T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLERİN ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİM DOLAŞIR

HAZİRAN 2018
UŞAK

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLERİN ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVİM DOLAŞIR

UŞAK 2018

Sevim DOLAŞIR tarafından hazırlanan Bükülmüş Yüzeylerin Özellikleri adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Semra NURKAN, Matematik Ana Bilim Dalı ………………………………

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN ………………………………

Uşak Üniversitesi, Matematik

Doç. Dr. Semra NURKAN ……………………………….

Uşak Üniversitesi, Matematik

Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ ……………………………….

Uşak Üniversitesi, Matematik

Doç. Dr. Hüseyin KOCAYİĞİT ……………………………….

Celal Bayar Üniversitesi, Matematik

Dr. Öğr. Üyesi Serpil ÜNAL KARAÇAM ………………………………..

Uşak Üniversitesi, İstatistik

19/06/2018

Bu tez ile U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sevim DOLAŞIR

BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLERİN ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sevim DOLAŞIR

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2018

ÖZET

Bu tezin amacı 3- boyutlu İzotropik uzayda bükülmüş yüzeylerin ne tür bir parametrizasyona sahip olacağı problemini ortaya koymak ve problemin çözümü doğrultusunda tanım,teorem ve örnekler vermektir.Ayrıca Öklid uzayda bükülmüş yüzeyleri oluştururken İnvolüt-Evolüt ve Bertrand eğri çiftlerinden yararlanarak bükülmüş yüzey kavramına değişik bir bakış açısı getirmek hedeflenmiştir.

Yedi bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ileri bölümlerde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde sırasıyla 3- boyutlu Öklid uzayda ve 3- boyutlu Minkowski uzayda bükülmüş yüzeylerin eğrilikleri ile ilgili teoremler ve örnekler incelenmştir. Beşinci bölümde 3- boyutlu İzotropik Uzayda bükülmüş yüzeylerin karakterizasyonları, eğrilik hesaplamaları ele alınmıştır. Altıncı bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında İnvolüt eğri ile oluşturulan bükülmüş yüzeyle ilgili eğrilik hesaplamaları, teorem ve örnekler verilmiştir.

Son olarak, yedinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin Bertrand çifti olan eğri ile oluşturulan bükülmüş yüzeyler ele alınmıştır.

Bilim Kodu **:** 403.02.01

Anahtar Kelimeler **:** Bükülmüş yüzey, İzotropik Uzay, Gauss eğriliği, Minimal yüzey, Ortalama eğrilik, İnvolüt-Evolüt Eğri Çifti.

Sayfa Adedi **:** 68

Tez Yöneticisi **:** Doç. Dr. Semra NURKAN

PROPERTIES OF TWISTED SURFACES

(M.Sc. Thesis)

Sevim DOLAŞIR

UŞAK UNIVERSITY
THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCE
June 2018

ABSTRACT

The aim of this thesis is to reveal the problem of what kind of parametrization of twisted surfaces in 3-dimensional isotropic space and to give definitions, theorems and examples in the direction of solution of the problem. In addition, it was aimed to bring a different perspective to the concept of twisted surface by using Involüt-Evolüt and Bertrand curve pairs while forming the twisted surfaces in Euclidean space.

The first chapter of this thesis, which consists of seven chapters, is divided into the introduction part. In the second part, the basic concepts and definitions which are necessary in the advanced chapters are given. In the third and fourth chapters, theorems and examples related to the curvatures of the twisted surfaces in 3-dimensional Euclidean space and 3-dimensional Minkowski space, respectively, have been examined. In the fifth chapter, characterizations of twisted surfaces and curvature calculations are discussed in 3-dimensional Isotropic space. In the sixth chapter, the curvature calculations, theorems and examples related to the twisted surface created by the Involute curve in 3-dimensional Euclidean space are given. Finally, in the seventh chapter, twisted surfaces formed by the curve of a Bertrand pair of a curve in 3-dimensional Euclidean space are discussed.

Science Code : 403.02.01

Key Words : Twisted Surface, Isotropic Space, Gaussian Curvature, Minimal Surface, Mean Curvature, Involute - Evolute curve.

Page Number : 68

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Semra NURKAN

TEŞEKKÜR

Bana araştırma ve çalışma olanağı sağlayan, çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Semra NURKAN “Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi” ’a, yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN “Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi” ’a ve saygıdeğer Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü hocalarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmamda desteğini ve güvenini esirgemeyen arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştiren, yardımlarını esirgemeyen, sabreden ve her zaman maddi ve manevi olarak beni destekleyen bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{V}$	Reel vektör uzayı
$\times$	Vektörel çarpım
$\boldsymbol{\alpha}$	Eğri
$\boldsymbol{\kappa}$	Eğrinin eğriliği
$\boldsymbol{\tau}$	Eğrinin torsiyonu
$\boldsymbol{M}$	Yüzey
$<,>$	Öklid iç çarpımı
$\boldsymbol{K}$	Gauss eğriliği
$\boldsymbol{H}$	Ortalama eğriliği
$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$	Birinci temel formun katsayıları
$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$	İkinci temel formun katsayıları
$\boldsymbol{S}$	Şekil operatörü
$\boldsymbol{T}$	Eğrinin teğet vektör alanı
$\boldsymbol{N}$	Eğrinin normal vektör alanı
$\boldsymbol{B}$	Eğrinin binormal vektör alanı
$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{n}}$	n- boyutlu Öklid uzay
$\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{3}}$	3- boyutlu Öklid uzay
$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{3}}$	3- boyutlu Minkowski uzay
$<,>_{\boldsymbol{L}}$	Minkowski uzayda iç çarpım
$\mathbb{I}^{3}$	3- boyutlu İzotropik uzay
$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})_{\boldsymbol{i}}$	İzotropik uzayda iki nokta arası uzaklık
$\boldsymbol{I}$	Yüzeyin birinci temel formu
$\boldsymbol{II}$	Yüzeyin ikinci temel formu

1.GİRİŞ

Diferansiyel geometri tarihi boyunca, farklı özel yüzey sınıfları popüler araştırma konularını oluşturmuştur. Bunlara örnek olarak dönel yüzeyler, kanal yüzeyleri, regle yüzeyler, öteleme yüzeyleri verilebilir. Ayrıca, bir yüzey sınıfını başka bir yüzey sınıfından oluşturan ya da çok sayıda yüzey sınıflarını genelleştiren yüzey sınıfları ayrıntılı olarak inceleyen birçok matematikçi olmuştur. Örneğin Öklid 3-uzayında

$$x(s,t) = (f(t)\cos s, f(t)\text{sins}, g(t) + qs)\ldots\ldots\ldots(1)$$

ile parametrelendirilmiş helikoidal yüzeyler, helikoidal hareket(vida hareketi) altında invaryant kalır ve bu nedenle helikoidal yüzeyler dönel yüzeylerin bir genelleştirilmesidir. Gerçekten de $q = 0$ durumunda (1) denklemi bir dönel yüzey gösterir.

Özel bir yüzey sınıfı olan bükülmüş yüzeylerden ilk olarak bahseden Gray Möbius şeridi ve Klein şişesini üretmek için kullanılan yapıyı genelleştirmek için 'bükülmüş yüzey' terimini ortaya atmıştır[1]. Stanilov ve Slavova, bükülmüş yüzeylerin yönlendirilebilirliğini ve kuvvet serilerini incelemişlerdir [2]. Goemans ve Woestyne üç boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında bükülmüş yüzeylerin tanımlarını verip, Gauss ve ortalama eğrilik hesaplamalarını yapmış,aynı zamanda bükülmüş yüzeylerin minimal, flat, sabit eğrilikli olma karakterizasyonlarını ifade etmişlerdir [3, 4].

Bu çalışmada ise İzotropik uzayda bükülmüş yüzeyle ilgili örnekler, eğrilik hesaplamaları ve karakterizasyonları verilmiştir.Aynı zamanda üç boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin involütünün ve Bertrand çiftinin oluşturduğu bükülmüş yüzeylerden bahsedilmiş ve örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Öklid 3- Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V'de

$$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to < x,y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \left(\begin{cases} x = (x_1, x_2, \dots, x_n \\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n \end{cases} \right)$$

Şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [5].

Tanım 2.1.2.

$$\times: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \beta) \to \alpha \times \beta$$

şeklinde tanımlı "×" iç işlemine **vektörel çarpım işlemi** denir ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nın **vektörel çarpımı** denir [5].

Teorem 2.1.1. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$olmak üzere

$$\alpha \times \beta = \sum_{i=1}^{n} \det(e_i, \alpha, \beta) e_i$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan dönüşüme **iç çarpım** denir [6].

$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ olmak üzere

(i) Simetri aksiyomu

$$< u, v > = < v, u > \quad \forall\, u, v \;\in V$$

(ii) Bilineerlik aksiyomu

$$< cu, v > = c < u, v > = < u, cv > \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$$

$$< u_1 + u_2, v > = < u_1, v > + < u_2, v > \quad \forall u_1, u_2, v \in V$$

$$< u, v_1 + v_2 > = < u, v_1 > + < u, v_2 > \quad \forall u, v_1, v_2 \;\in V$$

(iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu

$$< u, v > \geq 0 \quad \forall\, u \in V$$

$$< u, u > = 0 \quad u = \vec{0}$$

Tanım 2.1.4. V bir iç çarpım uzayı ve $x \in V$ olsun. x vektörünün normu $\|x\|$ olmak üzere x vektörünün $\frac{1}{\|x\|}$ skaları ile çarpılmışına x'in **normlanmışı** denir ve $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$ ile gösterilir[6].

Tanım 2.1.5. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere(I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$$\alpha : I \to E^n$$

$$t \to \alpha(t)$$

şeklindeki α'ya **eğri** denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [5].

Tanım 2.1.6 $M \subset \mathbb{R}$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\|\alpha'\|: I \to \mathbb{R}$$

$$t \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre **skalar hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M'nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir [5].

Tanım 2.1.7. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer, $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi α'ya göre **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir [5].

Tanım 2.1.8. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir [5].

Tanım 2.1.9. $X \subset \mathbb{R}^3$ regüler bir yüzey için birim normalini U ile gösterirsek

$$U(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u,v)$$

şeklindedir ve $(u,v) \in \mathbb{R}^3$ noktalarında $X_u \times X_v$ sıfırdan farklıdır[7].

Tanım 2.1.10. $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall, \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin **Serret-Frenet r-ayaklı alanı** ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ifadesine de $m \in M$ noktasındaki **Serret-Frenet r-ayaklısı** denir. Her bir $V_i, 1 \leq i \leq r$ ye **Serret-Frenet vektörü** adı verilir [5].

Teorem 2.1.2. $M \in \mathbb{R}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ keyfi parametre olmak üzere $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$\left\{T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \quad N(t) = B(t) \times T(t)\right\}$$

şeklindedir [5].

Teorem 2.1.3. $M \in \mathbb{R}^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ yay parametresi olmak üzere $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(t), N(t), B(t)\}$ ise

$$\left\{T(t) = \alpha'(s), \quad N(t) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}, \quad B(t) = T(t) \times N(t)\right\}$$

şeklindedir [5].

Teorem 2.1.4. $\alpha(c,d) \to \mathbb{R}^3$; $c < s < d$ için $\kappa(s) > 0$ ile birim hızlı bir eğri olsun. O halde Frenet Formülleri:

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa N + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir. τ eğrinin torsiyonu, κ eğrinin eğriliğidir [5].

Tanım 2.1.11. $M, N \subset E^3$ iki eğri olsun. M ve N sırası ile $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. $\alpha(s)$ ve $\beta(s)$ noktalarında M ve N'in Frenet r-ayaklıları sırasıyla

$$\{ V_1(s), \dots, V_r(s)\}$$

ve

$$\{ V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

olmak üzere

$$< V_1(s), V_1^*(s) > = 0$$

ise N ye M nin involütü, M ye de N nin evolütü denir [5].

Tanım 2.1.12. $M, N \subset E^3$ eğrileri $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları verilsin. s ∈ I ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarında , M ve N nin $\{ V_1(s), \dots, V_r(s)\}$, $\{V_1^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$ Frenet r- ayaklıları verildiğinde ∀ s ∈ I için $\{ V_2(s), V_2^*(s)\}$ lineer bağımlı ise (M, N) eğri 2-lisine bir Bertrand çifti denir [5].

Teorem 2.1.5. (M, N) Bertrand çifti verilsin. M ve N, sırasıyla, $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verildiğine göre, ∀ s ∈ I için $d(\alpha(s), \beta(s)) = sabit$tir [5].

Teorem 2.1.6. $M, N \subset E^3$ eğrileri $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. M nin eğrilikleri k_1, k_2 ise (M, N) Bertrand çiftidir. $\Leftrightarrow \exists\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda k_1 + \mu k_2 = 1$$

dir [5].

Tanım 2.1.13. $X : \ U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$:(u, v) \rightarrow X(u, v)$ bir yüzey ve $E, F, G: U \rightarrow \mathbb{R}$' e tanımlı olmak üzere,

$$E =< X_u, X_u >$$

$$F = < X_u, X_v >$$

$$G = < X_v, X_v >$$

dir.

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

X yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu denir. Buradaki $E, F, G; X$ in birinci temel formunun katsayılarıdır [7].

Tanım 2.1.14. $X: \ U \ \rightarrow \ \mathbb{R}^3$

$:(u, v) \rightarrow X(u, v)$ bir yüzey, U yüzeyin birim normali ve $e, f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$

fonksiyonlarını tanımlarsak

$$e = < U, X_{uu} >$$

$$f = < U, X_{uv} >$$

$$g = < U, X_{vv} >$$

dir.

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

X yüzeyinin ikinci temel formu denir. Buradaki e, f, g; X nin ikini temel formun katsayılarıdır [7].

Tanım 2.1.15 E^n'in bir hiperyüzeyi M ve M'nin birim normal vektör alanı U verilsin. E^n'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X U$ şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya M'nin **Weingarten dönüşümü** denir [7].

Tanım 2.1.16. M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları E, F, G ve ikinci temel formunun katsayıları e, f, g olmak üzere yüzeyin şekil operatörü matrisi S

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} Ge - Ff & Ef - Fe \\ Gf - Fg & Eg - Ff \end{vmatrix}$$

şeklindedir [7].

Tanım 2.1.17. $\mathbb{R}^3$ te regüler bir yüzey M olsun. M yüzeyinin **Gauss eğriliği** K, **Ortalama eğriliği** H ve $K, H: M \to \mathbb{R}$ olmak üzere sırasıyla

$$K(P) = \det(S(P))$$

ve

$$H(P) = \frac{1}{2} iz(S(P))$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 2.1.18. Gauss eğriliği her yerde sıfır olan E^3 deki yüzeylere **flat (düz) yüzeyler** denir [7].

Tanım 2.1.19. E^3 de H ortalama eğriliği sıfır olan regüler yüzeylere **minimal yüzeyler** denir [7].

Teorem 2.1.7. $M: U \to \mathbb{R}^3$ bir regüler yüzey olsun. M in Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği formülleri;

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

ve

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

dir. e, f, g ; M'in ikinci temel formunun katsayıları ve E, F, G ; M'in birinci temel formunun katsayılarıdır [7].

Tanım 2.1.20. $SR: [0,2\pi] \times (a, b) \to \mathbb{R}^3$ yüzeyi

$$SR(u, v) = (\varphi(v) cosu, \varphi(v) sinu, \psi(v))$$

M dönel yüzeyinin standart parametrizasyonu denir [8].

Tanım 2.1.21. $\mathbb{R}^3$ de bir vektör üç eksenden herhangi biri etrafında dönebilir. Aşağıda verilen matris formundaki ifadeler dönmeleri temsil eder ve bunlar

P, z, ekseni etrafında dönme $$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q, x ekseni ile ilgili dönme $$Q_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

R, y ekseni ile ilgili dönme $$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

dir [6].

2.2. Minkowski 3- Uzayda Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^3$ standart reel vektör uzayı üzerinde

$$<,>: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\vec{a},\vec{b}\,) \rightarrow <\vec{a},\vec{b}>_L = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$$

Minkowski iç çarpımı alınırsa, $\mathbb{R}^3$ afin uzayı, Minkowski 3- uzayı olarak adlandırılır ve E_1^3 ile gösterilir [9].

Tanım 2.2.2. E_1^3 uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

i. $<\vec{a},\vec{a}> > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise $\vec{a}$ ya **spacelike vektör**,

ii. $<\vec{a},\vec{a}> < 0$ ise $\vec{a}$ ya **timelike vektör**,

iii. $<\vec{a},\vec{a}> = 0$ ve $\vec{a} \neq 0$ ise $\vec{a}$ vektörüne **lightlike (veya null) vektör** denir [10].

Tanım 2.2.3. E_1^3 uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

i. $< \vec{a}, \vec{a} > = 1$ ise $\vec{a}$ ya birim **spacelike vektör**,

ii. $< \vec{a}, \vec{a} > = -1$ ise $\vec{a}$ ya birim **timelike vektör**

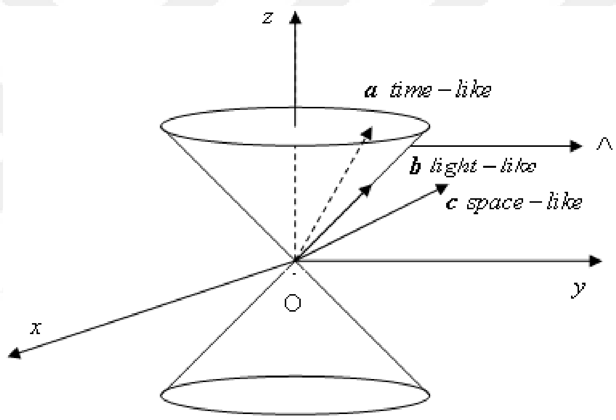
denir [10].

Tanım 2.2.4. (Işık konisi) E_1^3 uzayında

$$\curlywedge = \{\vec{a} \in E_1^3 : < \vec{a}, \vec{a} > = 0, a \neq 0\}$$

cümlesine **Işık konisi** adı verilir.

E_1^3 uzayındaki timelike vektörler $\curlywedge$ nın içinde, lightlike (veya null) vektörler $\curlywedge$ nın üzerinde ve spacelike vektörlerde $\curlywedge$ nın dışında bulunurlar (Şekil 2.2.1), [9].



Şekil 2.2.1. Minkowski 3- uzayında vektörler

Tanım 2.2.5. Minkowski 3- uzayı E_1^3 deki bir $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi için $\alpha'(t)$ hız vektörleri spacelike, timelike veya null ise $\alpha = \alpha(t)$ eğrisi sırasıyla **spacelike, timelike** ve **null eğri** olarak adlandırılır. Non-null bir $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi için $< \alpha'(s), \alpha'(s) > = \pm 1$ oluyorsa s **yarı- yay parametresi ile parametrelendirilmiştir** denir. Bu halde $\alpha = \alpha(s)$ eğrisi **birim hızlı** eğri olarak adlandırılır [10].

Tanım 2.2.6. E_1^3 Minkowski 3 - uzayın bir düzlemi D olsun. Bu takdirde D nin bir spacelike (timelike, null) düzlem olması için gerek ve yeter şart D ye normal olan vektörün timelike (spacelike, null) olmasıdır [9].

Tanım 2.2.7. E_1^3 de bir eksen etrafında Lorentzian dönmeler şu şekildedir.

Timelike z ekseni etrafında dönme: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

spacelike x ekseni etrafında dönme: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos h\theta & \sinh\theta \\ 0 & \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$,

spacelike y ekseni etrafında dönme: $\begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix}$

dir [11].

