_2 s)\ , \qquad c_i (i = 1,2,3)$$

$\mathbb{R}^3$ de sabit vektörler şeklinde yazabiliriz. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için $\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$ olmalıdır.

(a) $\tau_\alpha = 0$ ise, $\sigma_1 = 0$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = k^{-\frac{3}{2}}$ olarak hesaplanır. Burada $c_0 = (0,0,0)$, $c_1 = \left(-k^{-\frac{1}{2}}, 0, 0\right)$, $c_2 = \left(0, k^{-\frac{1}{2}}, 0\right)$, $c_3 = \left(0, 0, -k^{-\frac{1}{2}}\right)$ seçilerek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$ ise afin eğri,

$$\alpha(s) = k^2\left(-k^{\frac{1}{2}} s, \sin\left(k^{\frac{1}{2}} s\right), \cos\left(k^{\frac{1}{2}} s\right)\right) + c_0$$

şeklinde elde edilebilir.

(b) $\tau_\alpha \neq 0$ ise, $\sigma_1 \neq 0$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{(9\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\sigma_2}$ bulunur. Burada $c_0 = (0,0,0)$, $c_1 = \left(\frac{1}{\sigma_2(9\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}, 0, 0\right)$, $c_2 = (0, \sigma_2, \sigma_1)$, $c_3 = (0, \sigma_1, -\sigma_2)$ seçersek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0$ ise afin eğri,

$$\alpha(s) = \frac{1}{2\sigma_1\sigma_2(9\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s} + c_0$$

şeklinde elde edilebilir.

(4) $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$ ise (3.5) denkleminin kökleri,

$$\lambda_1 = -2\sigma_1 \,,\; \lambda_2 = \sigma_1 + \sigma_2 \,,\; \lambda_3 = \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}\sqrt{-3k}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27}{2}\tau_\alpha(-3k)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$\sigma_2 = \sqrt{-k}\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27}{2}\tau_\alpha(-3k)^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$$

$$k < 0\,, \qquad \frac{27}{2}\tau_\alpha(-3k)^{-\frac{3}{2}} \in (-1,1)$$

olarak hesaplanabilir. Buradan (3.5) diferensiyel denkleminin temel çözümleri $e^{-2\sigma_1 s}$, $e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}$ ve $e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}$ olarak bulunur. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$\alpha'(s) = c_1 e^{-2\sigma_1 s} + c_2 e^{(\sigma_1+\sigma_2)s} + c_3 e^{(\sigma_1-\sigma_2)s}\,, \qquad c_i (i = 1,2,3)$$

$\mathbb{R}^3$ de sabit vektörler şeklinde yazabiliriz. s parametresinin, afin yay parametre olabilmesi için $\det[\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)] = 1$ olmalıdır.

(a) $\tau_\alpha = 0$ ise, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = k$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{2}k^{-\frac{3}{2}}$ olarak hesaplanır. Burada $c_0 = (0,0,0)$, $c_2 = \left(0, \frac{1}{2}(-k)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(-k)^{-\frac{1}{2}}\right)$, $c_3 = \left(0, \frac{1}{2}(-k)^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}(-k)^{-\frac{1}{2}}\right)$ seçilerek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$ ise afin eğri,

$$\alpha(s) = -k^2\left(-(-k)^{\frac{1}{2}}s, \sinh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right), \cosh\left(-k^{\frac{1}{2}}s\right)\right) + c_0$$

şeklinde elde edilebilir.

(b) $\tau_\alpha \neq 0$ ise, $\sigma_1 + \sigma_2 \neq 0$, $\sigma_1 - \sigma_2 \neq 0$ ve $\det[c_1, c_2, c_3] = \frac{1}{2\sigma_2(\sigma_2^2 - 9\sigma_1^2)}$ olarak hesaplanır. Burada $c_0 = (0,0,0)$, $c_1 = (0, (\sigma_1 + \sigma_2), 0)$, $c_2 = \big(0, 0, (\sigma_1 - \sigma_2)\big)$, $c_3 = \left(\frac{1}{2\sigma_2(\sigma_2^2 - 9\sigma_1^2)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}, 0, 0\right)$ seçersek s afin yay parametre olur. Böylece $A^2 + B^2 \neq 0$ ve $\Delta = \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0$ ise afin eğri,

$$\alpha(s) = \frac{1}{4\sigma_1\sigma_2(9\sigma_1^2 - \sigma_2^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} e^{-2\sigma_1 s}, e^{(\sigma_1+\sigma_2)s}, e^{(\sigma_1-\sigma_2)s} + c_0$$

şeklinde elde edilebilir.

