T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

# ZAMAN SKALASINDA KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AYŞEGÜL AKINCALI

AĞUSTOS 2018
UŞAK

**T.C.**

**UŞAK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ZAMAN SKALASINDA KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**AYŞEGÜL AKINCALI**

**UŞAK 2018**

**TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayşegül AKINCALI

**ZAMAN SKALASINDA KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Ayşegül AKINCALI**

**UŞAK ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ağustos 2018**

## ÖZET

Zaman skalasında bazı önemli kesirli integral eşitsizliklerinin incelendiği bu tez çalışması dokuz bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde kesirli analiz ve zaman skalası kavramları tanıtılmış ve konunun tarihçesiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve örnekler yer almaktadır. Tezin üçüncü bölümünde genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, kesirli integral içeren Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler araştırılmış ve genelleştirilmiştir. Beşinci bölümde, s-konveks fonksiyonlar yardımıyla kesirli integral eşitsizlikleri incelenmiştir. Altıncı bölümde, genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar ve eşitsizliklerle ilgili teorem ve lemmalara yer verilmiştir. Yedinci bölümde, bazı farklı kesirli integral eşitsizlikleri araştırılmıştır.

Son bölümde Delta Riemann-Liouville kesirli integrali kullanılarak zaman skalasında bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiş ve son olarak da sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

**Bilim Kodu :** 403.06.00, 403.06.01

**Anahtar Kelimeler :** Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyon, Riemann-Liouville kesirli integrali, zaman skalası, Delta-Riemann-Liouville kesirli integrali

**Sayfa Adedi :** 144

**Tez Yöneticisi :** Doç. Dr. Deniz UÇAR

# FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES ON TIME SCALES

**(M. Sc. Thesis)**

**Ayşegül AKINCALI**

**UNIVERSITY OF UŞAK**

**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**August 2018**

## ABSTRACT

This thesis study, which examines some important fractional integral inequalities in time scales, consists of nine parts.

In the introductory part of the thesis, the concepts of fractional analysis and time scale are introduced and information about the history of the subject is given. In the second part, basic definitions and examples related to the subject are included. In the third part of the thesis Hermite-Hadamard type inequalities are investigated with generalized fractional integrals. In the fourth chapter, Hermite-Hadamard type inequalities including fractional integrations have been researched and generalized. In the fifth chapter, fractional integral inequalities are investigated by means of s-convex functions. In the sixth chapter, theorems and lemmas of generalized geometric convex functions and inequalities are given. In the seventh chapter, some different fractional integral inequalities are investigated.

In the last part, some new integral inequalities are obtained in the time scale by using the Delta Riemann-Liouville fractional integral, and finally the results and recommendations are given.

**Science Code :** 403.06.00, 403.06.01

**Keywords :** Hermite-Hadamard inequality, convex function, Riemann-Liouville fractional integral, time scales, Delta-Riemann-Liouville fractional integral

**Page Number :** 144

**Adviser :** Doç. Dr. Deniz UÇAR

**TEŞEKKÜR**

Öncelikle, bu tezin hazırlanması esnasında gerek konu seçimi gerekse uzun çalışma sürecinde yardımlarını esirgemeyen ve bilgilerini benimle paylasan büyük yardımlarını gördüğüm ve her an her konuda manevi desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Deniz UÇAR'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren, destek olan, hissettirdikleri sonsuz güven, sabır ve manevi destekten dolayı aileme ve eşime teşekkür ederim.

**Ayşegül AKINCALI**
**Ağustos 2018**

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| SİMGELER | AÇIKLAMA |
|---|---|
| $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})$ | Euler-Gamma fonksiyonu |
| $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ | Euler-Beta fonksiyonu |
| $\boldsymbol{I}$ | $\mathbb{R}$'de bir aralık |
| $\boldsymbol{I}^{\circ}$ | $I$'nın içi |
| $\boldsymbol{K}_{s}^{1}$ | Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $\boldsymbol{K}_{s}^{2}$ | İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar sınıfı |
| $\boldsymbol{L}^{1}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ | $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi |
| $\boldsymbol{J}^{\alpha} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ | $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{J}_{a^{+}}^{\alpha}$ | $\alpha$. mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{J}_{b^{-}}^{\alpha}$ | $\alpha$. mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali |
| $\boldsymbol{J}_{a^{+}}^{\alpha}$ | $\alpha$. mertebeden sağdan Hadamard kesirli integrali |
| $\boldsymbol{J}_{b^{-}}^{\alpha}$ | $\alpha$. mertebeden soldan Hadamard kesirli integrali |
| ${}^{\rho}\boldsymbol{I}_{a^{+}}^{\alpha}$ | $\alpha$. mertebeden sağdan genelleştirilmiş kesirli integral |
| ${}^{\rho}\boldsymbol{I}_{b^{-}}^{\alpha}$ | $\alpha$. mertebeden soldan genelleştirilmiş kesirli integral |
| $\boldsymbol{C}_{rd}$ | Sağ-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi |
| $\boldsymbol{K}_{a}^{\alpha}$ | Delta-Riemann-Liouville kesirli integral operatörü |

# 1. GİRİŞ

“Türev ve integraller sadece tamsayılar için mi vardır?” sorusundan yola çıkılarak kesirli türev ve kesirli integral kavramları ilk olarak Liouville tarafından ortaya atılmıştır. Kesirli türev ve integral kavramları 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer birçok matematikçinin çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır. Keyfi mertebeli diferensiyel ve integrasyon kavramları, tam sayı mertebeli türev ve integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır.

Kesirli diferensiyel teorisi, çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevler nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisi, elektrik devreleri, elektro-analitik kimya gibi diğer birçok alanda kullanılmaktadır.

Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewod ve P$\acute{o}$lya tarafından “Inequalities” [1] adlı kitapta toplanmıştır. Bu kitap yeni eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili konuları geniş çapta ele almaktadır. 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni ilginç eşitsizlikleri içeren “Inequalities” [2] adlı yeni bir kitap 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yeniden yazılmıştır. Daha sonra 1970 yılında Mitrinovi$\acute{c}$ “Analitic Inequalities”[3] adlı kitap ile o güne kadar yapılmış tüm yeni eşitsizlikleri bir başlık altında toplamıştır. 1993 yılında Mitrinovi$\acute{c}$, Pe$\check{c}$ari$\acute{c}$ ve Fink daha genel olan “Classical and New Inequalities in Analysis”[4] adlı kitabı yazmışlardır.

Konveks fonksiyonların ise geçmişi çok eski olmasına rağmen 19. yüzyılın sonlarına doğru varlığını göstermiştir. 1893 yılında Hadamard’ın çalışmalarında açık olarak belirtilmemesine rağmen fonksiyonların bu tipteki temel özellikleri ifade edilmiştir. 1905 ve 1906 yıllarında Jensen’in yaptığı çalışmalar kabul görerek konveks fonksiyonlar sistematik olarak çalışılmaya başlanmış ve hızla konveks fonksiyonlar teorisi bu alandaki çalışmalara önderlik etmiştir. 1934 yılında Hardy, Littlewod ve P$\acute{o}$lya, 1961 yılında Beckenbach ve Bellman ve 1970 yılında da Mitrinovi$\acute{c}$ gibi araştırmacıların kitaplarında konveks fonksiyonlar için temel eşitsizlikler ele alınmıştır. Ayrıca 1987 yılında Pečarić tarafından sadece konveks fonksiyonları içeren genel eşitsizlikler ile ilgili "Convex Functions: Inequalities"[5] adlı ilk temel kitabı yazmıştır. Konveks fonksiyonların Analiz, Uygulamalı Matematik, Olasılık teorisi ve matematiğin diğer birçok alanında uygulamaları vardır. Ayrıca konveks fonksiyonlar, eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucu olan birçok eşitsizlik ile bağlantılıdır.

Doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Dolayısıyla bu tür olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmaktadır. İşte bu teorinin adı zaman skalasıdır. Son yıllarda üzerinde birçok çalışmalar yapılan zaman skalası teorisini Stefan Hilger, 1988 yılındaki doktora tezinde sürekli ve ayrık analizi birleştirmek amacıyla kurmuştur. Zaman skalası teorisi ile birlikte, hem süreklilik hem de süreksizlik içeren olayların matematiksel modellemesi yapılabilmektedir. Zaman skalası üzerinde tanımlanan bu denklemlere dinamik denklemler denir. Dinamik denklemler zaman skalasının özel durumlarında, fark denklemi ya da diferensiyel denklem haline dönüşür. Ayrıca Kuantum fiziğinde ortaya çıkan kuantum fark denklemlerine de dönüşür. Böylece fark denklemi ve diferensiyel denklem için ayrı ayrı sonuçlar bulmak yerine, keyfi zaman skalaları için geçerli birleştirilmiş sonuçlar elde edilir. Yani "birleştirme ve genişletme" zaman skalası analizinin iki ana özelliğidir.

## 2. TEMEL TANIM VE ÖRNEKLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılan temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1 (Konvekslik) :** $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eşitsizlik yön değiştirirse fonksiyon konkavdır denir.

**Tanım 2.2 (Gamma Fonksiyonu) :** Gamma fonksiyonu $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir.

**i.** $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$

**ii.** $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

**Tanım 2.3 (Beta Fonksiyonu) :** $m, n > 0$ için;

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1 - x)^{n-1} dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

**Tanım 2.4 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) :** $\alpha \geq 0$ iken $\alpha$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $f \in C_\mu, (\mu \geq -1)$ olmak üzere, $\alpha > 0$ ve $x > 0$ için,

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu integral operatörü için $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere, yarı-grup özelliği

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(t)=J^{\alpha+\beta}f(t)$$

ve değişme özelliği

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(t)=J^{\beta}J^{\alpha}f(t)$$

sağlanmaktadır. (2.1) eşitliğinde $f(t)=t^{\mu}$ olarak seçilirse $\alpha>0,\mu>-1$ ve $t>0$ için, daha sonra kullanılacak olan aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$J^{\alpha}t^{\mu}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}t^{\alpha+\mu} \tag{2.2}$$

**İspat :** (2.1) eşitliğinde $f(t)=t^{\mu}$ olarak seçilirse $\alpha>0,\mu>-1$ ve $t>0$ için,

$$\begin{aligned}J^{\alpha}t^{\mu}&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\mu}d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left[t\left(1-\frac{\tau}{t}\right)\right]^{\alpha-1}\tau^{\mu}d\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\tau^{\mu}\frac{t^{\mu}}{t^{\mu}}d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha+\mu-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}d\tau\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte $\frac{\tau}{t}=u$ , $d\tau=tdu$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t t^{\alpha+\mu-1}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}d\tau&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha+\mu-1}(1-u)^{\alpha-1}u^{\mu}tdu\\&=\frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{\mu}du=\frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\beta\big((\mu+1),\alpha\big)\end{aligned}$$

elde edilir. $\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ eşitliğinden faydalanarak,

$$\frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\beta\big((\mu+1),\alpha\big)=\frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}=\frac{t^{\alpha+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)}$$

eşitliğine ulaşılabilir.

**Tanım 2.5 :** $\alpha$. mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $x > a$ için, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$J_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

$\alpha$. mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $x < b$ için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\tau-x)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

**Tanım 2.6 (Hadamard Kesirli İntegrali) :** $\boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}$, $\alpha$. mertebeden sağdan Hadamard kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $x > a$ için,

$$\boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

$\boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}$, $\alpha$. mertebeden soldan Hadamard kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $x < b$ için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \left(\ln \frac{\tau}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \tag{2.4}$$

Katugampola Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerini tek bir formda aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir [6].

**Tanım 2.7 (Genelleştirilmiş Kesirli İntegral) :** $\rho > 0$ olsun. ${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f$, $f$'in $\alpha$. mertebeden sağdan genelleştirilmiş kesirli integrali olmak üzere $\alpha > 0$ ve $x > a$ için,

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\tau^{\rho-1}}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{1-\alpha}} f(\tau) d\tau \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f$, $f$'in $\alpha$. mertebeden soldan genelleştirilmiş kesirli integrali olmak üzere $\alpha > 0$ ve $x < b$ için,

$$ {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{b} \frac{\tau^{\rho-1}}{(\tau^{\rho} - x^{\rho})^{1-\alpha}} f(\tau)d\tau \tag{2.6} $$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.8 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) :** $I$, reel sayıların bir alt aralığı $a, b \in I$ ve $a < b$ olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise,

$$ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.7} $$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

**İspat :** $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise,

- $f$, $(a, b)$ aralığında süreklidir.
- $f$, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır.

Bu iki özellik gereği $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir.

$t \in [0,1]$ için $x = a(1-t) + bt$ eşitliğinde konvekslik kullanılırsa,

$$ \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(a(1-t)+bt)(b-a)dt = (b-a)\int_{0}^{1} f(a(1-t)+bt)dt $$

$$ \leq (b-a)\int_{0}^{1} [(1-t)f(a) + tf(b)]dt = (b-a)\left[f(a)\int_{0}^{1}(1-t)dt + f(b)\int_{0}^{1} tdt\right] $$

$$= (b-a)\left[f(a)\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + f(b)\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right] = (b-a)\left(\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}\right)$$

eşitsizliği bulunur. $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$ elde edilir ve (2.7) eşitsizliğinin sağ kısmı ispatlanmış olur.

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{(b-a)}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right]$$

eşitliğinde parçalanmış ilk integralde $x = a + t\left(\frac{b-a}{2}\right)$ dönüşümü , ikinci integralde

$x = b - t\left(\frac{b-a}{2}\right)$ dönüşümü yapılır ve konvekslik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \\
&\quad= \frac{1}{(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)\int_0^1 f\left(a+t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)dt \right.\\
&\quad\left. + \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_0^1 f\left(b-t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)dt\right] \\
&\quad= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(a+t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)dt + \int_0^1 f\left(b-t\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)dt\right] \\
&\quad\ge \int_0^1 f\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

eşitsizliğin sol kısmı da elde edilmiş olur.

**Tanım 2.9 :** $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $(a,b]$ aralığında artan ve pozitif monoton bir fonksiyon olmak üzere, $g'(x)$ türevi $(a,b)$ aralığında süreklidir. $f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında $g$ fonksiyonuna göre sağdan kesirli integrali, $\alpha > 0$ ve $x > a$ olmak üzere,

$$I_{a^+;g}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{g'(\tau)f(\tau)}{[g(x)-g(\tau)]^{1-\alpha}}d\tau \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında $g$ fonksiyonuna göre soldan kesirli integrali, $\alpha > 0$ ve $x < b$ olmak üzere,

$$I_{b^-;g}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{g'(\tau)f(\tau)}{[g(\tau)-g(x)]^{1-\alpha}}d\tau \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (2.8) kesirli integralinde $g(x) = x$ olarak kabul edilirse eşitlik (2.1)'de verilen sağdan Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür. Benzer şekilde (2.9)'da $g(x) = x$ olarak kabul edilirse eşitlik (2.2)'de verilen soldan Riemann-Liouville kesirli integraline dönüşür.

(2.8) kesirli integralinde $g(x) = \ln x$ olarak kabul edilirse eşitlik (2.3)'te verilen sağdan Hadamard kesirli integraline dönüşür. Benzer şekilde (2.9)'da $g(x) = \ln x$ olarak kabul edilirse eşitlik (2.4)'te verilen soldan Hadamard kesirli integraline dönüşür.

(2.8) eşitliğinde $x > a$ olmak üzere $s = \frac{\tau - a}{x - a}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$I_{a^+;g}^{\alpha}f(x) = \frac{(x-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sx+(1-s)a)f(sx+(1-s)a)}{[g(x)-g(sx+(1-s)a)]^{1-\alpha}}ds \tag{2.10}$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.9) eşitliğinde $x < b$ olmak üzere $s = \frac{\tau - x}{b - x}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$I_{b^-;g}^{\alpha}f(x) = \frac{(b-x)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)x)f(sb+(1-s)x)}{[g(sb+(1-s)x)-g(x)]^{1-\alpha}}ds \tag{2.11}$$

eşitliği elde edilir.

**Tanım 2.10 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) :** $f$, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. O halde $a < b$ olmak üzere,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

s-konveks fonksiyonlar Orlicz tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [7].

**Tanım 2.11 :** $\forall x, y \in [0, \infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$, $s \in (0,1]$ sabit olmak üzere,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna birinci anlamda s-konvekstir denir. Birinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı $K_s^1$ ile gösterilir.

**Tanım 2.12 :** $\forall x, y \in [0, \infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$, $s \in (0,1]$ sabit olmak üzere,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konvekstir denir. İkinci anlamda s-konveks fonksiyonların sınıfı $K_s^2$ ile gösterilir.

**Tanım 2.13 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) :** $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Tanım 2. 14 (Power Mean Eşitsizliği) :** $q \geq 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Tanım 2.15 (Genelleştirilmiş Konveks Fonksiyon) :** $I$, $\mathbb{R}$ reel sayıların bir alt aralığı olsun. $f: I = [x, y] \to \mathbb{R}$ ve $\eta(.,.): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olsun. $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tx + (1-t)y) \leq (1-t)f(y) + t\big[f(y) + \eta\big(f(x), f(y)\big)\,\big]$$

eşitsizliği keyfi seçilen bir $\eta(.,.): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna göre sağlanıyorsa, $f: I = [x, y] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna genelleştirilmiş konveks fonksiyon denir. Eğer $\eta(.,.) = x - y$ olarak şeçilirse, genelleştirilmiş konveks fonksiyon, konveks fonksiyona dönüşür. Her konveks fonksiyon, genelleştirilmiş konveks fonksiyondur, fakat tersi doğru değildir. Örnek 2.15 ve Örnek 2.16'da gösterilmiştir.

**Örnek 2.16 :** $f$ konveks fonksiyonu için, $f$'in genelleştirilmiş konveks fonksiyon olmasını sağlayacak $\eta(x, y) = x - y$ dışında farklı bir $\eta$ fonksiyonu bulunabilir. $f(x) = x^2$ ve $\eta(x, y) = 2x + y$ fonksiyonlarını ele alalım. Buradan $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $t \in (0,1)$ için,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq (tx + (1-t)y)^2 \leq t^2x^2 + t(1-t)2xy + (1-t)^2y^2 \\ &\leq tx^2 + y^2 + t(1-t)(x^2 + y^2) \leq y^2 + t(x^2 + x^2 + y^2) \\ &\leq y^2 + t(2x^2 + y^2) = f(y) + t\eta(f(x), f(y)) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $x^2 \leq y^2 + (2x^2 + y^2)$ ve $y^2 \leq y^2$ eşitsizliklerinin sırasıyla $t = 1$ ve $t = 0$ için doğruluğu açıktır. Yani $f$ fonksiyonu genelleştirilmiş konveks fonksiyondur. O halde $f(x) = x^2$ fonksiyonu, $a \geq 1$, $b \geq -1$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}$ olacak şekilde seçilen her $\eta(x, y) = ax + by$ fonksiyonuna göre genelleştirilmiş konveks fonksiyondur.

**Örnek 2.17 :** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunu ve $\forall x, y \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ olacak şekilde $\eta(x, y) = -x - y$ bifonksiyonunu ele alalım. O halde $f$ fonksiyonu $\eta$-konvekstir, fakat tersi doğru değildir.

$x \geq 0$ olsun. O halde $f(x) = -x$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}^-$ için $\eta(x,y) = -x - y$ fonksiyonu ele alınırsa

$$f(tx + (1-t)y) \leq -tx - (1-t)y = -tx - y + ty \leq -y + t(-x - y)$$
$$\leq f(y) + t\eta(f(x), f(y))$$

elde edilir. $x \geq 0$ için $f(x)$, $\eta$-konvekstir.

$x < 0$ olsun. O halde $f(x) = x$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}^-$ için $\eta(x,y) = -x - y$ fonksiyonu ele alınırsa,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tx + (1-t)y = tx + y - ty \leq y + t(-x - y)$$
$$\leq f(y) + t\eta(f(x), f(y))$$

elde edilir. $x < 0$ için $f(x)$, $\eta$-konvekstir.

**Tanım 2.18 (Geometrik Konveks Küme) :** $I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $x^t y^{1-t} \in I$ ise $I$ kümesi, geometrik konveks bir kümedir.