2.3. İzotropik 3- Uzayda Temel Kavramlar

$\mathbb{R}^3$de hareketler ve metrik izotropik geometri aşağıdaki denklemler ile verilmiştir.

$$(x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$$

$$x' = a + xcos\theta - ysin\theta$$

$$y' = b + xsin\theta + ycos\theta$$

$$z' = c + c_1x + c_2y + z$$

Burada $a, b, c, c_1, c_2, \theta$ reel sayılardır. Bu afin dönüşümler izotropik kongrüans dönüşümleri veya izotropik hareketler olarak adlandırılır. Bahsedilen izotropik dönüşümlerin $xy-$ düzlemine izdüşümü Öklid hareketlerini (bir dönme ve bir öteleme) verir. $P = (x, y, z) \rightarrow P' = (x, y, 0)$ dönüşümüne "üstten görünüm"(izdüşüm) [12] olarak adlandırılır. Dolayısıyla, izotropik bir hareket, xy düzleminde bir Öklid hareketi ve z-doğrultusunda bir afin kayma(öteleme) dönüşümünden oluşur [12].

Tanım 2.3.1. $P = (x_1, y_1, z_1)$ ve $Q = (x_2, y_2, z_2)$ noktalarının izdüşümleri arasındaki Öklid uzaklığı

$$d(P, Q)_i = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

iki nokta arasındaki izotropik uzaklık olarak adlandırılır [12].

İzotropik metrik, z-doğrultusundaki doğrular boyunca dejenere olur ve bu tür doğrulara izotropik doğrular denir [12].

Tanım 2.3.2. 3-boyutlu izotropik uzay $\mathbb{I}^3$ olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.3.3. $\mathbb{I}^3$ de düzlemler iki çeşittir:

a) z-doğrultusuna paralel olmayan düzlemlere izotropik olmayan düzlemler denir.Bu düzlemlerde temel olarak Öklid metriği vardır.
b) z-doğrultusuna paralel düzlemlere izotropik düzlemler denir.Bu düzlemlerde izotropik metrik vardır [12, 13].

Tanım 2.3.4. $\mathbb{I}^3$ de iki vektör $X = (x_1, y_1, z_1)$ ve $Y = (x_2, y_2, z_2)$ olsun. X ve Y

nin izotropik iç çarpımı

$$\langle X, Y \rangle_i = \begin{cases} z_1 z_2, & eğer\ x_i = y_i = 0\ \ ise \\ x_1 x_2 + y_1 y_2, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [14].

Tanım 2.3.5. $\mathbb{I}^3$ de $X = (0,0,z)$ formundaki vektörlere izotropik vektörler, diğerlerine de izotropik olmayan vektörler denir [14].

Tanım 2.3.6. $\mathbb{I}^3$ de $X(s,t) = \big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big)$ şeklinde parametrelendirilmiş bir C^r-yüzey M olsun.$\mathbb{I}^3$ e daldırılmış bir M yüzeyinin izotropik olan tanjant düzlemi yoksa bu yüzeye kabul edilebilir yüzey denir.

M yüzeyi için izotropik iç çarpım kullanılarak I.Temel formun $E(s,t), F(s,t)$ ve $G(s,t)$ katsayılarını ve yüzeyin her zaman izotropik olan birim normal vektör alanına göre hesaplayacağımız II. Temel formun $L(s,t), M(s,t)$ ve $N(s,t)$ katsayılarını şı şekilde hesaplayabiliriz:

$$E = \langle x_s, x_s \rangle_i \ , \qquad F = \langle x_s, x_t \rangle_i \ , \qquad G = \langle x_t, x_t \rangle_i$$

$$L = \frac{det(x_s, x_t, x_{ss})}{\sqrt{EG - F^2}} \quad , \qquad M = \frac{det(x_s, x_t, x_{st})}{\sqrt{EG - F^2}} \quad , \qquad N = \frac{det(x_s, x_t, x_{tt})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Buradan M yüzeyi için I. ve II. Temel formları

$$I = Eds^2 + Fdsdt + Gdt^2$$

$$II = Lds^2 + Mdsdt + Ndt^2$$

dir.Yüzeyin izotropik birim normali $U = (0,0,1)$ dir.

İzotropik Gauss Eğriliği ve izotropik Ortalama eğrilik formülleri

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad ve \; H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

dir [2, 13, 15].

Tanım 2.3.7. Eğer M yüzeyinin izotropik Gauss Eğriliği sıfır ise M yüzeyine izotropik flattır denir. Eğer M yüzeyinin izotropik Ortalama Eğriliği sıfır ise M yüzeyine izotropik minimaldir denir [2, 13, 15].

Tanım 2.3.8. $\mathbb{I}^3$ de bir vektör sadece *z* ekseni etrafında döner. Çünkü izotropik uzayda sadece *z* ekseni ile ilgili dönme uygulanabilir.

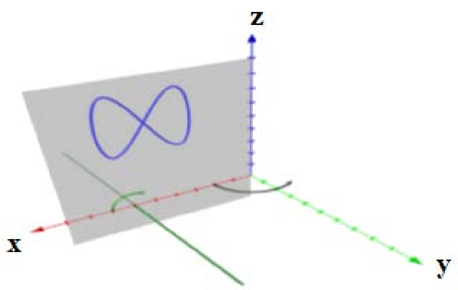
$\mathbb{I}^3$ de *z* ekseni ile ilgili dönme $$P_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir [12].

3. ÖKLİD 3- UZAYDA BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLER

Bükülmüş yüzey bir düzlemsel eğrinin kendi destek düzlemi içinde düzleme dik bir eksen etrafında dönmesi ve eş zamanlı olarak destek düzleminin de bir eksen etrafında dönmesiyle oluşur. Burada bahsi geçen dönmeler senkronize bir şekilde yapılan dönmelerdir.

3 $-$boyutlu Öklid uzayında bükülmüş bir yüzey oluşturmak için öncelikle herhangi bir düzlem seçilir. Bu düzlemde bulunan α düzlemsel eğrisi eksenlerden herhangi birine paralel olarak geçen bir doğru etrafında dönerken destek düzlemide bir eksen etrafında döner.



Şekil 3.1. Bükülmüş yüzeyin oluşumu ile ilgili koordinat düzlemde çizim

$f\,,g$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere xz düzleminde bulunan bir α düzlemsel eğrisine $\alpha(t) = \big(f(t), 0, g(t)\big)$ ilk olarak $(a, 0, 0)$ noktasından geçen y eksenine paralel doğru etrafında dönme uygulanır ve buradan

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(bs) & 0 & -\sin(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(bs) & 0 & \cos(bs) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + f(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs) \\ 0 \\ f(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eğrinin doğru etrafındaki dönmesi ile elde edilen ifadeye z eksenine göre dönme uygulanırsa,

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + f(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs) \\ 0 \\ f(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs) \end{pmatrix}$$

bükülmüş yüzeyi ortaya çıkmaktadır. Böylece bükülmüş yüzeyle ilgili tanımı verebiliriz [3, 4].

Tanım 3.1. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında, düzlemsel bir α eğrisi $\alpha(t) = \big(f(t), 0, g(t)\big)$ olmak üzere,

$$x(s,t) = (a + f(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs))(\cos(s), \sin(s), 0) + (0, 0, f(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs)$$

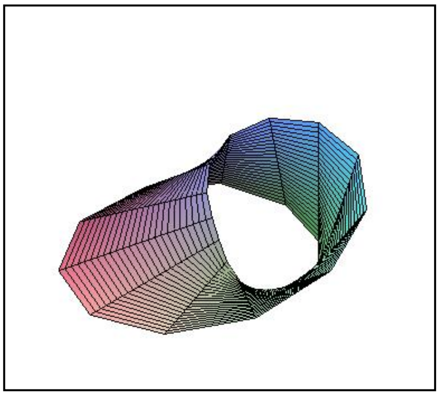
şeklinde parametrelendirilmiş yüzeye profil eğrisi α olan bir **bükülmüş yüzey** denir [3, 4].

Dikkat edilmelidir ki $b = 0$ olduğunda yüzey bir dönel yüzey belirtir. Bu yüzden bükülmüş yüzeyler dönel yüzeylerin genelleştirilmişi olarak düşünülebilir. [3, 4].

Örnek 3.1. $\alpha(t) = (t, 0, 0)$ ve $b = \frac{1}{2}$, a=1 olmak üzere

$$x(s,t) = (\cos s + t\, cos\frac{s}{2}\cos s, \sin s + t\cos\frac{s}{2}\sin s, tsin\frac{s}{2})$$

şeklindeki parametrelendirilen bir **Möbius şeridini** Öklid uzayda bükülmüş yüzey örneği olarak verilebilir [8].

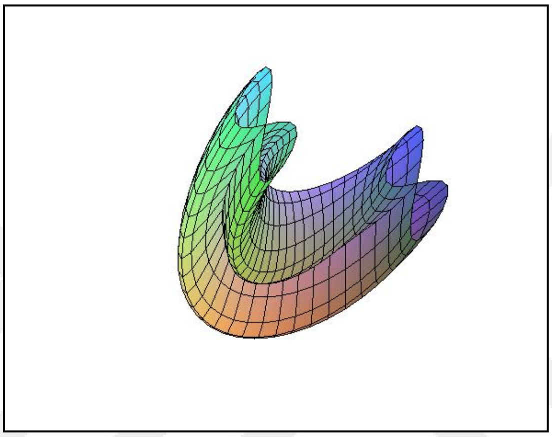


Şekil 3.2. Möbius şeridi

Örnek 3.2. $\alpha(t) = (\sin t\,, 0, \sin 2t)$ ile parametrelendirilmiş bir sekiz eğrisi ve $b = \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$x(s,t) = (a + \sin t\, cos\frac{s}{2} - \sin 2t\, sin\frac{s}{2})(\cos s\,, \sin s\,, 0) + (0, 0\ \sin t\ sin\frac{s}{2} + \sin 2t\, cos\frac{s}{2})$$

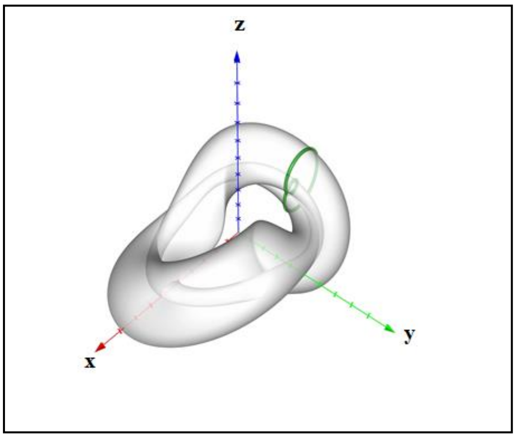
yüzeyi yönlendirilemez bir **Klein şişesini** belirten $\mathbb{E}^3$ de bükülmüş yüzey örneğidir [8].



Şekil 3.3. Klein şişesi

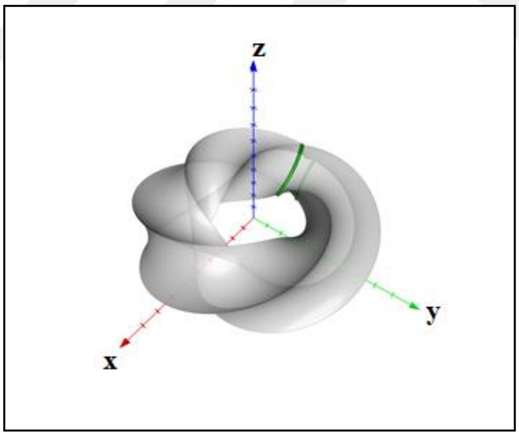
Örnek 3.3. Profil eğrisini Pascal Limaçonu $\alpha(t) = (2\cos t + 1)(\cos t\,, 0, \sin t)$

$a = 4$ ve $b = 2$ olarak aldığımızda bükülmüş yüzey örneğinin şekli aşağıda verilmiştir [3, 4].



Şekil 3.4. Pascal Limaçonunun oluşturduğu bükülmüş yüzey

Örnek 3.4. Profil eğrisini $\alpha(t) = (|\cos t|^c \cos t\,, 0, |\sin t|^c \sin t\,)$ olarak $a = 2, b = 1$ ve $c = 2$ aldığımızda bükülmüş yüzey örneği(elmas şeklinde) aşağıda verilmiştir [3, 4].



Şekil 3.5. $\alpha(t) = (|\cos t|^2 \cos t\,, 0, |\sin t|^2 \sin t\,)$ profil eğrisinin oluşturduğu bükülmüş yüzey

3.1. $\mathbb{E}^3$ de Bükülmüş Yüzeylerin Gauss ve Ortalama Eğriliği

Bükülmüş yüzeylerin Gauss eğriliğini hesaplamak için genelliği bozmadan

$\alpha(t) = \big(t, 0, g(t)\big)$ eğrisini göz önüne alarak ve $b \neq 0$ olmak üzere bükülmüş yüzey denklemini

$$\bar{x}(s,t) = \left(a + \frac{1}{b} h_s(s,t)\right)(\cos s\,, \sin s\,, 0) + \big(0{,}0, h_s(s,t)\big),$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada

$$h(s,t) = t\sin(bs) + g(t)\cos(bs)$$

dir. $h_s(s,t)$ ifadesi $h(s,t)$ nin s parametresine göre türevidir. Burada $b = 0$ olursa yüzey bir dönel yüzey belirtir. Hatta bu durumda oluşan flat dönel yüzeyin düzlemin bir parçası, bir dairesel koni veya dairesel bir silindir olacağı kolaylıkla görülebilir [8]. Ayrıca dönel yüzeylerin Gauss eğriliği hesabı oldukça bilinen bir hesaplamadır [16]. Dolasıyla $b \neq 0$ durumunu incelemek daha uygun olacaktır.

I. Temel formun $E(s,t), F(s,t)$ ve , $G(s,t)$ katsayılarını hesaplarsak görebiliriz ki bir bükülmüş yüzeyin dejenere olması için gerek ve yeter şart

$$E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2 = \left(a + \frac{1}{b} h_s(s,t)\right)^2 (1 + g'(t)^2) + b^2\big(t + g(t)g'(t)\big)^2 = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. Buradan bükülmüş yüzeyin asla dejenere olmadığı sonucuna ulaşabiliriz.

II. Temel formun $L(s,t), M(s,t)$ ve , $N(s,t)$ katsayılarını hesaplarsak bükülmüş yüzeyin Gauss eğriliği

$$K(s,t) = \frac{L(s,t)N(s,t) - M(s,t)^2}{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2}$$

$$= \frac{1}{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^{2^2}}$$

$$\times \Bigg[-\left(a + \frac{1}{b} h_s(s,t)\right) g''(t) \Bigg\{ -2b^2\big(t + g(t)g'(t)\big)h(s,t)$$

$$+ \left(a + \frac{1}{b} h_s(s,t)\right) \left(bh(s,t)h_{st}(s,t) - \left(a + \frac{1+b^2}{b} h_s(s,t)\right) h_t(s,t)\right\}$$

$$- \left\{ \big(t + g(t)g'(t)\big)h_{st}(s,t) - b(1 + g'(t)^2)\left(a + \frac{1}{b} h_s(s,t)\right) \right\}^2 \Bigg]$$

olduğu görülür [3, 4].

3.2. $\mathbb{E}^3$ de Flat Bükülmüş Yüzeyler

Teorem 3.2.1. Dönel yüzeyleri hariç tutarsak $\mathbb{E}^3$ de bir bükülmüş yüzey flattır gerek ve yeter şart bükülmüş yüzey profil eğrisi

$$((\cos bs - c \sin bs)\cos s, (\cos bs - c \sin bs)\sin s, \sin(bs) + c \cos bs)$$

olan eğrinin oluşturduğu tepe noktası orjin olan bir koni (koninin bir kısmı)dir. Burada *c* bir reel sayıdır [3, 4].

İspat: Bir önceki bölümde elde etiğimiz $K(s,t)$ Gauss eğriliği ifadesini sıfıra eşitlediğimizde

$$\sum_{i=0}^{4} A_i(t) cos^i(bs) + \sum_{j=0}^{3} B_j(t) cos^j(bs) \sin(bs) = 0,$$

elde ederiz. Burada $A_i(t)$ ve $B_j(t)$ ifadeleri bilinmeyen g fonksiyonunun ve bu fonksiyonun birinci, ikinci türevlerini gösteren terimlerdir.

Yukarıdaki denklemin s değişkenine göre ard arda türevleri alınırsa ve terim terim ayrılırsa

$i \in \{0,1,2,3,4\}$ ve $j \in \{0,1,2,3\}$ için $A_i(t) = B_j(t) = 0$ elde edilir. Buradan

$$A_4(t) = -g''(t)[t(3g^2(t) - t^2)g'(t) + g(t)(g^2(t) - 3t^2)]$$

terimini sıfıra eşitlediğimizde iki durum ortaya çıkar.

İlk olarak $g''(t) = 0$ olduğu göz önüne alırsak $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $g(t) = ct + d$ $A_i(t) = 0$ ve $B_j(t) = 0$ denklemlerinde bu ifadeyi kullanırsak $\mathrm{a} = \mathrm{d} = 0$ olduğu görülür. Bu ise bükülmüş yüzey denkleminde göz önüne alınırsa bükülmüş yüzey bir koni olur.

Bir diğer durum $g''(t) \neq 0$ olsun. Buradan $3g^2(t) \neq t^2$ ve böylece

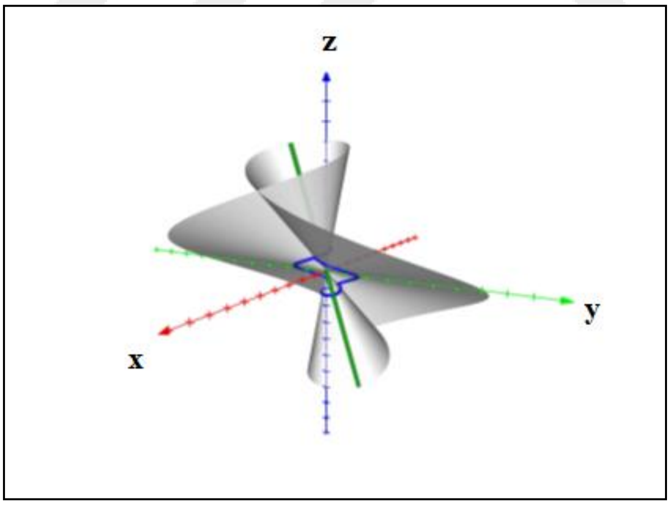
$$g'(t) = -\frac{g(t)(g^2(t) - 3t^2)}{t(3g^2(t) - t^2)}$$

ifadesi elde edilir. $A_i(t) = 0$ ve $B_j(t) = 0$ denklemlerinde yerine yazılır. Ancak örneğin

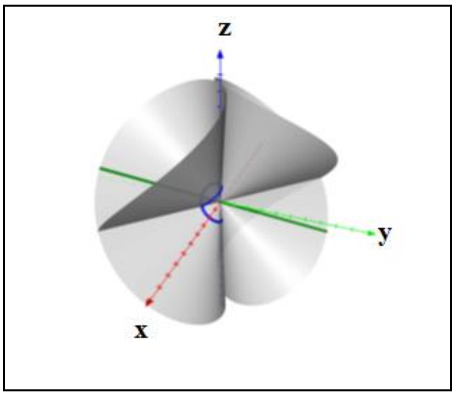
$$B_3(t) = -\frac{\left(t^2 - g^2(t)\right)^3}{t(3g^2(t) - t^2)} g''(t) = 0$$

eşitliği için bu bir çelişkidir [3, 4].

Böylece dönel yüzeyler dışında tek flat bükülmüş yüzeyin koni olduğu söylenebilir [3, 4].



Şekil 3.6. $b = 1/2$ ve $c = 1$ olmak üzere $\mathbb{E}^3$ de flat bükülmüş yüzey



Şekil 3.7. $b = c = 1$ olmak üzere $\mathbb{E}^3$de flat bükülmüş yüzey

3.3. $\mathbb{E}^3$ de Flat olmayan,Sabit Gauss Eğrilikli Bükülmüş Yüzeyler

Teorem 3.2.2. Dönel yüzeyler haricinde $\mathbb{E}^3$ de bir bükülmüş yüzey sabit Gauss eğriliklidir gerek ve yeter şart bükülmüş yüzey bir küredir (kürenin bir kısmıdır) [3, 4].