Böylece teoremin ispatı bitirilebilir [7,8].

3.2.3. Afin Uzayda Küresel Eğriler İçin Karakterizasyonları

Tanım 3.2.3. 3-boyutlu Öklid uzayında bir $x(t)$ eğrisinin her noktasındaki normal düzlemleri bir tek noktada kesiyorsa, $x(t)$ eğrisine **küresel eğri** denir [14].

Bu tanımı kullanabilmek için eğrinin Öklid Serret-Frenet vektörlerinden elde edilebilen bir modifiye çatıya ihtiyacımız vardır. x eğrisinin Öklid Frenet çatısı T, N, B olmak üzere,

$$d\alpha = \kappa ds\,, \qquad d\beta = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} ds\,, \qquad d\gamma = \tau ds$$

alalım. $\lambda = {}^{\kappa}/_{\tau}$ için

$$\begin{aligned} T' &= \lambda N \\ N' &= B - \lambda T \\ B' &= -N \end{aligned} \tag{3.8}$$

yazabiliriz.

Eğer x eğrisinin herhangi bir P noktasında, doğrultmanı eğrinin normal düzleminde uzanan bir S konisi vardır. Doğrultmanı $\{N, B\}$ de olan ve $x'(s)$ noktasından geçen regle yüzey,

$$\gamma(r, s) = x(s) + r\left(\alpha(s)\vec{N}(s) + \alpha(s)\vec{B}(s)\right)$$

olup koni olması için

$$x(s) + v(s)N(s) + w(s)B(s) = k \tag{3.9}$$

$v(s) = r(s)A(s)$, $w(s) = r(s)B(s)$ ve C: bir sabit vektör.

eşitliğini sağlayan s ye bağlı $r(s)$ fonksiyonun var olmasıdır. (3.9) türevi alınarak

$$\dot{x} + \dot{v}N + v\dot{N} + \dot{w}B + w\dot{B} = 0 \tag{3.10}$$

(3.8) eşitlikleri ve $\dot{x} = \frac{1}{\tau}T$ alınırsa (3.10) eşitliği

$$\tau^{-1}T + \dot{v}N + v(B - \lambda T) + \dot{w}B - wN = 0$$

T, N, B nin katsayıları sıfır olacağından

$$v = \rho\,, \qquad w = \dot{v} = \dot{\rho}\,, \qquad v + \dot{w} = 0$$

ve buradan

$$\ddot{\rho} + \rho = 0 \tag{3.11}$$

olup denklemin çözümleri

$$\rho(s) = R\cos(\gamma(s) + \gamma_0) \ , \quad \gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \tau(s)ds \tag{3.12}$$

formundadır. Burada R, x eğrisinin üzerinde olduğu kürenin yarıçapıdır. (3.12) eşitliği x eğrisinin küresel eğri olması için gerek ve yeter şarttır.

(3.11) eşitliği kullanılarak $\tau \neq 0$ için,

$$\left({\rho'}/{\tau}\right)' + \rho\tau = 0$$

karakterizasyonu elde edilir [14].

x eğrisi A_3 3-boyutlu afin uzayda değerlendirilecek olursa öncelikle şu tanımı vermemiz gerekecektir.

Tanım 3.2.4. A_s afin uzayda bir eğrinin tüm afin normal düzlemleri sabit bir noktadan geçiyorsa bu eğriye **afin küresel eğri** denir.