**Tanım 2.19 (Geometrik Konveks Fonksiyon) :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ verilsin. $\forall x, y \in I$ , $t \in [0,1]$ için $x$ ve $y$'nin ağırlıklı geometrik ortalaması $(y^{1-t}x^t)$, $f(x)$ ve $f(y)$'nin ağırlıklı aritmetik ortalaması $(1-t)f(y) + tf(x)$ olmak üzere,

$$f(y^{1-t}x^t) \leq (1-t)f(y) + tf(x)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f$ fonksiyonuna $I$ üzerinde geometrik konveks fonksiyon denir.

**Tanım 2.20 (Genelleştirilmiş Geometrik Konveks Fonksiyon) :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu keyfi bir $\eta(.,.): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna göre $\forall x, y \in I$ , $t \in [0,1]$ için,

$$f(y^{1-t}x^t) \leq (1-t)f(y) + t\Big(f(y) + t\eta\big(f(x), f(y)\big)\Big) \tag{2.12}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, $f$ fonksiyonu genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyondur denir. Özel olarak $\eta(x,y) = x - y$ seçilirse genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon

Tanım 1.18'de verilen geometrik konveks fonksiyona dönüşür. (1.12)'de $t = \frac{1}{2}$ seçilirse $\forall x, y \in I$ , $t \in [0,1]$ için,

$$f\left(\sqrt{xy}\right) \leq f(y) + \frac{1}{2}\eta\left(f(x), f(y)\right) \tag{2.13}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna, genelleştirilmiş Jensen geometrik konveks fonksiyon denir. Aşağıda verilen eşitlikler ilerde kullanılacaktır.

**1)** Aritmetik ortalama

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq b$ için $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ ile hesaplanır.

**2)** Logaritmik ortalama

$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq b$ için $L(a,b) = \frac{b-a}{\log b - \log a}$ ile hesaplanır.

**3)** Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama

$$Ł(a,b) = \begin{cases} \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}}, & p \neq -1,0, \\ L(a,b), & p = -1\,, \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^p}{a^p}\right)^{\frac{1}{b-a}}, & p = 0 \end{cases}$$

ile hesaplanır.

**Tanım 2. 21 :** $f_1(t) \in C([0,\infty))$ iken $f(t) = t^p f_1(t)$ olacak şekilde bir $p > \mu$ reel sayısı varsa $f(t), t \geq 0$ reel değerli fonksiyonu $C_\mu, \mu \in \mathbb{R}$ uzayındadır denir.

**Tanım 2.22 :** $f^{(n)} \in C_\mu$ ise $f(t), t \geq 0$ fonksiyonu $C_\mu^n, n \in \mathbb{R}$ uzayındadır, denir.

**Tanım 2.23 :** Reel sayıların boş olmayan kapalı bir alt kümesine zaman skalası denir , $\mathbb{T}$ ile gösterilir.

**Tanım 2.24 :** $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \coloneqq inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$ şeklinde tanımlı $\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir.

**Tanım 2.25 :** $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için $\rho(t) \coloneqq sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$ şeklinde tanımlı $\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir.

**Tanım 2.26 :** Eğer $\sigma(t) > t$ ise $t$ noktasına sağ-yayılmış nokta, eğer $\rho(t) < t$ ise $t$ noktasına sol-yayılmış nokta denir. Eğer bir nokta hem sağ-yayılmış hem de sol-yayılmış, yani $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise o noktaya izole nokta denir. Eğer $\sigma(t) = t$ ise $t$ noktasına sağ-yoğun nokta, eğer $\rho(t) = t$ ise $t$ noktasına sol-yoğun nokta denir. Eğer bir nokta hem sağ-yoğun hem de sol-yoğun, yani $\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise o noktaya yoğun nokta denir.

**Tanım 2.27 :** $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) \coloneqq \sigma(t) - t$ şeklinde tanımlanan fonksiyona graininess fonksiyonu denir.

**Tanım 2.28 :** $\mathbb{T}$ zaman skalasından türetilen $\mathbb{T}^k$ kümesi; eğer $\mathbb{T}$, sol yayılmış maksimum $m$ noktasına sahipse $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$ diğer durumlarda ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanmıştır.

**Tanım 2.29 :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $[a, t]_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı iki integrallenebilen fonksiyon olsun. $\forall x, y \in [a, t]_{\mathbb{T}}$ için,

$$(f(x) - f(y))(g(x)g(y)) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f$ ve $g$ fonksiyonları $[a, t]_{\mathbb{T}}$ aralığında senkronize fonksiyonlardır denir.

**Tanım 2.30 :** $h_\alpha: \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı zaman skalasında genelleştirilmiş polinomlara rd-sürekli fonksiyonlar denir öyle ki $\forall s, t \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \geq 0$ için,

$$h_0(t, s) = 1$$

$$h_{\alpha+1}(t, s) = \int_s^t h_\alpha(\tau, s)\Delta\tau$$

eşitlikleri sağlanır.

**Tanım 2.31 :** $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $\mathbb{T}$'nin sağ yoğun noktarında sürekli ve $\mathbb{T}$'nin sol yoğun noktarında sol taraflı limiti varsa rd-süreklidir denir ve $f \in C_{rd}$ ile gösterilir.

**Tanım 2.32 :** $\alpha \geq 1$ olmak üzere zaman skalasında $\alpha$. mertebeden Delta-Riemann-Liouville kesirli integral operatörü $f \in C_{rd}$ için

$$K_a^{\alpha} f(t) = \int_a^t h_{\alpha-1}\big(t, \sigma(t)\big) f(\tau)\Delta\tau$$

$$K_a^0 f = f$$

şeklinde tanımlanmıştır.

**Tanım 2. 32 (Minkowski Eşitsizliği) :** $p > 1$ olsun. $f$ ve $g$, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $|f|^p$ve $|g|^p$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\left[\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_a^b |g(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır.

# 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRALLER YARDIMIYLA HERMITE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde genelleştirilmiş kesirli integraller yardımıyla konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler elde edilmiştir [8].

**Lemma 3.1 :** $f: I° \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm $a, b \in I°$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L[a, b]$ ise aşağıda verilen eşitlik doğrudur.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt. \tag{3.1}$$

**İspat :** Kısmi integrasyon yardımıyla eşitliğin sağ tarafının sol tarafına eşitliği gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
&\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt \\
&\qquad = \frac{b-a}{2}\left[\frac{(1-2t)f(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_0^1 + \frac{2}{a-b}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt\right] \\
&\qquad = \frac{b-a}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt\right] \\
&\qquad = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt \\
&\qquad = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

elde edilir böylece ispat tamamlanır.

Dragomir ve Agarwal (2.7) eşitsizliğinin sağ tarafıyla ilgili aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir [9].

**Teorem 3.2 :** $f: I^\circ \to \mathbb{R}$, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L^1[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{8}(|f'(a)| + |f'(b)|).$$

**İspat :** Lemma 3.1 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak;

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'(ta+(1-t)b)dt\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|[t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|]dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 t|1-2t||f'(a)|dt + \int_0^1 (1-t)|1-2t||f'(b)|dt\right] \tag{3.2}$$

yazılabilir.

$$I_1 = \int_0^1 t|1-2t||f'(a)|dt = \int_0^{1/2} t(1-2t)|f'(a)|dt + \int_{1/2}^1 t(-1+2t)|f'(a)|dt =$$

$$= \frac{1}{4}|f'(a)|$$

$$I_2 = \int_0^1 (1-t)|1-2t||f'(b)|dt$$

$$= \int_0^{1/2} (1-t)(1-2t)|f'(b)|dt + \int_{1/2}^1 (1-t)(-1+2t)|f'(b)|dt =$$

$$= \frac{1}{4}|f'(b)|.$$

Elde edilen $I_1$ ve $I_2$ eşitlikleri (3.2) eşitsizliğinde yerine yazıldığında,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{4}|f'(a)|+\frac{1}{4}|f'(b)|\right)$$

$$=\frac{b-a}{8}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

elde edilir ve Teorem 3.2 ispatlanmış olur.

Sarıkaya ve diğerleri Riemann-Liouville kesirli integrali içeren aşağıdaki Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği elde etmişlerdir [10].

**Teorem 3.3 :** $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, pozitif bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $f \in L^1[a,b]$ olsun. $f$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ise $\alpha > 0$, $\Gamma$; Gamma fonksiyonu, $J_{a^+}^{\alpha}f$, $J_{b^-}^{\alpha}f$; $\alpha$. mertebeden sağdan ve soldan Riemann-Liouville kesirli integralleri olmak üzere aşağıda verilen eşitsizlikler sağlanır.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.3}$$

**İspat :** $f$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olduğundan,

$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ yazılabilir. Eşitsizlikte $\lambda=\frac{1}{2}$ alınırsa,

$$f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

elde edilir. Burada $x=at+(1-t)b$ ve $y=(1-t)a+tb$ dönüşümleri uygulanırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(at+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}$$

eşitsizliği bulunur bu eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpıldığında,

$$2t^{\alpha-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq t^{\alpha-1}f(at+(1-t)b)+t^{\alpha-1}f((1-t)a+tb)$$

elde edilir. Bulunan bu eşitsizliğin her iki tarafı $t$'ye göre 0'dan 1'e integrallenirse,

$$2\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)dt$$

yazılır. Burada $at+(1-t)b = x$ ve $(1-t)a+tb = y$ dönüşümü uygulanırsa,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 t^{\alpha-1}dt \leq \int_b^a \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1} f(x)\frac{dx}{a-b} + \int_a^b \left(\frac{y-a}{b-a}\right)^{\alpha-1} f(y)\frac{dy}{b-a}$$

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{\alpha} &\leq \frac{1}{(a-b)^{\alpha}}\int_b^a (x-b)^{\alpha-1} f(x)dx \\ &+ \frac{1}{(a-b)^{\alpha}}\int_a^b (y-a)^{\alpha-1} f(y)dy \\ &\leq \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\left[\int_a^b (x-b)^{\alpha-1} f(x)dx + \int_a^b (y-a)^{\alpha-1} f(y)dy\right] \\ &\leq \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left(J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde istenilen ilk eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right]. \tag{3.4}$$

$f$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} &f(ta+(1-t)b) + f\big((1-t)a+tb\big) \\ &\qquad \leq tf(a) + (1-t)f(b) + (1-t)f(a) + tf(b) \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+(1-t)b)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb)dt \leq [f(a)+f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt$$

yazılır. Benzer şekilde $at+(1-t)b = x$ ve $(1-t)a+tb = y$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{\alpha} \tag{3.6}$$

bulunur. (3.4) ve (3.6)'den istenilen eşitsizliğe ulaşılır ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.4 :** Teorem 3.3'de $\alpha = 1$ alınırsa (3.3) eşitsizliği klasik Hermite-Hadamard eşitsizliğine dönüşür.

**İspat :** Teorem 3.3 'de $\alpha = 1$ olarak alınırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(1+1)}{2(b-a)^1}\left[J_{a^+}^{1} f(b) + J_{b^-}^{1} f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

bulunur. Buradan,

$$\Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1\int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1$$

$$J_{a^+}^{1} f(b) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^b (b-\tau)^{1-1} f(\tau)d\tau = \int_a^b f(x)dx$$

$$J_{b^-}^{1} f(a) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^b (\tau-a)^{1-1} f(\tau)d\tau = \int_a^b f(x)dx$$

eşitlikleri yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiş olur.

**Lemma 3.5 :** $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $(a,b)$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $a < b$ olsun. $f' \in L^1[a,b]$ ise aşağıdaki kesirli integral eşitliği doğrudur.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)\right]$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 [(1-t)^\alpha - t^\alpha] f'(ta+(1-t)b)dt.$$

**İspat :** $\int_0^1 [(1-t)^\alpha - t^\alpha] f'(ta+(1-t)b)dt$ integralini hesaplamak yeterlidir. Bunun için,

$$I = \left[\int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)\, dt\right] + \left[-\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt\right] = I_1 + I_2 \qquad (3.7)$$

olarak parçalansın. $I_1$ ve $I_2$ ayrı ayrı kısmi integrasyon yöntemiyle hesaplanırsa,

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)^\alpha f'(ta+(1-t)b)\, dt$$
$$= (1-t)^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\bigg|_0^1 + \int_0^1 \alpha(1-t)^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$
$$= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_b^a \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx$$
$$= \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (a-x)^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{f(b)}{b-a}$$
$$- \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b^-}^\alpha f(a) = \frac{f(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}} J_{b^-}^\alpha f(a)$$

$$I_2 = -\int_0^1 t^\alpha f'(ta+(1-t)b)\,dt$$

$$= -t^\alpha \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Big|_0^1 + \int_0^1 \alpha t^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha}{b-a}\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx = \frac{f(a)}{b-a}$$

$$-\frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b (b-x)^{\alpha-1}f(x)dx = \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}J_{a^+}^{\alpha}f(b)$$

$$= \frac{f(a)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}J_{a^+}^{\alpha}f(b)$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler (3.7)'de yerine yazılırsa,

$$I = \frac{f(a)+(b)}{b-a} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $\frac{b-a}{2}$ ile çarpılırsa teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 3.6 :** $f: I° \to \mathbb{R}$, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in I°$ ve $a < b$ olsun. $f' \in L^1[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks olmak üzere $\alpha > 0$ için,

$$\left|\frac{f(a)+(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right| \leq \frac{(b-a)}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|) \tag{3.8}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Lemma 3.5 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\le\frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt$$

$$\le\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}][t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha}][t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2}(K_1+K_2) \tag{3.9}$$

şeklinde yazılabilir. $K_1$ ve $K_2$ değerleri hesaplanırsa,

$$K_1=\int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}][t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]$$

$$=|f'(a)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)^{\alpha}dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+1}dt\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+1}dt-\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)t^{\alpha}dt\right]$$

$$=|f'(a)|\left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]$$

$$+|f'(b)|\left[\frac{1}{(\alpha+2)}-\frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right]$$

$$K_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [t^\alpha - (1-t)^\alpha][t|f'(a)| + (1-t)|f'(b)|]$$

$$= |f'(a)| \left[ \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+1} dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t(1-t)^\alpha dt \right]$$

$$+ |f'(b)| \left[ \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)t^\alpha dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+1} dt \right]$$

$$= |f'(a)| \left[ \frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right]$$

$$+ |f'(b)| \left[ \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right]$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu değerler (3.9)'da yerine yazılırsa,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left\{ |f'(a)| \left[ \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] \right.$$

$$+ |f'(b)| \left[ \frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] + |f'(a)| \left[ \frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right]$$

$$\left. + |f'(b)| \left[ \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] \right\}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlikler düzenlendiğinde aşağıdaki istenilen sonuca ulaşılır.

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^{\alpha} f(b) + J_{b^-}^{\alpha} f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left( 1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) (|f'(a)| + |f'(b)|).$$

**Lemma 3.7 :** $\alpha > 0$ olsun. $x > a$ için,

**i.** $\lim_{\rho \to 1} {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) = J_{a^+}^{\alpha} f(x)$

**ii.** $\lim\limits_{\rho\to 1} {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x) = J_{b^-}^{\alpha} f(x)$

**iii.** $\lim\limits_{\rho\to 0^+} {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha} f(x)$

**iv.** $\lim\limits_{\rho\to 0^+} {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha} f(x)$ eşitlikleri sağlanır.

**İspat**

**i.**

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 1} {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \lim_{\rho\to 1} \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(\tau)\tau^{\rho-1}}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \lim_{\rho\to 1} f(\tau)\tau^{\rho-1} \left(\frac{x^{\rho}-\tau^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\tau)\tau^{1-1} \left(\frac{x^{1}-\tau^{1}}{1}\right)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha-1} d\tau = J_{a^+}^{\alpha} f(x)
\end{aligned}$$

**ii.**

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 1} {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \lim_{\rho\to 1} \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(\tau)\tau^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-x^{\rho})^{1-\alpha}} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \lim_{\rho\to 1} f(\tau)\tau^{\rho-1} \left(\frac{\tau^{\rho}-x^{\rho}}{\rho}\right)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(\tau)\tau^{1-1} \left(\frac{\tau^{1}-x^{1}}{1}\right)^{\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(\tau)(\tau-x)^{\alpha-1} d\tau = J_{b^-}^{\alpha} f(x)
\end{aligned}$$

**iii.**

$$\lim_{\rho\to 0^+} {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f(x) = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\tau)\tau^{\rho-1}}{(x^\rho-\tau^\rho)^{1-\alpha}}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \lim_{\rho\to 0^+} f(\tau)\tau^{\rho-1}\left(\frac{x^\rho-\tau^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(\tau)\frac{1}{\tau}\left(\frac{1.\,x^\rho.\,lnx-1.\,\tau^\rho ln\tau}{1}\right)^{\alpha-1}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(ln\frac{x}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau = \boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}f(x)$$

**iv.**

$$\lim_{\rho\to 0^+} {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f(x) = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(\tau)\tau^{\rho-1}}{(\tau^\rho-x^\rho)^{1-\alpha}}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \lim_{\rho\to 0^+} f(\tau)\tau^{\rho-1}\left(\frac{\tau^\rho-x^\rho}{\rho}\right)^{\alpha-1}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b f(\tau)\frac{1}{\tau}\left(\frac{1.\,\tau^\rho ln\tau-1.\,x^\rho.\,lnx}{1}\right)^{\alpha-1}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \left(ln\frac{\tau}{x}\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau = \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}f(x)$$

sonuçları elde edilir.

**Lemma 3.8 :** $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun.

**i.** $x > a$ için,

$${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f(x) = (x-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sx+(1-s)a)^{\rho-1}}{[x^\rho-(sx+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}}f(sx+(1-s)a)ds$$

**ii.** $x < b$ için,

$$ {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f(x) = (b-x)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)x)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)x)^{\rho}-x^{\rho}]^{1-\alpha}}f(sb+(1-s)x)ds $$

eşitsizlikleri yazılabilir.

**İspat :**

**i.** ${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f(x)$ eşitliğinde $\tau = sx + (1-s)a$ dönüşümü uygulanırsa,

$$ {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}f\,(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\tau^{\rho-1}}{(x^{\rho}-\tau^{\rho})^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau $$

$$ = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sx+(1-s)a)^{\rho-1}}{[x^{\rho}-(sx+(1-s)a)^{\rho}]^{1-\alpha}}f(sx+(1-s)a)(x-a)ds $$

$$ = (x-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sx+(1-s)a)^{\rho-1}}{[x^{\rho}-(sx+(1-s)a)^{\rho}]^{1-\alpha}}f(sx+(1-s)a)ds $$

elde edilmiş olur.

**ii.** ${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f(x)$ eşitliğinde $\tau = sb + (1-s)x$ dönüşümü uygulanırsa,

$$ {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}f(x) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\tau^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-x^{\rho})^{1-\alpha}}f(\tau)d\tau $$

$$ = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)x)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)x)^{\rho}-x^{\rho}]^{1-\alpha}}f(sb+(1-s)x)(b-x)ds $$

$$ = (b-x)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)x)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)x)^{\rho}-x^{\rho}]^{1-\alpha}}f(sb+(1-s)x)ds $$

elde edilmiş olur.

$a, b \in I^{\circ}$ ve $0 < a < b < \infty$ olmak üzere $f: I^{\circ} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. ${}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha} f(x)$ ve ${}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(x)$ fonksiyonları iyi tanımlı ve $f \in L^{\infty}(a,b)$ olsun.

$\tilde{f}(x) = f(a+b-x), \;\; x \in [a,b]$ ve

$F(x) = f(x) + \tilde{f}(x), \;\; x \in [a,b]$ fonksiyonları tanımlansın. O halde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

**Teorem 3.9 :** $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.10}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

**İspat :** $s \in [0,1]$ için, $u = sa + (1-s)b$ ve $v = (1-s)a + sb$ olsun. $f$'nin konveksliğinden,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)$$

yazılabilir.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(sa+(1-s)b) + \frac{1}{2}f\big((1-s)a+sb\big). \tag{3.11}$$

(3.11) eşitsizliğinin her iki tarafı $(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^{\rho}-(sb+(1-s)a)^{\rho}]^{1-\alpha}}$ ile çarpılıp $s$'ye göre $(0,1)$ aralığında integrallenirse,

$$(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^{\rho}-(sb+(1-s)a)^{\rho}]^{1-\alpha}}ds$$
$$\leq \frac{1}{2}(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^{\rho}-(sb+(1-s)a)^{\rho}]^{1-\alpha}}f(sa+(1-s)b)ds$$

$$+\frac{1}{2}(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} f\big((1-s)a+sb\big)ds$$

$$=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2 \tag{3.12}$$

bulunur. Dikkat edilirse aşağıdaki integralde $u=b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho$ dönüşümü uygulandığında,

$$\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}}ds=-\frac{1}{\rho(b-a)}\frac{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}}{\alpha}\bigg|_0^1$$

$$=-\frac{1}{\rho(b-a)}\left[\frac{(b^\rho-b^\rho)^\alpha}{\alpha}-\frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\alpha}\right]=\frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\rho(b-a)\alpha}$$

eşitliği bulunabilir.