İspat: Bir önceki teoreme benzer olarak $K(s,t)$ Gauss eğriliği ifadesini sabit bir $c \in \mathbb{R}$ eşitlediğimizde

$$\sum_{i=0}^{4} A_i(t) cos^i(bs) + \sum_{j=0}^{3} B_j(t) cos^j(bs)\sin(bs) = c$$

elde ederiz. Burada $A_i(t)$ ve $B_j(t)$ ifadeleri bilinmeyen g fonksiyonu ve bu fonksiyonun

birinci, ikinci türevlerini içeren terimleri göstermektedir. Yukarıdaki denklemin s değişkenine göre ard arda türevleri alınırsa ve terim terim ayrılırsa $i \in \{0,1,2,3,4\}$ ve $j \in \{0,1,2,3\}$

$$g(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{c} - t^2} \text{ ve } a = 0$$

elde edilir. Böylece α profil eğrisi $\alpha(t) = \left(t, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{K} - t^2}\right)$ şeklindeki çember olan

bükülmüş yüzey bir küre olur [3, 4].

3.4. $\mathbb{E}^3$de Minimal Bükülmüş Yüzeyler

Bir yüzey yönlendirilemese bile, normal olarak bir birim normal olarak tanımlanabilir. Dolayısıyla ortalama eğriliği hesaplayabiliriz. Bir yüzeyin minimal olması için gerek ve yeter şart ortalama eğriliğinin sıfır olmasıdır. Düzlemlerin yanı sıra katenoidler minimal olan tek dönel yüzeylerdir [8].

Teorem 3.4.1. Dönel yüzeyler hariç tutulursa, minimal bükülmüş yüzey yoktur [3, 4].

İspat: Bükülmüş yüzey için Ortalama eğrilik formülü sıfıra eşitlendiğinde

$$\sum_{i=0}^{3} A_i(t)cos^i(bs) + \sum_{j=0}^{3} B_j(t)cos^j(bs)\sin(bs) = 0$$

ifadesi elde edilir. Burada $A_i(t)$ ve $B_j(t)$ ifadeleri bilinmeyen g fonksiyonu ve bu fonksiyonun birinci, ikinci türevlerini içeren terimleri göstermektedir. Yukarıdaki denklemin s değişkenine göre ard arda türevleri alınırsa ve terim terim ayrılırsa $i \in \{0,1,2,3\}$ ve $j \in \{0,1,2\}$ için $A_i(t) = B_j(t) = 0$ elde edilir. Bu şartları göz önüne alarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$A_3(t) = (3g^2(t) - t^2)tg''(t) + (g^2(t) - t^2)g'(t)^3 - 2tg(t)g'(t)^2 + (g^2(t) - t^2)g'(t) - 2tg(t)$$

ifadesinin sıfır olması gerektiği görülür. Bu denklemle birlikte iki durum ortaya çıkar. İlk olarak $g(t) = \pm\frac{t}{\sqrt{3}}$ olsun. $A_3(t) = 0$ olduğundan $-\frac{32}{27}\sqrt{3}t^2 = 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. İkinci durumda eğer $g(t) \neq \pm\frac{t}{\sqrt{3}}$ ise $A_3(t) = 0$ denkleminden $g''(t)$ ifadesini çekebiliriz ve diğer $A_i(t) = 0$ ve $B_j(t) = 0$ denklemlerde yerine yazabiliriz. $B_2(t) = 0$ olması

$$\frac{\left(t^2 + g^2(t)\right)^2(1 + g'(t)^2)(g(t)g'(t) + t)}{t(3g^2(t) - t^2)} = 0$$

denklemini verir. Buradan $g(t) = \pm\sqrt{c - t^2}$ olur ve bükülmüş yüzey bir küredir. Dolayısıyla minimal değildir. Sonuç olarak dönel yüzeyler hariç tutulduğunda bükülmüş yüzeyler minimal değildir [3, 4]

4. MİNKOWSKİ 3-UZAYDA BÜKÜLMÜŞ YÜZEY

4.1. Minkowski Uzayda Bükülmüş Yüzeylerin Farklı Parametrizasyonları

E_1^3 de bir bükülmüş yüzeyin yapımı Öklid uzaydakine benzer olup, α düzlemsel eğrisi yattığı destek düzlemine dik olan bir doğru etrafında dönerken, düzlemde başka bir eksen etrafında döner. Burada null dönme eksenleri hariç bu destek düzlem ve dönme eksenleri için farklı olasılıkları inceleyeceğiz [3, 4].

4.1.1. Profil Eğrisi Timelike Düzlemde Yatan Bükülmüş Yüzey

xz- düzleminde yatan bir α eğrisi $\alpha(t) = \big(f(t), 0, g(t)\big)$ olsun.

a) Bir Spacelike ve Bir Timelike Ekseni ile ilgili Dönme

α eğrisi y eksenine paralel $(a, 0, 0)$ noktasından geçen doğru etrafında dönerse

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cosh(bs) & 0 & \sinh(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(bs) & 0 & \cosh(bs) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + f(t)\cosh(bs) + g(t)\sinh(bs) \\ 0 \\ f(t)\sinh(bs) + g(t)\cosh(bs) \end{pmatrix}$$

olur.Aynı zamanda timelike z ekseni ile ilgili dönme uygulanırsa

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + f(t)\cosh(bs) + g(t)\sinh(bs) \\ 0 \\ f(t)\sinh(bs) + g(t)\cosh(bs) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla E_1^3 de bükülmüş yüzeyin ilk olası parametrelendirmesi

$$x(s,t) = (a + f(t)\cos h(bs) + \ g(t)\sin h(bs))(\cos(s)\,, \sin(s)\,, 0)(0,0,f(t)\sinh(bs) \\ + g(t)\cosh(bs)$$

şeklindedir [3, 4].

b) Bir Spacelike Eksen Etrafında İki Kez Dönme

(a) şıkkına benzer olarak α eğrisi y eksenine paralel $(0,0,a)$ noktasından geçen doğru etrafında döner ve ikinci dönme olarak x ekseni etrafında dönme alınırsa E_1^3 de bükülmüş yüzeyin ikinci olası parametrelendirmesi

$$x(s,t) = (a + f(t)\sinh(bs) + \ g(t)\cosh(bs))(0, \sinh(s)\,, \cosh(s)) + (f(t)\cosh(bs) \\ + g(t)\sinh(bs)\,, 0, 0,)$$

şeklindedir [3, 4].

4.1.2. Profil Eğrisi Spacelike Düzlemde Yatan Bükülmüş Yüzey

xy- düzleminde bulunan α eğrisi $\alpha(t) = (f(t), g(t), 0)$ gözönüne alalım. α eğrisini z eksenine paralel $(a,0,0)$ noktasından geçen timelike doğru etrafında ve ardından y ekseni etrafında döndürdüğümüzde E_1^3 de bir bükülmüş yüzeyin olası üçüncü parametrizasyonu

$$x(s,t) = (a + f(t)\cos(bs) - \ g(t)\sin(bs))(\cosh(s)\,, 0, \sinh(s)) + (0, f(t)\sin(bs) \\ + g(t)\cos(bs)\,, 0)$$

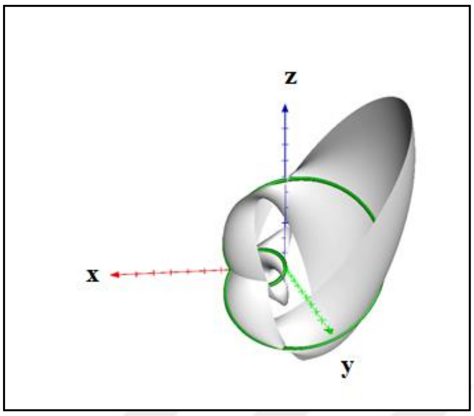
olur [3, 4].

Örnek 4.1. Profil eğrisi $\alpha(t) = -(\,2cost + 1)(cost, 0, sin(t))$ Pascal Limaçon olan

$a = 1$ ve $b = 1/2$ olmak üzere

$$x(s,t) = (1 - (\,2cost + 1)cost\cosh\left(\frac{1}{2}s\right) \\ - (\,2cost + 1)sin(t)\sinh\left(\frac{1}{2}s\right))(\cos(s)\,, \sin(s), 0) \\ + (0,0, -(\,2cost + 1)\cos(\,t)\sinh\left(\frac{1}{2}s\right) - (\,2cost + 1)\,sin(t)\cosh\left(\frac{1}{2}s\right))$$

E_1^3 de bükülmüş yüzeyde gerekli ifadeleri yerine yazdığımızda ve yüzeyi çizdirdiğimizde oluşan yüzey aşağıdaki gibidir [3, 4].

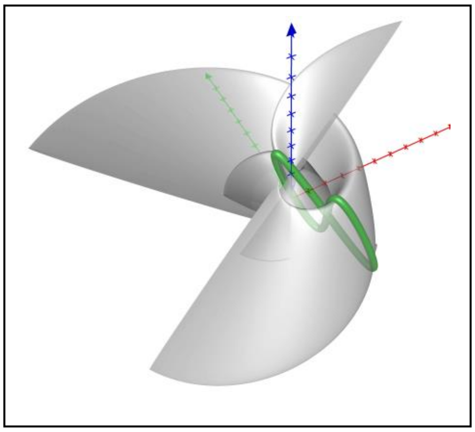


Şekil 4.1. α profil eğrisi Pascal Limaçon olan E_1^3 de bir bükülmüş yüzey

Örnek 4.2. Profil eğrisi $\alpha(t) \ = (sin(t), 0, sin(2t))$ olan sekiz eğrisi $a = 1$ ve $b = 1/2$ olmak üzere

$$x(s,t) = \left(1 + \sin(t) \ \cos h\left(\frac{1}{2}s\right)\right.$$
$$\left. + \ \sin(2t)\sin h\left(\frac{1}{2}s\right)\right)(\cos(s)\,, \sin(s)\,, 0)(0, 0, sin(t)\sinh\left(\frac{1}{2}s\right)$$
$$+ \, sin(2t)\text{cosh}(\frac{1}{2}\ \text{s})$$

Minkowski uzayda oluşan bükülmüş yüzey aşağıdaki gibidir [3, 4].



Şekil 4.2. α profil sekiz eğrisi olan E_1^3 de bir bükülmüş yüzey

5. İZOTROPİK 3- UZAYDA BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLER

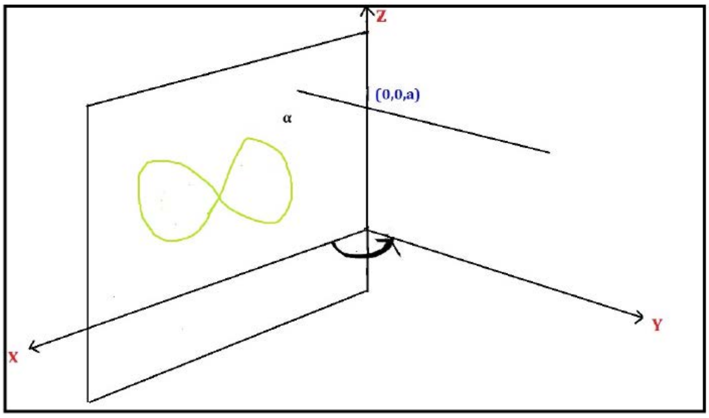
Düzlemsel eğri $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ ve f, g reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, ilk olarak y ekseni ile paralel $(0, 0, a)$ noktasındaki doğru ile ilgili z ekseni etrafında dönme uygulanır ve buradan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(bs) & -\sin(bs) & 0 \\ \sin(bs) & \cos(bs) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t)\cos(bs) \\ f(t)\sin(bs) \\ a + g(t) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Eş zamanlı olarak ekseni etrafında dönme uygulayarak

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t)\cos(bs) \\ f(t)\sin(bs) \\ a + g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t)\cos(bs)\cos(s) - f(t)\sin(bs)\sin(s) \\ f(t)\cos(bs)\sin(s) + f(t)\sin(bs)\cos(s) \\ a + g(t) \end{pmatrix}$$

izotropik uzaydaki bükülmüş yüzey oluşur.



Şekil 5.1. İzotropik uzaydaki bükülmüş yüzey oluşumu ile ilgili koordinat düzlemindeki çizim

Tanım 5.1. 3-boyutlu izotropik uzayda izotropik olmayan α düzlemsel eğrisini gözönüne alalım. Profil eğrisi $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ olan bir bükülmüş yüzey

$$\boldsymbol{x} \ : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{I}^3$$

$$: \ (s,t) \to \boldsymbol{x}(s,t)$$

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (f(t)\cos(bs)\cos(s) - f(t)\sin(bs)\sin(s), f(t)\cos(bs)\sin(s) + f(t)\sin(bs)\cos(s), a + g(t))$$

şeklinde parametrelendirilir.

5.1. $\mathbb{I}^3$ de Bükülmüş Yüzeylerin Gauss Eğriliği

Flat yada sabit Gauss eğrilikli bükülmüş yüzeyi belirlemek için Gauss eğriliği hesaplanır.

I. Temel formun $E(s,t), F(s,t)$ ve , $G(s,t)$ katsayılarını hesaplarsak görebiliriz ki izotropik uzayda bir bükülmüş yüzeyin dejenere olması için gerek ve yeter şart

$$W = E(s,t)G(s,t) - F^2(s,t) = (1+b)^2 f^2(t) f'^2(t) = 0$$

denkleminin sağlanmasıdır. Buradan bükülmüş yüzeyin asla dejenere olmadığı sonucuna ulaşabiliriz.

II. Temel formun $L(s,t), M(s,t)$ ve , $N(s,t)$ katsayılarını hesaplarsak bükülmüş yüzeyin Gauss eğriliği

$$K(s,t) = \frac{L(s,t)N(s,t) - M(s,t)^2}{E(s,t)G(s,t) - F(s,t)^2} = \frac{g'(t)(-g'(t)f''(t) + f'(t)g''(t)}{f(t)f'^4(t)}$$

olduğu görülür.

5.2. $\mathbb{I}^3$ de Flat Bükülmüş Yüzeyler

Bir yüzeyin flat olması için gerek ve yeter şart yüzeyin Gauss eğriliğinin sıfır olmasıdır. Aşağıdaki teoremle 3- boyutlu izotropik uzayda tüm flat bükülmüş yüzeyleri sınıflandıracağız.

Teorem 5.1. Standart parametreli dönel yüzeyleri hariç tuttuğumuzda, bükülmüş yüzey izotropik flattır gerek ve yeter şart g fonksiyonunun

$$g(t) = c \quad \text{veya} \quad g(t) = f(t)c_1 + c_2$$

şeklinde olmasıdır.

İspat: İzotropik uzayda bükülmüş yüzeyin parametrizasyonu c_1, c_2 ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (f(t)\cos(bs)\cos(s) - f(t)\sin(bs)\sin(s), f(t)\cos(bs)\sin(s) + f(t)\sin(bs)\cos(s), a + f(t)c_1 + c_2)$$

Bükülmüş yüzey için $K(s,t) = 0$ ifadesinden,

$$\frac{g'(t)(-g'(t)f''(t) + f'(t)g''(t)}{f(t)f'^4(t)} = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Bu ifadenin sıfır olması için $g'(t)$ ifadesinin sıfır olması, dolayısıyla

$$g(t) = c \text{ veya } g(t) = f(t)c_1 + c_2$$

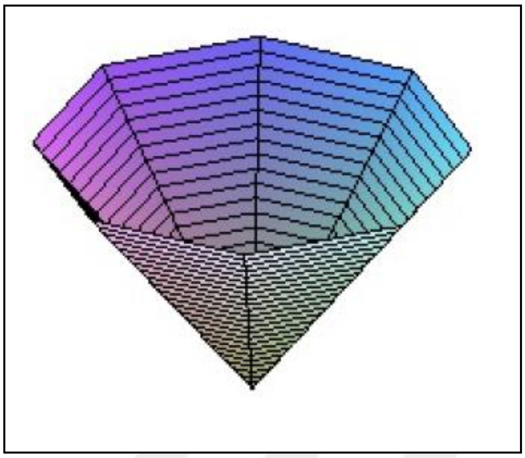
olması gerekir.

Böylece $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. $f(t)$ fonksiyonun seçimlerine bağlı olarak $g(t)$ fonksiyonunun diğer formlarını elde etmek mümkündür.

ÖRNEK 5.1. 3- boyutlu izotropik uzayda bir izotropik flat bükülmüş yüzey

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (t\cos(2s)\cos(s) - t\sin(2s)\sin(s), t\cos(2s)\sin(s) + t\sin(2s)\cos(s), 3t + 6)$$

dir. Burada $\alpha(t) = (t, 0, 3t + 5)$ ve $b = 2, a = 1$ olarak seçilsin. Elde edilen izotropik flat bükülmüş yüzey şekildeki gibidir.

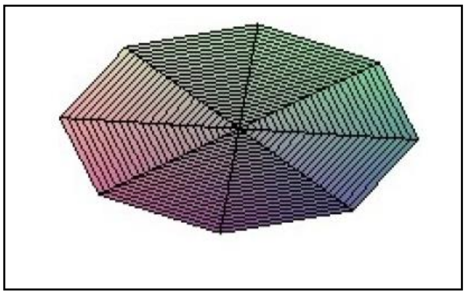


Şekil 5.2. İzotropik uzayda flat yüzey

ÖRNEK 5.2. İzotropik uzayda bir izotropik flat bükülmüş yüzey

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (t\cos(2s)\cos(s) - t\sin(2s)\sin(s), t\cos(2s)\sin(s) + t\sin(2s)\cos(s), 5)$$

dır. Burada $\alpha(t) = (t, 0, 5)$ ve $b = 2,\ a = 1$ olduğunda elde edilen yüzeyin şekli verilmiştir.



Şekil 5.3. İzotropik uzayda flat yüzey

5.3. $\mathbb{I}^3$ de Sabit Eğrilikli Bükülmüş Yüzeyler

3- boyutlu izotropik uzayda bükülmüş yüzeyi göz önüne alalım. $\mathbb{I}$.Temel formun katsayıları

$$L = -\frac{(1+b)^3 f^2(t) g'(t)}{\sqrt{(1+b)^2 f^2(t) f'^2(t)}}, M = 0, N = \frac{(1+b) f(t)(g'(t) f''(t) - f'(t) g''(t))}{\sqrt{(1+b)^2 f^2(t) f'^2(t)}}$$

elde edilir. Böylece bükülmüş yüzeylerin K Gauss eğriliği

$$\boldsymbol{K} = \frac{g'(t)(-g'(t) f''(t) - f'(t) g''(t))}{f(t) f'^4(t)}$$

dir. Bükülmüş yüzey $\boldsymbol{K}_{\text{o}}$ sabit Gauss eğriliğine sahip olsun. Burada $\boldsymbol{K}$ Gauss eğriliğine eşitlenen $\boldsymbol{K}_{\text{o}}$ sabiti sıfır değildir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$g(t) = c_2 - \frac{1}{2} f(t) \sqrt{c_1 + K_{\text{o}} f^2(t)} - \frac{c_1 \log(K_{\text{o}} f(t) + \sqrt{K_{\text{o}}(c_1 + K_{\text{o}} f^2(t))})}{2\sqrt{K_{\text{o}}}}$$

ve

$$g(t) = c_2 + \frac{1}{2} f(t) \sqrt{c_1 + K_{\text{o}} f^2(t)} + \frac{c_1 \log(K_{\text{o}} f(t) + \sqrt{K_{\text{o}}(c_1 + K_{\text{o}} f^2(t))})}{2\sqrt{K_{\text{o}}}}$$

çözümlerine ulaşılır. Burada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

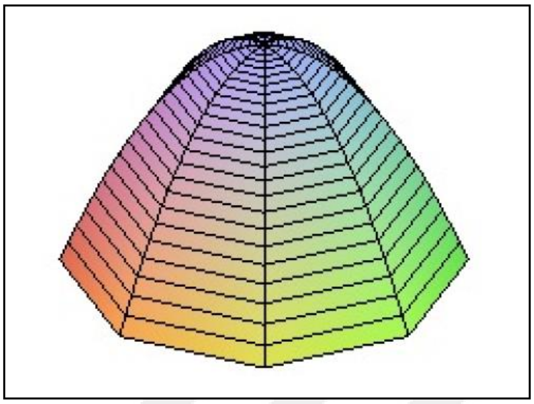
ÖRNEK 5.3. $\mathbb{I}^3$ de bükülmüş yüzeylerin sabit Gauss eğriliği için

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(s,t) = (&t\cos(2s)\cos(s) - t\sin(2s)\sin(s), t\cos(2s)\sin(s) \\ &+ t\sin(2s)\cos(s), -\frac{1}{2}\sqrt{3t^2+2} + 6 - \frac{2\log(3t + \sqrt{9t^2+6})}{\sqrt{3}})\end{aligned}$$

yüzeyi verilsin. Burada

$$\alpha(t) = \left(t, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{3t^2+2} + 6 - \frac{2\log(3t + \sqrt{9t^2+6})}{\sqrt{3}}\right)$$

ve $c_1 = 2, c_2 = 5,\ K_{\text{o}} = 3,\ b = 2, a = 1$ olsun. Elde edilen bükülmüş yüzey aşağıda görülmektedir.