$x(s)$ eğrisi için eğrinin her noktasında doğrultmanı afin eğrinin normal düzleminde uzanan regle yüzey,

$$Y(r,s) = x(s) + r\left(a(s)\vec{n} + b(s)\vec{b}\right)$$

ve bu yüzeyin koni olması için

$$x(s) + v(s)\vec{n} + w(s)\vec{b} = k$$

eşitliğini sağlayan s ye bağlı $r(s)$ nin bulunmasıdır. Burada

$$v(s) = r(s)a(s)\ ,\ w(s) = r(s)b(s) \ \text{ ve } \ C\text{: bir sabit vektör} \tag{3.13}$$

(3.13) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$\vec{t} + v'\vec{n} + v\overrightarrow{n'} + w'\vec{b} + w\overrightarrow{b'} = 0$$

eşitlik düzenlenir ve katsayılar sıfıra eşitlenirse,

$$\tau_\alpha w = 1\ , \qquad v' = kw\ , \qquad v + w' = 0$$

olup

$$k = \tau_\alpha \left({\tau'_\alpha}/{\tau^2}\right)'$$

çözümü elde edilir [14].

Teorem 3.2.3. $x(s)$ A_3 afin uzayda C^b sınıfından $\tau_\alpha \neq 0$ olan bir eğri olsun. Bu durumda x bir küresel eğridir.

$$\chi'' + k(s)\chi = 0$$

$$\chi = \frac{1}{\tau_\alpha}\,, \qquad \tau_\alpha \neq 0$$

sağlanmasıdır [14].

KAYNAKLAR

[1] Blaschke, W., 1923, “Vorlesungen uber Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie”, *Springer, Berlin*, 69-99.

[2] Schirokow A.P. and Schirokow, P.A., 1962, “Affine Differentialgeometrie”, *Teubner, Leipzig*.

[3] Nomizu, K. and Sasaki, T., 1991,“A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces”, *manuscripta math*. 73, 39-44.

[4] Nomizu, K. and Sasaki, T., 1994, Affine differential geometry. *Cambridge Univ. Press.*

[5] Dillen, F. and Vrancken, L., 1993, “The classification of 3-dimensional locally strongly convex homogeneous affine hypersurfaces”, *manuscripta math.* 80, 165-180.

[6] Dillen, F. and Vrancken, L., 1993, “Homogeneous affine hypersurfaces with rank one shape operators”, *math. Z.* 212, 61-72.

[7] Hu, N., 2011 “Centroaffine space curves with constant curvatures and homogeneous surfaces”, *J. of Geom*. 102, 103-114.

[8] Hu, N., 2012, Affine geometry of space curves and homogeneous surfaces, phd thesis, *Hokkaido University*, 73, 39-44.

[9] Cansu, G., 2015, “Afin diferensiyel geometride eğriler teorisi”, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 10-22, 28-52.

[10] Hacısalihoğlu, H.H., 1998, “H. Diferensiyel Geometri”, Cilt 1,2. *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi,* Ankara.

[11] Hacısalihoğlu, H.H., 2000, “Dönüşümler ve Geometriler”, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Ankara

[12] Yüce, S., 2013, “Diferensiyel Geometri”, *Sürat Üniversite Yayınları*, İstanbul.

[13] Buchin, S., 1983, “Affine Differential Geometry”, *Gordon and Breach*, China.

[14] Kreyszig E., Pendl A., 1975, “Spherical curves and their analogues in affine differential geometry”, *proceedings of the American Mathematical society*, 48(2).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BALKIŞ, Abdüssamed
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 02.11.1990 Balıkesir
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 05549743620
e-mail	: white_eagle_237@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2014
Lisans	Anadolu Üniversitesi İşletme Fakültesi İşletme	2015
Lise	Balıkesir Ticaret Odası Lisesi (Y.dil ağırlıklı)	2008

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015	Balıkesir Rahmi Kula Anadolu Lisesi	Ücretli Matematik Öğretmeni
2016 -	Akhisar Özel Yüksel Koleji	Matematik Öğretmeni

Sertifikalar

B1 Seviye İngilizce Sertifikası
Web Tasarımı Sertifikası
Bilgisayar Operatörlüğü Sertifikası
Satranç Antrenörlüğü Sertifikası