$\tilde{f}(bs+(1-s)a)=f(sa+(1-s)b)$ özdeşliği ve Lemma 3.8'in (i) maddesi kullanılırsa,

$$I_1=(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} f(sa+(1-s)b)ds$$

$$=(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} \tilde{f}(bs+(1-s)a)ds$$

$$= {}^\rho I_{a^+}^\alpha \tilde{f}(b)$$

$$I_2=(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} f\big((1-s)a+sb\big)ds= {}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b)$$

elde edilir. Bu sonuçlar (3.12) eşitsizliğinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\rho(b-a)\alpha}\le\frac{1}{2}\,{}^\rho I_{a^+}^\alpha \tilde{f}(b)+\frac{1}{2}\,{}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b)=\frac{1}{2}\,{}^\rho I_{a^+}^\alpha\big[\tilde{f}(b)+f(b)\big]$$

$$=\frac{1}{2}\,{}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b).$$

Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{{}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b)}{2} \tag{3.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.11) eşitsizliğinin her iki tarafı $(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}}$ ile çarpılıp $s$'ye göre (0,1) aralığında integrallenirse,

$$\begin{aligned}
&(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}} ds \\
&\qquad \le \frac{1}{2}(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}} f(sa+(1-s)b) ds \\
&\qquad + \frac{1}{2}(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}} f\big((1-s)a+sb\big) ds \\
&\qquad = \frac{1}{2} I_3 + \frac{1}{2} I_4
\end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitsizliği bulunur. Aşağıdaki integralde $u = (sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}} ds &= \frac{1}{\rho(b-a)} \left.\frac{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}}{\alpha}\right|_0^1 \\
&= \frac{1}{\rho(b-a)}\left[\frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\alpha} - \frac{(a^\rho - a^\rho)^\alpha}{\alpha}\right] = \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\rho(b-a)\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{f}(bs+(1-s)a) = f(sa+(1-s)b)$ özdeşliği ve Lemma 3.8 kullanılarak $I_3$ ve $I_4$ integralleri hesaplandığında,

$$\begin{aligned}
I_3 &= (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}} f(sa+(1-s)b) ds \\
&= (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho - a^\rho]^{1-\alpha}} \tilde{f}(bs+(1-s)a) ds \\
&= {}^\rho I_{b^-}^\alpha \tilde{f}(a)
\end{aligned}$$

$$I_4 = (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{1-\alpha}} f(sb+(1-s)a)ds = {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(a)$$

bulunur. Elde edilen değerler (3.14)'te yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho(b-a)\alpha} \leq \frac{1}{2}\,{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}\tilde{f}(a) + \frac{1}{2}\,{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha} f(a) = \frac{1}{2}\,{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}\left[\tilde{f}(a)+f(a)\right]$$
$$= \frac{{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)}{2}$$

Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)}{2} \tag{3.15}$$

bulunur. (3.13) ve (3.15) eşitsizlikleri taraf tarafa toplandığında,

$$\frac{2(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) + {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b)}{2}$$

yazılabilir. Bulunan eşitsizlikler düzenlendiğinde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) + {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b)\right]$$

(3.10) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilmiş olur.

$f$'nin konveksliğinden, $\forall s \in [0,1]$ için,

$$f(sa+(1-s)b) + f\big((1-s)a+sb\big) \leq sf(a) + (1-s)f(b) + (1-s)f(a) + sf(b)$$

$$f(sa+(1-s)b) + f\big((1-s)a+sb\big) \leq f(a) + f(b) \tag{3.16}$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.16)'nın her iki tarafı $(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^{\rho}-(sb+(1-s)a)^{\rho}]^{1-\alpha}}$ ile çarpılır, (0,1) aralığında $s$'ye göre integrallenirse,

$$(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} f(sa+(1-s)b)ds$$

$$+(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} f\big((1-s)a+sb\big)ds$$

$$\leq (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}[f(a)+f(b)]\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^{1-\alpha}} ds$$

eşitsizliği bulunur. Daha önce bulunan eşitlikler ve Lemma 3.8 ‘in (i) maddesinden,

$${}^\rho I_{a^+}^\alpha \tilde{f}(b) + {}^\rho I_{a^+}^\alpha f(b) \leq (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}[f(a)+f(b)]\frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\rho(b-a)\alpha}$$

yazılır. İfade düzenlendiğinde,

$${}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b) \leq \frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}[f(a)+f(b)] \tag{3.17}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.16)’nın her iki tarafı $(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho-a^\rho]^{1-\alpha}}$ ile çarpılır, (0,1) aralığında $s$’ye göre integrallenirse,

$$(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho-a^\rho]^{1-\alpha}} f(sa+(1-s)b)ds$$

$$+(b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho-a^\rho]^{1-\alpha}} f\big((1-s)a+sb\big)ds$$

$$\leq (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}[f(a)+f(b)]\int_0^1 \frac{(sb+(1-s)a)^{\rho-1}}{[(sb+(1-s)a)^\rho-a^\rho]^{1-\alpha}} ds$$

eşitsizliği bulunur. Daha önce bulunan eşitlikler ve Lemma 3.8 ‘in (ii) maddesinden,

$${}^\rho I_{b^-}^\alpha \tilde{f}(a) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha f(a) \leq (b-a)\frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}[f(a)+f(b)]\frac{(b^\rho-a^\rho)^\alpha}{\rho(b-a)\alpha}$$

yazılabilir. Elde edilenler düzenlendiğinde,

$$ {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) \leq \frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}[f(a)+f(b)] \tag{3.18} $$

bulunur. (3.17) ve (3.18) taraf tarafa toplanırsa,

$$ {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) \leq 2\frac{(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}[f(a)+f(b)] $$

$$ \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} $$

elde edilir. Böylece (3.10) eşitsizliğinin sağ tarafı da elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır.

**Uyarı 3.10 :** Teorem 3.9, Teorem 3.3'ün genelleştirilmiş halidir.

**i.** (3.10)'da $\rho \to 1$ ve Lemma 3.7'deki (i) maddesi kullanılırsa, (3.3) eşitsizliğinin elde edileceği kolayca görülür. Üstelik Teorem 3.3'te $f$'nin pozitif olması gerekirken Teorem 3.9'da böyle bir şart gerekmemektedir.

**ii.** (3.10)'da $\rho \to 0^+$ ve Lemma 3.7'deki (ii) maddesi kullanılırsa, kesirli Hadamard integralleri için Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

**İspat :**

**i.** $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks olmak üzere,

$$ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.19} $$

eşitsizliğinde $\rho \to 1$, $F(x) = f(x) + \tilde{f}(x)$ eşitliği ve Lemma 3.7'deki (i) maddesi kullanılırsa,

$$ \lim_{\rho\to 1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \lim_{\rho\to 1}\frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right] \leq \lim_{\rho\to 1}\frac{f(a)+f(b)}{2} $$

$$ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^1 - a^1)^\alpha}\lim_{\rho\to 1}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.20} $$

bulunur. Burada aşağıdaki limitlerin hesaplanması gerekir.

$$\lim_{\rho\to 1} {}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) = J_{a^+}^{\alpha}F(b) = J_{a^+}^{\alpha}\left[\tilde{f}(b) + f(b)\right] = J_{a^+}^{\alpha}[f(a) + f(b)] = J_{a^+}^{\alpha}f(a) + J_{a^+}^{\alpha}f(b)$$
$$= J_{a^+}^{\alpha}f(b),$$

$$\lim_{\rho\to 1} {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) = J_{b^-}^{\alpha}F(a) = J_{b^-}^{\alpha}\left[\tilde{f}(a) + f(a)\right] = J_{b^-}^{\alpha}[f(b) + f(b)] = J_{b^-}^{\alpha}f(b) + J_{b^-}^{\alpha}f(a)$$
$$= J_{b^-}^{\alpha}f(a).$$

Bu eşitlikler (3.20)'de yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b) + J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

istenilen eşitsizliğe ulaşılmış olur.

**ii.** (3.10)'da $\rho \to 0^+$ için,

$$\lim_{\rho\to 0^+} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right] \leq \lim_{\rho\to 0^+} \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4} \lim_{\rho\to 0^+}\left(\frac{\rho}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha} \lim_{\rho\to 0^+}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right]$$
$$\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.21}$$

eşitsizliği yazılır. $\lim_{\rho\to 0^+}\left(\frac{\rho}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right)^{\alpha} = \lim_{\rho\to 0^+}\left(\frac{1}{1.b^{\rho}.\ln b - 1.a^{\rho}.\ln a}\right) = \frac{1}{\ln\frac{b}{a}}$ limiti ve Lemma 3.7'deki (ii) maddesi (3.21)'de yerine yazılırsa,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}F(b) + \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}F(a) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir, ispat tamamlanır.

**Sonuç 3.11 :** $\alpha > 0$ olsun. $f$ konveks bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}F(b) + \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}F(a) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

$\Xi_{\alpha,\rho}(t)\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ için,

$$\begin{aligned}\Xi_{\alpha,\rho}(t) &= [(ta+(1-t)b)^\rho - a^\rho]^\alpha - [(tb+(1-t)a)^\rho - a^\rho]^\alpha \\ &\quad + [b^\rho - (tb+(1-t)a)^\rho]^\alpha - [b^\rho - (ta+(1-t)b)^\rho]^\alpha\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

**Lemma 3.12 :** $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ olsun. $f \in C^1(I^\circ)$ ise,

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha F(a)\right] \\ &\qquad = \frac{b-a}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\int_0^1 \Xi_{\alpha,\rho}(t) f'(ta+(1-t)b)\,dt \qquad (3.22)\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat :** Eşitliğin sol tarafının sağ tarafa eşit olduğunu göstermemiz yeterlidir. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned}{}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{\tau^{\rho-1}}{(b^\rho - \tau^\rho)^{1-\alpha}} F(\tau)\,d\tau = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \tau^{\rho-1}(b^\rho - \tau^\rho)^{\alpha-1} F(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{F(\tau)(b^\rho - \tau^\rho)^\alpha}{\alpha\rho}\Bigg|_a^b + \int_a^b \frac{(b^\rho - \tau^\rho)^\alpha}{\alpha\rho} F'(\tau)\,d\tau\right] \\ &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{F(b)(b^\rho - b^\rho)^\alpha}{\alpha\rho} + \frac{F(a)(b^\rho - a^\rho)^\alpha}{\alpha\rho} + \int_a^b \frac{(b^\rho - \tau^\rho)^\alpha}{\alpha\rho} F'(\tau)\,d\tau\right]\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada integralde $\tau = sb + (1-s)a$ dönüşümü uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) &= \frac{F(a)(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 [b^{\rho}-(sb+(1-s)a)^{\rho}]^{\alpha}F'(sb+(1-s)a)ds \\
&= \frac{F(a)(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}A \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde kısmi integrasyon kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) &= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\tau^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-a^{\rho})^{1-\alpha}}F(\tau)d\tau = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \tau^{\rho-1}(\tau^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha-1}F(\tau)d\tau \\
&= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{F(\tau)(\tau^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\alpha\rho}\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{(\tau^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\alpha\rho}F'(\tau)d\tau\right] \\
&= \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{F(b)(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\alpha\rho} - \frac{F(a)(a^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\alpha\rho} - \int_a^b \frac{(\tau^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\alpha\rho}F'(\tau)d\tau\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada integralde $\tau = sb + (1-s)a$ dönüşümü uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) &= \frac{F(b)(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} \\
&\quad - \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 [(sb+(1-s)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}F'(sb+(1-s)a)ds \\
&= \frac{F(b)(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}B \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.23) ve (3.24) taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse,

$$
\begin{aligned}
{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b) + {}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a) &= \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}[F(a)+F(b)] + \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}[A-B] \\
&= \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}\left[f(a)+\tilde{f}(a)+f(b)+\tilde{f}(b)\right] + \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}[A-B] \\
&= \frac{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}[2f(a)+2f(b)] + \frac{(b-a)}{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}[A-B]
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b)+{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right]=\frac{(b-a)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}[B-A] \tag{3.25}$$

eşitliğine ulaşılır. Dikkat edilmelidir ki $F'(x)=f'(x)-f'(a+b-x)$ eşitliğinde $x=sb+(1-s)a$ yazıldığında,

$$F'(sb+(1-s)a)=f'(sb+(1-s)a)-f'(sa+(1-s)b),\ \ s\in[0,1]$$

elde edilir. İlk önce $B$ ve $A$ integralleri hesaplanmalıdır.

$$B=\int_0^1[(sb+(1-s)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}F'(sb+(1-s)a)ds$$

$$=\int_0^1[(sb+(1-s)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}\,[f'(sb+(1-s)a)-f'(sa+(1-s)b)]ds$$

$$=\int_0^1[(sb+(1-s)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}f'(sb+(1-s)a)ds-\int_0^1[(sb+(1-s)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}f'(sa+(1-s)b)ds.$$

Yazılan bu eşitlikteki ilk integralde $s=1-t$, ikinci integralde $s=t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$B=\int_0^1[(ta+(1-t)b)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt-\int_0^1[(tb+(1-t)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$A=\int_0^1 [b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^\alpha F'(sb+(1-s)a)ds$$

$$=\int_0^1 [b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^\alpha [f'(sb+(1-s)a)$$
$$-f'(sa+(1-s)b)]ds$$
$$=\int_0^1 [b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^\alpha f'(sb+(1-s)a)ds$$
$$-\int_0^1 [b^\rho-(sb+(1-s)a)^\rho]^\alpha f'(sa+(1-s)b)ds$$

eşitliğindeki ilk integralde $s=1-t$, ikinci integralde $s=t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$A=\int_0^1 [b^\rho-(ta+(1-t)b)^\rho]^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt$$
$$-\int_0^1 [b^\rho-(tb+(1-t)a)^\rho]^\alpha f'(ta+(1-t)b)dt$$

yazılabilir. $B-A$ hesaplandığında,

$$B-A=\int_0^1 \{[(ta+(1-t)b)^\rho-a^\rho]^\alpha-[(tb+(1-t)a)^\rho-a^\rho]^\alpha$$
$$+[b^\rho-(tb+(1-t)a)^\rho]^\alpha$$
$$-[b^\rho-(ta+(1-t)b)^\rho]^\alpha\}\,f'(ta+(1-t)b)dt$$
$$=\int_0^1 \Xi_{\alpha,\rho}(t)\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

elde edilir. Hesaplanan $B-A$ değeri, (3.25)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b)+{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right]$$
$$=\frac{(b-a)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\int_0^1 \Xi_{\alpha,\rho}(t)\,f'(ta+(1-t)b)dt \tag{3.26}$$

istenilen sonuca ulaşılmış olur.

**Uyarı 3.13 :** (3.22) eşitliğinde $\rho\to 1$ için Lemma 2 elde edilir [10].

**İspat :** (3.22) eşitliğinde $\rho\to 1$ için Lemma 3.7 'nin (i) maddesi kullanılırsa,

$$\lim_{\rho\to 1}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^+}^{\alpha}F(b)+{}^{\rho}I_{b^-}^{\alpha}F(a)\right]\right]$$
$$=\lim_{\rho\to 1}\left[\frac{(b-a)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\int_0^1 \Xi_{\alpha,\rho}(t)\,f'(ta+(1-t)b)dt\right]$$

yazılabilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(f(b)+\tilde{f}(b)\right)+J_{b^-}^{\alpha}\left(f(a)+\tilde{f}(a)\right)\right]$$
$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}\left(f(b)+f(a)\right)+J_{b^-}^{\alpha}\left(f(a)+f(b)\right)\right]$$
$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$
$$=\frac{(b-a)}{4(b-a)^{\alpha}}\int_0^1\left[\lim_{\rho\to 1}\Xi_{\alpha,\rho}(t)\right]f'(ta+(1-t)b)\,dt \tag{3.27}$$

bulunur. Yukarıdaki limit hesaplanır ve (3.27)'de yerine yazılırsa,

$$\lim_{\rho\to 1}\Xi_{\alpha,\rho}(t)=\lim_{\rho\to 1}\{[(ta+(1-t)b)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}-[(tb+(1-t)a)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}$$
$$+[b^{\rho}-(tb+(1-t)a)^{\rho}]^{\alpha}-[b^{\rho}-(ta+(1-t)b)^{\rho}]^{\alpha}\}$$
$$=(b-a)^{\alpha}(1-t)^{\alpha}-(b-a)^{\alpha}t^{\alpha}+(b-a)^{\alpha}(1-t)^{\alpha}-(b-a)^{\alpha}t^{\alpha}$$
$$=2(b-a)^{\alpha}[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]$$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$=\frac{(b-a)}{2}\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

istenilen eşitliğe ulaşılır. Burada iki tarafın birbirine eşitliği görülmek istenirse,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

$$=\frac{(b-a)}{2}\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]\,f'(ta+(1-t)b)dt=\frac{(b-a)}{2}I \tag{3.28}$$

$I$ integralinin hesaplanması yeterlidir.

$$I=\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$=\int_0^1(1-t)^{\alpha}\,f'(ta+(1-t)b)dt-\int_0^1 t^{\alpha}\,f'(ta+(1-t)b)dt=I_1+I_2.$$

Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$I_1=\int_0^1(1-t)^{\alpha}\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$=(1-t)^{\alpha}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^1+\int_0^1\alpha\,(1-t)^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

$$=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\alpha}{b-a}\int_0^1(1-t)^{\alpha-1}\,f(ta+(1-t)b)dt$$

yazılabilir. Burada $x=ta+(1-t)b$ dönüşümü uygulanırsa,

$$I_1=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\alpha}{b-a}\int_b^a\left(\frac{a-x}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b(a-x)^{\alpha-1}f(x)dx$$
$$=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}J_{b^-}^{\alpha}f(a)=\frac{f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}J_{b^-}^{\alpha}f(a)$$

elde edilir. Benzer şekilde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$I_2=-\int_0^1 t^{\alpha}f'(ta+(1-t)b)dt$$
$$=t^{\alpha}\frac{f(ta+(1-t)b)}{b-a}\bigg|_0^1+\int_0^1\alpha\, t^{\alpha-1}\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$
$$=\frac{f(a)}{b-a}+\frac{\alpha}{a-b}\int_0^1 t^{\alpha-1}f(ta+(1-t)b)dt$$

yazılabilir. Burada $x=ta+(1-t)b$ dönüşümü uygulandığında,

$$I_2=\frac{f(a)}{b-a}+\frac{\alpha}{a-b}\int_b^a\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^{\alpha-1}\frac{f(x)}{a-b}dx=\frac{f(a)}{b-a}-\frac{\alpha}{(b-a)^{\alpha+1}}\int_a^b(b-x)^{\alpha-1}f(x)\,dx$$
$$=\frac{f(a)}{b-a}-\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha+1}}J_{a^+}^{\alpha}f(b)=\frac{f(a)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}J_{a^+}^{\alpha}f(b)$$

yazılır.

$$I_1+I_2=\frac{f(a)+f(b)}{b-a}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^{\alpha+1}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right].$$

Hesaplanan $I_1+I_2$, $\frac{b-a}{2}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{b-a}{2}(I_1+I_2)=\frac{b-a}{2}\int_0^1[(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}]f'(ta+(1-t)b)dt$$
$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]$$

eşitliği elde edilir.