Şekil 5.4. $\mathbb{I}^3$ de sabit Gauss eğrilikli bükülmüş yüzey

5.4. $\mathbb{I}^3$ de Bükülmüş Yüzeylerin Ortalama Eğriliği

Minimal ya da sabit ortalama eğrilikli bükülmüş yüzeyler için ortalama eğrilik hesaplamaları yapılmalıdır.

Profil eğrisi $\alpha(t) = (f(t), 0, g(t))$ olan bükülmüş yüzey için I. Temel formun $E(s,t), F(s,t)$ ve $G(s,t)$ katsayılarını ve II. Temel formun $L(s,t), M(s,t)$ ve $N(s,t)$ katsayılarını hesaplarsak ortalama eğrilik

$$\boldsymbol{H} = \frac{E(s,t)N(s,t) - 2F(s,t)M(s,t) + G(s,t)\,L(s,t)}{2(E(s,t)G(s,t) - F^2(s,t))}$$

$$\boldsymbol{H}(s,t) = -\frac{(1+b)^3 f^2(t)(f'^2(t)g'(t) - f(t)g'(t)f''(t) + f(t)f'(t)g''(t)}{2((1+b)^2 f^2(t) f'^2(t))^{3/2}}$$

dir.

5.5. $\mathbb{I}^3$ de Minimal Bükülmüş Yüzeyler

Benzer şekilde eğer bir yüzeyin ortalama eğriliği sıfırsa yüzey minimaldir. Ayrıca $\mathbb{I}^3$ de yüzeyler için aynı ifadeden bahsedebiliriz.

Teorem 5.2 Dönel yüzeylerin standart parametrizasyonu hariç tutulduğunda , bir bükülmüş yüzey bir izotropik minimaldir gerek ve yeter şart $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere profil eğrisinin

$$\alpha(t) = (f(t), 0, c_1 \log\big(\mathrm{f(t)}\big) + c_2)$$

olmasıdır.

İspat: Bükülmüş yüzeyler için $\boldsymbol{H}\ (s,t) = 0$ ifadesi

$$-\frac{(1+b)^3 f^2(t)(f'^2(t)g'(t) - f(t)g'(t)f''(t) + f(t)f'(t)g''(t)}{2((1+b)^2 f^2(t)f'^2(t))^{3/2}} = 0$$

denkleminin sağlanmasını gerektirir. Böylece gerekli hesaplamalar yapıldığında

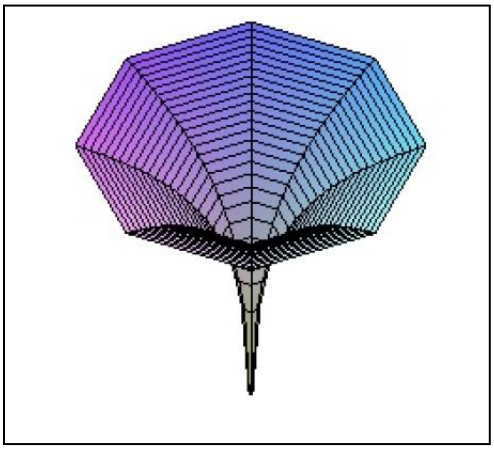
$$g(t) = c_1 \log\big(\mathrm{f(t)}\big) + c_2$$

çözümüne ulaşılır.

Örnek 5.4. Bir izotropik bükülmüş yüzey

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (t\cos(2s)\cos(s) - t\sin(2s)\sin(s), t\cos(2s)\sin(s) + t\sin(2s)\cos(s), 6 + 3\log(\mathrm{t}))$$

verilsin. Burada $\alpha(t) = (t, 0{,}5 + 3\log(\mathrm{t}))$ ve $c_1 = 3, c_2 = 5,\ b = 2, a = 1$ değerlerini göz önüne alarak oluşturduğumuz minimal bükülmüş yüzeyin şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.5. $\mathbb{I}^3$de Minimal bükülmüş yüzey

5.6. $\mathbb{I}^3$ de Sabit Ortalama Eğrilikli Bükülmüş Yüzeyler

Teorem 5.3 Dönel yüzeylerin standart parametrizasyonu hariç tutulduğunda, bir bükülmüş yüzey sabit ortalama eğriliklidir gerek ve yerter şart g fonksiyonunu

$$g(t) = c_2 + c_1 \log\big(f(t)\big) - \frac{cf(t)\sqrt{(1+b)^2 f(t)^2 f'(t)^2}}{2(1+b)f'(t)}$$

denklemini sağlar. Burada $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve c yüzeyin sabit olan ortalama eğriliğidir.

İspat: Bükülmüş yüzeyler için verdiğimiz ortalama eğrilik ifadesini bir $c \in \mathbb{R}$ değerine eşitlersek

$$\boldsymbol{H}\,(s,t) = c$$

$$-\frac{(1+b)^3 f^2(t)(f'^2(t)g'(t) - f(t)g'(t)f''(t) + f(t)f'(t)g''(t)}{2((1+b)^2 f^2(t) f'^2(t))^{3/2}} = c$$

elde edilir. Buradan gerekli çözümlemeler yapıldığında

$$g(t) = c_2 + c_1 \log\big(f(t)\big) - \frac{cf(t)\sqrt{(1+b)^2 f(t)^2 f'(t)^2}}{2(1+b)f'(t)}$$

ifadesine ulaşılır.

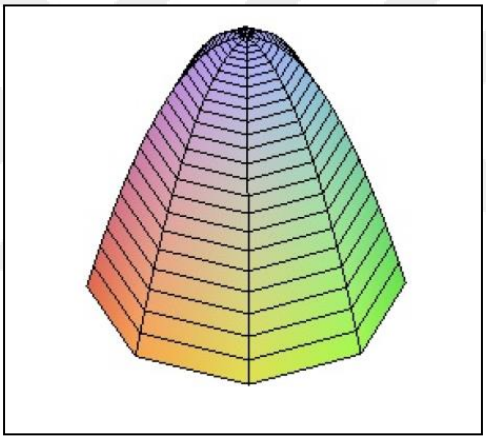
Örnek 5.5. İzotropik uzayda sabit ortalama bir eğrilikli bükülmüş yüzey örneği

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (t\cos(2s)\cos(s) - t\sin(2s)\sin(s), t\cos(2s)\sin(s) + t\sin(2s)\cos(s), -2t^2 + 6 + 3\log(t))$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha(t) = (t, 0, -2t^2 + 5 + 3\log(t))$$

$b = 2, a = 1, c_1 = 3, c_2 = 5$ olmak üzere bu örneğe ait yüzey aşağıda çizilmiştir.



Şekil 5.6. $\mathbb{I}^3$de sabit ortalama eğrilikli bükülmüş yüzey

6. ÖKLİD 3- UZAYDA EĞRİNİN İNVOLÜTÜ İLE OLUŞAN BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLER

$\alpha(t) = (\, f(t), 0, g(t)\,)$ olmak α birim hızlı eğrisinin involütü α^* olsun. İnvolüt tanımı gereğince

$$\alpha^* = (f(t) + (c-t)f'(t), 0, g(t) + (c-t)g'(t)$$

dir. Burada α eğrisinin birim hızlı olması $f'^2 + g'^2 = 1$ eşitliğinin sağlanması ile mümkün olur.

Elde edilen α^* eğrisi de xz düzleminde bulunmaktadır. α^* eğrisini xz düzleminde $(a, 0,0)$ noktasından geçen y eksenine paralel bir doğru etrafında döndürürken eşzamanlı olarak destek düzlemini z ekseni etrafında döndürürsek bükülmüş yüzeyi elde etmiş oluruz. Dolayısıyla ilk olarak

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(bs) & 0 & -\sin(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(bs) & 0 & \cos(bs) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) + (c-t)f'(t) \\ 0 \\ g(t) + (c-t)g'(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + f(t)\cos(bs) + (c-t)f'(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs) + (c-t)g'(t)\sin(bs) \\ 0 \\ f(t)\sin(bs) + (c-t)f'(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs) + (c-t)g'(t)\cos(bs) \end{pmatrix}$$

şeklindeki dönmeyi ve aynı zamanda

$$\begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) & 0 \\ \sin(s) & \cos(bs) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + f(t)\cos(bs) + (c-t)f'(t)\cos(bs) - g(t)\sin(bs) + (c-t)g'(t)\sin(bs) \\ 0 \\ f(t)\sin(bs) + (c-t)f'(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs) + (c-t)g'(t)\cos(bs) \end{pmatrix}$$

şeklindeki z ekseni ile dönmeyi uyguladığımızda

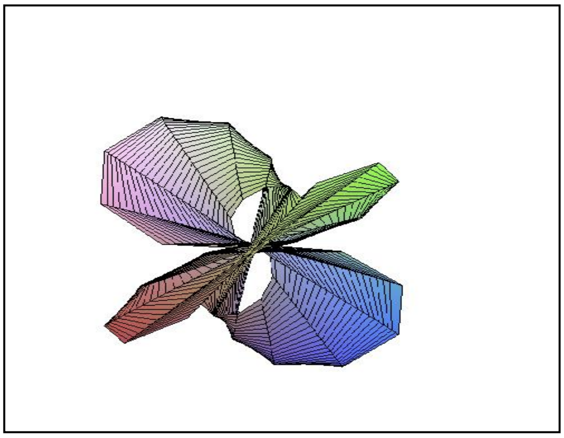
$$\boldsymbol{x}(s,t) = (a\cos(s) + f(t)\cos(bs)\cos(s) + (c-t)f^{'}(t)\cos(bs)\cos(s) - g(t)\sin(bs)\cos(s) + (c - t)g^{'}(t)\sin(bs)\cos(s), a\sin(s) + f(t)\cos(bs)\sin(s) + (c-t)f^{'}(t)\cos(bs)\sin(s) - g(t)\sin(bs)\sin(s) + (c-t)g^{'}(t)\sin(bs)\sin(s)\,,\ f(t)\sin(bs) + (c-t)f^{'}(t)\sin(bs) + g(t)\cos(bs) + (c-t)g^{'}(t)\cos(bs))$$

involüt eğriye göre bükülmüş yüzey parametrizasyonunu elde edebiliriz.

Örnek 6.1 $\alpha(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$ olan düzlemsel bir eğrinin İnvolütünün oluşturduğu bükülmüş yüzey $a = 1, b = 2, c = 3$ olmak üzere

$$\boldsymbol{x}(s,t) = (\cos(s) + \cos(t)\cos(2s)\cos(s) + (3-t)\sin(t)\cos(2s)\cos(s) - \sin(t)\sin(2s)\cos(s) + (3-t)\cos(t)\sin(2s)\cos(s), \sin(s) + \cos(t)\cos(2s)\sin(s) - (3-t)\sin(t)\cos(2s)\sin(s) - \sin(t)\sin(2s)\sin(s) + (3-t)\cos(t)\sin(2s)\sin(s)\,, \cos(t)\sin(2s) + (3-t)\sin(t)\sin(2s) + \sin(t)\cos(2s) + (3-t)\cos(t)\cos(2s))$$

şeklindedir. Bu örneğe ait yüzey aşağıda çizilmiştir.



Şekil 6.1. $\mathbb{E}^3$de $\alpha(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$ eğrisinin involütü ile oluşan bükülmüş yüzey

7. ÖKLİD 3- UZAYDA EĞRİNİN BERTRAND ÇİFTİ İLE OLUŞAN BÜKÜLMÜŞ YÜZEYLER

$\alpha(t) = (\ f(t), 0, g(t)\ )$ olmak üzere α birim hızlı eğri olsun. α eğrisinin Bertrand çifti β eğrisi

$$\beta = (f(t) + \lambda \frac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}}, 0, g(t) + \lambda \frac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}}$$

dir. Burada λ reel bir sabittir. Elde edilen β eğrisi de xz düzleminde bulunmaktadır. β eğrisini xz düzleminde $(a, 0,0)$ noktasından geçen y eksenine paralel bir doğru etrafında döndürürken eşzamanlı olarak destek düzlemini z ekseni etrafında döndürürsek bükülmüş yüzeyi elde etmiş oluruz. Dolayısıyla ilk olarak

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(bs) & 0 & -\sin(bs) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(bs) & 0 & \cos(bs) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) + \lambda \dfrac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}} \\ 0 \\ g(t) + \lambda \dfrac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a + (f(t) + \lambda \dfrac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}})\cos(bs) - (g(t) + \lambda \dfrac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}})\sin(bs) \\ 0 \\ (f(t) + \lambda \dfrac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}})\sin(bs) + (g(t) + \lambda \dfrac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2 + g''(t)^2}})\cos(bs) \end{pmatrix}$$

şeklindeki dönmeyi ve aynı zamanda

$$\begin{pmatrix}\cos(s) & -\sin(s) & 0\\ \sin(s) & \cos(bs) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} a+(f(t)+\lambda\frac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\cos(bs)-(g(t)+\lambda\frac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\sin(bs)\\ 0\\ (f(t)+\lambda\frac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\sin(bs)+(g(t)+\lambda\frac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\cos(bs)\end{pmatrix}\right)$$

şeklindeki z ekseni ile dönmeyi uyguladığımızda

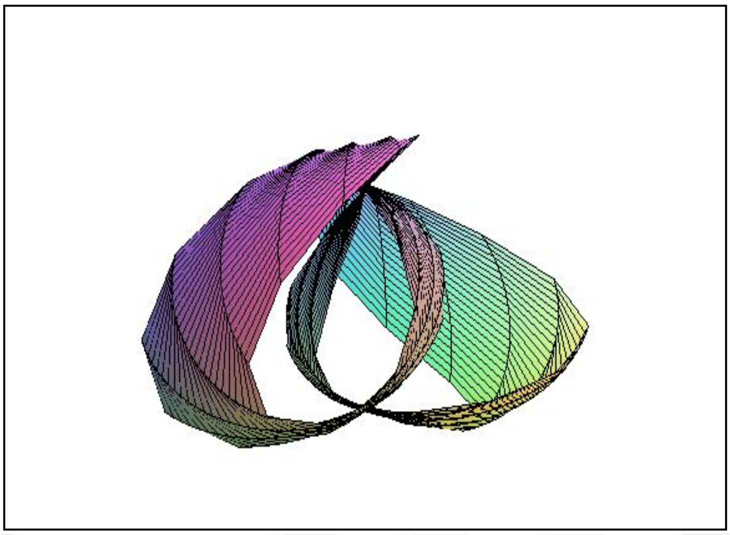
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(s,t) = (a\cos(s) + (f(t)\\ &+\lambda\frac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\cos(bs)\cos(s)\\ &-\left(g(t)+\lambda\frac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}}\right)\sin(bs)\cos(s), a\sin(s)+(f(t)\\ &+\lambda\frac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\cos(bs)\sin(s)\\ &-\left(g(t)+\lambda\frac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}}\right)\sin(bs)\sin(s), (f(t)\\ &+\lambda\frac{f''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\sin(bs)+(g(t)+\lambda\frac{g''(t)}{\sqrt{f''(t)^2+g''(t)^2}})\cos(bs))\end{aligned}$$

bükülmüş yüzey elde edilir.

Örnek 7.1. $\alpha(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$ eğrisinin $a = 1, b = 2, c = 3$ olmak üzere Bertrand çiftinin oluşturduğu bükülmüş yüzeyin denklemi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(s,t) = ((\cos(s) - 2\cos(t)\cos(2s)\cos(s) + 2\sin(t)\sin(2s)\cos(s), \sin(s)\\ &- 2\cos(2s)\sin(s)\cos(t) + 2\sin(2s)\sin(s)\sin(t),\ 2\sin(2s)\cos(t)\\ &- 2\sin(t)\cos(2s))\end{aligned}$$

dir. Bükülmüş yüzeyin şekli aşağıda verilmiştir.



Şekil 7.1. $\mathbb{E}^3$de $\alpha(t) = (\cos(t), 0, \sin(t))$ eğrisinin Bertrandı ile oluşan bükülmüş yüzey

KAYNAKLAR

[1] A. Gray Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, *Studies in Advanced Mathematics*, *CRS PRESS*, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1993

[2] G. Stanilov and S. Slavova, Classi_cation of some twisted surfaces and power series of such surfaces, *Comptes Rendus del'Académie Bulgare des Sciences* 59 no. 6 (2006) 593 _ 600.

[3] W. Goemans and I. Van de Woestyne, Twisted surfaces in Euclidean and Minkowski 3-space*,Pure and Applied Di¤erential Geometry*,(2013), 143-151

[4] W. Goemans and I. Van de Woestyne,I.: Constant curvature twisted surfaces in 3-dimensional Euclidean and Minkowski space.In*: Proceedings of the Conference RIGA 2014. Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics*, Bucharest (2014), 117-130

[5] Hacısalihoğlu, H. H. "Diferensiyel Geometri I. Cilt", *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 1-167 (2000).

[6] Hacısalihoğlu, H. H. "Lineer Cebir I. Cilt", *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 147-165 (2000).

[7] Hacısalihoğlu, H. H. "Diferensiyel Geometri II. Cilt", *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 1-143 (2000).

[8] A. Gray, Modern Di_erential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematicar, *CRC Press*, Boca Raton, Florida, 1998.

[9] Lopez, R. 2008**.** Differential Geometry of Curves and surfaces in Lorentz-Minkowski Space. *Mini Course at the IME-USP. University of Sao Paulo*. Brasil.

[10] Allessio, O. And Guadalope, V.I. 2007. Differential Geometry of intersection curve of two spacelike surfaces in Lorentz-Minkowski Space$\mathbb{L}^3$. *http://www.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/626.pdf.*

[11] F.Dillen and W. Kühnel, Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space, *Manuscripta Mathematica* 98 (1999), 307-320

[12] H.Pottmann, P.Grohs N.J.Mitra, Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity, *Adv Comput Math* (2009),31,391-419.

[13] M.E. Aydın, A generalization of translation surfaces with constant curvature in the isotropicspace,*Journal of Geometry*,(2016),107(3),603-615.

[14] D. W. Yoon and J. W. Lee, Linear weingarten helicoidal surfaces in isotropic space, *Symmetry*, 8/11 (2016), 126

[15] M. K. Karacan, D. W. Yoon and B. Bukcu, Translation surfaces in the three-dimensional simply isotropic space I13; *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys*. 13 1650088 (2016) [9 pages]

[16] W. K¨uhnel, Differential Geometry Curves - Surfaces - Manifolds*, Student Mathematical Library* **16**, AMS, USA, 2002.