$\alpha>0$ ve $\rho>0$ olsun. $x,y\in[a,b]$ için,

$$\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,x,y)=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|x-u||y^{\rho}-u^{\rho}|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|x-u||y^{\rho}-u^{\rho}|^{\alpha}du$$

şeklinde tanımlansın. O halde aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 3.14 :** $\alpha>0$ ve $\rho>0$ olsun. $f\in C^{1}(I^{\circ})$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olmak üzere,

$$I_{\rho}^{\alpha}(a,b)=\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,b,b)+\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,a,b)-\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,b,a)-\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,a,a)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}F(b)+{}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}F(a)\right]\right|\\&\qquad\leq\frac{I_{\rho}^{\alpha}(a,b)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}(b-a)}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right)\end{aligned}\tag{3.29}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Lemma 3.12 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\rho^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left[{}^{\rho}I_{a^{+}}^{\alpha}F(b)+{}^{\rho}I_{b^{-}}^{\alpha}F(a)\right]\right|\\&\qquad\leq\frac{b-a}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\int_{0}^{1}\left|\Xi_{\alpha,\rho}(t)\right||f'(ta+(1-t)b)|dt\\&\qquad\leq\frac{b-a}{4(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}\left(|f'(a)|\int_{0}^{1}t\left|\Xi_{\alpha,\rho}(t)\right|dt\right.\\&\qquad\quad\left.+|f'(b)|\int_{0}^{1}(1-t)\left|\Xi_{\alpha,\rho}(t)\right|dt\right)\end{aligned}\tag{3.30}$$

eşitsizliği elde edilir.

$u\in[a,b]$ için,

$$\varphi(u)=[u^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}-[(b+a-u)^{\rho}-a^{\rho}]^{\alpha}+[b^{\rho}-(a+b-u)^{\rho}]^{\alpha}-[b^{\rho}-u^{\rho}]^{\alpha}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $u=ta+(1-t)b$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 t\left|\,\Xi_{\alpha,\rho}(t)\right|dt$$

$$= \int_0^1 t|[(ta+(1-t)b)^\rho - a^\rho]^\alpha - [(tb+(1-t)a)^\rho - a^\rho]^\alpha$$
$$+ [b^\rho - (tb+(1-t)a)^\rho]^\alpha - [b^\rho - (ta+(1-t)b)^\rho]^\alpha|\,dt$$
$$= \int_a^b \left(\frac{b-u}{b-a}\right)|[u^\rho - a^\rho]^\alpha - [(b+a-u)^\rho - a^\rho]^\alpha$$
$$+ [b^\rho - (a+b-u)^\rho]^\alpha - [b^\rho - u^\rho]^\alpha|\frac{du}{b-a}$$
$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du$$

eşitliğinin doğru olduğu görülebilir. $\varphi$, $[a,b]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olsun. O halde,

$$\varphi(a) = [a^\rho - a^\rho]^\alpha - [(b+a-a)^\rho - a^\rho]^\alpha + [b^\rho - (a+b-a)^\rho]^\alpha - [b^\rho - a^\rho]^\alpha$$
$$= -2[b^\rho - a^\rho]^\alpha < 0$$

ve

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^\rho - a^\rho\right]^\alpha - \left[\left(b+a-\frac{a+b}{2}\right)^\rho - a^\rho\right]^\alpha$$
$$+ \left[b^\rho - \left(a+b-\frac{a+b}{2}\right)^\rho\right]^\alpha - \left[b^\rho - \left(\frac{a+b}{2}\right)^\rho\right]^\alpha = 0$$

doğrudur. Sonuç olarak,

$$\begin{cases} \varphi(u) \le 0, & a \le u \le \dfrac{a+b}{2} \\ \varphi(u) > 0, & \dfrac{a+b}{2} < u \le b \end{cases}$$

yazılabilir.

$$I_1 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)(b^\rho - u^\rho)^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)(b^\rho - u^\rho)^\alpha du = \mathcal{L}^\alpha(\rho, b, b)$$

$$I_2 = -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)(u^\rho - a^\rho)^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)(u^\rho - a^\rho)^\alpha du = -\mathcal{L}^\alpha(\rho, b, a)$$

$v = a + b - u$ değişken değiştirmesi yardımıyla,

$$I_3 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)((b+a-u)^\rho - a^\rho)^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)((b+a-u)^\rho - a^\rho)^\alpha du$$
$$= -\mathcal{L}^\alpha(\rho, a, a)$$

$$I_4 = -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b^\rho - (a+b-u)^\rho)^\alpha (b-u) du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b^\rho - (a+b-u)^\rho)^\alpha (b-u) du$$
$$= \mathcal{L}^\alpha(\rho, a, b)$$

şeklinde parçalandığında,

$$\int_0^1 t \left| \Xi_{\alpha,\rho}(t) \right| dt = \frac{\mathcal{L}^\alpha(\rho, b, b) + \mathcal{L}^\alpha(\rho, a, b) - \mathcal{L}^\alpha(\rho, b, a) - \mathcal{L}^\alpha(\rho, a, a)}{(b-a)^2} = \frac{I_\rho^\alpha(a,b)}{(b-a)^2} \quad (2.31)$$

bulunur. Benzer şekilde aşağıdaki integralde $u = tb + (1-t)a$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 (1-t) \left| \Xi_{\alpha,\rho}(t) \right| dt$$
$$= \int_0^1 (1-t) \left| [(ta + (1-t)b)^\rho - a^\rho]^\alpha - [(tb + (1-t)a)^\rho - a^\rho]^\alpha \right.$$
$$\left. + [b^\rho - (tb + (1-t)a)^\rho]^\alpha - [b^\rho - (ta + (1-t)b)^\rho]^\alpha \right| dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{b-u}{b-a}\right) |[u^\rho - a^\rho]^\alpha - [(b+a-u)^\rho - a^\rho]^\alpha + [b^\rho - (a+b-u)^\rho]^\alpha$$

$$- [b^\rho - u^\rho]^\alpha| \frac{du}{a-b} = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du = \frac{I_\rho^\alpha(a,b)}{(b-a)^2} \quad (3.32)$$

eşitliği elde edilir. (3.30) eşitsizliğinde, elde edilen (3.31) ve (3.32) eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha F(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha} \int_0^1 |\, \Xi_{\alpha,\rho}(t)||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{b-a}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left(|f'(a)|\frac{I_\rho^\alpha(a,b)}{(b-a)^2} + |f'(b)|\frac{I_\rho^\alpha(a,b)}{(b-a)^2}\right)$$

$$= \frac{I_\rho^\alpha(a,b)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha (b-a)}(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır.

**Uyarı 3.15 :** (3.29) eşitsizliğinde $\rho \to 1$ için Teorem 3.6 elde edilir.

**İspat :** (3.29) eşitsizliğinde $\rho \to 1$ için,

$$\lim_{\rho\to1}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha}\left[{}^\rho I_{a^+}^\alpha F(b) + {}^\rho I_{b^-}^\alpha F(a)\right]\right|$$

$$\leq \lim_{\rho\to1}\frac{I_\rho^\alpha(a,b)}{4(b^\rho - a^\rho)^\alpha (b-a)}(|f'(a)| + |f'(b)|) \quad (3.33)$$

yazılabilir. Öncelikle $\lim\limits_{\rho\to1} I_\rho^\alpha(a,b)$ limiti hesaplanmalıdır.

$$\lim_{\rho\to1} I_\rho^\alpha(a,b) = \lim_{\rho\to1}[\mathcal{L}^\alpha(\rho,b,b) + \mathcal{L}^\alpha(\rho,a,b) - \mathcal{L}^\alpha(\rho,b,a) - \mathcal{L}^\alpha(\rho,a,a)]$$

$$= \mathcal{L}^\alpha(1,b,b) + \mathcal{L}^\alpha(1,a,b) - \mathcal{L}^\alpha(1,b,a) - \mathcal{L}^\alpha(1,a,a) \quad (3.34)$$

$$\mathcal{L}^{\alpha}(1,b,b) = \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |b-u||b-u|^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |b-u||b-u|^{\alpha}du$$

$$= \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} (b-u)^{\alpha+1}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)^{\alpha+1}du = -\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)}$$

$$\mathcal{L}^{\alpha}(1,a,b) = \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |a-u||b-u|^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |a-u||b-u|^{\alpha}du$$

$$= \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} (u-a)(b-u)^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (u-a)(b-u)^{\alpha}du$$

$$= -\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha}(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)}$$

$$\mathcal{L}^{\alpha}(1,b,a) = \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |b-u||a-u|^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |b-u||a-u|^{\alpha}du$$

$$= \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} (b-u)(u-a)^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)(u-a)^{\alpha}du$$

$$= \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha}(\alpha+1)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)}$$

$$\mathcal{L}^{\alpha}(1,a,a) = \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |a-u||a-u|^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |a-u||a-u|^{\alpha}du$$

$$= \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} (u-a)^{\alpha+1}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (u-a)^{\alpha+1}du = \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)}$$

bulunur. Elde edilen bu değerler (3.34)'te yerine yazılırsa,

$$\lim_{\rho\to 1} I_\rho^\alpha(a,b) = -\frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha}(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)}$$
$$- \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha}(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)} - \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)}$$
$$- \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{2^{\alpha+1}(\alpha+2)} + \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+2)} = \frac{2(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.35) eşitliği (3.33)'te yerine yazılır ve Lemma 3.7 kullanılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(b-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^\alpha F(b) + J_{b^-}^\alpha F(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

$\alpha > 0$ ve $x, y \in [a,b]$ için,

$$\mathcal{W}^\alpha(x,y) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |x-u| \left|\ln\frac{u}{y}\right|^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |x-u| \left|\ln\frac{u}{y}\right|^\alpha du$$

operatörü tanımlansın. (3.29) eşitsizliğinde $\rho \to 0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.16 :** $\alpha > 0$ olsun. $f \in C^1(I^\circ)$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$K^\alpha(a,b) = \mathcal{W}^\alpha(b,b) + \mathcal{W}^\alpha(a,b) - \mathcal{W}^\alpha(b,a) - \mathcal{W}^\alpha(a,a)$ olmak üzere,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[\boldsymbol{J}_{a^+}^\alpha F(b) + \boldsymbol{J}_{b^-}^\alpha F(a)\right]\right| \leq \frac{K^\alpha(a,b)}{4(b-a)\left(\ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** (3.29) eşitsizliğinde $\rho \to 0$ yazılır ve Lemma 3.7'deki

$\lim_{\rho\to 0^+} {}^\rho I_{a^+}^\alpha f(x) = \boldsymbol{J}_{a^+}^\alpha f(x)$,

$\lim_{\rho\to 0^+} {}^\rho I_{b^-}^\alpha f(x) = \boldsymbol{J}_{b^-}^\alpha f(x)$ eşitlikleri de kullanılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4(\ln b-\ln a)^{\alpha}}\left[\boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}F(b)+\boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}F(a)\right]\right|$$
$$\leq\frac{(|f'(a)|+|f'(b)|)}{4(b-a)}\lim_{\rho\to 0}\frac{I_{\rho}^{\alpha}(a,b)}{4(\ln b-\ln a)^{\alpha}}$$

bulunur. Burada $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{I_{\rho}^{\alpha}(a,b)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}$ limiti hesaplanmalıdır.

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{I_{\rho}^{\alpha}(a,b)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{[\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,b,b)+\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,a,b)-\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,b,a)-\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,a,a)]}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}$$

eşitliğinde limitler tek tek hesaplanırsa,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,b,b)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|b-u|\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{b^{\rho}-u^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|b-u|\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{b^{\rho}-u^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right|^{\alpha}du$$
$$=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^{\alpha}}\left[\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|b-u|\left|\ln\frac{u}{b}\right|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|b-u|\left|\ln\frac{u}{b}\right|^{\alpha}du\right]$$
$$=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^{\alpha}}\mathcal{W}^{\alpha}(b,b)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,a,b)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|a-u|\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{b^{\rho}-u^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|a-u|\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{b^{\rho}-u^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right|^{\alpha}du$$
$$=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^{\alpha}}\left[\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|a-u|\left|\ln\frac{u}{b}\right|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|a-u|\left|\ln\frac{u}{b}\right|^{\alpha}du\right]$$
$$=\frac{1}{(\ln b-\ln a)^{\alpha}}\mathcal{W}^{\alpha}(a,b)$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{L}^{\alpha}(\rho,b,a)}{(b^{\rho}-a^{\rho})^{\alpha}}=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|b-u|\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{a^{\rho}-u^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|b-u|\lim_{\rho\to 0}\left|\frac{a^{\rho}-u^{\rho}}{b^{\rho}-a^{\rho}}\right|^{\alpha}du$$

$$= \frac{1}{(\ln b - \ln a)^{\alpha}} \left[ \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |b-u| \left| \ln \frac{u}{a} \right|^{\alpha} du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |b-u| \left| \ln \frac{u}{a} \right|^{\alpha} du \right]$$

$$= \frac{1}{(\ln b - \ln a)^{\alpha}} \mathcal{W}^{\alpha}(b,a)$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\mathcal{L}^{\alpha}(\rho, a, a)}{(b^{\rho} - a^{\rho})^{\alpha}} = \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |a-u| \lim_{\rho \to 0} \left| \frac{a^{\rho} - u^{\rho}}{b^{\rho} - a^{\rho}} \right|^{\alpha} du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |a-u| \lim_{\rho \to 0} \left| \frac{a^{\rho} - u^{\rho}}{b^{\rho} - a^{\rho}} \right|^{\alpha} du$$

$$= \frac{1}{(\ln b - \ln a)^{\alpha}} \left[ \int_{a}^{\frac{a+b}{2}} |a-u| \left| \ln \frac{u}{a} \right|^{\alpha} du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |a-u| \left| \ln \frac{u}{a} \right|^{\alpha} du \right]$$

$$= \frac{1}{(\ln b - \ln a)^{\alpha}} \mathcal{W}^{\alpha}(a,a)$$

elde edilir. Bulunan eşitliklerden,

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{I_{\rho}^{\alpha}(a,b)}{(b^{\rho} - a^{\rho})^{\alpha}} = \frac{\mathcal{W}^{\alpha}(b,b) + \mathcal{W}^{\alpha}(a,b) - \mathcal{W}^{\alpha}(b,a) - \mathcal{W}^{\alpha}(a,a)}{(\ln b - \ln a)^{\alpha}} = \frac{K^{\alpha}(a,b)}{(\ln b - \ln a)^{\alpha}}$$

yazılabilir. O halde elde edilen değerler ilk eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\alpha}} \left[ \boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha} F(b) + \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha} F(a) \right] \right| \leq \frac{K^{\alpha}(a,b)}{4(b-a)\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\alpha}} \left( |f'(a)| + |f'(b)| \right)$$

sonucuna ulaşılır.

# 4. KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN HERMİTE-HADAMARD TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, bir fonksiyonun başka bir fonksiyona göre kesirli integralini içeren Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler incelenmiştir. Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integralleri genelleştirilmiştir [11].

$f: I^{\circ} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon $a, b \in I^{\circ}$ ve $0 < a < b < \infty$ olsun. $f \in L^{\infty}(a,b)$ olmak üzere, $I^{\alpha}_{a^+:g} f(x)$ ve $I^{\alpha}_{b^-:g} f(x)$ fonksiyonlarının iyi tanımlı olduğu varsayılsın. $x \in [a,b]$ için,

$$\tilde{f}(x) = f(a+b-x)$$

ve

$$F(x) = f(x) + \tilde{f}(x)$$

şeklinde tanımlansın. O halde aşağıda verilen sonuç ortaya çıkar.

**Teorem 4.1 :** $\alpha > 0$ olsun. $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left(I^{\alpha}_{a^+:g}F(b) + I^{\alpha}_{b^-:g}F(a)\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{4.1}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** $s \in [0,1]$ için $u = sa + (1-s)b$ ve $v = (1-s)a + sb$ kabul edilsin. $f$ fonksiyonunun konveksliğinden,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)$$

yani

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(sa+(1-s)b\,) + \frac{1}{2}f\big((1-s)a+sb\big) \tag{4.2}$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.2)'nin her iki tarafı

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}}$$

ile çarpılır $(0,1)$ aralığında $s$'ye göre integrallenirse,

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f(sa+(1-s)b\,)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$+\frac{1}{2} \frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f\big((1-s)a+sb\big)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}} ds \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada $x = g(b) - g(sb + (1-s)a)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$= \int_{g(b)-g(a)}^{0} -\frac{1}{(b-a)} x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha(b-a)} [g(b)-g(a)]^{\alpha}$$

eşitliği bulunur. (2.10) kullanılarak,

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f(sb+(1-s)a)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}} ds = I_{a^+;g}^{\alpha} f(b)$$

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f\big((1-s)a+sb\big)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$= I_{a^+;g}^{\alpha} \tilde{f}(b)$$

eşitlikleri yazılabilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.3)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{I_{a^+;g}^{\alpha} f(b) + I_{a^+;g}^{\alpha} \tilde{f}(b)}{2} = \frac{I_{a^+;g}^{\alpha} F(b)}{2} \tag{4.4}$$

bulunur. Eşitsizliğin sol tarafı elde edilir. Benzer şekilde (4.2)'nin her iki tarafı

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}}$$

ile çarpılır $(0,1)$ aralığında $s$'ye göre integrallenirse,

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f(sa+(1-s)b\,)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$+\frac{1}{2} \frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}} ds \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada $x = g(sb+(1-s)a) - g(a)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}} ds$$

$$= \int_0^{g(b)-g(a)} \frac{1}{(b-a)} x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha(b-a)} [g(b)-g(a)]^{\alpha}$$

eşitliği bulunur. (2.11) kullanılarak,

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}} ds = I^{\alpha}_{b^-;g} f(a)$$

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a) f(sa+(1-s)b)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}} ds = I^{\alpha}_{b^-;g} \tilde{f}(a)$$

eşitlikleri yazılabilir. Elde edilen bu eşitlikler (4.5)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{I^{\alpha}_{b^-;g}\tilde{f}(a) + I^{\alpha}_{b^-;g} f(a)}{2} = \frac{I^{\alpha}_{b^-;g} F(a)}{2} \tag{4.6}$$

bulunur. Böylece (4.4) ve (4.6) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}} \left(I^{\alpha}_{a^+;g} F(b) + I^{\alpha}_{b^-;g} F(a)\right)$$

elde edilir ve ilk eşitsizlik ispatlanmış olur.

$\forall s \in [0,1]$ için $f$ konveks olduğundan,

$$f(sa+(1-s)b)+f(sb+(1-s)a)\le f(a)+f(b) \tag{4.7}$$

yazılabilir. (4.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\frac{g\prime(sb+(1-s)a)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}}$ ile çarpılıp $(0,1)$ aralığında $s$'ye göre integrallenirse,

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)f(sa+(1-s)b\,)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}}ds$$
$$+\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)f\big((1-s)a+sb\big)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}}ds$$
$$\le (f(a)+f(b))\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{1-\alpha}}ds$$

bulunur. (2.10) ve daha önce hesaplanan integral yardımıyla elde edilen bu eşitsizlik aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$I^{\alpha}_{a^+;g}F(b)\le \frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}(f(a)+f(b)). \tag{4.8}$$

Benzer şekilde (4.7)'nin her iki tarafı $\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\frac{g\prime(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}}$ ile çarpılır $(0,1)$ aralığında $s$'ye göre integrallenirse,

$$\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)f(sa+(1-s)b\,)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}}ds$$
$$+\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)f(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}}ds$$
$$\le (f(a)+f(b))\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \frac{g'(sb+(1-s)a)}{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{1-\alpha}}ds$$

bulunur. (2.11) ve daha önce hesaplanan integral yardımıyla eşitsizliğin aşağıdaki şekilde yazılabileceği kolayca görülebilir.

$$I^{\alpha}_{b^-;g}F(a)\le \frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\big(f(a)+f(b)\big). \tag{4.9}$$

(4.8) ve (4.9) taraf tarafa toplanırsa istenilen ikinci eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left(I_{a^{+};g}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};g}^{\alpha}F(a)\right)\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

(4.1) eşitsizliğinde $g(x)=x$ olarak alınırsa [10]'da ispatlanan aşağıdaki sonuç elde edilir.

$\Xi_{\alpha,g}(t)\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha>0$ için,

$$\begin{aligned}\Xi_{\alpha,g}(t)&=[g(ta+(1-t)b)-g(a)]^{\alpha}-[g(tb+(1-t)a)-g(a)]^{\alpha}\\&\quad+[g(b)-g(tb+(1-t)a)]^{\alpha}-[g(b)-g(ta+(1-t)b)]^{\alpha}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

**Lemma 4.2 :** $\alpha>0$ olsun. $f\in C^{1}(I^{\circ})$ ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left(I_{a^{+}:g}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-}:g}^{\alpha}F(a)\right)\\&\qquad=\frac{(b-a)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\int_{0}^{1}\Xi_{\alpha,g}(t)f'(ta+(1-t)b)dt.\end{aligned}\tag{4.10}$$

**İspat :** Kısmi integrasyon yardımıyla,

$$\begin{aligned}I_{a^{+}:g}^{\alpha}F(b)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{b}\frac{g'(\tau)F(\tau)}{[g(b)-g(\tau)]^{1-\alpha}}d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{b}g'(\tau)F(\tau)[g(b)-g(\tau)]^{\alpha-1}d\tau\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{F(\tau)[g(b)-g(\tau)]^{\alpha}}{\alpha}\bigg|_{a}^{b}+\int_{a}^{b}\frac{[g(b)-g(\tau)]^{\alpha}}{\alpha}F'(\tau)d\tau\right]\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-\frac{F(b)[g(b)-g(b)]^{\alpha}}{\alpha}+\frac{F(a)[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\alpha}\right.\\&\qquad\left.+\int_{a}^{b}\frac{[g(b)-g(\tau)]^{\alpha}}{\alpha}F'(\tau)d\tau\right]\\&=\frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}F(a)+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_{a}^{b}[g(b)-g(\tau)]^{\alpha}F'(\tau)d\tau\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\tau=sb+(1-s)a$ alınırsa,

$$I^{\alpha}_{a^+:g}F(b) = \frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}F(a)$$
$$+\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 [g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{\alpha}F'(sb+(1-s)a)ds \qquad (4.11)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,

$$I^{\alpha}_{b^-:g}F(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{g'(\tau)F(\tau)}{[g(\tau)-g(a)]^{1-\alpha}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b g'(\tau)F(\tau)[g(\tau)-g(a)]^{\alpha-1}d\tau$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{F(\tau)[g(\tau)-g(a)]^{\alpha}}{\alpha}\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{[g(\tau)-g(a)]^{\alpha}}{\alpha}F'(\tau)d\tau\right]$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{F(b)[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\alpha} - \frac{F(a)[g(a)-g(a)]^{\alpha}}{\alpha}\right.$$
$$\left.-\int_a^b \frac{[g(\tau)-g(a)]^{\alpha}}{\alpha}F'(\tau)d\tau\right]$$
$$=\frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}F(b) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b [g(\tau)-g(a)]^{\alpha}F'(\tau)d\tau$$

yazılabilir. Burada $\tau = sb+(1-s)a$ alınırsa,

$$I^{\alpha}_{b^-:g}F(a) = \frac{[g(b)-g(a)]^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}F(b)$$
$$-\frac{(b-a)}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^1 [g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{\alpha}F'(sb+(1-s)a)ds \qquad (4.12)$$

eşitliği ortaya çıkar. (4.11) ve (4.12) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve düzenlenirse,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left[I^{\alpha}_{a^+:g}F(b) + I^{\alpha}_{b^-:g}F(a)\right]$$
$$=\frac{(b-a)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\int_0^1 \{[g(sb+(1-s)a)-g(a)]^{\alpha}$$
$$-[g(b)-g(sb+(1-s)a)]^{\alpha}\}F'(sb+(1-s)a)ds \qquad (4.13)$$

bulunur. Diğer yandan,

$$F(x) = f(x) + \tilde{f}(x)$$

$$F(x) = f(x) + f(a + b - x)$$

eşitlikleri bilindiğinden fonksiyonun türevi alınırsa,

$$F'(x) = f'(x) - f'(a + b - x)$$

eşitliği elde edilir. $s \in [0,1]$ için $x = sb + (1 - s)a$ yazılırsa,

$$F'(sb + (1 - s)a) = f'(sb + (1 - s)a) - f'(sa + (1 - s)b)$$

bulunur. Buradan,

$$\int_0^1 [g(sb + (1 - s)a) - g(a)]^\alpha F'(sb + (1 - s)a)ds$$

$$= \int_0^1 [g(sb + (1 - s)a) - g(a)]^\alpha \big(f'(sb + (1 - s)a)$$

$$- f'(sa + (1 - s)b)\big)ds$$

$$= \int_0^1 [g(sb + (1 - s)a) - g(a)]^\alpha f'(sb + (1 - s)a)ds$$

$$- \int_0^1 [g(sb + (1 - s)a) - g(a)]^\alpha f'(sa + (1 - s)b)\, ds$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafında ilk integralde $s = 1 - t$, ikinci integralde $s = t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 [g(sb + (1 - s)a) - g(a)]^\alpha F'(sb + (1 - s)a)ds$$

$$= \int_0^1 [g(ta + (1 - t)b) - g(a)]^\alpha f'(ta + (1 - t)b)dt$$

$$- \int_0^1 [g(tb + (1 - t)a) - g(a)]^\alpha f'(ta + (1 - t)b)\, dt \qquad (4.14)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\int_0^1 [g(b) - g(sb + (1-s)a)]^\alpha F'(sb + (1-s)a)ds =$$

$$= \int_0^1 [g(b) - g(sb + (1-s)a)]^\alpha \big(f'(sb + (1-s)a)$$

$$- f'(sa + (1-s)b)\big)ds$$

$$= \int_0^1 [g(b) - g(sb + (1-s)a)]^\alpha f'(sb + (1-s)a)ds$$

$$- \int_0^1 [g(b) - g(sb + (1-s)a)]^\alpha f'(sa + (1-s)b)\, ds$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafında ilk integralde $s = 1 - t$, ikinci integralde $s = t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 [g(b) - g(sb + (1-s)a)]^\alpha F'(sb + (1-s)a)ds$$

$$= \int_0^1 [g(b) - g(ta + (1-t)b)]^\alpha f'(ta + (1-t)b)dt$$

$$- \int_0^1 [g(b) - g(tb + (1-t)a)]^\alpha f'(ta + (1-t)b)\, dt \tag{4.15}$$

bulunur. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri (4.13)'te yerine yazılırsa,

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b) - g(a)]^\alpha}\left[I^\alpha_{a^+:g}F(b) + I^\alpha_{b^-:g}F(a)\right]$$

$$= \frac{(b-a)}{4[g(b) - g(a)]^\alpha}\int_0^1 \{[g(ta + (1-t)b) - g(a)]^\alpha$$

$$- [g(tb + (1-t)a) - g(a)]^\alpha - [g(b) - g(ta + (1-t)b)]^\alpha$$

$$+ [g(b) - g(tb + (1-t)a)]^\alpha\} f'(ta + (1-t)b)dt$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde istenilen sonuca ulaşılır.

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};g}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};g}^{\alpha}F(a)\right]$$
$$=\frac{(b-a)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\int_{0}^{1}\Xi_{\alpha,g}(t)\,f'(ta+(1-t)b)dt$$

böylece ispat tamamlanır.

$\alpha > 0$ olmak üzere $\forall x,y \in [a,b]$ için,

$$\mathcal{L}_{g}^{\alpha}(x,y)=\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}|x-u||g(y)-g(u)|^{\alpha}du-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}|x-u||g(y)-g(u)|^{\alpha}du$$

operatörü tanımlansın. O halde aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

**Teorem 4.3 :** $\alpha > 0$ olsun. $f \in C^{1}(I^{\circ})$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olmak üzere,

$$I_{g}^{\alpha}(a,b)=\mathcal{L}_{g}^{\alpha}(b,b)+\mathcal{L}_{g}^{\alpha}(a,b)-\mathcal{L}_{g}^{\alpha}(b,a)-\mathcal{L}_{g}^{\alpha}(a,a)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};g}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};g}^{\alpha}F(a)\right]\right|$$
$$\leq\frac{I_{g}^{\alpha}(a,b)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}(b-a)}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \tag{4.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** Lemma 4.2 ve $|f'|$ fonksiyonunun konveksliği kullanılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left[I_{a^{+};g}^{\alpha}F(b)+I_{b^{-};g}^{\alpha}F(a)\right]\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\int_{0}^{1}\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right||f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$

$$\leq\frac{(b-a)}{4[g(b)-g(a)]^{\alpha}}\left(|f'(a)|\int_{0}^{1}t\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right|dt+|f'(b)|\int_{0}^{1}(1-t)\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right|dt\right) \tag{4.17}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$\varphi(u) = [g(u) - g(a)]^{\alpha} - [g(b+a-u) - g(a)]^{\alpha} + [g(b) - g(a+b-u)]^{\alpha} - [g(b) - g(u)]^{\alpha}\,, \quad u \in [a,b]$$

fonksiyonu tanımlanmış olsun. O halde aşağıdaki integralde $u = ta + (1-t)b$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 t\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right|dt$$
$$= \int_0^1 t|[g(ta+(1-t)b) - g(a)]^{\alpha} - [g(tb+(1-t)a) - g(a)]^{\alpha}$$
$$+ [g(b) - g(tb+(1-t)a)]^{\alpha} - [g(b) - g(ta+(1-t)b)]^{\alpha}|dt$$
$$= \int_a^b \left(\frac{b-u}{b-a}\right)|[g(u) - g(a)]^{\alpha} - [g(b+a-u) - g(a)]^{\alpha}$$
$$+ [g(b) - g(a+b-u)]^{\alpha} - [g(b) - g(u)]^{\alpha}|\frac{du}{(b-a)}$$
$$= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du$$

eşitliği elde edilir. $\varphi$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında azalmayan bir fonksiyondur.

$$\varphi(a) = -2[g(b) - g(a)]^{\alpha} < 0$$

ve

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Sonuç olarak,

$$\begin{cases} \varphi(u) \leq 0\,, & a \leq u \leq \dfrac{a+b}{2} \\ \varphi(u) \geq 0\,, & \dfrac{a+b}{2} < u < b \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan $\int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du$ integrali hesaplandığında,

$$I_1 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)\,[g(b)-g(u)]^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)[g(b)-g(u)]^\alpha du = \mathcal{L}_g^\alpha(b,b)$$

$$I_2 = -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)\,[g(u)-g(a)]^\alpha du + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)[g(u)-g(a)]^\alpha du = -\mathcal{L}_g^\alpha(b,a)$$

$$I_3 = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)\,[g(b+a-u)-g(a)]^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)[g(b+a-u)-g(a)]^\alpha du$$
$$= -\mathcal{L}_g^\alpha(a,a)$$

$$I_4 = -\int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-u)\,[g(b)-g(a+b-u)]^\alpha du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (b-u)[g(b)-g(a+b-u)]^\alpha du$$
$$= \mathcal{L}_g^\alpha(a,b)$$

$$\int_0^1 t\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right|dt = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du$$
$$= \frac{\mathcal{L}_g^\alpha(b,b)+\mathcal{L}_g^\alpha(a,b)-\mathcal{L}_g^\alpha(b,a)-\mathcal{L}_g^\alpha(a,a)}{(b-a)^2} \tag{4.18}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde aşağıdaki integralde de $u = tb + (1-t)a$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 (1-t)\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right|dt$$
$$= \int_0^1 (1-t)|[g(ta+(1-t)b)-g(a)]^\alpha - [g(tb+(1-t)a)-g(a)]^\alpha$$
$$+ [g(b)-g(tb+(1-t)a)]^\alpha - [g(b)-g(ta+(1-t)b)]^\alpha|dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{b-u}{b-a}\right) |[g(b+a-u)-g(a)]^\alpha - [g(u)-g(a)]^\alpha + [g(b)-g(u)]^\alpha$$

$$- [g(b)-g(b+a-u)]^\alpha| \ \frac{du}{(b-a)} = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du$$

bulunur. Düzenlenirse,

$$\int_0^1 (1-t)\left|\Xi_{\alpha,g}(t)\right|dt = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b |\varphi(u)|(b-u)du$$

$$= \frac{\mathcal{L}_g^\alpha(b,b)+\mathcal{L}_g^\alpha(a,b)-\mathcal{L}_g^\alpha(b,a)-\mathcal{L}_g^\alpha(a,a)}{(b-a)^2}. \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.18) ve (4.19) eşitlikleri (4.17)'de yerine yazıldığında,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4[g(b)-g(a)]^\alpha}\left[I_{a^+;g}^\alpha F(b) + I_{b^-;g}^\alpha F(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{I_g^\alpha(a,b)}{4[g(b)-g(a)]^\alpha(b-a)} \ (|f'(a)|+|f'(b)|)$$

istenilen sonuca ulaşılır.

(4.16)'da $g(x) = \ln x$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 4.4 :** $\alpha > 0$ olsun. $f \in C^1(I^\circ)$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olmak üzere,

$$I_{\ln}^\alpha(a,b) = \mathcal{L}_{\ln}^\alpha(b,b) + \mathcal{L}_{\ln}^\alpha(a,b) - \mathcal{L}_{\ln}^\alpha(b,a) - \mathcal{L}_{\ln}^\alpha(a,a)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^\alpha}\left[\boldsymbol{J}_{a^+}^\alpha F(b) + \boldsymbol{J}_{b^-}^\alpha F(a)\right]\right| \leq \frac{I_{\ln}^\alpha(a,b)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^\alpha(b-a)}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat :** $I_{a^+;g}^\alpha F(b)$, $I_{b^-;g}^\alpha F(a)$ tanımlarında özel olarak $g(x) = \ln x$ seçilirse,

$$I_{a^+;g}^{\alpha}F(b) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{g'(\tau)f(\tau)}{[g(b)-g(\tau)]^{1-\alpha}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{\frac{1}{\tau}f(\tau)}{[\ln b - \ln \tau]^{1-\alpha}}d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{b}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau = \boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}F(b)$$

$$I_{b^-;g}^{\alpha}F(a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{g'(\tau)f(\tau)}{[g(\tau)-g(a)]^{1-\alpha}}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{\frac{1}{\tau}f(\tau)}{[\ln \tau - \ln a]^{1-\alpha}}d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\ln\frac{\tau}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau = \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}F(a)$$

eşitlikleri yazılabilir. $I_g^{\alpha}(a,b)$ eşitliğinde $g(x) = \ln x$ seçilirse,

$$\mathcal{L}_g^{\alpha}(x,y) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |x-u||\ln y - \ln u|^{\alpha}du - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |x-u||\ln y - \ln u|^{\alpha}du = \mathcal{L}_{\ln}^{\alpha}(b,b)$$

$$I_{\ln}^{\alpha}(a,b) = \mathcal{L}_{\ln}^{\alpha}(b,b) + \mathcal{L}_{\ln}^{\alpha}(a,b) - \mathcal{L}_{\ln}^{\alpha}(b,a) - \mathcal{L}_{\ln}^{\alpha}(a,a)$$

eşitlikleri sağlanır. Elde edilen bu değerler (4.16)'da yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}}\left[\boldsymbol{J}_{a^+}^{\alpha}F(b) + \boldsymbol{J}_{b^-}^{\alpha}F(a)\right]\right| \leq \frac{I_{\ln}^{\alpha}(a,b)}{4\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}(b-a)}(|f'(a)| + |f'(b)|)$$

ispat tamamlanır.

# 5. s-KONVEKS FONKSİYONLAR YARDIMIYLA KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde [12]'deki Riemann-Liouville kesirli integrali yardımıyla s-konveks tipi eşitsizlikler incelenmiştir.

**Teorem 5.1 :** $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon, $s\in(0,1)$, $a,b\in[0,\infty)$ ve $a<b$ olsun. $f\in L_1([a,b])$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{5.1}$$

**İspat :** $f$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks olduğundan, $\forall t\in[0,1]$ için,

$$f(ta+(1-t)b)\le t^s f(a)+(1-t)^s f(b)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)ds\le f(a)\int_0^1 t^s\,ds+f(b)\int_0^1(1-t)^s\,ds$$

$$=f(a)\frac{t^{s+1}}{s+1}\bigg|_0^1-f(b)\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1}\bigg|_0^1=\frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

elde edilir. Burada $\int_0^1 f(ta+(1-t)b)ds$ integralinde $x=ta+(1-t)b$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)ds=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

(5.1) eşitsizliğinin sağ tarafı ispatlanmış olur. Sol tarafın ispatında $\forall x,y\in[0,\infty)$ için,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{1}{2^s}f(x)+\frac{1}{2^s}f(y)=\frac{f(x)+f(y)}{2^s}$$

eşitsizliği göz önüne alınsın. Bu eşitsizlikte $\forall t\in[0,1]$ için $x=ta+(1-t)b$ ve $y=tb+(1-t)a$ yazılıp, $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \le \frac{1}{2^s}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)dt + \int_0^1 f(tb+(1-t)a)dt\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2^s}\left[\int_a^b f(x)\frac{dx}{b-a} + \int_a^b f(x)\frac{dx}{b-a}\right] = \frac{1}{2^s}\left[\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]$$

bulunur. Eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

eşitsizliğine ulaşılır ve (5.1)'in sol tarafı da gösterilmiş olur, ispat tamamlanır.

[13]'te Kırmacı ve diğerleri aşağıda verilen ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hadamard tipi eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

**Teorem 5.2 :** $f: I \to \mathbb{R}$, , $I \subset [0,\infty)$ fonksiyonu $a, b \in I$, $a < b$ için $f' \in L_1([a,b])$ olmak üzere, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1)$ sabit ve $q \ge 1$ için $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s-konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\left[|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \tag{5.2}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** $q = 1$ olsun. Lemma 3.1 kullanılarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt \tag{5.3}$$

elde edilir. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s-konveks olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için,

$$|f'(ta+(1-t)b)| \leq t^s|f'(a)| + (1-t)^s|f'(b)|$$

eşitsizliği sağlandığından, (5.3)'de yazıldığında,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|[t^s|f'(a)| + (1-t)^s|f'(b)|]dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 [t^s(1-2t)|f'(a)| + (1-t)^s|1-2t||f'(b)|]dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} [t^s|1-2t||f'(a)| + (1-t)^s(1-2t)|f'(b)|]dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 [t^s(2t-1)|f'(a)| + (1-t)^s(2t-1)|f'(b)|]dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(s+\frac{1}{2^s}\right)[|f'(a)| + |f'(b)|]$$

bulunur. $q=1$ durumu için ispat tamamlanmış olur. $q>1$ olsun. Power Mean eşitsizliği kullanılırsa, $q>1$ ve $p=\frac{q}{q-1}$ için,

$$\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt = \int_0^1 |1-2t|^{1-\frac{1}{q}}|1-2t|^{\frac{1}{q}}|f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında s-konveks olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için,

$$|f'(ta+(1-t)b)|^q \leq t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(b)|^q$$

eşitsizliğinin doğruluğu bilindiğinden,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|^{1-\frac{1}{q}}|1-2t|^{\frac{1}{q}}|f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |1-2t|[t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(b)|^q]\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(s+\frac{1}{2^s}\right)[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]\right]^{\frac{1}{q}} = \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

yazılabilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 5.3 :** $f: I° \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I°$, $a < b$ ve $p > 1$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ dönüşümü $[a, b]$ aralığında konveks ise aşağıda verilen eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{1-p}{p}}. \tag{5.4}$$

**İspat :** Lemma 3.1, $|f'|^{\frac{p}{p-1}} = |f'|^q$ dönüşümünün $[a, b]$ aralığında konveksliği ve Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ olmak şartıyla,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 [t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q]\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^p\, dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|^q\int_0^1 tdt+|f'(b)|^q\int_0^1 (1-t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right]^{\frac{1-p}{p}}$$

istenilen eşitsizliğe ulaşılır.

[14]’te Set ve diğerleri, Riemann-Liouville kesirli integrali yardımıyla aşağıda verilen ikinci anlamda s-konveks Hadamard tipi eşitsizlikleri incelemişlerdir.