EKLER

```
r = {a * Cos[s] + t * Cos[b * s] * Cos[s] - g[t] * Sin[b * s] * cos[s], a * sin[s] +
    t * Cos[b s] * Sin [s] - g[t] * Sin[b s] * Sin[s], t * Sin[b * s] + g[t] * cos[b * s]}
```

```
{a Cos[s] + t Cos[s] Cos[b s] - cos[s] g[t] Sin[b s],
 a sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] - g[t] Sin[s] Sin[b s], cos[b s] g[t] + t Sin[b s]}
```

```
rt = D[r, t]
```

```
{Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t],
 Cos[b s] Sin[s] - Sin[s] Sin[b s] g'[t], Sin[b s] + cos[b s] g'[t]}
```

```
rs = D[r, s]
```

```
{-b cos[s] Cos[b s] g[t] - a Sin[s] -
  t Cos[b s] Sin[s] - b t Cos[s] Sin[b s] - g[t] Sin[b s] cos'[s],
 t Cos[s] Cos[b s] - b Cos[b s] g[t] Sin[s] - Cos[s] g[t] Sin[b s] -
  b t Sin[s] Sin[b s] + a sin'[s], b t Cos[b s] + b g[t] cos'[b s]}
```

```
Simplify[EE = rs.rs]
```

```
(b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] +
    t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s])^2 +
 (b t Cos[b s] + b g[t] cos'[b s])^2 + (t Cos[s] Cos[b s] - b t Sin[s] Sin[b s] -
    g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin'[s])^2
```

```
Simplify[F = rs.rt]
```

```
b (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) +
 (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
    g[t] Sin[b s] cos'[s]) (-Cos[s] Cos[b s] + cos[s] Sin[b s] g'[t]) -
 Sin[s] (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
    g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin'[s])
```

```
Simplify[G = rt.rt]
```

```
(Sin[b s] + cos[b s] g'[t])^2 + Sin[s]^2 (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t])^2 +
 (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])^2
```

```
rss = D[rs, s]
```

```
{-a Cos[s] - t Cos[s] Cos[b s] - b^2 t Cos[s] Cos[b s] + b^2 cos[s] g[t] Sin[b s] +
  2 b t Sin[s] Sin[b s] - 2 b Cos[b s] g[t] cos'[s] - g[t] Sin[b s] cos''[s],
 -2 b Cos[s] Cos[b s] g[t] - t Cos[b s] Sin[s] - b^2 t Cos[b s] Sin[s] -
  2 b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[s] Sin[b s] + b^2 g[t] Sin[s] Sin[b s] + a sin''[s],
 -b^2 t Sin[b s] + b^2 g[t] cos''[b s]}
```

```
rst = D[rs, t]
```

```
{-Cos[b s] Sin[s] - b Cos[s] Sin[b s] - b cos[s] Cos[b s] g'[t] - Sin[b s] cos'[s] g'[t],
 Cos[s] Cos[b s] - b Sin[s] Sin[b s] - b Cos[b s] Sin[s] g'[t] - Cos[s] Sin[b s] g'[t],
 b Cos[b s] + b cos'[b s] g'[t]}
```

```
rtt = D[rt, t]
```

```
{-cos[s] Sin[b s] g''[t], -Sin[s] Sin[b s] g''[t], cos[b s] g''[t]}
```

```
W = √(EE * G − F * F)
```

```
√ (− ((b t Cos[b s] + b g[t] cos′[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) +
        (−b cos[s] Cos[b s] g[t] − a Sin[s] − t Cos[b s] Sin[s] − b t Cos[s] Sin[b s] −
           g[t] Sin[b s] cos′[s]) (Cos[s] Cos[b s] − cos[s] Sin[b s] g′[t]) +
        (Cos[b s] Sin[s] − Sin[s] Sin[b s] g′[t]) (t Cos[s] Cos[b s] − b Cos[b s]
             g[t] Sin[s] − Cos[s] g[t] Sin[b s] − b t Sin[s] Sin[b s] + a sin′[s]))^2 +
   ((Sin[b s] + cos[b s] g′[t])^2 + (Cos[s] Cos[b s] − cos[s] Sin[b s] g′[t])^2 +
      (Cos[b s] Sin[s] − Sin[s] Sin[b s] g′[t])^2)
    ((−b cos[s] Cos[b s] g[t] − a Sin[s] − t Cos[b s] Sin[s] − b t Cos[s] Sin[b s] −
          g[t] Sin[b s] cos′[s])^2 + (b t Cos[b s] + b g[t] cos′[b s])^2 +
      (t Cos[s] Cos[b s] − b Cos[b s] g[t] Sin[s] − Cos[s] g[t] Sin[b s] −
          b t Sin[s] Sin[b s] + a sin′[s])^2))
```

```
L = Det[{rs, rt, rss}] / W // Simplify
```

```
((b Sin[s] (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (−Cos[b s] + Sin[b s] g′[t]) −
      (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) (−t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
          g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) − a sin′[s]))
    (−a Cos[s] − t Cos[s] Cos[b s] − b^2 t Cos[s] Cos[b s] + b^2 cos[s] g[t] Sin[b s] +
      2 b t Sin[s] Sin[b s] − g[t] (2 b Cos[b s] cos′[s] + Sin[b s] cos″[s])) +
   b^2 (−Sin[s] (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
          b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos′[s]) (Cos[b s] − Sin[b s] g′[t]) −
      (Cos[s] Cos[b s] − cos[s] Sin[b s] g′[t]) (t Cos[s] Cos[b s] −
          b t Sin[s] Sin[b s] − g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) +
          a sin′[s])) (−t Sin[b s] + g[t] cos″[b s]) −
   (−(b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
           g[t] Sin[b s] cos′[s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) −
      b (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (Cos[s] Cos[b s] − cos[s] Sin[b s] g′[t]))
    (−t ((1 + b^2) Cos[b s] Sin[s] + 2 b Cos[s] Sin[b s]) +
      g[t] (−2 b Cos[s] Cos[b s] + (1 + b^2) Sin[s] Sin[b s]) + a sin″[s])) /
  (√ (−(b (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) +
          (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
             g[t] Sin[b s] cos′[s]) (−Cos[s] Cos[b s] + cos[s] Sin[b s] g′[t]) −
          Sin[s] (Cos[b s] − Sin[b s] g′[t]) (−t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
             g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) − a sin′[s]))^2 +
      ((Sin[b s] + cos[b s] g′[t])^2 + Sin[s]^2 (Cos[b s] − Sin[b s] g′[t])^2 +
         (Cos[s] Cos[b s] − cos[s] Sin[b s] g′[t])^2)
       ((b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
             b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos′[s])^2 +
         (b t Cos[b s] + b g[t] cos′[b s])^2 + (t Cos[s] Cos[b s] − b t Sin[s] Sin[b s] −
             g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin′[s])^2)))
```

NN = $\dfrac{\texttt{Det[\{rs, rt, rtt\}]}}{\texttt{W}}$ // Simplify

```
-((Sin[s] Sin[b s] (b t Cos[s] + (a + t Cos[b s]) Sin[s] Sin[b s] +
        g[t] (Sin[b s]^2 cos'[s] + b Cos[s] Cos[b s] cos'[b s])) +
      1/2 cos[b s] (2 b cos[s] Cos[b s]^2 g[t] Sin[s] + g[t] (-Cos[s]
            (2 b Cos[b s]^2 Sin[s] + Cos[s] Sin[2 b s]) + Sin[s] Sin[2 b s] cos'[s]) +
        Cos[b s] (a - a Cos[2 s] + 2 t Cos[b s] + 2 a Cos[s] sin'[s])) -
      1/2 cos[s] (g[t] (2 Cos[s] Sin[b s]^3 + b Sin[s] Sin[2 b s] cos'[b s]) - 2 Sin[b s]
          (-b t Sin[s] + t Cos[s] Cos[b s] Sin[b s] + a Sin[b s] sin'[s]))) g''[t]) /
  (Sqrt[(-(b (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) +
          (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
             g[t] Sin[b s] cos'[s]) (-Cos[s] Cos[b s] + cos[s] Sin[b s] g'[t]) -
          Sin[s] (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s]
               Sin[b s] + g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin'[s]))^2 +
       ((Sin[b s] + cos[b s] g'[t])^2 + Sin[s]^2 (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t])^2 +
          (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])^2)
        ((b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
             b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s])^2 +
          (b t Cos[b s] + b g[t] cos'[b s])^2 + (t Cos[s] Cos[b s] - b t Sin[s] Sin[b s] -
             g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin'[s])^2)]))
```

```
M = Det[{rs, rt, rst}] / W // Simplify
```

```
(-(Cos[s] Cos[b s] - b Sin[s] Sin[b s] - (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) g'[t])
    (-(b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
          b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s]) (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) -
      b (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])) +
   (-Cos[b s] Sin[s] - b Cos[s] Sin[b s] - b cos[s] Cos[b s] g'[t] -
      Sin[b s] cos'[s] g'[t])
    (b Sin[s] (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (-Cos[b s] + Sin[b s] g'[t]) -
      (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
         g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin'[s])) +
   b (Cos[b s] + cos'[b s] g'[t]) (-Sin[s] (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] +
         t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s])
       (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t]) - (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])
       (t Cos[s] Cos[b s] - b t Sin[s] Sin[b s] -
         g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin'[s]))) /
 (√(-(b (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) +
          (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
             g[t] Sin[b s] cos'[s]) (-Cos[s] Cos[b s] + cos[s] Sin[b s] g'[t]) -
          Sin[s] (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
             g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin'[s]))^2 +
      ((Sin[b s] + cos[b s] g'[t])^2 + Sin[s]^2 (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t])^2 +
         (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])^2)
       ((b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
            b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s])^2 +
         (b t Cos[b s] + b g[t] cos'[b s])^2 + (t Cos[s] Cos[b s] - b t Sin[s] Sin[b s] -
            g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin'[s])^2)))
```

```
K = (L * NN - M^2) / (EE * G - F * F) // Simplify
```

```
-((-(Cos[s] Cos[b s] - b Sin[s] Sin[b s] - (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) g'[t])
          (-(b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s]
                  Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s]) (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) -
            b (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])) +
         (-Cos[b s] Sin[s] - b Cos[s] Sin[b s] - b cos[s] Cos[b s] g'[t] -
            Sin[b s] cos'[s] g'[t])
          (b Sin[s] (t Cos[b s] + g[t] cos'[b s]) (-Cos[b s] + Sin[b s] g'[t]) -
            (Sin[b s] + cos[b s] g'[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
               g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin'[s])) +
        b (Cos[b s] + cos'[b s] g'[t]) (-Sin[s] (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] +
               t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos'[s])
             (Cos[b s] - Sin[b s] g'[t]) - (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g'[t])
             (t Cos[s] Cos[b s] - b t Sin[s] Sin[b s] -
               g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin'[s])))^2 +
     (Sin[s] Sin[b s] (b t Cos[s] + (a + t Cos[b s]) Sin[s] Sin[b s] +
            g[t] (Sin[b s]^2 cos'[s] + b Cos[s] Cos[b s] cos'[b s])) +
        1/2 cos[b s] (2 b cos[s] Cos[b s]^2 g[t] Sin[s] + g[t] (-Cos[s]
                (2 b Cos[b s]^2 Sin[s] + Cos[s] Sin[2 b s]) + Sin[s] Sin[2 b s] cos'[s]) +
           Cos[b s] (a - a Cos[2 s] + 2 t Cos[b s] + 2 a Cos[s] sin'[s])) -
```

```
  1
  — cos[s] (g[t] (2 Cos[s] Sin[b s]^3 + b Sin[s] Sin[2 b s] cos′[b s]) -
  2
     2 Sin[b s] (-b t Sin[s] + t Cos[s] Cos[b s] Sin[b s] + a Sin[b s] sin′[s])))
g″[t] ((b Sin[s] (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (-Cos[b s] + Sin[b s] g′[t]) -
      (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
         g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin′[s]))
    (-a Cos[s] - t Cos[s] Cos[b s] - b^2 t Cos[s] Cos[b s] + b^2 cos[s] g[t] Sin[b s] +
      2 b t Sin[s] Sin[b s] - g[t] (2 b Cos[b s] cos′[s] + Sin[b s] cos″[s])) +
   b^2 (-Sin[s] (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
         b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos′[s]) (Cos[b s] - Sin[b s] g′[t]) -
      (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g′[t]) (t Cos[s] Cos[b s] -
         b t Sin[s] Sin[b s] - g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) +
         a sin′[s])) (-t Sin[b s] + g[t] cos″[b s]) -
    (-(b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
          g[t] Sin[b s] cos′[s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) -
      b (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g′[t]))
    (-t ((1 + b^2) Cos[b s] Sin[s] + 2 b Cos[s] Sin[b s]) +
      g[t] (-2 b Cos[s] Cos[b s] + (1 + b^2) Sin[s] Sin[b s]) + a sin″[s]))) /
 ((b (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) +
      (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
         g[t] Sin[b s] cos′[s]) (-Cos[s] Cos[b s] + cos[s] Sin[b s] g′[t]) -
      Sin[s] (Cos[b s] - Sin[b s] g′[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
         g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin′[s]))^2 -
   ((Sin[b s] + cos[b s] g′[t])^2 + Sin[s]^2 (Cos[b s] - Sin[b s] g′[t])^2 +
      (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g′[t])^2)
    ((b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
         b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos′[s])^2 +
      (b t Cos[b s] + b g[t] cos′[b s])^2 + (t Cos[s] Cos[b s] - b t Sin[s] Sin[b s] -
         g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) + a sin′[s])^2))^2
```

```
     L * G + EE * NN - 2 * F * M
H = ----------------------------- // Simplify
        2 (EE * G - F * F)
```

```
(-2 (b (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) +
       (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] +
          g[t] Sin[b s] cos′[s]) (-Cos[s] Cos[b s] + cos[s] Sin[b s] g′[t]) -
       Sin[s] (Cos[b s] - Sin[b s] g′[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
          g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin′[s]))
    (-(Cos[s] Cos[b s] - b Sin[s] Sin[b s] - (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s])
          g′[t]) (-(b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] + t Cos[b s] Sin[s] +
             b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos′[s]) (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) -
          b (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g′[t])) +
       (-Cos[b s] Sin[s] - b Cos[s] Sin[b s] - b cos[s] Cos[b s] g′[t] -
          Sin[b s] cos′[s] g′[t])
        (b Sin[s] (t Cos[b s] + g[t] cos′[b s]) (-Cos[b s] + Sin[b s] g′[t]) -
          (Sin[b s] + cos[b s] g′[t]) (-t Cos[s] Cos[b s] + b t Sin[s] Sin[b s] +
             g[t] (b Cos[b s] Sin[s] + Cos[s] Sin[b s]) - a sin′[s])) +
       b (Cos[b s] + cos′[b s] g′[t]) (-Sin[s] (b cos[s] Cos[b s] g[t] + a Sin[s] +
             t Cos[b s] Sin[s] + b t Cos[s] Sin[b s] + g[t] Sin[b s] cos′[s])
           (Cos[b s] - Sin[b s] g′[t]) - (Cos[s] Cos[b s] - cos[s] Sin[b s] g′[t])
```