**Teorem 5.4 :** $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olmak üzere, $(a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ise $s\in(0,1]$ sabiti ve $q\geq 1$ için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{2}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\beta\left(\frac{1}{2},s+1,\alpha+1\right)-\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+1,s+1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2^{\alpha+s}-1}{(\alpha+s+1)2^{\alpha+s}}\right]^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^{q}+|f'(b)|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5.5)$$

**İspat :** $q=1$ olduğunu kabul edelim. Lemma 3.5'ten,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)b)|dt$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|$ , $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks olduğundan,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|\left[t^{s}\left|f'(a)+(1-t)^{s}|f'(b)|\right|\right]dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha})[t^{s}|f'(a)|+(1-t)^{s}|f'(b)|]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha})[t^{s}|f'(a)|+(1-t)^{s}|f'(b)|]dt\right\}$$

$$= \frac{b-a}{2}\left\{ |f'(a)| \left( \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^\alpha t^s dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha t^s dt \right) \right.$$

$$+ |f'(b)| \left( \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^\alpha (1-t)^s dt - \int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha (1-t)^s dt \right)$$

$$+ |f'(a)| \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha t^s dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha t^s dt \right)$$

$$\left. + |f'(b)| \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha (1-t)^s dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha (1-t)^s dt \right) \right\} \tag{5.6}$$

elde edilir. Burada gerekli integraller hesaplandığında,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^\alpha t^s dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha (1-t)^s dt = \beta\left(\frac{1}{2}, s+1, \alpha+1\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha (1-t)^s dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha t^s dt = \beta\left(\frac{1}{2}, \alpha+1, s+1\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+s} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{\alpha+s} dt = \frac{1}{2^{s+\alpha+1}(s+\alpha+1)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+s} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{\alpha+s} dt = \frac{1}{s+\alpha+1} - \frac{1}{2^{s+\alpha+1}(s+\alpha+1)}$$

bulunur. Bu değerler (5.6)’ta yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left\{\beta\left(\frac{1}{2},s+1,\alpha+1\right)-\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+1,s+1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2^{s+\alpha}-1}{2^{s+\alpha+1}(s+\alpha+1)}\right\}[|f'(a)|+|f'(b)|]$$

elde edilir. Böylece $q=1$ için ispat tamamlanır. $q>1$ olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveksliği ve Power Mean integral eşitsizliği kullanılırsa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak şartıyla,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)b)|\,dt$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|^{\frac{q-1}{q}}|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|^{\frac{1}{q}}|f'(ta+(1-t)b)|dt\right)$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|\,dt\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}\right.$$
$$\left.-t^{\alpha}|\,|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 5.5** $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $a<r\leq b$ ve $f'\in L[a,b]$ olmak üzere, $(a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ise, $s\in(0,1]$ sabiti için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\left[\beta\left(\frac{1}{2},s+1,\alpha+1\right)-\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+1,s+1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2^{\alpha+s}-1}{(\alpha+s+1)2^{\alpha+s}}\right]^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|+|f'(r)|).$$

**İspat :** Lemma 3.5 ve $|f'|$ , $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks olduğundan,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)r)|dt$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|\left[t^s\left|f'(a)+(1-t)^s|f'(r)|\right|\right]dt$$

$$=\frac{r-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}((1-t)^{\alpha}-t^{\alpha})[t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(r)|]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (t^{\alpha}-(1-t)^{\alpha})[t^s|f'(a)|+(1-t)^s|f'(r)|]dt\right\}$$

$$= \frac{r-a}{2}\left\{|f'(a)|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}t^s dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha}t^s dt\right)\right.$$

$$+|f'(r)|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha}(1-t)^s dt-\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha}(1-t)^s dt\right)$$

$$+|f'(a)|\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha}t^s dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}t^s dt\right)$$

$$\left.+|f'(r)|\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha}(1-t)^s dt-\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}(1-t)^s dt\right)\right\}$$

yazılabilir. Burada gerekli integraller Teorem 5.4'teki ispatlara benzer şekilde yapılır ve hesaplanan değerler yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\left\{\beta\left(\frac{1}{2},s+1,\alpha+1\right)-\beta\left(\frac{1}{2},\alpha+1,s+1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2^{s+\alpha}-1}{2^{s+\alpha+1}(s+\alpha+1)}\right\}\left[|f'(a)|+|f'(r)|\right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 5.6 :** $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $a<r\leq b$ ve $f'\in L[a,b]$ olmak üzere, $(a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ise $s\in(0,1]$ sabit, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $\alpha\in[0,1]$ olmak üzere, aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{r-a}{2}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**İspat :** Lemma 3.5 ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{r-a}{2}\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)r)|dt$$

$$\leq\frac{r-a}{2}\left(\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1|f'(ta+(1-t)r)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. $\alpha\in[0,1]$ ve $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ için,

$$|t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}|\leq|t_1-t_2|^{\alpha}$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|^p dt\leq\int_0^1|1-2t|^{\alpha p}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}[1-2t]^{\alpha p}dt+\int_{\frac{1}{2}}^1[2t-1]^{\alpha p}dt=\frac{1}{\alpha p+1}$$

bulunur. $|f'|^{q}$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks olduğundan,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq\frac{r-a}{2}\int_0^1|(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)r)|dt$$

$$\leq\frac{r-a}{2}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1[t^s|f'(a)|^q+(1-t)^s|f'(r)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{r-a}{2}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(r)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

sonucuna ulaşılır.

**Sonuç 5.7 :** Teorem 5.6'da $r = b$ seçilirse,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b) + J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Teorem 5.8 :** $f:[a,b] \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a < r \leq b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere, $(a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks ise $s \in (0,1]$ sabiti ve $q \geq 1$ için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r) + J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{r-a}{2}\left[\frac{2}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, s+1, \alpha+1\right) - \beta\left(\frac{1}{2}, \alpha+1, s+1\right)\right.$$
$$\left. + \frac{2^{\alpha+s}-1}{(\alpha+s+1)2^{\alpha+s}}\right]^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q + |f'(r)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

**İspat :** Lemma 3.5 ve Power Mean integral eşitsizliği kullanılırsa $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ olmak şartıyla,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r) + J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{r-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)r)|\,dt$$
$$\leq \frac{r-a}{2}\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}\right.$$
$$\left. - t^{\alpha}|\,|f'(ta+(1-t)r)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.7}$$

eşitsizliği yazılabilir. Elde edilen integraller hesaplandığında,

$$\int_0^1 |(1-t)^\alpha - t^\alpha|\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^\alpha - t^\alpha]\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^\alpha - (1-t)^\alpha] dt$$

$$= \frac{2}{\alpha+1}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)$$

bulunur. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konveks oluğundan $t \in [0,1]$ için,

$$|f'(ta + (1-t)r)|^q \le t^s |f'(a)|^q + (1-t)^s |f'(r)|^q$$

eşitsizliği kullanılarak,

$$\int_0^1 |(1-t)^\alpha - t^\alpha|\, |f'(ta+(1-t)r)|^q dt$$

$$\le \int_0^{\frac{1}{2}} [(1-t)^\alpha - t^\alpha]\, [t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s|f'(r)|^q] dt$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 [t^\alpha - (1-t)^\alpha][t^s|f'(a)|^q$$

$$+ (1-t)^s|f'(r)|^q] dt$$

yazılabilir. Buradaki integraller hesaplandığında,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^\alpha t^s dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t^\alpha (1-t)^s dt = \beta\left(\frac{1}{2}, s+1, \alpha+1\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha (1-t)^s dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^\alpha t^s dt = \beta\left(\frac{1}{2}, \alpha+1, s+1\right)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+s}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+s}dt = \frac{1}{2^{s+\alpha+1}(s+\alpha+1)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\alpha+s}dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\alpha+s}dt = \frac{1}{s+\alpha+1} - \frac{1}{2^{s+\alpha+1}(s+\alpha+1)}$$

bulunur. Elde edilen değerler (5.7)'de yerine yazılırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r) + J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{r-a}{2}\left[\frac{2}{\alpha+1}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, s+1, \alpha+1\right) - \beta\left(\frac{1}{2}, \alpha+1, s+1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2^{\alpha+s}-1}{(\alpha+s+1)2^{\alpha+s}}\right]^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q + |f'(r)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

istenilen eşitsizliğe ulaşılır.

**Uyarı 5.9 :** Teorem 5.8'de $r = b$ seçilirse Teorem 5.4'teki (5.5) eşitsizliği elde edilir.

**Uyarı 5.10 :** Teorem 5.8'de $r = b$ ve $\alpha = 1$ seçilirse Teorem 5.2'deki (5.2) eşitsizliği elde edilir.

**İspat :** Teorem 5.8'de $r = b$ ve $\alpha = 1$ seçilirse,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(2)}{2(b-a)}\left[J_{a^+}^{1}f(b) + J_{b^-}^{1}f(a)\right]\right|$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, s+1, 2\right) - \beta\left(\frac{1}{2}, 2, s+1\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2^{1+s}-1}{(s+2)2^{1+s}}\right]^{\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q + |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.8}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlik düzenlenirse,

$$J_{a^+}^{1}f(b) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b (b-t)^{1-1}f(t)dt = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b f(t)dt$$

$$J_{b^-}^{1}f(a)=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b (t-a)^{1-1}f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^b f(t)dt$$

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)\,\big(\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\big)$$

$$\beta\left(\frac{1}{2},s+1,2\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} t^s(1-t)dt=\left(\frac{t^{s+1}}{s+1}-\frac{t^{s+2}}{s+2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}}{s+1}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+2}}{s+2}$$

$$\beta\left(\frac{1}{2},2,s+1\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-t)^s t dt=\left(\frac{(1-t)^{s+2}}{s+2}-\frac{(1-t)^{s+1}}{s+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+2}}{s+2}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{s+1}}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}$$

sonuçlarına ulaşılır. Bu değerler (5.8)'de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{s+\left(\frac{1}{2}\right)^s}{(s+1)(s+2)}\right]^{\frac{1}{q}}[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

istenilen sonuç elde edilmiş olur.

**Teorem 5.11 :** $f:[a,b]\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $a<r\leq b$ ve $f'\in L[a,b]$ olmak üzere, $(a,b)$ aralığında diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konkav ise $q\geq 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için aşağıdaki kesirli integral eşitsizliği doğrudur.

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^\alpha}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|\leq\frac{r-a}{2^{\frac{1-s}{q}}}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f'\left(\frac{a+r}{2}\right)\right|.$$

**İspat :** Lemma 3.5 ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)r)|\,dt$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)r)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (5.9)$$

yazılabilir. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında ikinci anlamda s-konkav olduğundan,

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

eşitsizliğini sağlar. Aşağıdaki integralde $x=ta+(1-t)r$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 |f'(ta+(1-t)r)|^q dt = \frac{1}{a-r}\int_r^a |f'(x)|^q dx$$

yazılabilir. İkinci anlamda s-konkavlıktan,

$$2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+r}{2}\right)\right|^q \geq \frac{1}{a-r}\int_r^a |f'(x)|^q dx$$

eşitsizliğine ulaşılır. $p>1$ için Minkowski eşitsizliği kullanılarak,

$$\left(\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |1-t|^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1 |-t|^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(-\frac{(1-t)^{\alpha p+1}}{\alpha p+1}\bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{t^{\alpha p+1}}{\alpha p+1}\bigg|_0^1\right)^{\frac{1}{p}}=2\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Elde edilen bu değerler (5.9)'da yazılıp düzenlenirse,

$$\left|\frac{f(a)+f(r)}{2}-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(r-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(r)+J_{r^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{r-a}{2}\int_0^1 |(1-t)^{\alpha}-t^{\alpha}||f'(ta+(1-t)r)|\,dt$$

$$\leq \frac{r-a}{2^{\frac{1-s}{q}}}\left(\frac{1}{\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f'\left(\frac{a+r}{2}\right)\right|$$

ispat tamamlanır.

## 6. GENELLEŞTİRİLMİŞ GEOMETRİK KONVEKS FONKSİYONLAR VE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikler için genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar tanıtılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir [15]. Aksi belirtilmediği sürece $I=[a,b]$'dir.

**Teorem 6.1 :** $f,g\colon I=[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonları $a,b\in I$ ve $a<b$ için $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$f\left(\sqrt{ab}\right)-\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]dx\le\int_a^b\frac{1}{x}f(x)dx$$
$$\le\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{1}{4}\Big(\eta\big(f(a),f(b)\big)+\eta\big(f(b),f(a)\big)\Big)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olsun. $\forall a,b\in I$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(a^tb^{1-t})\le(1-t)f(b)+t[f(b)+\eta(f(a),f(b))]$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenir ve eşitsizliğin solunda $x=a^tb^{1-t}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 f(a^tb^{1-t})dt\le\int_0^1\big[f(b)+t\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\,dt$$

$$\int_0^1 f(a^tb^{1-t})dt=\int_b^a f(x)\frac{dx}{a^t\ln a\,b^{1-t}-b^{1-t}\ln b\,a^t}=\int_a^b\frac{f(x)dx}{x(\ln b-\ln a)}$$
$$=\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{1}{x}f(x)dx$$

elde edilir. O halde,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b\frac{1}{x}f(x)dx\le\left[f(b)+\frac{1}{2}\eta(f(a),f(b))\right]$$

eşitsiziliği yazılabilir. (2.13) Jensen geometrik konveks fonksiyon eşitsizliğinde $x = (a^t b^{1-t})$ ve $y = (a^{1-t} b^t)$ yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f(\sqrt{ab}) \leq f(a^{1-t} b^t) + \frac{1}{2}\eta\big(f(a^t b^{1-t}), f(a^{1-t} b^t)\big).$$

Elde edilen bu eşitsizlik $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenir ve $x = (a^{1-t} b^t)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{ab}) \leq \int_0^1 f(a^{1-t} b^t)\, dt + \frac{1}{2}\eta \int_0^1 f(a^t b^{1-t}), f(a^{1-t} b^t)\, dt \\ = \int_a^b f(x) \frac{dx}{b^t\, a^{1-t} \ln b - a^{1-t} b^t \ln a} \\ + \frac{1}{2}\eta \int_a^b \left[f\left(\frac{ab}{x}\right), f(x)\right] \frac{dx}{b^t a^{1-t} \ln b - a^{1-t} b^t \ln a} \\ = \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x} f(x) dx + \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x}\eta \left[f\left(\frac{ab}{x}\right), f(x)\right] dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadeler düzenlenirse,

$$f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x}\eta \left[f\left(\frac{ab}{x}\right), f(x)\right] dx \leq \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x} f(x) dx \tag{6.1}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$f$ genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olduğundan,

$$f(a^t b^{1-t}) \leq f(b) + t\eta\big(f(a), f(b)\big) \tag{6.2}$$

$$f(a^{1-t} b^t) \leq f(a) + t\eta\big(f(b), f(a)\big) \tag{6.3}$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa,

$$f(a^t b^{1-t}) + f(a^{1-t} b^t) \le f(a) + f(b) + t\eta\big(f(a), f(b)\big) + t\eta\big(f(b), f(a)\big) \tag{6.4}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizlik $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenir $x = (a^t b^{1-t})$ ve $x = (a^{1-t} b^t)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t}) dt + \int_0^1 f(a^{1-t} b^t) dt$$
$$\le \int_0^1 \big[f(a) + f(b) + t\eta\big(f(a), f(b)\big) + t\eta\big(f(b), f(a)\big)\big] dt$$

bulunur. İntegraller hesaplandığında,

$$\frac{2}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x} f(x) dx \le f(a) + f(b) + \frac{1}{2}\big[\eta\big(f(a), f(b)\big) + \eta\big(f(b), f(a)\big)\big] \tag{6.5}$$

sonucuna ulaşılır. (6.1) ve (6.5) kullanılarak,

$$f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x} \eta \left[ f\left(\frac{ab}{x}\right), f(x) \right] dx \le \frac{1}{(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x} f(x) dx$$
$$\le \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{4}\big[\eta\big(f(a), f(b)\big) + \eta\big(f(b), f(a)\big)\big]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 6.2 :** Teorem 6.1'de $\eta(b, a) = b - a$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$f(\sqrt{ab}) \le \int_a^b \frac{1}{x} f(x) dx \le \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

**İspat :** Teorem 6.1'de $\eta(b, a) = b - a$ olarak seçilsin.

$$f(\sqrt{ab}) - \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \int_a^b \frac{1}{x} \left[\frac{ab}{x} - x\right] dx \le \int_a^b \frac{1}{x} f(x) dx$$
$$\le \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{1}{4}[f(a) - f(b) + f(b) - f(a)].$$

Gerekli hesaplamalar yapıldığında,

$$f(\sqrt{ab}) \leq \int_a^b \frac{1}{x} f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

sonucuna ulaşılır.

**Teorem 6.3 :** $f, g: I = [a,b] \rightarrow (0,\infty)$ fonksiyonları $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$M(a,b) = \left[[f(b) + \eta(f(a), f(b))][g(b) + \eta(g(a), g(b))] + f(b)g(b)\right] \tag{6.6}$$

$$N(a,b) = \left[f(b)[g(b) + \eta(g(a), g(b))] + g(b)[f(b) + \eta(f(a), f(b))]\right] \tag{6.7}$$

için,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x} [f(x)g(x)]dx \leq \frac{1}{3} M(a,b) + \frac{1}{6} N(a,b)$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(a^t b^{1-t}) \leq (1-t)f(b) + t\left[f(b) + \eta\big(f(a), f(b)\big)\right] \tag{6.8}$$

$$g(a^t b^{1-t}) \leq (1-t)g(b) + t\left[g(b) + \eta\big(g(a), g(b)\big)\right] \tag{6.9}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (6.8) ve (6.9) taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t})\, g(a^t b^{1-t}) dt$$

$$\leq f(b)g(b)\int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$+\Big[f(b)\big[g(b)+\eta\big(g(a),g(b)\big)\big]$$

$$+g(b)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\Big]\int_0^1 t(1-t)dt$$

$$+\Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(b)+\eta\big(g(a),g(b)\big)\big]\Big]\int_0^1 t^2 dt$$

$$=\frac{1}{3}f(b)g(b)+\frac{1}{6}\Big[f(b)\big[g(b)+\eta\big(g(a),g(b)\big)\big]+g(b)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\Big]$$

$$+\frac{1}{3}\Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(b)+\eta\big(g(a),g(b)\big)\big]\Big]$$

$$=\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b) \tag{6.10}$$

bulunur. Eşitsizliğin sol tarafında $x=a^t b^{1-t}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t})\, g(a^t b^{1-t})dt=\int_a^b f(x)g(x)\frac{dx}{b^{1-t}a^t\ln b-a^t b^{1-t}\ln a}$$

$$=\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)g(x)]dx$$

elde edilir. Bulunan sonuç (6.10)'da yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)g(x)]dx\leq\frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b)$$

istenilen sonuca ulaşılır.

**Teorem 6.4 :** $f,g\colon I=[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonları $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx$$
$$\leq \frac{1}{3}\Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]+f(b)g(a)\Big]$$
$$+\frac{1}{6}\Big[f(b)\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]+g(a)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\Big]$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. $\forall a,b\in I$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(a^t b^{1-t})\leq (1-t)f(b)+t\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big] \tag{6.11}$$

$$g(a^{1-t}b^t)\leq (1-t)g(a)+t\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big] \tag{6.12}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. (6.11) ve (6.12) taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t})g(a^{1-t}b^t)dt$$
$$\leq f(b)g(a)\int_0^1 (1-t)^2 dt$$
$$+\Big[f(b)\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]$$
$$+g(a)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\Big]\int_0^1 t(1-t)dt$$
$$+\Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\Big]\int_0^1 t^2 dt$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]+f(b)g(a)\Big]$$
$$+\frac{1}{6}\Big[f(b)\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]+g(a)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\Big] \tag{6.13}$$

bulunur. Eşitsizliğin sol tarafında $x = a^t b^{1-t}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\int_0^1 f(a^t b^{1-t})\, g(a^{1-t} b^t) dt = \int_a^b f(x) g\left(\frac{ab}{x}\right) \frac{dx}{b^{1-t} a^t \ln b - a^t b^{1-t} \ln a}$$

$$= \frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x} \left[ f(x) g\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx$$

elde edilir. Bulunan sonuç (6.13)'te yerine yazılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x} \left[ f(x) g\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx$$
$$\leq \frac{1}{3}\Big[\big[f(b) + \eta\big(f(a), f(b)\big)\big]\big[g(a) + \eta\big(g(b), g(a)\big)\big] + f(b)g(a)\Big]$$
$$+ \frac{1}{6}\Big[f(b)\big[g(a) + \eta\big(g(b), g(a)\big)\big] + g(a)\big[f(b) + \eta\big(f(a), f(b)\big)\big]\Big].$$

**Sonuç 6.5 :** Teorem 6.4'te $f = g$ ve $\eta(x, y) = x - y$ olarak seçilirse,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x} \left[ f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx \leq \frac{2}{3} f(b) f(a) + \frac{1}{6}[f^2(b) + f^2(a)]$$

eşitsizliği elde edilir.

**İspat :** Teorem 6.4'te $f = g$ ve $\eta(x, y) = x - y$ olarak seçilsin.

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x} \left[ f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx$$
$$\leq \frac{1}{3}\big[[f(b) + f(a) - f(b)][f(a) + f(b) - f(a)] + f(b)f(a)\big]$$
$$+ \frac{1}{6}\big[f(b)[f(a) + f(b) - f(a)] + f(a)[f(b) + f(a) - f(b)]\big]$$

bulunur. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x} \left[ f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx \leq \frac{2}{3} f(b) f(a) + \frac{1}{6}[f^2(b) + f^2(a)]$$

elde edilir.