$$
\begin{array}{l}
\quad (t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - b\,t\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] - \\
\qquad g[t]\,(b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) + a\,\mathrm{sin}'[s])))\, - \\
((b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,g[t] + a\,\mathrm{Sin}[s] + t\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + b\,t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + \\
\qquad g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])^2 + \\
\quad (b\,t\,\mathrm{Cos}[b\,s] + b\,g[t]\,\mathrm{cos}'[b\,s])^2 + (t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - b\,t\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] - \\
\qquad g[t]\,(b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) + a\,\mathrm{sin}'[s])^2) \\
(\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,(b\,t\,\mathrm{Cos}[s] + (a + t\,\mathrm{Cos}[b\,s])\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + \\
\qquad g[t]\,(\mathrm{Sin}[b\,s]^2\,\mathrm{cos}'[s] + b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[b\,s])) + \\
\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{cos}[b\,s]\,(2\,b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]^2\,g[t]\,\mathrm{Sin}[s] + g[t]\,(-\mathrm{Cos}[s] \\
\qquad\quad (2\,b\,\mathrm{Cos}[b\,s]^2\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[2\,b\,s]) + \mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[2\,b\,s]\,\mathrm{cos}'[s]) + \\
\qquad \mathrm{Cos}[b\,s]\,(a - a\,\mathrm{Cos}[2\,s] + 2\,t\,\mathrm{Cos}[b\,s] + 2\,a\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{sin}'[s])) - \\
\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{cos}[s]\,(g[t]\,(2\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]^3 + b\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[2\,b\,s]\,\mathrm{cos}'[b\,s]) - \\
\qquad 2\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,(-b\,t\,\mathrm{Sin}[s] + t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + a\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{sin}'[s]))) \\
g''[t] + ((\mathrm{Sin}[b\,s] + \mathrm{cos}[b\,s]\,g'[t])^2 + \mathrm{Sin}[s]^2\,(\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])^2 + \\
\quad (\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])^2) \\
((b\,\mathrm{Sin}[s]\,(t\,\mathrm{Cos}[b\,s] + g[t]\,\mathrm{cos}'[b\,s])\,(-\mathrm{Cos}[b\,s] + \mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t]) - \\
\qquad (\mathrm{Sin}[b\,s] + \mathrm{cos}[b\,s]\,g'[t])\,(-t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] + b\,t\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + \\
\qquad\quad g[t]\,(b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) - a\,\mathrm{sin}'[s])) \\
\quad (-a\,\mathrm{Cos}[s] - t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - b^2\,t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] + b^2\,\mathrm{cos}[s]\,g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + \\
\qquad 2\,b\,t\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] - g[t]\,(2\,b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s] + \mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{cos}''[s])) + \\
\quad b^2\,(-\mathrm{Sin}[s]\,(b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,g[t] + a\,\mathrm{Sin}[s] + t\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \\
\qquad\quad b\,t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])\,(\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t]) - \\
\qquad (\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])\,(t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - \\
\qquad\quad b\,t\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] - g[t]\,(b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) + \\
\qquad\quad a\,\mathrm{sin}'[s]))\,(-t\,\mathrm{Sin}[b\,s] + g[t]\,\mathrm{cos}''[b\,s]) - \\
\quad (-(b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,g[t] + a\,\mathrm{Sin}[s] + t\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + b\,t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + \\
\qquad\quad g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])\,(\mathrm{Sin}[b\,s] + \mathrm{cos}[b\,s]\,g'[t]) - \\
\qquad b\,(t\,\mathrm{Cos}[b\,s] + g[t]\,\mathrm{cos}'[b\,s])\,(\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])) \\
\quad (-t\,((1 + b^2)\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + 2\,b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) + \\
\qquad g[t]\,(-2\,b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] + (1 + b^2)\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) + a\,\mathrm{sin}''[s]))) \Big/ \\
(2\,(-(b\,(t\,\mathrm{Cos}[b\,s] + g[t]\,\mathrm{cos}'[b\,s])\,(\mathrm{Sin}[b\,s] + \mathrm{cos}[b\,s]\,g'[t]) + (b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] \\
\qquad\qquad g[t] + a\,\mathrm{Sin}[s] + t\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + b\,t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + g[t] \\
\qquad\qquad \mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])\,(-\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] + \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t]) - \\
\qquad\quad \mathrm{Sin}[s]\,(\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])\,(-t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] + b\,t\,\mathrm{Sin}[s] \\
\qquad\qquad \mathrm{Sin}[b\,s] + g[t]\,(b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) - a\,\mathrm{sin}'[s]))^2 + \\
\quad ((\mathrm{Sin}[b\,s] + \mathrm{cos}[b\,s]\,g'[t])^2 + \mathrm{Sin}[s]^2\,(\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])^2 + \\
\qquad (\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,g'[t])^2) \\
\quad ((b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,g[t] + a\,\mathrm{Sin}[s] + t\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \\
\qquad\quad b\,t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] + g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])^2 + \\
\qquad (b\,t\,\mathrm{Cos}[b\,s] + b\,g[t]\,\mathrm{cos}'[b\,s])^2 + (t\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cos}[b\,s] - b\,t\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s] - \\
\qquad\quad g[t]\,(b\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[b\,s]) + a\,\mathrm{sin}'[s])^2))^{3/2})
\end{array}
$$

```
r = {a * Cos[s] + f[t] * Cosh[b * s] * Cos[s] + g[t] * Sinh[b * s] * cos[s],
  a * Sin[s] + f[t] * Cosh[b * s] * Sin[s] +
   g[t] * Sinh[b * s] * Sin[s] , f[t] * Sinh[b * s] + g[t] * Cosh[b * s]}
```

```
{a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + cos[s] g[t] Sinh[b s],
 a Sin[s] + Cosh[b s] f[t] Sin[s] + g[t] Sin[s] Sinh[b s],
 Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s]}
```

```
rt = D[r, t]
```

```
{Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t],
 Cosh[b s] Sin[s] f′[t] + Sin[s] Sinh[b s] g′[t], Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] g′[t]}
```

```
rs = D[r, s]
```

```
{b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] -
  Cosh[b s] f[t] Sin[s] + b Cos[s] f[t] Sinh[b s] + g[t] Sinh[b s] cos′[s],
 a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b Cosh[b s] g[t] Sin[s] + Cos[s] g[t] Sinh[b s] +
  b f[t] Sin[s] Sinh[b s], b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s]}
```

```
AS = rs
```

```
{b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] -
  Cosh[b s] f[t] Sin[s] + b Cos[s] f[t] Sinh[b s] + g[t] Sinh[b s] cos′[s],
 a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b Cosh[b s] g[t] Sin[s] + Cos[s] g[t] Sinh[b s] +
  b f[t] Sin[s] Sinh[b s], b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s]}
```

```
BS = {b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] -
   Cosh[b s] f[t] Sin[s] + b Cos[s] f[t] Sinh[b s] + g[t] Sinh[b s] cos′[s],
  a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b Cosh[b s] g[t] Sin[s] + Cos[s] g[t] Sinh[b s] +
   b f[t] Sin[s] Sinh[b s], -b Cosh[b s] f[t] - b g[t] Sinh[b s]}
```

```
{b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] -
  Cosh[b s] f[t] Sin[s] + b Cos[s] f[t] Sinh[b s] + g[t] Sinh[b s] cos′[s],
 a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b Cosh[b s] g[t] Sin[s] + Cos[s] g[t] Sinh[b s] +
  b f[t] Sin[s] Sinh[b s], -b Cosh[b s] f[t] - b g[t] Sinh[b s]}
```

```
Simplify[EE = AS.BS]
```

```
-(b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s])^2 +
 (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
    f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))^2 +
 (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
    g[t] Sinh[b s] cos′[s])^2
```

```
AT = rt
```

```
{Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t],
 Cosh[b s] Sin[s] f′[t] + Sin[s] Sinh[b s] g′[t], Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] g′[t]}
```

```
BT = {Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t],
  Cosh[b s] Sin[s] f′[t] + Sin[s] Sinh[b s] g′[t], -Sinh[b s] f′[t] - Cosh[b s] g′[t]}
```

```
{Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t],
 Cosh[b s] Sin[s] f′[t] + Sin[s] Sinh[b s] g′[t], -Sinh[b s] f′[t] - Cosh[b s] g′[t]}
```

```
Simplify[F = BS.rt]
```

```
-b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s]) (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) +
 Sin[s] (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
    f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s])) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) +
 (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
    g[t] Sinh[b s] cos'[s]) (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])
```

```
Simplify[G = AT.BT]
```

```
-(Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t])^2 +
 (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])^2 +
 (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t])^2
```

```
rss = D[rs, s]
```

```
{-a Cos[s] - Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b^2 Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b^2 cos[s] g[t] Sinh[b s] -
   2 b f[t] Sin[s] Sinh[b s] + 2 b Cosh[b s] g[t] cos'[s] + g[t] Sinh[b s] cos''[s],
 2 b Cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] - Cosh[b s] f[t] Sin[s] + b^2 Cosh[b s] f[t] Sin[s] +
   2 b Cos[s] f[t] Sinh[b s] - g[t] Sin[s] Sinh[b s] + b^2 g[t] Sin[s] Sinh[b s],
 b^2 Cosh[b s] g[t] + b^2 f[t] Sinh[b s]}
```

```
rst = D[rs, t]
```

```
{-Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + b Cos[s] Sinh[b s] f'[t] +
   b cos[s] Cosh[b s] g'[t] + Sinh[b s] cos'[s] g'[t],
 Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + b Sin[s] Sinh[b s] f'[t] + b Cosh[b s] Sin[s] g'[t] +
   Cos[s] Sinh[b s] g'[t], b Cosh[b s] f'[t] + b Sinh[b s] g'[t]}
```

```
rtt = D[rt, t]
```

```
{Cos[s] Cosh[b s] f''[t] + cos[s] Sinh[b s] g''[t],
 Cosh[b s] Sin[s] f''[t] + Sin[s] Sinh[b s] g''[t], Sinh[b s] f''[t] + Cosh[b s] g''[t]}
```

$$W = \sqrt{EE * G - F * F}$$

```
√(-((-b Cosh[b s] f[t] - b g[t] Sinh[b s]) (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) +
        (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] - Cosh[b s] f[t] Sin[s] +
           b Cos[s] f[t] Sinh[b s] + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
         (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t]) +
        (a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b Cosh[b s] g[t] Sin[s] +
           Cos[s] g[t] Sinh[b s] + b f[t] Sin[s] Sinh[b s])
         (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t]))^2 +
   ((-b Cosh[b s] f[t] - b g[t] Sinh[b s]) (b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s]) +
      (a Cos[s] + Cos[s] Cosh[b s] f[t] + b Cosh[b s] g[t] Sin[s] +
          Cos[s] g[t] Sinh[b s] + b f[t] Sin[s] Sinh[b s])^2 +
      (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] - Cosh[b s] f[t] Sin[s] +
          b Cos[s] f[t] Sinh[b s] + g[t] Sinh[b s] cos'[s])^2)
    ((-Sinh[b s] f'[t] - Cosh[b s] g'[t]) (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) +
      (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])^2 +
      (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t])^2))
```

$$L = \frac{\text{Det[\{rs, rt, rss\}]}}{\text{W}} \text{ // Simplify}$$

```
(- (-a Sin[s] + f[t] ((-1 + b^2) Cosh[b s] Sin[s] + 2 b Cos[s] Sinh[b s]) +
        g[t] (2 b Cos[s] Cosh[b s] + (-1 + b^2) Sin[s] Sinh[b s]))
     ((b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
           f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
         (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) - b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s])
         (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
    b^2 (Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s]) (Sin[s] (b cos[s] Cosh[b s] g[t] -
           a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
           g[t] Sinh[b s] cos'[s]) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) -
        (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
           f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
         (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
    (Cos[s] Sinh[b s] (a + g[t] Sinh[b s]) f'[t] +
        (a Cos[s] Cosh[b s] + b g[t] Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sinh[b s]) g'[t] +
        f[t] ((-b Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] Sinh[b s]) f'[t] + Cos[s] Cosh[b s]^2 g'[t]))
     (-a Cos[s] + b^2 cos[s] g[t] Sinh[b s] +
        f[t] ((-1 + b^2) Cos[s] Cosh[b s] - 2 b Sin[s] Sinh[b s]) +
        2 b Cosh[b s] g[t] cos'[s] + g[t] Sinh[b s] cos''[s])) /
  (√ (- (-b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s]) (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) +
           Sin[s] (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
              f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
            (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) + (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
              f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
            (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t]))^2 +
      (- (b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s])^2 + (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] +
                 Cos[s] Sinh[b s]) + f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))^2 +
          (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b
                 Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])^2)
       (- (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t])^2 + (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s]
                Sinh[b s] g'[t])^2 + (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t])^2)))
```

$$NN = \frac{\text{Det}[\{rs, rt, rtt\}]}{W} \text{ // Simplify}$$

$$\Big(\Big(a\,\text{Cos}[s]^2\,\text{Cosh}[b\,s]^2 + b\,\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]^3\,g[t]\,\text{Sin}[s] + a\,\text{Cosh}[b\,s]^2\,\text{Sin}[s]^2 + \text{Cos}[s]^2\,\text{Cosh}[b\,s]^2\,g[t]\,\text{Sinh}[b\,s] - b\,\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]\,g[t]\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]^2 - a\,\text{Sin}[s]^2\,\text{Sinh}[b\,s]^2 - \text{cos}[s]\,\Big(a\,\text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]^2 + g[t]\,\big(b\,\text{Cosh}[b\,s]^3\,\text{Sin}[s] - b\,\text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]^2 + \text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]^3\big)\Big) + f[t]\,\Big(\text{Cosh}[b\,s]^3 - b\,\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]^2\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s] - \text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s]^2\,\text{Sinh}[b\,s]^2 + b\,\text{Cos}[s]\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]^3 + \text{cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]\,\Big(b\,\text{Sin}[s] - \frac{1}{2}\,\text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[2\,b\,s]\Big)\Big) - \text{Cosh}[b\,s]^2\,g[t]\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]\,\text{cos}'[s] + g[t]\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]^3\,\text{cos}'[s]\Big)\,(g'[t]\,f''[t] - f'[t]\,g''[t])\Big) \Big/$$

$$\Big(\sqrt{}\Big(-(-b\,(\text{Cosh}[b\,s]\,f[t] + g[t]\,\text{Sinh}[b\,s])\,(\text{Sinh}[b\,s]\,f'[t] + \text{Cosh}[b\,s]\,g'[t]) + \text{Sin}[s]\,(a\,\text{Cos}[s] + g[t]\,(b\,\text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s] + \text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]) + f[t]\,(\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s] + b\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]))\,(\text{Cosh}[b\,s]\,f'[t] + \text{Sinh}[b\,s]\,g'[t]) + (b\,\text{cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]\,g[t] - a\,\text{Sin}[s] + f[t]\,(-\text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s] + b\,\text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]) + g[t]\,\text{Sinh}[b\,s]\,\text{cos}'[s])\,(\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]\,f'[t] + \text{cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]\,g'[t]))^2 + \Big(-(b\,\text{Cosh}[b\,s]\,f[t] + b\,g[t]\,\text{Sinh}[b\,s])^2 + (a\,\text{Cos}[s] + g[t]\,(b\,\text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s] + \text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]) + f[t]\,(\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s] + b\,\text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]))^2 + (b\,\text{cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]\,g[t] - a\,\text{Sin}[s] + f[t]\,(-\text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s] + b\,\text{Cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]) + g[t]\,\text{Sinh}[b\,s]\,\text{cos}'[s])^2\Big)\,\Big(-(\text{Sinh}[b\,s]\,f'[t] + \text{Cosh}[b\,s]\,g'[t])^2 + (\text{Cos}[s]\,\text{Cosh}[b\,s]\,f'[t] + \text{cos}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]\,g'[t])^2 + (\text{Cosh}[b\,s]\,\text{Sin}[s]\,f'[t] + \text{Sin}[s]\,\text{Sinh}[b\,s]\,g'[t])^2\Big)\Big)\Big)$$

```
M = Det[{rs, rt, rst}] / W // Simplify

(((-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) f'[t] +
      (b cos[s] Cosh[b s] + Sinh[b s] cos'[s]) g'[t])
    (Cos[s] Sinh[b s] (a + g[t] Sinh[b s]) f'[t] +
      (a Cos[s] Cosh[b s] + b g[t] Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sinh[b s]) g'[t] +
      f[t] ((-b Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] Sinh[b s]) f'[t] + Cos[s] Cosh[b s]^2 g'[t])) -
   ((Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]) f'[t] +
      (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) g'[t])
    ((b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
         f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
       (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) - b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s])
       (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
   b (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) (Sin[s] (b cos[s] Cosh[b s] g[t] -
         a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
         g[t] Sinh[b s] cos'[s]) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) -
      (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
         f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
       (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t]))) /
 (√(-(-b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s]) (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) +
          Sin[s] (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
             f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
           (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) + (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
             f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
           (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t]))^2 +
      (-(b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s])^2 + (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] +
                Cos[s] Sinh[b s]) + f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))^2 +
         (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b
                Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])^2)
       (-(Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t])^2 + (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s]
                Sinh[b s] g'[t])^2 + (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t])^2)))

K = (L * NN - M^2) / (EE * G - F * F) // Simplify

(-(((-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) f'[t] +

            (b cos[s] Cosh[b s] + Sinh[b s] cos'[s]) g'[t])
          (Cos[s] Sinh[b s] (a + g[t] Sinh[b s]) f'[t] + (a Cos[s] Cosh[b s] +
               b g[t] Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sinh[b s]) g'[t] +
            f[t] ((-b Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] Sinh[b s]) f'[t] +
               Cos[s] Cosh[b s]^2 g'[t])) - ((Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s])
             f'[t] + (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) g'[t])
          ((b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] +
                  b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
             (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) - b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s])
             (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
         b (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) (Sin[s] (b cos[s] Cosh[b s] g[t] -
               a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
               g[t] Sinh[b s] cos'[s]) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) -
            (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
               f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
```

```
          (Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t])))^2 +
  (a Cos[s]^2 Cosh[b s]^2 + b Cos[s] Cosh[b s]^3 g[t] Sin[s] +
     a
      Cosh[b s]^2
      Sin[s]^2 + Cos[s]^2
      Cosh[b s]^2
      g[t] Sinh[b s] -
     b Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sin[s] Sinh[b s]^2 -
     a Sin[s]^2 Sinh[b s]^2 -
     cos[s] (a Cos[s] Sinh[b s]^2 + g[t]
          (b Cosh[b s]^3 Sin[s] - b Cosh[b s] Sin[s] Sinh[b s]^2 + Cos[s] Sinh[b s]^3)) +
     f[t] (Cosh[b s]^3 - b Cos[s] Cosh[b s]^2 Sin[s] Sinh[b s] -
         Cosh[b s] Sin[s]^2 Sinh[b s]^2 + b Cos[s] Sin[s] Sinh[b s]^3 +
         cos[s] Sinh[b s] (b Sin[s] - 1/2 Cos[s] Sinh[2 b s])) -
     Cosh[b s]^2 g[t] Sin[s] Sinh[b s] cos′[s] +
     g[t] Sin[s] Sinh[b s]^3 cos′[s])
   (-(-a Sin[s] + f[t] ((-1 + b^2) Cosh[b s] Sin[s] + 2 b Cos[s] Sinh[b s]) +
         g[t] (2 b Cos[s] Cosh[b s] + (-1 + b^2) Sin[s] Sinh[b s]))
      ((b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t]
             (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos′[s])
          (Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] g′[t]) - b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s])
          (Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t])) +
     b^2 (Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s]) (Sin[s] (b cos[s] Cosh[b s] g[t] -
             a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
             g[t] Sinh[b s] cos′[s]) (Cosh[b s] f′[t] + Sinh[b s] g′[t]) -
         (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
             f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
          (Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t])) +
     (Cos[s] Sinh[b s] (a + g[t] Sinh[b s]) f′[t] + (a Cos[s] Cosh[b s] +
             b g[t] Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sinh[b s]) g′[t] + f[t]
          ((-b Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] Sinh[b s]) f′[t] + Cos[s] Cosh[b s]^2 g′[t]))
      (-a Cos[s] + b^2 cos[s] g[t] Sinh[b s] + f[t] ((-1 + b^2) Cos[s] Cosh[b s] -
             2 b Sin[s] Sinh[b s]) + 2 b Cosh[b s] g[t] cos′[s] +
         g[t] Sinh[b s] cos″[s])) (g′[t] f″[t] - f′[t] g″[t])) /
 ((-b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s]) (Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] g′[t]) +
        Sin[s] (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
            f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
         (Cosh[b s] f′[t] + Sinh[b s] g′[t]) + (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
            f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos′[s])
         (Cos[s] Cosh[b s] f′[t] + cos[s] Sinh[b s] g′[t]))^2 -
   (-(b Cosh[b s] f[t] + b g[t] Sinh[b s])^2 +
      (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
          f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))^2 +
      (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b
              Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos′[s])^2)
```

```
(-(Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t])^2 + (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] +
      cos[s] Sinh[b s] g'[t])^2 +
    (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t])^2))^2
```

$$H = \frac{L*G+EE*NN-2*F*M}{2\,(EE*G-F*F)}\ //\ \mathbf{Simplify}$$

```
(-2 (-b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s]) (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) +
       Sin[s] (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
           f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
         (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) + (b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
           f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
         (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t]))
    (((-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) f'[t] +
         (b cos[s] Cosh[b s] + Sinh[b s] cos'[s]) g'[t])
       (Cos[s] Sinh[b s] (a + g[t] Sinh[b s]) f'[t] + (a Cos[s] Cosh[b s] +
             b g[t] Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sinh[b s]) g'[t] + f[t]
           ((-b Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] Sinh[b s]) f'[t] + Cos[s] Cosh[b s]^2 g'[t])) -
      ((Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]) f'[t] +
         (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) g'[t])
       ((b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] +
             f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
           (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) - b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s])
           (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
      b (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) (Sin[s] (b cos[s] Cosh[b s] g[t] -
             a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
             g[t] Sinh[b s] cos'[s]) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) -
          (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
             f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
           (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t]))) +
   (-(Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t])^2 +
      (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])^2 +
      (Cosh[b s] Sin[s] f'[t] + Sin[s] Sinh[b s] g'[t])^2)
    (-(-a Sin[s] + f[t] ((-1 + b^2) Cosh[b s] Sin[s] + 2 b Cos[s] Sinh[b s]) +
           g[t] (2 b Cos[s] Cosh[b s] + (-1 + b^2) Sin[s] Sinh[b s]))
       ((b cos[s] Cosh[b s] g[t] - a Sin[s] + f[t]
               (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) + g[t] Sinh[b s] cos'[s])
           (Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] g'[t]) - b (Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s])
           (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
      b^2 (Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s]) (Sin[s] (b cos[s] Cosh[b s] g[t] -
             a Sin[s] + f[t] (-Cosh[b s] Sin[s] + b Cos[s] Sinh[b s]) +
             g[t] Sinh[b s] cos'[s]) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]) -
          (a Cos[s] + g[t] (b Cosh[b s] Sin[s] + Cos[s] Sinh[b s]) +
             f[t] (Cos[s] Cosh[b s] + b Sin[s] Sinh[b s]))
           (Cos[s] Cosh[b s] f'[t] + cos[s] Sinh[b s] g'[t])) +
      (Cos[s] Sinh[b s] (a + g[t] Sinh[b s]) f'[t] + (a Cos[s] Cosh[b s] +
             b g[t] Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] g[t] Sinh[b s]) g'[t] + f[t]
           ((-b Sin[s] + Cos[s] Cosh[b s] Sinh[b s]) f'[t] + Cos[s] Cosh[b s]^2 g'[t]))
       (-a Cos[s] + b^2 cos[s] g[t] Sinh[b s] +
         f[t] ((-1 + b^2) Cos[s] Cosh[b s] - 2 b Sin[s] Sinh[b s]) +
         2 b Cosh[b s] g[t] cos'[s] + g[t] Sinh[b s] cos''[s])) +
```