**Teorem 6.6 :** $f, g: I = [a,b] \to (0,\infty)$ fonksiyonları $a,b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx$$
$$\leq \frac{1}{6}\{[f^2(b) + g^2(a)]$$
$$+ [[g(a) + \eta(g(b), g(a))]^2 + [f(b) + \eta(f(a), f(b))]^2]$$
$$+ \left[f(b)[f(b) + \eta(f(a), f(b)] + g(a)[g(a) + \eta(g(b), g(a))]\right]\}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. $\forall a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(a^t b^{1-t}) \leq (1-t)f(b) + t\left[f(b) + \eta\left(f(a), f(b)\right)\right] \tag{6.14}$$

$$g(a^{1-t} b^t) \leq (1-t)g(a) + t\left[g(a) + \eta\left(g(b), g(a)\right)\right] \tag{6.15}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx = \int_0^1 f(a^t b^{1-t})\, g(a^{1-t} b^t)dt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^1 [[f(a^t b^{1-t})]^2 + [g(a^{1-t} b^t)]^2]dt$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 \left[(1-t)f(b) + t[f(b) + \eta(f(a), f(b))]\right]^2\right.$$
$$\left. + \left[(1-t)g(a) + t[g(a) + \eta(g(b), g(a))]\right]^2\right\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg\{[f^2(b) + g^2(a)] \int_0^1 (1-t)^2 dt$$

$$+ [[g(a) + \eta(g(b), g(a))]^2 + [f(b) + \eta(f(a), f(b))]^2] \int_0^1 t^2 dt$$

$$+ \big[f(b)[f(b) + \eta(f(a), f(b))]$$

$$+ g(a)[g(a) + \eta(g(b), g(a))]\big] \int_0^1 2t(1-t) dt\Bigg\}$$

$$= \frac{1}{6}\big\{[f^2(b) + g^2(a)]$$
$$+ [[g(a) + \eta(g(b), g(a))]^2 + [f(b) + \eta(f(a), f(b))]^2]$$
$$+ \big[f(b)[f(b) + \eta(f(a), f(b))] + g(a)[g(a) + \eta(g(b), g(a))]\big]\big\}$$

eşitsizliği elde edilir.

**Sonuç 6.7 :** Teorem 6.6'da $f = g$ ve $\eta(b, a) = b - a$ seçilirse,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx \leq \frac{1}{3}\{[f^2(b) + f^2(a)] + [f(b)f(a)]\}$$

eşitsizliği bulunur.

**İspat :** Teorem 6.6'da, $f = g$ ve $\eta(b, a) = b - a$ olarak seçilsin.

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx$$
$$\leq \frac{1}{6}\big\{[f^2(b) + f^2(a)]$$
$$+ [[f(a) + f(b) - f(a)]^2 + [f(b) + f(a) - f(b)]^2]$$
$$+ \big[f(b)[f(b) + f(a) - f(b)] + f(a)[f(a) + f(b) - f(a)]\big]\big\}$$

eşitsizliği yazılır ve düzenlenirse,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a} \int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x) f\left(\frac{ab}{x}\right)\right] dx \leq \frac{1}{3}\{[f^2(b) + f^2(a)] + [f(b)f(a)]\}$$

sonucuna ulaşılır.

**Teorem 6.8 :** $f,g: I=[a,b]\rightarrow(0,\infty)$ fonksiyonları $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx$$
$$\leq \frac{1}{12}\Big\{[f(b)+g(a)]^2$$
$$+\left[\left[[f(b)+\eta(f(a),f(b))][g(a)+\eta(g(b),g(a))]\right]^2\right]$$
$$+(f(b)+g(a))\big[[f(b)+\eta(f(a),f(b)][g(a)+\eta(g(b),g(a))]\big]\Big\}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. $\forall a,b\in I$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(a^tb^{1-t})\leq(1-t)f(b)+t\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big] \tag{6.16}$$

$$g(a^{1-t}b^t)\leq(1-t)g(a)+t\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big] \tag{6.17}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)g\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx=\int_0^1 f(a^tb^{1-t})\,g(a^{1-t}b^t)dt$$
$$\leq\frac{1}{4}\int_0^1[f(a^tb^{1-t})+g(a^{1-t}b^t)]^2dt$$
$$\leq\frac{1}{4}\left\{\int_0^1\Big[(1-t)f(b)+t\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]+(1-t)g(a)\right.$$
$$\left.+t\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\Big]^2\right\}dt$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\int_0^1 \left[(1-t)[f(b)+g(a)] + t\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\right]^2\right\}dt$$

$$= \frac{1}{4}\left\{[f(b)+g(a)]^2\int_0^1 (1-t)^2 dt\right.$$

$$+ \Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\Big]^2 \int_0^1 t^2 dt$$

$$+ \big(f(b)+g(a)\big)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)$$

$$\left. + \eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\int_0^1 2t(1-t)dt\right\}$$

$$= \frac{1}{12}\Big\{[f(b)+g(a)]^2$$

$$+ \Big[\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\Big]^2$$

$$+ \big(f(b)+g(a)\big)\big[f(b)+\eta\big(f(a),f(b)\big)\big]\big[g(a)+\eta\big(g(b),g(a)\big)\big]\Big\}$$

istenilen eşitsizlik elde edilir.

**Sonuç 6.9 :** Teorem 6.8'de, $f = g$ ve $\eta(b,a) = b - a$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)f\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{12}\{[f(b)+f(a)]^2 + [f(a)f(b)]^2 + \big[f(a)f(b)\big(f(b)+f(a)\big)\big]\}.$$

**İspat :** Teorem 6.8'de $f = g$ ve $\eta(b,a) = b - a$ olarak seçilsin.

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)f\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{12}\Big\{[f(b)+f(a)]^2 + \big[[f(b)+f(a)-f(b)][f(a)+f(b)-f(a)]\big]^2$$

$$+ \big(f(b)+f(a)\big)[f(b)+f(a)-f(b)][f(a)+f(b)-f(a)]\Big\}$$

eşitsizliği yazılır ve düzenlenirse,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)f\left(\frac{ab}{x}\right)\right]dx$$
$$\leq \frac{1}{12}\{[f(b)+f(a)]^2+[f(a)f(b)]^2+[f(a)f(b)(f(b)+f(a))]\}$$

sonucuna ulaşılır.

**Teorem 6.10 :** $f,g: I=[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonları $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$f(\sqrt{ab})g(\sqrt{ab})$$
$$\leq \frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)g(x)]dx$$
$$+\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)\left[\eta\left(g\left(\frac{ab}{x}\right),g(x)\right)\right]\right.$$
$$\left.+g(x)\left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]\right]dx$$
$$+\frac{1}{4(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]\left[\eta\left(g\left(\frac{ab}{x}\right),g(x)\right)\right]dx$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. $\forall a,b\in I$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(\sqrt{ab})\leq f(a^{1-t}b^t)+\frac{1}{2}\eta\left(f(a^tb^{1-t}),f(a^{1-t}b^t)\right) \tag{6.18}$$

$$g(\sqrt{ab})\leq g(a^{1-t}b^t)+\frac{1}{2}\eta\left(g(a^tb^{1-t}),g(a^{1-t}b^t)\right) \tag{6.19}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa çarpılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 f(\sqrt{ab})g(\sqrt{ab})dt$$

$$\leq \int_0^1 f(a^{1-t}b^t)g(a^{1-t}b^t)dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \{f(a^{1-t}b^t)[\eta(g(a^tb^{1-t}),g(a^{1-t}b^t))]$$

$$+g(a^{1-t}b^t)[\eta(f(a^tb^{1-t}),f(a^{1-t}b^t))]\}dt$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 [\eta(f(a^tb^{1-t}),f(a^{1-t}b^t))][\eta(g(a^tb^{1-t}),g(a^{1-t}b^t))]dt$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $x = a^{1-t}b^t$ dönüşümü uygulanırsa,

$$f(\sqrt{ab})g(\sqrt{ab})$$

$$\leq \int_0^b f(x)g(x)\frac{dx}{a^{1-t}b^t\ln b - a^{1-t}b^t\ln a}$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left\{f(x)\left[\eta\left(g\left(\frac{ab}{x}\right),g(x)\right)\right]+g(x)\left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]\right\}\frac{dx}{a^{1-t}b^t\ln b - a^{1-t}b^t\ln a}$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 \left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]\left[\eta\left(g\left(\frac{ab}{x}\right),g(x)\right)\right]\frac{dx}{a^{1-t}b^t\ln b - a^{1-t}b^t\ln a}$$

bulunur. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$f(\sqrt{ab})g(\sqrt{ab})$$

$$\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)g(x)]dx$$

$$+\frac{1}{2(\ln b - \ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)\left[\eta\left(g\left(\frac{ab}{x}\right),g(x)\right)\right]\right.$$

$$\left.+g(x)\left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]\right]dx$$

$$+\frac{1}{4(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[\eta\left(f\left(\frac{ab}{x}\right),f(x)\right)\right]\left[\eta\left(g\left(\frac{ab}{x}\right),g(x)\right)\right]dx$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 6.11 :** Teorem 6.10'da, $f=g$ ve $\eta(b,a)=b-a$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
&f(\sqrt{ab})f(\sqrt{ab})\\
&\qquad\le\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)f(x)]dx\\
&\qquad+\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]+f(x)\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]\right]dx\\
&\qquad+\frac{1}{4(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]dx.
\end{aligned}$$

**İspat :** Teorem 6.10'da, $f=g$ ve $\eta(b,a)=b-a$ olarak seçilsin.

$$f(\sqrt{ab})f(\sqrt{ab})\le\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)f(x)]dx$$

$$+\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f(x)\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]+f(x)\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]\right]dx$$

$$+\frac{1}{4(\ln b-\ln a)}\int_a^b \frac{1}{x}\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]\left[f\left(\frac{ab}{x}\right)-f(x)\right]dx$$

eşitsiziliği elde edilir.

**Teorem 6.12 :** $f,g\colon I=[a,b]\to(0,\infty)$ fonksiyonları artan ve $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere, $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. O halde,

$$\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)]\left[g(b)+\frac{1}{2}\eta(g(a),g(b))\right]dx$$

$$+\frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[g(x)]\left[f(b)+\frac{1}{2}\eta(f(a),f(b))\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)g(x)]dx$$

$$+\left[f(b)+\frac{1}{2}\eta(f(a),f(b))\right]\left[g(b)+\frac{1}{2}\eta(g(a),g(b))\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $I$ üzerinde genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyonlar olsun. $\forall a,b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(a^t b^{1-t}) \leq \left[f(b)+t\eta\big(f(a),f(b)\big)\right] \tag{6.20}$$

$$g(a^t b^{1-t}) \leq \left[g(b)+t\eta\big(g(a),g(b)\big)\right] \tag{6.21}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ve $a<b, c<d$ olmak üzere,

$$(a-b)(c-d) \geq 0 \tag{6.22}$$

eşitsizliği kullanılır ve $[0,1]$ aralığında $t$'ye göre integrallenirse,

$$\int_0^1 [f(a^t b^{1-t})]dt \int_0^1 \left[g(b)+t\eta\big(g(a),g(b)\big)\right]dt$$

$$+\int_0^1 [g(a^t b^{1-t})]dt \int_0^1 [f(b)+t\eta(f(a),f(b))]dt$$

$$\leq \int_0^1 f(a^t b^{1-t})g(a^t b^{1-t})dt$$

$$+\int_0^1 [f(b)+t\eta(f(a),f(b))]dt \int_0^1 \left[g(b)+t\eta\big(g(a),g(b)\big)\right]dt$$

elde edilir. $x = a^t b^{1-t}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)]\left[g(b) + \frac{1}{2}\eta\big(g(a), g(b)\big)\right]dx$$

$$+\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[g(x)]\left[f(b) + \frac{1}{2}\eta\big(f(a), f(b)\big)\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)][g(x)]dx$$

$$+\left[f(b) + \frac{1}{2}\eta(f(a), f(b))\right]\left[g(b) + \frac{1}{2}\eta\big(g(a), g(b)\big)\right]$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 6.13 :** Teorem 6.12'de, $f = g$ ve $\eta(b, a) = b - a$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{2}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)]\left[\frac{f(b) + f(a)}{2}\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)][f(x)]dx + \left[\frac{f(b) + f(a)}{2}\right]^2.$$

**İspat :** Teorem 5.12'de, $f = g$ ve $\eta(b, a) = b - a$ olarak seçilsin.

$$\frac{2}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)]\left[f(b) + \frac{1}{2}\big(f(a) - f(b)\big)\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)][f(x)]dx$$

$$+\left[f(b) + \frac{1}{2}\big(f(a) - f(b)\big)\right]\left[f(b) + \frac{1}{2}\big(f(a) - f(b)\big)\right].$$

Bu eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$\frac{2}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)]\left[\frac{f(b)+f(a)}{2}\right]dx$$

$$\leq \frac{1}{\ln b-\ln a}\int_a^b \frac{1}{x}[f(x)][f(x)]dx+\left[\frac{f(b)+f(a)}{2}\right]^2$$

istenilen sonuca ulaşılır.

**Lemma 6.14 :** $f: I\subset \mathbb{R}^+=(0,\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a,b\in I$ , $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde,

$$bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx$$

$$=\frac{(\ln b-\ln a)}{2}\left[\int_0^1 b^{1+t}a^{1-t}f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1 b^{1-t}a^{1+t}f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)dt\right]$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $I_1=\int_0^1 b^{1+t}a^{1-t}f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)dt$ ve $I_2=\int_0^1 b^{1-t}a^{1+t}f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)dt$ olsun. $I_1$, $x=b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}$ dönüşümü ve kısmi integrasyon yardımıyla hesaplanırsa,

$$I_1=\int_0^1 b^{1+t}a^{1-t}f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)dt=\int_{\sqrt{ab}}^b x^2f'(x)\frac{dx}{\frac{1}{2}b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\ln b-\frac{1}{2}b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\ln a}$$

$$=\frac{2}{\ln b-\ln a}\int_{\sqrt{ab}}^b xf'(x)dx=\frac{2}{\ln b-\ln a}\left[xf(x)|_{\sqrt{ab}}^b-\int_{\sqrt{ab}}^b f(x)dx\right]$$

$$=\frac{2\left[bf(b)-\sqrt{ab}f(\sqrt{ab})\right]}{\ln b-\ln a}-\frac{2}{\ln b-\ln a}\int_{\sqrt{ab}}^b f(x)dx \qquad (6.23)$$

bulunur. Benzer şekilde $I_2$, $x=b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}$ dönüşümü ve kısmi integrasyon kullanılarak hesaplandığında,

$$I_2 = \int_0^1 b^{1-t}a^{1+t}f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)dt = \int_a^{\sqrt{ab}} x^2 f'(x)\frac{dx}{\frac{1}{2}b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\ln b - \frac{1}{2}b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\ln a}$$

$$= \frac{2}{\ln b - \ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} xf'(x)dx = \frac{2}{\ln b - \ln a}\left[xf(x)|_a^{\sqrt{ab}} - \int_a^{\sqrt{ab}} f(x)dx\right]$$

$$= \frac{2\left[\sqrt{ab}f\left(\sqrt{ab}\right) - af(a)\right]}{\ln b - \ln a} - \frac{2}{\ln b - \ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} f(x)dx \qquad (6.24)$$

elde edilir. (6.23) ve (6.24) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\int_0^1 b^{1+t}a^{1-t}f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)dt + \int_0^1 b^{1-t}a^{1+t}f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)dt$$

$$= \frac{2\left[bf(b) - \sqrt{ab}f\left(\sqrt{ab}\right)\right]}{\ln b - \ln a} - \frac{2}{\ln b - \ln a}\int_{\sqrt{ab}}^{b} f(x)dx$$

$$+ \frac{2\left[\sqrt{ab}f\left(\sqrt{ab}\right) - af(a)\right]}{\ln b - \ln a} - \frac{2}{\ln b - \ln a}\int_a^{\sqrt{ab}} f(x)dx$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $\frac{\ln b - \ln a}{2}$ çarpılıp düzenlenirse,

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{(\ln b - \ln a)}{2}\left[\int_0^1 b^{1+t}a^{1-t}f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)dt\right.$$

$$\left. + \int_0^1 b^{1-t}a^{1+t}f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)dt\right]$$

istenilen sonuç elde edilir.

**Teorem 6.15 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}}\Big\{b\big[\big(2b-a-L(a,b)\big)|f'(b)|^q$$

$$+\left(L(a,b)-a\right)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\big]^{\frac{1}{q}}$$

$$+a\big[\big(b-L(a,b)\big)|f'(b)|^q$$

$$+\big(b-2a+L(a,b)\big)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\big]^{\frac{1}{q}}\Big\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Lemma 6.14 ve Power Mean eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$=\frac{ab\,(\ln b-\ln a)}{2}\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|dt+\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq\frac{ab\,(\ln b-\ln a)}{2}\left\{\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right]^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{6.25}$$

elde edilir. Buradan $|f'|$ genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olduğundan,

$$I_1=\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)|f'(b)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]dt$$

$$= |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left(\frac{1+t}{2}\right) dt$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left(\frac{1-t}{2}\right) dt \tag{6.26}$$

yazılabilir. Buradaki integraller kısmi integrasyon yardımıyla hesaplanırsa,

$$\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left(\frac{1+t}{2}\right) dt = \left(\frac{1+t}{2}\right) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\ln b - \ln a}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$$

$$= \frac{2b-a}{2a(\ln b - \ln a)} - \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \left[ \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\ln b - \ln a}\Bigg|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2b-a}{2a(\ln b - \ln a)} - \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \left[\frac{b-a}{a(\ln b - \ln a)}\right] = \frac{2b-a-L(a,b)}{2a(\ln b - \ln a)}$$

ve

$$\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left(\frac{1-t}{2}\right) dt = \left(\frac{1-t}{2}\right) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\ln b - \ln a}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$$

$$= -\frac{1}{2(\ln b - \ln a)} + \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \left[ \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\ln b - \ln a}\Bigg|_0^1 \right]$$

$$= -\frac{1}{2(\ln b - \ln a)} + \frac{1}{2(\ln b - \ln a)} \left[\frac{b-a}{a(\ln b - \ln a)}\right] = \frac{L(a,b)-a}{2a(\ln b - \ln a)}$$

elde edilir. Hesaplanan bu değerler (6.26)'da yerine yazılırsa,

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq |f'(b)|^q \frac{2b-a-L(a,b)}{2a(\ln b - \ln a)} + \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \frac{L(a,b)-a}{2a(\ln b - \ln a)}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$I_2=\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q$$

$$\leq\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)|f'(b)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]dt$$

$$=|f'(b)|^q\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left(\frac{1-t}{2}\right)dt$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left(\frac{1+t}{2}\right)dt \tag{6.27}$$

yazılabilir. Buradaki integraller kısmi integrasyon yardımıyla hesaplanırsa,

$$\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left(\frac{1-t}{2}\right)dt=\left(\frac{1-t}{2}\right)\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^t}{\ln a-\ln b}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2(\ln a-\ln b)}\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t dt$$

$$=\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}-\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^t}{\ln a-\ln b}\Bigg|_0^1\right]$$

$$=\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}-\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\left[\frac{b-a}{b(\ln b-\ln a)}\right]=\frac{b-L(a,b)}{2b(\ln b-\ln a)}$$

ve

$$\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left(\frac{1+t}{2}\right)dt=\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^t}{\ln a-\ln b}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2(\ln a-\ln b)}\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t dt$$

$$=\frac{a}{b(\ln a-\ln b)}-\frac{1}{2(\ln a-\ln b)}\left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^t}{\ln a-\ln b}\Bigg|_0^1\right]$$

$$=\frac{b-2a}{2b(\ln b-\ln a)}+\frac{1}{2(\ln b-\ln a)}\left[\frac{b-a}{b(\ln b-\ln a)}\right]=\frac{L(a,b)+b-2a}{2b(\ln b-\ln a)}$$

bulunur. Hesaplanan bu değerler (6.27)'de yerine yazılırsa,

$$I_2 = \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t \left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q$$

$$\leq |f'(b)|^q \frac{b - L(a,b)}{2b(\ln b - \ln a)} + \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \frac{L(a,b) + b - 2a}{2b(\ln b - \ln a)}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\ln b - \ln a}\Bigg|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{b-a}{a(\ln b - \ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t dt\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^t}{\ln a - \ln b}\Bigg|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{b-a}{b(\ln b - \ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

integralleri ve $I_1$ , $I_2$ değerleri (6.25)'te yerine yazılırsa,

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{1+\frac{1}{q}}} \Bigg\{ b\Big[\big(2b - a - L(a,b)\big)|f'(b)|^q$$

$$+ \big(L(a,b) - a\big)\left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q\Big]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ a\Big[\big(b - L(a,b)\big)|f'(b)|^q$$

$$+ \big(b - 2a + L(a,b)\big)\left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q\Big]^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

istenilen sonuç elde edilmiş olur.