$$
\begin{aligned}
&\Big(a\,\mathrm{Cos}[s]^2\,\mathrm{Cosh}[b\,s]^2 + b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]^3\,g[t]\,\mathrm{Sin}[s] + \\
&\quad a\,\mathrm{Cosh}[b\,s]^2\,\mathrm{Sin}[s]^2 + \\
&\quad \mathrm{Cos}[s]^2\,\mathrm{Cosh}[b\,s]^2\,g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s] - \\
&\quad b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,g[t]\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^2 - \\
&\quad a\,\mathrm{Sin}[s]^2\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^2 - \\
&\quad \mathrm{cos}[s]\,\big(a\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^2 + g[t] \\
&\qquad \big(b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]^3\,\mathrm{Sin}[s] - b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^2 + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^3\big)\big) + \\
&\quad f[t]\,\Big(\mathrm{Cosh}[b\,s]^3 - b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]^2\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s] - \\
&\qquad \mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s]^2\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^2 + b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^3 + \\
&\qquad \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,\Big(b\,\mathrm{Sin}[s] - \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[2\,b\,s]\Big)\Big) - \\
&\quad \mathrm{Cosh}[b\,s]^2\,g[t]\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s] + g[t]\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]^3\,\mathrm{cos}'[s]\Big) \\
&\;\big(-(b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,f[t] + b\,g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s])^2 + \\
&\quad (a\,\mathrm{Cos}[s] + g[t]\,(b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]) + \\
&\qquad f[t]\,(\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s] + b\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]))^2 + \\
&\quad (b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,g[t] - a\,\mathrm{Sin}[s] + f[t]\,(-\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + b\,\mathrm{Cos}[s] \\
&\qquad\qquad \mathrm{Sinh}[b\,s]) + g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])^2\big)\;(g'[t]\,f''[t] - f'[t]\,g''[t])\Big) \Big/ \\
&\Big(2\,\Big(-(-b\,(\mathrm{Cosh}[b\,s]\,f[t] + g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s])\,(\mathrm{Sinh}[b\,s]\,f'[t] + \mathrm{Cosh}[b\,s]\,g'[t]) + \\
&\qquad \mathrm{Sin}[s]\,(a\,\mathrm{Cos}[s] + g[t]\,(b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]) + f[t] \\
&\qquad\quad (\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s] + b\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]))\,(\mathrm{Cosh}[b\,s]\,f'[t] + \\
&\qquad \mathrm{Sinh}[b\,s]\,g'[t]) + (b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,g[t] - a\,\mathrm{Sin}[s] + f[t] \\
&\qquad\quad (-\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]) + g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s]) \\
&\qquad (\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,f'[t] + \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,g'[t]))^2 + \\
&\quad \big(-(b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,f[t] + b\,g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s])^2 + (a\,\mathrm{Cos}[s] + g[t]\,(b\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \\
&\qquad \mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]) + f[t]\,(\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s] + b\,\mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]))^2 + \\
&\quad (b\,\mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,g[t] - a\,\mathrm{Sin}[s] + f[t]\,(-\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s] + \\
&\qquad b\,\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]) + g[t]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,\mathrm{cos}'[s])^2\big) \\
&\quad \big(-(\mathrm{Sinh}[b\,s]\,f'[t] + \mathrm{Cosh}[b\,s]\,g'[t])^2 + (\mathrm{Cos}[s]\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,f'[t] + \mathrm{cos}[s]\,\mathrm{Sinh}[\\
&\qquad b\,s]\,g'[t])^2 + (\mathrm{Cosh}[b\,s]\,\mathrm{Sin}[s]\,f'[t] + \mathrm{Sin}[s]\,\mathrm{Sinh}[b\,s]\,g'[t])^2\big)\Big)^{3/2}\Big)
\end{aligned}
$$

```
r = {f[t] * Cosh[b * s] + g[t] * Sinh[b * s] ,
  a * Sinh[s] + f[t] * Sinh[s] * Sinh[b * s] + g[t] * Cosh[b * s]  * Sinh[s], a * Cosh[ s] +
   f[t] * Cosh[s] * Sinh[b * s] + g[t] * Cosh[b * s]  * Cosh[ s]}
```

```
{Cosh[b s] f[t] + g[t] Sinh[b s],
 a Sinh[s] + Cosh[b s] g[t] Sinh[s] + f[t] Sinh[s] Sinh[b s],
 a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] + Cosh[s] f[t] Sinh[b s]}
```

```
rt = D[r, t]
```

```
{Cosh[b s] f′[t] + Sinh[b s] g′[t], Sinh[s] Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g′[t],
 Cosh[s] Sinh[b s] f′[t] + Cosh[s] Cosh[b s] g′[t]}
```

```
rs = D[r, s]
```

```
{b Cosh[b s] g[t] + b f[t] Sinh[b s], a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] +
  b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] + Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + b g[t] Sinh[s] Sinh[b s],
 b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] + a Sinh[s] + Cosh[b s] g[t] Sinh[s] +
  b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] + f[t] Sinh[s] Sinh[b s]}
```

```
AS = rs
```

```
{b Cosh[b s] g[t] + b f[t] Sinh[b s], a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] +
  b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] + Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + b g[t] Sinh[s] Sinh[b s],
 b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] + a Sinh[s] + Cosh[b s] g[t] Sinh[s] +
  b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] + f[t] Sinh[s] Sinh[b s]}
```

```
BS = {b Cosh[b s] g[t] + b f[t] Sinh[b s], a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] +
   b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] + Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + b g[t] Sinh[s] Sinh[b s],
  -b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] - a Sinh[s] - Cosh[b s] g[t] Sinh[s] -
   b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] - f[t] Sinh[s] Sinh[b s]}
```

```
{b Cosh[b s] g[t] + b f[t] Sinh[b s], a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] +
  b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] + Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + b g[t] Sinh[s] Sinh[b s],
 -b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] - a Sinh[s] - Cosh[b s] g[t] Sinh[s] -
  b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] - f[t] Sinh[s] Sinh[b s]}
```

```
Simplify[EE = AS.BS]
```

$$\frac{1}{2}\left(2\,a^{2}+\left(-1-2\,b^{2}+\mathrm{Cosh}[2\,b\,s]\right)f[t]^{2}+4\,a\,\mathrm{Cosh}[b\,s]\,g[t]+\left(1+2\,b^{2}+\mathrm{Cosh}[2\,b\,s]\right)g[t]^{2}+4\,f[t]\,\left(a+\mathrm{Cosh}[b\,s]\,g[t]\right)\mathrm{Sinh}[b\,s]\right)$$

```
AT = rt
```

```
{Cosh[b s] f′[t] + Sinh[b s] g′[t], Sinh[s] Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g′[t],
 Cosh[s] Sinh[b s] f′[t] + Cosh[s] Cosh[b s] g′[t]}
```

```
BT = {Cosh[b s] f′[t] + Sinh[b s] g′[t],
  Sinh[s] Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g′[t],
  - Cosh[s] Sinh[b s] f′[t] - Cosh[s] Cosh[b s] g′[t]}
```

```
{Cosh[b s] f′[t] + Sinh[b s] g′[t], Sinh[s] Sinh[b s] f′[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g′[t],
 -Cosh[s] Sinh[b s] f′[t] - Cosh[s] Cosh[b s] g′[t]}
```

```
Simplify[F = BS.rt]
```

```
b (g[t] f′[t] - f[t] g′[t])
```

```
Simplify[G = AT.BT]
```

```
f'[t]^2 - g'[t]^2
```

```
rss = D[rs, s]
```

```
{b^2 Cosh[b s] f[t] + b^2 g[t] Sinh[b s], 2 b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] +
   a Sinh[s] + Cosh[b s] g[t] Sinh[s] + b^2 Cosh[b s] g[t] Sinh[s] +
   2 b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] + f[t] Sinh[s] Sinh[b s] + b^2 f[t] Sinh[s] Sinh[b s],
  a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] + b^2 Cosh[s] Cosh[b s] g[t] +
   2 b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] + Cosh[s] f[t] Sinh[b s] +
   b^2 Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + 2 b g[t] Sinh[s] Sinh[b s]}
```

```
rst = D[rs, t]
```

```
{b Sinh[b s] f'[t] + b Cosh[b s] g'[t],
 b Cosh[b s] Sinh[s] f'[t] + Cosh[s] Sinh[b s] f'[t] +
   Cosh[s] Cosh[b s] g'[t] + b Sinh[s] Sinh[b s] g'[t], b Cosh[s] Cosh[b s] f'[t] +
   Sinh[s] Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g'[t] + b Cosh[s] Sinh[b s] g'[t]}
```

```
rtt = D[rt, t]
```

```
{Cosh[b s] f''[t] + Sinh[b s] g''[t], Sinh[s] Sinh[b s] f''[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g''[t],
 Cosh[s] Sinh[b s] f''[t] + Cosh[s] Cosh[b s] g''[t]}
```

```
W = √(EE * G - F * F)
```

```
√(- ((-b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] - a Sinh[s] - Cosh[b s] g[t] Sinh[s] -
            b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] - f[t] Sinh[s] Sinh[b s])
          (Cosh[s] Sinh[b s] f'[t] + Cosh[s] Cosh[b s] g'[t]) +
         (a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] + b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] +
            Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + b g[t] Sinh[s] Sinh[b s])
          (Sinh[s] Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g'[t]) +
         (b Cosh[b s] g[t] + b f[t] Sinh[b s]) (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t]))^2 +
    ((b Cosh[b s] g[t] + b f[t] Sinh[b s])^2 + (-b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] - a Sinh[s] -
           Cosh[b s] g[t] Sinh[s] - b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] - f[t] Sinh[s] Sinh[b s])
         (b Cosh[s] Cosh[b s] f[t] + a Sinh[s] + Cosh[b s] g[t] Sinh[s] +
           b Cosh[s] g[t] Sinh[b s] + f[t] Sinh[s] Sinh[b s]) +
        (a Cosh[s] + Cosh[s] Cosh[b s] g[t] + b Cosh[b s] f[t] Sinh[s] +
           Cosh[s] f[t] Sinh[b s] + b g[t] Sinh[s] Sinh[b s])^2)
     ((-Cosh[s] Sinh[b s] f'[t] - Cosh[s] Cosh[b s] g'[t])
         (Cosh[s] Sinh[b s] f'[t] + Cosh[s] Cosh[b s] g'[t]) +
        (Sinh[s] Sinh[b s] f'[t] + Cosh[b s] Sinh[s] g'[t])^2 +
        (Cosh[b s] f'[t] + Sinh[b s] g'[t])^2))
```

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{Det[\{rs,\ rt,\ rss\}]}}{\mathbf{W}} \ \mathbf{//\ Simplify}$$

```
(-(4 a^2 Cosh[b s] + 2 Cosh[b s] (-1 - 4 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 +
      4 a (1 + b^2 + Cosh[2 b s]) g[t] + 2 Cosh[b s] (1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
      4 f[t] (2 a Cosh[b s] + (1 - b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]) Sinh[b s]) f'[t] -
   2 (f[t] (2 a (-1 - b^2 + Cosh[2 b s]) + 2 Cosh[b s] (-1 + b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]) +
      (-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 Sinh[b s] +
      (2 a^2 + 4 a Cosh[b s] g[t] + (1 + 4 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2) Sinh[b s]) g'[t]) /
 (2 Sqrt[2] Sqrt[(((-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 + 2 (a + Cosh[b s] g[t])^2 +
        4 f[t] (a + Cosh[b s] g[t]) Sinh[b s]) f'[t]^2 +
      4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] - ((1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
        4 Cosh[b s] g[t] (a + f[t] Sinh[b s]) + 2 (a + f[t] Sinh[b s])^2) g'[t]^2)])
```

$$\mathbf{NN} = \frac{\mathbf{Det[\{rs,\ rt,\ rtt\}]}}{\mathbf{W}} \ \mathbf{//\ Simplify}$$

```
(Sqrt[2] (a + Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s]) (g'[t] f''[t] - f'[t] g''[t])) /
 (Sqrt[(((-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 + 2 (a + Cosh[b s] g[t])^2 +
        4 f[t] (a + Cosh[b s] g[t]) Sinh[b s]) f'[t]^2 + 4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] -
     ((1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 + 4 Cosh[b s] g[t] (a + f[t] Sinh[b s]) +
        2 (a + f[t] Sinh[b s])^2) g'[t]^2)])
```

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{Det[\{rs,\ rt,\ rst\}]}}{\mathbf{W}} \ \mathbf{//\ Simplify}$$

```
-(Sqrt[2] b ((a + Cosh[b s] g[t]) f'[t]^2 -
      (Cosh[b s] f[t] - g[t] Sinh[b s]) f'[t] g'[t] - (a + f[t] Sinh[b s]) g'[t]^2)) /
  (Sqrt[(((-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 + 2 (a + Cosh[b s] g[t])^2 +
        4 f[t] (a + Cosh[b s] g[t]) Sinh[b s]) f'[t]^2 +
      4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] - ((1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
        4 Cosh[b s] g[t] (a + f[t] Sinh[b s]) + 2 (a + f[t] Sinh[b s])^2) g'[t]^2)])
```

```
K = (L * NN - M^2) / (EE * G - F * F) // Simplify
```

```
(-4 b^2 (-(a + Cosh[b s] g[t]) f'[t]^2 + (Cosh[b s] f[t] - g[t] Sinh[b s]) f'[t] g'[t] +
        (a + f[t] Sinh[b s]) g'[t]^2)^2 + (a + Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s])
    (-(4 a^2 Cosh[b s] + 2 Cosh[b s] (-1 - 4 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 +
          4 a (1 + b^2 + Cosh[2 b s]) g[t] + 2 Cosh[b s] (1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
          4 f[t] (2 a Cosh[b s] + (1 - b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]) Sinh[b s]) f'[t] -
      2 (f[t] (2 a (-1 - b^2 + Cosh[2 b s]) + 2 Cosh[b s] (-1 + b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]) +
          (-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 Sinh[b s] +
          (2 a^2 + 4 a Cosh[b s] g[t] + (1 + 4 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2) Sinh[b s]) g'[t])
    (g'[t] f''[t] - f'[t] g''[t])) / (((-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 +
       2 (a + Cosh[b s] g[t])^2 + 4 f[t] (a + Cosh[b s] g[t]) Sinh[b s]) f'[t]^2 +
    4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] - ((1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
       4 Cosh[b s] g[t] (a + f[t] Sinh[b s]) + 2 (a + f[t] Sinh[b s])^2) g'[t]^2)^2
```

```
H = (L * G + EE * NN - 2 * F * M) / (2 (EE * G - F * F)) // Simplify
```

```
((-(4 a^2 Cosh[b s] + 2 Cosh[b s] (-1 - 4 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 +
          4 a (1 + b^2 + Cosh[2 b s]) g[t] + 2 Cosh[b s] (1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
          4 f[t] (2 a Cosh[b s] + (1 - b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]) Sinh[b s]) f'[t] -
      2 (f[t] (2 a (-1 - b^2 + Cosh[2 b s]) + 2 Cosh[b s] (-1 + b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]) +
          (-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 Sinh[b s] +
          (2 a^2 + 4 a Cosh[b s] g[t] + (1 + 4 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2) Sinh[b s]) g'[t])
    (f'[t]^2 - g'[t]^2) + 8 b^2 (g[t] f'[t] - f[t] g'[t])
    ((a + Cosh[b s] g[t]) f'[t]^2 -
      (Cosh[b s] f[t] - g[t] Sinh[b s]) f'[t] g'[t] - (a + f[t] Sinh[b s]) g'[t]^2) +
   2 (a + Cosh[b s] g[t] + f[t] Sinh[b s]) (2 a^2 + (-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 +
      4 a Cosh[b s] g[t] + (1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
      4 f[t] (a + Cosh[b s] g[t]) Sinh[b s]) (g'[t] f''[t] - f'[t] g''[t])) /
 (2 Sqrt[2] (((-1 - 2 b^2 + Cosh[2 b s]) f[t]^2 + 2 (a + Cosh[b s] g[t])^2 +
         4 f[t] (a + Cosh[b s] g[t]) Sinh[b s]) f'[t]^2 +
      4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] - ((1 + 2 b^2 + Cosh[2 b s]) g[t]^2 +
         4 Cosh[b s] g[t] (a + f[t] Sinh[b s]) + 2 (a + f[t] Sinh[b s])^2) g'[t]^2)^(3/2))
```

```
r = {a * Cosh[ s] + f[t] * Cos[b * s] * Cosh[ s] - g[t] * Sin[b * s] * Cosh[ s] ,
  f[t] * Sin[b * s] + g[t] * Cos[b * s] , a * Sinh[s] + f[t] * Cos[b * s] * Sinh[s] -
   g[t] * Sin[b * s] * Sinh[s]}
```

```
{a Cosh[s] + Cos[b s] Cosh[s] f[t] - Cosh[s] g[t] Sin[b s],
 Cos[b s] g[t] + f[t] Sin[b s],
 a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s]}
```

```
rt = D[r, t]
```

```
{Cos[b s] Cosh[s] f′[t] - Cosh[s] Sin[b s] g′[t],
 Sin[b s] f′[t] + Cos[b s] g′[t], Cos[b s] Sinh[s] f′[t] - Sin[b s] Sinh[s] g′[t]}
```

```
rs = D[r, s]
```

```
{-b Cos[b s] Cosh[s] g[t] - b Cosh[s] f[t] Sin[b s] +
  a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s],
 b Cos[b s] f[t] - b g[t] Sin[b s], a Cosh[s] + Cos[b s] Cosh[s] f[t] -
  Cosh[s] g[t] Sin[b s] - b Cos[b s] g[t] Sinh[s] - b f[t] Sin[b s] Sinh[s]}
```

```
AS = rs
```

```
{-b Cos[b s] Cosh[s] g[t] - b Cosh[s] f[t] Sin[b s] +
  a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s],
 b Cos[b s] f[t] - b g[t] Sin[b s], a Cosh[s] + Cos[b s] Cosh[s] f[t] -
  Cosh[s] g[t] Sin[b s] - b Cos[b s] g[t] Sinh[s] - b f[t] Sin[b s] Sinh[s]}
```

```
BS = {-b Cos[b s] Cosh[s] g[t] - b Cosh[s] f[t] Sin[b s] +
   a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s],
  b Cos[b s] f[t] - b g[t] Sin[b s], - a Cosh[s] - Cos[b s] Cosh[s] f[t] +
   Cosh[s] g[t] Sin[b s] + b Cos[b s] g[t] Sinh[s] + b f[t] Sin[b s] Sinh[s]}
```

```
{-b Cos[b s] Cosh[s] g[t] - b Cosh[s] f[t] Sin[b s] +
  a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s],
 b Cos[b s] f[t] - b g[t] Sin[b s], -a Cosh[s] - Cos[b s] Cosh[s] f[t] +
  Cosh[s] g[t] Sin[b s] + b Cos[b s] g[t] Sinh[s] + b f[t] Sin[b s] Sinh[s]}
```

```
Simplify[EE = AS.BS]
```

$$\frac{1}{2}\Big(-2\,a^2-\big(1-2\,b^2+\mathrm{Cos}[2\,b\,s]\big)\,f[t]^2+\big(-1+2\,b^2+\mathrm{Cos}[2\,b\,s]\big)\,g[t]^2+4\,a\,g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s]+4\,\mathrm{Cos}[b\,s]\,f[t]\,(-a+g[t]\,\mathrm{Sin}[b\,s])\Big)$$

```
AT = rt
```

```
{Cos[b s] Cosh[s] f′[t] - Cosh[s] Sin[b s] g′[t],
 Sin[b s] f′[t] + Cos[b s] g′[t], Cos[b s] Sinh[s] f′[t] - Sin[b s] Sinh[s] g′[t]}
```

```
BT = {Cos[b s] Cosh[s] f′[t] - Cosh[s] Sin[b s] g′[t],
  Sin[b s] f′[t] + Cos[b s] g′[t], -Cos[b s] Sinh[s] f′[t] + Sin[b s] Sinh[s] g′[t]}
```

```
{Cos[b s] Cosh[s] f′[t] - Cosh[s] Sin[b s] g′[t],
 Sin[b s] f′[t] + Cos[b s] g′[t], -Cos[b s] Sinh[s] f′[t] + Sin[b s] Sinh[s] g′[t]}
```

```
Simplify[F = BS.rt]
```

```
-b g[t] f′[t] + b f[t] g′[t]
```

```
Simplify[G = AT.BT]
```

$$f'[t]^2 + g'[t]^2$$

```
rss = D[rs, s]
```

```
{a Cosh[s] + Cos[b s] Cosh[s] f[t] - b^2 Cos[b s] Cosh[s] f[t] - Cosh[s] g[t] Sin[b s] +
   b^2 Cosh[s] g[t] Sin[b s] - 2 b Cos[b s] g[t] Sinh[s] - 2 b f[t] Sin[b s] Sinh[s],
  -b^2 Cos[b s] g[t] - b^2 f[t] Sin[b s], -2 b Cos[b s] Cosh[s] g[t] -
   2 b Cosh[s] f[t] Sin[b s] + a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] -
   b^2 Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s] + b^2 g[t] Sin[b s] Sinh[s]}
```

```
rst = D[rs, t]
```

```
{-b Cosh[s] Sin[b s] f'[t] + Cos[b s] Sinh[s] f'[t] - b Cos[b s] Cosh[s] g'[t] -
   Sin[b s] Sinh[s] g'[t], b Cos[b s] f'[t] - b Sin[b s] g'[t], Cos[b s] Cosh[s] f'[t] -
   b Sin[b s] Sinh[s] f'[t] - Cosh[s] Sin[b s] g'[t] - b Cos[b s] Sinh[s] g'[t]}
```

```
rtt = D[rt, t]
```

```
{Cos[b s] Cosh[s] f''[t] - Cosh[s] Sin[b s] g''[t],
 Sin[b s] f''[t] + Cos[b s] g''[t], Cos[b s] Sinh[s] f''[t] - Sin[b s] Sinh[s] g''[t]}
```

```
W = √(EE * G - F * F)
```

```
√(-((b Cos[b s] f[t] - b g[t] Sin[b s]) (Sin[b s] f'[t] + Cos[b s] g'[t]) +
          (-b Cos[b s] Cosh[s] g[t] - b Cosh[s] f[t] Sin[b s] +
             a Sinh[s] + Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s])
           (Cos[b s] Cosh[s] f'[t] - Cosh[s] Sin[b s] g'[t]) +
          (-a Cosh[s] - Cos[b s] Cosh[s] f[t] + Cosh[s] g[t] Sin[b s] +
             b Cos[b s] g[t] Sinh[s] + b f[t] Sin[b s] Sinh[s])
           (Cos[b s] Sinh[s] f'[t] - Sin[b s] Sinh[s] g'[t]))^2 +
     ((b Cos[b s] f[t] - b g[t] Sin[b s])^2 + (a Cosh[s] + Cos[b s] Cosh[s] f[t] -
            Cosh[s] g[t] Sin[b s] - b Cos[b s] g[t] Sinh[s] - b f[t] Sin[b s] Sinh[s])
          (-a Cosh[s] - Cos[b s] Cosh[s] f[t] + Cosh[s] g[t] Sin[b s] +
            b Cos[b s] g[t] Sinh[s] + b f[t] Sin[b s] Sinh[s]) +
         (-b Cos[b s] Cosh[s] g[t] - b Cosh[s] f[t] Sin[b s] + a Sinh[s] +
            Cos[b s] f[t] Sinh[s] - g[t] Sin[b s] Sinh[s])^2)
      ((Sin[b s] f'[t] + Cos[b s] g'[t])^2 + (Cos[b s] Cosh[s] f'[t] -
            Cosh[s] Sin[b s] g'[t])^2 + (Cos[b s] Sinh[s] f'[t] - Sin[b s] Sinh[s] g'[t])
         (-Cos[b s] Sinh[s] f'[t] + Sin[b s] Sinh[s] g'[t])))
```

```
L = Det[{rs, rt, rss}] / W // Simplify
```

```
(-2 (2 a^2 + 4 a Cos[b s] f[t] + (1 - 4 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2) Sin[b s] f'[t] -
    (4 a^2 Cos[b s] + 4 a (1 - b^2 + Cos[2 b s]) f[t] + 2 Cos[b s] (1 - 2 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2)
     g'[t] + g[t]^2
      (2 (-1 + 2 b^2 + Cos[2 b s]) Sin[b s] f'[t] + 2 Cos[b s] (-1 + 4 b^2 + Cos[2 b s]) g'[t]) +
    2 g[t] ((-2 a (-1 + b^2 + Cos[2 b s]) + 2 Cos[b s] (1 + b^2 - Cos[2 b s]) f[t]) f'[t] +
        2 (2 a Cos[b s] + (1 + b^2 + Cos[2 b s]) f[t]) Sin[b s] g'[t])) /
 (2 √2 √(-((1 - 2 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2 + 4 Cos[b s] f[t] (a - g[t] Sin[b s]) +
            2 (a - g[t] Sin[b s])^2) f'[t]^2 + 4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] +
        (-2 a^2 - 2 Cos[b s]^2 f[t]^2 + (-1 + 2 b^2 + Cos[2 b s]) g[t]^2 + 4 a g[t] Sin[b s] +
            4 Cos[b s] f[t] (-a + g[t] Sin[b s])) g'[t]^2))
```

```
NN = Det[{rs, rt, rtt}] / W // Simplify
```

```
(Sqrt[2] (a + Cos[b s] f[t] - g[t] Sin[b s]) (-g'[t] f''[t] + f'[t] g''[t])) /
 (Sqrt[(-((1 - 2 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2 + 4 Cos[b s] f[t] (a - g[t] Sin[b s]) +
        2 (a - g[t] Sin[b s])^2) f'[t]^2 + 4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] +
     (-2 a^2 - 2 Cos[b s]^2 f[t]^2 + (-1 + 2 b^2 + Cos[2 b s]) g[t]^2 + 4 a g[t] Sin[b s] +
        4 Cos[b s] f[t] (-a + g[t] Sin[b s])) g'[t]^2)])
```

```
M = Det[{rs, rt, rst}] / W // Simplify
```

```
(Sqrt[2] b ((a - g[t] Sin[b s]) f'[t]^2 -
      (Cos[b s] g[t] - f[t] Sin[b s]) f'[t] g'[t] + (a + Cos[b s] f[t]) g'[t]^2)) /
 (Sqrt[(-((1 - 2 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2 + 4 Cos[b s] f[t] (a - g[t] Sin[b s]) +
        2 (a - g[t] Sin[b s])^2) f'[t]^2 + 4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] +
     (-2 a^2 - 2 Cos[b s]^2 f[t]^2 + (-1 + 2 b^2 + Cos[2 b s]) g[t]^2 + 4 a g[t] Sin[b s] +
        4 Cos[b s] f[t] (-a + g[t] Sin[b s])) g'[t]^2)])
```

```
K = (L * NN - M^2) / (EE * G - F * F) // Simplify
```

```
(-4 b^2 ((a - g[t] Sin[b s]) f'[t]^2 - (Cos[b s] g[t] - f[t] Sin[b s]) f'[t] g'[t] +
        (a + Cos[b s] f[t]) g'[t]^2)^2 + (a + Cos[b s] f[t] - g[t] Sin[b s])
     (-2 (2 a^2 + 4 a Cos[b s] f[t] + (1 - 4 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2) Sin[b s] f'[t] -
       (4 a^2 Cos[b s] + 4 a (1 - b^2 + Cos[2 b s]) f[t] +
          2 Cos[b s] (1 - 2 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2) g'[t] + g[t]^2 (2 (-1 + 2 b^2 + Cos[2 b s])
           Sin[b s] f'[t] + 2 Cos[b s] (-1 + 4 b^2 + Cos[2 b s]) g'[t]) +
       2 g[t] ((-2 a (-1 + b^2 + Cos[2 b s]) + 2 Cos[b s] (1 + b^2 - Cos[2 b s]) f[t]) f'[t] +
          2 (2 a Cos[b s] + (1 + b^2 + Cos[2 b s]) f[t]) Sin[b s] g'[t]))
     (-g'[t] f''[t] + f'[t] g''[t])) / ((((1 - 2 b^2 + Cos[2 b s]) f[t]^2 +
         4 Cos[b s] f[t] (a - g[t] Sin[b s]) + 2 (a - g[t] Sin[b s])^2) f'[t]^2 -
     4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] + (2 a^2 + 2 Cos[b s]^2 f[t]^2 - (-1 + 2 b^2 + Cos[2 b s]) g[t]^2 -
         4 a g[t] Sin[b s] + 4 Cos[b s] f[t] (a - g[t] Sin[b s])) g'[t]^2)^2
```

```
H = (L * G + EE * NN - 2 * F * M) / (2 (EE * G - F * F)) // Simplify
```

$$
\begin{aligned}
&\Big(8 b^2 (g[t] f'[t] - f[t] g'[t]) \\
&\quad \big((a - g[t] \operatorname{Sin}[b s]) f'[t]^2 - (\operatorname{Cos}[b s] g[t] - f[t] \operatorname{Sin}[b s]) f'[t] g'[t] + \\
&\qquad (a + \operatorname{Cos}[b s] f[t]) g'[t]^2\big) + \big(f'[t]^2 + g'[t]^2\big) \\
&\quad \big(-2 \big(2 a^2 + 4 a \operatorname{Cos}[b s] f[t] + \big(1 - 4 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) f[t]^2\big) \operatorname{Sin}[b s] f'[t] - \\
&\qquad \big(4 a^2 \operatorname{Cos}[b s] + 4 a \big(1 - b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) f[t] + 2 \operatorname{Cos}[b s] \big(1 - 2 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) \\
&\qquad\quad f[t]^2\big) g'[t] + g[t]^2 \big(2 \big(-1 + 2 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) \operatorname{Sin}[b s] f'[t] + \\
&\qquad\quad 2 \operatorname{Cos}[b s] \big(-1 + 4 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) g'[t]\big) + \\
&\qquad 2 g[t] \big(\big(-2 a \big(-1 + b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) + 2 \operatorname{Cos}[b s] \big(1 + b^2 - \operatorname{Cos}[2 b s]\big) f[t]\big) f'[t] + \\
&\qquad\quad 2 \big(2 a \operatorname{Cos}[b s] + \big(1 + b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) f[t]\big) \operatorname{Sin}[b s] g'[t]\big)\big) + \\
&\quad 2 (a + \operatorname{Cos}[b s] f[t] - g[t] \operatorname{Sin}[b s]) \big(2 a^2 + \big(1 - 2 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) f[t]^2 - \\
&\qquad \big(-1 + 2 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) g[t]^2 - 4 a g[t] \operatorname{Sin}[b s] + \\
&\qquad 4 \operatorname{Cos}[b s] f[t] (a - g[t] \operatorname{Sin}[b s])\big) (g'[t] f''[t] - f'[t] g''[t])\Big) \Big/ \\
&\Big(2 \sqrt{2} \Big(-\big(\big(1 - 2 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) f[t]^2 + 4 \operatorname{Cos}[b s] f[t] (a - g[t] \operatorname{Sin}[b s]) + \\
&\qquad\quad 2 (a - g[t] \operatorname{Sin}[b s])^2\big) f'[t]^2 + 4 b^2 f[t] g[t] f'[t] g'[t] + \\
&\qquad \big(-2 a^2 - 2 \operatorname{Cos}[b s]^2 f[t]^2 + \big(-1 + 2 b^2 + \operatorname{Cos}[2 b s]\big) g[t]^2 + 4 a g[t] \operatorname{Sin}[b s] + \\
&\qquad\quad 4 \operatorname{Cos}[b s] f[t] (-a + g[t] \operatorname{Sin}[b s])\big) g'[t]^2\Big)^{3/2}\Big)
\end{aligned}
$$

```
r = {f[t] Cos[s] Cos[b s] - f[t] Sin[b s] Sin[s],
  f[t] Cos[b s] Sin[s] + f[t] Sin[b s] Cos[s], a + g[t] }

{Cos[s] Cos[b s] f[t] - f[t] Sin[s] Sin[b s],
 Cos[b s] f[t] Sin[s] + Cos[s] f[t] Sin[b s], a + g[t]}

rs = D[r, s]

{-Cos[b s] f[t] Sin[s] - b Cos[b s] f[t] Sin[s] -
  Cos[s] f[t] Sin[b s] - b Cos[s] f[t] Sin[b s], Cos[s] Cos[b s] f[t] +
  b Cos[s] Cos[b s] f[t] - f[t] Sin[s] Sin[b s] - b f[t] Sin[s] Sin[b s], 0}

rt = D[r, t]

{Cos[s] Cos[b s] f'[t] - Sin[s] Sin[b s] f'[t],
 Cos[b s] Sin[s] f'[t] + Cos[s] Sin[b s] f'[t], g'[t]}

Simplify[EE = rs.rs]

(1 + b)^2 f[t]^2

Simplify[F = rs.rt]

0

Simplify[G = rt.rt]

f'[t]^2 + g'[t]^2

rss = D[rs, s]

{-Cos[s] Cos[b s] f[t] - 2 b Cos[s] Cos[b s] f[t] - b^2 Cos[s] Cos[b s] f[t] +
  f[t] Sin[s] Sin[b s] + 2 b f[t] Sin[s] Sin[b s] + b^2 f[t] Sin[s] Sin[b s],
 -Cos[b s] f[t] Sin[s] - 2 b Cos[b s] f[t] Sin[s] - b^2 Cos[b s] f[t] Sin[s] -
  Cos[s] f[t] Sin[b s] - 2 b Cos[s] f[t] Sin[b s] - b^2 Cos[s] f[t] Sin[b s], 0}

rst = D[rs, t]

{-Cos[b s] Sin[s] f'[t] - b Cos[b s] Sin[s] f'[t] -
  Cos[s] Sin[b s] f'[t] - b Cos[s] Sin[b s] f'[t], Cos[s] Cos[b s] f'[t] +
  b Cos[s] Cos[b s] f'[t] - Sin[s] Sin[b s] f'[t] - b Sin[s] Sin[b s] f'[t], 0}

rtt = D[rt, t]

{Cos[s] Cos[b s] f''[t] - Sin[s] Sin[b s] f''[t],
 Cos[b s] Sin[s] f''[t] + Cos[s] Sin[b s] f''[t], g''[t]}

W = √(EE * f'[t]^2 - F * F)

√(((-Cos[b s] f[t] Sin[s] - b Cos[b s] f[t] Sin[s] -
        Cos[s] f[t] Sin[b s] - b Cos[s] f[t] Sin[b s])^2 +
      (Cos[s] Cos[b s] f[t] + b Cos[s] Cos[b s] f[t] - f[t] Sin[s] Sin[b s] -
        b f[t] Sin[s] Sin[b s])^2) f'[t]^2 -
   ((Cos[s] Cos[b s] f[t] + b Cos[s] Cos[b s] f[t] - f[t] Sin[s] Sin[b s] -
        b f[t] Sin[s] Sin[b s]) (Cos[b s] Sin[s] f'[t] + Cos[s] Sin[b s] f'[t]) +
      (-Cos[b s] f[t] Sin[s] - b Cos[b s] f[t] Sin[s] - Cos[s] f[t] Sin[b s] -
        b Cos[s] f[t] Sin[b s]) (Cos[s] Cos[b s] f'[t] - Sin[s] Sin[b s] f'[t]))^2)
```

$$\mathbf{L} = \frac{\mathbf{Det[\{rs, rt, rss\}]}}{\mathbf{W}} \mathbf{//\ Simplify}$$

$$-\frac{(1+b)^3 f[t]^2 g'[t]}{\sqrt{(1+b)^2 f[t]^2 f'[t]^2}}$$

$$\mathbf{NN} = \frac{\mathbf{Det[\{rs, rt, rtt\}]}}{\mathbf{W}} \mathbf{//\ Simplify}$$

$$\frac{(1+b) f[t] (g'[t] f''[t] - f'[t] g''[t])}{\sqrt{(1+b)^2 f[t]^2 f'[t]^2}}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{Det[\{rs, rt, rst\}]}}{\mathbf{W}} \mathbf{//\ Simplify}$$

$$0$$

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{L * NN - M\verb|^|2}}{\mathbf{EE * f'[t]^2 - F * F}} \mathbf{//\ Simplify}$$

$$\frac{g'[t] (-g'[t] f''[t] + f'[t] g''[t])}{f[t] f'[t]^4}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{L * f'[t]^2 + EE * NN - 2 * F * M}}{\mathbf{2 \left(EE * f'[t]^2 - F * F\right)}} \mathbf{//\ Simplify}$$

$$-\left((1+b)^3 f[t]^2 \left(f'[t]^2 g'[t] - f[t] g'[t] f''[t] + f[t] f'[t] g''[t]\right)\right) \Big/ \left(2 \left((1+b)^2 f[t]^2 f'[t]^2\right)^{3/2}\right)$$

$$\mathbf{DSolve}\left[\frac{\mathbf{g'[t] (-g'[t] f''[t] + f'[t] g''[t])}}{\mathbf{f[t] f'[t]^4}} \mathbf{== C, g[t], t}\right]$$

$$\left\{\left\{g[t] \to C[2] - \frac{1}{2} f[t] \sqrt{C[1] + C f[t]^2} - \frac{C[1] \, \mathrm{Log}\left[C f[t] + \sqrt{C} \sqrt{C[1] + C f[t]^2}\right]}{2\sqrt{C}}\right\}, \left\{g[t] \to C[2] + \frac{1}{2} f[t] \sqrt{C[1] + C f[t]^2} + \frac{C[1] \, \mathrm{Log}\left[C f[t] + \sqrt{C} \sqrt{C[1] + C f[t]^2}\right]}{2\sqrt{C}}\right\}\right\}$$

$$\mathbf{DSolve}\left[\frac{\mathbf{g'[t] (-g'[t] f''[t] + f'[t] g''[t])}}{\mathbf{f[t] f'[t]^4}} \mathbf{== 0, g[t], t}\right]$$

$$\{\{g[t] \to C[1]\}, \{g[t] \to C[2] + C[1] f[t]\}\}$$

$$\mathbf{DSolve}\left[-\left((1+b)^3 f[t]^2 \left(f'[t]^2 g'[t] - f[t] g'[t] f''[t] + f[t] f'[t] g''[t]\right)\right) \Big/ \left(2 \left((1+b)^2 f[t]^2 f'[t]^2\right)^{3/2}\right) \mathbf{== C, g[t], t}\right]$$

$$\left\{\left\{g[t] \to C[2] + C[1] \, \mathrm{Log}[f[t]] - \frac{C f[t] \sqrt{(1+b)^2 f[t]^2 f'[t]^2}}{2 (1+b) f'[t]}\right\}\right\}$$

```
DSolve[-((1 + b)^3 f[t]^2 (f'[t]^2 g'[t] - f[t] g'[t] f''[t] + f[t] f'[t] g''[t])) /
    (2 ((1 + b)^2 f[t]^2 f'[t]^2)^(3/2)) == 0, g[t], t]
{{g[t] → C[2] + C[1] Log[f[t]]}}
```

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Dolaşır, Sevim

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 15.09.1990 Yatağan

Medeni hali : Bekar

e-mail : sevim.dolasir0948@gmail.com

Eğitim

Lisans : Karabük Üniversitesi Pedagojik Formasyon Eğitimi (13.01.2015)

Lisans : Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü (2009 - 2013)

İş Deneyimi

Muğla Yatağan Anadolu Lisesi (ücretli)	2013-2014 Öğretim Yılı 2. Dönem
Karabük Mehmet Vergili Fen Lisesi (staj)	2014 - 2015 Güz Pedagojik Formasyon Öğretmenlik Uyg., 15.01.2015

Yabancı Dil: İngilizce

Yayınlar

1.Dolaşır, S ., Kaya Nurkan, S., Karacan, M.K., 'Twisted Surfaces in Isotropic 3- space' (Submitted, 15th International Geometry Symposium Amasya University, Amasya, Turkey, 3-6 July 2017)