**Sonuç 6.16 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a,b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}}\left\{b\left[\left(2b - a - L(a,b)\right)|f'(b)|^q + (L(a,b) - a)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left. + a\left[\left(b - L(a,b)\right)|f'(b)|^q + \left(b - 2a + L(a,b)\right)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Teorem 6.15'te, $\eta(b,a) = b - a$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}}\left\{b\left[\left(2b - a - L(a,b)\right)|f'(b)|^q\right.\right.$$
$$\left. + (L(a,b) - a)\left|f'(b) + f'(a) - f'^{(b)}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$
$$+ a\left[\left(b - L(a,b)\right)|f'(b)|^q\right.$$
$$\left.\left. + \left(b - 2a + L(a,b)\right)|f'(b) + f'(a) - f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{1-\frac{1}{q}}}{2^{\frac{1}{q}+1}}\left\{b\left[\left(2b - a - L(a,b)\right)|f'(b)|^q + (L(a,b) - a)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left. + a\left[\left(b - L(a,b)\right)|f'(b)|^q + \left(b - 2a + L(a,b)\right)|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

istenilen sonuca ulaşılabilir.

**Teorem 6.17 :** $f: I \subset \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere, $I^{\circ}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a,b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[ L\left(a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}} \left\{ b\left[A\left(3|f'(b)|^q, \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} + a\left[A\left(3\left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** Lemma 6.14 ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$= \frac{ab\,(\ln b - \ln a)}{2} \left[ \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left| f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right| dt + \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t \left| f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right| dt \right]$$

$$\leq \frac{ab\,(\ln b - \ln a)}{2} \left\{ \left[ \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{qt}{q-1}} dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[ \int_0^1 \left| f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left[ \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{qt}{q-1}} dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[ \int_0^1 \left| f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \qquad (6.28)$$

elde edilir. Buradan $|f'|$ genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olduğundan,

$$I_1 = \int_0^1 \left| f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[ \left(\frac{1+t}{2}\right) |f'(b)|^q + \left(\frac{1-t}{2}\right) \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q \right] dt$$

$$= |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right) dt + \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{3}{4}\, |f'(b)|^q + \frac{1}{4}\, \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \tag{6.29}$$

ve

$$I_2 = \int_0^1 \left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 \left[\left(\frac{1-t}{2}\right) |f'(b)|^q + \left(\frac{1+t}{2}\right) \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q\right] dt$$

$$= |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right) dt + \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4} |f'(b)|^q + \frac{3}{4} \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \tag{6.30}$$

yazılabilir. Gerekli integraller de hesaplanırsa,

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{qt}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left(\left.\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{qt}{q-1}}}{\left(\frac{q}{q-1}\right)(\ln b - \ln a)}\right|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{b^{\frac{q}{q-1}} - a^{\frac{q}{q-1}}}{\left(\frac{q}{q-1}\right) a^{\frac{q}{q-1}} (\ln b - \ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{qt}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left(\left.\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{qt}{q-1}}}{\left(\frac{q}{q-1}\right)(\ln a - \ln b)}\right|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{b^{\frac{q}{q-1}} - a^{\frac{q}{q-1}}}{\left(\frac{q}{q-1}\right) b^{\frac{q}{q-1}} (\ln b - \ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Hesaplanan bu değerler (6.28)’de yerine yazılırsa,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$=\frac{ab\,(\ln b-\ln a)}{2}\left[\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^t\left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|dt\right]$$

$$\leq\frac{ab\,(\ln b-\ln a)}{2}\left\{\left(\frac{b^{\frac{q}{q-1}}-a^{\frac{q}{q-1}}}{\left(\frac{q}{q-1}\right)a^{\frac{q}{q-1}}(\ln b-\ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{3}{4}\,|f'(b)|^q\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{b^{\frac{q}{q-1}}-a^{\frac{q}{q-1}}}{\left(\frac{q}{q-1}\right)b^{\frac{q}{q-1}}(\ln b-\ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{4}|f'(b)|^q\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3}{4}\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Elde edilen ifadeler düzenlendiğinde,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq\frac{(\ln b-\ln a)}{2^{1+\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{q}{q-1}},b^{\frac{q}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{b\Big[A\Big(3|f'(b)|^q,\big|f'(b)\right.$$

$$\left.+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\big|^q\Big)\Big]^{\frac{1}{q}}+a\Big[A\Big(3\big|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\big|^q,|f'(b)|^q\Big)\Big]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 6.18 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a,b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[ L\left( a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left\{ b[A(3|f'(b)|^q, |f'(a)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + a[A(3|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Teorem 6.17'de, $\eta(b,a) = b - a$ olarak seçilirse,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[ L\left( a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left\{ b[A(3|f'(b)|^q, |f'(b) + f'(a) \right.$$
$$\left. - f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} + a[A(3|f'(b) + f'(a) - f(b)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)}{2^{1+\frac{1}{q}}} \left[ L\left( a^{\frac{q}{q-1}}, b^{\frac{q}{q-1}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left\{ b[A(3|f'(b)|^q, |f'(a)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + a[A(3|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

sonucu elde edilir.

**Teorem 6.19 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a,b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$
$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}} \Big\{ b\big[|f'(b)|^q \big(2b^q - a^q - L(a^q, b^q)\big)$$
$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \big(L(a^q, b^q) - a^q\big)\big]^{\frac{1}{q}}$$
$$+ a\big[|f'(b)|^q \big(b^q - L(a^q, b^q)\big)$$
$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \big(b^q - 2a^q + L(a^q, b^q)\big)\big]^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Lemma 6.14 ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$
$$= \frac{ab\,(\ln b - \ln a)}{2} \left[ \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left| f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right) \right| dt + \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t \left| f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right) \right| dt \right]$$
$$\leq \frac{ab\,(\ln b - \ln a)}{2} \left\{ \left[ \int_0^1 1dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[ \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{qt} \left| f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right) \right|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$
$$\left. + \left[ \int_0^1 1dt \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[ \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{qt} \left| f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right) \right|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{6.31}$$

eşitsizliği yazılabilir. $|f'|$ fonksiyonun genelleştirilmiş geometrik konveksliği ve kısmi integrasyon yardımıyla,

$$I_1=\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}\left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}}a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)|f'(b)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]dt$$

$$=|f'(b)|^q\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}\left(\frac{1+t}{2}\right)dt$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}\left(\frac{1-t}{2}\right)dt$$

$$=|f'(b)|^q\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}}{q(\ln b-\ln a)}\Bigg|_0^1-\frac{1}{2q(\ln b-\ln a)}\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}dt\right]$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}}{q(\ln b-\ln a)}\Bigg|_0^1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2q(\ln b-\ln a)}\int_0^1\left(\frac{b}{a}\right)^{qt}dt\right]$$

$$=|f'(b)|^q\frac{2b^q-a^q-L(a^q,b^q)}{2qa^q(\ln b-\ln a)}$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\frac{L(a^q,b^q)-a^q}{2qa^q(\ln b-\ln a)}$$

ve

$$I_2=\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{qt}\left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{qt}\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)|f'(b)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]dt$$

$$= |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{qt} \left(\frac{1-t}{2}\right) dt + \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{qt} \left(\frac{1+t}{2}\right) dt$$

$$= |f'(b)|^q \left[ \left(\frac{1-t}{2}\right) \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{qt}}{q(\ln a - \ln b)} \Bigg|_0^1 + \frac{1}{2q(\ln a - \ln b)} \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{qt} dt \right]$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q \left[ \left(\frac{1+t}{2}\right) \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{qt}}{q(\ln a - \ln b)} \Bigg|_0^1 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2q(\ln a - \ln b)} \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{qt} dt \right]$$

$$= |f'(b)|^q \frac{b^q - L(a^q, b^q)}{2qb^q(\ln b - \ln a)}$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q \frac{b^q - 2a^q + L(a^q, b^q)}{2qb^q(\ln b - \ln a)}$$

eşitsizlikleri bulunur. $I_1$ ve $I_2$ değerleri (6.31)'de yerine yazılırsa,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}} \Big\{ b\big[|f'(b)|^q\left(2b^q - a^q - L(a^q, b^q)\right)$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q \left(L(a^q, b^q) - a^q\right)\big]^{\frac{1}{q}}$$

$$+ a\big[|f'(b)|^q\left(b^q - L(a^q, b^q)\right)$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q \left(b^q - 2a^q + L(a^q, b^q)\right)\big]^{\frac{1}{q}} \Big\}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 6.20 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere, $I^\circ$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left\{b\left[|f'(b)|^q\left(2b^q-a^q-L(a^q,b^q)\right)\right.\right.$$

$$\left.+|f'(a)|^q(L(a^q,b^q)-a^q)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+a\left[|f'(b)|^q\left(b^q-L(a^q,b^q)\right)+|f'(a)|^q\left(b^q-2a^q+L(a^q,b^q)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Teorem 6.19'da, $\eta(b,a)=b-a$ olarak seçilirse,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left\{b\left[|f'(b)|^q\left(2b^q-a^q-L(a^q,b^q)\right)\right.\right.$$

$$\left.+|f'(b)+f'(a)-f'(b)|^q(L(a^q,b^q)-a^q)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+a\left[|f'(b)|^q\left(b^q-L(a^q,b^q)\right)\right.$$

$$\left.\left.+|f'(b)+f'(a)-f'(b)|^q\left(b^q-2a^q+L(a^q,b^q)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ifadeler düzenlenirse,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left\{b\left[|f'(b)|^q\left(2b^q-a^q-L(a^q,b^q)\right)\right.\right.$$

$$\left.+|f'(a)|^q(L(a^q,b^q)-a^q)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left.+a\left[|f'(b)|^q\left(b^q-L(a^q,b^q)\right)+|f'(a)|^q\left(b^q-2a^q+L(a^q,b^q)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

bulunur.

**Teorem 6.21 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ ve $q > p > 0$ için $[a, b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}}, b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\Bigg\{b\big[|f'(b)|^q\big(2b^q - a^q$$

$$- L(a^q, b^q)\big)$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q (L(a^q, b^q) - a^q)\big]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}\Bigg\{a\big[|f'(b)|^q\big(b^q$$

$$- L(a^q, b^q)\big) + \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q\big(b^q - 2a^q + L(a^q, b^q)\big)\big]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Lemma 6.14 ve Power Mean eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$= \frac{ab\,(\ln b - \ln a)}{2}\left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t \left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right| dt + \int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^t \left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right| dt\right]$$

$$\leq \frac{ab\,(\ln b - \ln a)}{2}\left\{\left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(q-p)t}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} \left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{(q-p)t}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{pt} \left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{6.32}$$

elde edilir. Buradan $|f'|$ fonksiyonunun genelleştirilmiş geometrik konveks olması ve kısmi integrasyon yardımıyla,

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} \left|f'\left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} \left[\left(\frac{1+t}{2}\right)|f'(b)|^q + \left(\frac{1-t}{2}\right)\left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q\right] dt$$

$$= |f'(b)|^q \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} \left(\frac{1+t}{2}\right) dt$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} \left(\frac{1-t}{2}\right) dt$$

$$= |f'(b)|^q \left[\left(\frac{1+t}{2}\right) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{pt}}{\mathrm{p}(\ln b - \ln a)}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2p(\ln b - \ln a)} \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} dt\right]$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \left[\left(\frac{1-t}{2}\right) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{pt}}{p(\ln b - \ln a)}\Bigg|_0^1\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2p(\ln b - \ln a)} \int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{pt} dt\right]$$

$$= |f'(b)|^q \left[\frac{2b^p - a^p}{2pa^p(\ln b - \ln a)} - \frac{1}{2p(\ln b - \ln a)}\left[\frac{b^p - a^p}{pa^p(\ln b - \ln a)}\right]\right]$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \left[-\frac{1}{2p(\ln b - \ln a)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(\ln b - \ln a)}\left[\frac{b^p - a^p}{pa^p(\ln b - \ln a)}\right]\right]$$

$$= |f'(b)|^q \left[\frac{2b^p - a^p - L(a^p, b^p)}{2pa^p(\ln b - \ln a)}\right]$$

$$+ \left|f'(b) + \eta\big(f'(a), f'(b)\big)\right|^q \left[\frac{L(a^p, b^p) - a^p}{2pa^p(\ln b - \ln a)}\right]$$

ve

$$I_2=\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}\left|f'\left(b^{\frac{1-t}{2}}a^{\frac{1+t}{2}}\right)\right|^q dt$$

$$\leq\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)|f'(b)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\right]dt$$

$$=|f'(b)|^q\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}\left(\frac{1-t}{2}\right)dt$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}\left(\frac{1+t}{2}\right)dt$$

$$=|f'(b)|^q\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}}{p(\ln a-\ln b)}\Bigg|_0^1+\frac{1}{2p(\ln a-\ln b)}\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}dt\right]$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}}{p(\ln a-\ln b)}\Bigg|_0^1\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2p(\ln a-\ln b)}\int_0^1\left(\frac{a}{b}\right)^{pt}dt\right]$$

$$=|f'(b)|^q\left[\frac{1}{2p(\ln b-\ln a)}-\frac{1}{2p(\ln b-\ln a)}\left[\frac{b^p-a^p}{pb^p(\ln b-\ln a)}\right]\right]$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\left[\frac{b^p-2a^p}{2pb^p(\ln b-\ln a)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2p(\ln b-\ln a)}\left[\frac{b^p-a^p}{pb^p(\ln b-\ln a)}\right]\right]$$

$$=|f'(b)|^q\left[\frac{b^p-L(a^p,b^p)}{2pb^p(\ln b-\ln a)}\right]$$

$$+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\left[\frac{b^p-2a^p+L(a^p,b^p)}{2pb^p(\ln b-\ln a)}\right]$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(q-p)t}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{(q-p)t}{q-1}}}{\frac{(q-p)}{q-1}(\ln b - \ln a)}\Bigg|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{b^{\frac{(q-p)}{q-1}} - a^{\frac{(q-p)}{q-1}}}{\frac{(q-p)}{q-1} a^{\frac{(q-p)}{q-1}}(\ln b - \ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{L\left(a^{\frac{(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{(q-p)}{q-1}}\right)}{a^{\frac{(q-p)}{q-1}}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\left[\int_0^1 \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{(q-p)t}{q-1}} dt\right]^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{(q-p)t}{q-1}}}{\frac{(q-p)}{q-1}(\ln a - \ln b)}\Bigg|_0^1\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{b^{\frac{(q-p)}{q-1}} - a^{\frac{(q-p)}{q-1}}}{\frac{(q-p)}{q-1} b^{\frac{(q-p)}{q-1}}(\ln b - \ln a)}\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{L\left(a^{\frac{(q-p)}{q-1}}, b^{\frac{(q-p)}{q-1}}\right)}{b^{\frac{(q-p)}{q-1}}}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$I_1$ , $I_2$ ve hesaplanan integraller (6.32)'de yerine yazılırsa,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{ab\,(\ln b-\ln a)}{2}\left\{\left(\frac{L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}},b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)}{a^{\frac{q-p}{q-1}}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[|f'(b)|^q\left[\frac{2b^p-a^p-L(a^p,b^p)}{2pa^p(\ln b-\ln a)}\right]\right.\right.$$

$$\left.+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\left[\frac{L(a^p,b^p)-a^p}{2pa^p(\ln b-\ln a)}\right]\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}},b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)}{b^{\frac{q-p}{q-1}}}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[|f'(b)|^q\left[\frac{b^p-L(a^p,b^p)}{2pb^p(\ln b-\ln a)}\right]\right.$$

$$\left.\left.+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\left[\frac{L(a^p,b^p)+b^p-2a^p}{2pb^p(\ln b-\ln a)}\right]\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Bulunan eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}},b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{b\Big[|f'(b)|^q\big(2b^q-a^q\right.$$

$$-L(a^q,b^q)\big)$$

$$\left.+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\big(L(a^q,b^q)-a^q\big)\Big]^{\frac{1}{q}}\right\}\left\{a\Big[|f'(b)|^q\big(b^q\right.$$

$$\left.-L(a^q,b^q)\big)+\left|f'(b)+\eta\big(f'(a),f'(b)\big)\right|^q\big(b^q-2a^q+L(a^q,b^q)\big)\Big]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 6.22 :** $f: I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a, b \in I$ , $a < b$ ve $f' \in L[a,b]$ olmak üzere, $I°$ üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $|f'|$ fonksiyonu $q \geq 1$ ve $q > p > 0$ için $[a,b]$ aralığında genelleştirilmiş geometrik konveks fonksiyon olmak üzere,

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}}, b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{b\left[|f'(b)|^q\left(2b^q - a^q\right.\right.\right.$$

$$\left.- L(a^q, b^q)\right)$$

$$\left.\left.+ \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q (L(a^q, b^q) - a^q)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\left\{a\left[|f'(b)|^q\left(b^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.- L(a^q, b^q)\right) + \left|f'(b) + \eta\left(f'(a), f'(b)\right)\right|^q\left(b^q - 2a^q + L(a^q, b^q)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** Teorem 6.21'de, $\eta(b,a) = b - a$ olarak seçilsin.

$$\left|bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b - \ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}}, b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{b\left[|f'(b)|^q\left(2b^q - a^q\right.\right.\right.$$

$$\left.- L(a^q, b^q)\right)$$

$$\left.\left.+ |f'(b) + f'(a) - f'(b)|^q (L(a^q, b^q) - a^q)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\left\{a\left[|f'(b)|^q\left(b^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.- L(a^q, b^q)\right) + |f'(b) + f'(a) - f'(b)|^q\left(b^q - 2a^q + L(a^q, b^q)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Bulunan eşitsizlik düzenlenirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\left|bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \frac{(\ln b-\ln a)^{1-\frac{1}{q}}}{2(2q)^{\frac{1}{q}}}\left[L\left(a^{\frac{q-p}{q-1}},b^{\frac{q-p}{q-1}}\right)\right]^{1-\frac{1}{q}}\left\{b\left[|f'(b)|^q\left(2b^q-a^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-L(a^q,b^q)\right)+|f'(a)|^q(L(a^q,b^q)-a^q)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}\left\{a\left[|f'(b)|^q\left(b^q-L(a^q,b^q)\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+|f'(a)|^q\left(b^q-2a^q+L(a^q,b^q)\right)\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

# 7. BAZI YENİ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integrali kullanılarak iki senkronize fonksiyon olması durumunda Chebyshev fonksiyoneli için bazı integral eşitsizlikleri elde edilmiştir [16].

$f$ ve $g$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen iki senkronize fonksiyon olmak üzere, $(\forall x, y \in [a,b]$ için, $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0)$

$$\mathrm{T}(f,g) := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$

fonksiyoneli tanımlansın.

**Teorem 7.1 :** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. $\forall t > 0, \alpha > 0$ için,

$$J^\alpha(fg)(t) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha} J^\alpha f(t) J^\alpha g(t) \tag{7.1}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olduğundan $\tau \geq 0,\ \rho \geq 0$ için,

$$(f(\tau)-f(\rho))(g(\tau)-g(\rho)) \geq 0$$

$$f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho) + f(\rho)g(\tau) \tag{7.2}$$

yazılabilir. (7.2)'nin her iki tarafı $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılır, $(0,t)$ aralığında $\tau$'ya göre integrallenirse,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\tau)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\rho)d\tau$$
$$\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)g(\rho)d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\rho)g(\tau)d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde, $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = J^\alpha(1)$ eşitliği de dikkate alınırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t) + f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1) \geq g(\rho)J^{\alpha}f(t) + f(\rho)J^{\alpha}g(t) \tag{7.3}$$

bulunur. (7.3)'ün her iki tarafı $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılır, $(0,t)$ aralığında $\rho$'ya göre integrallenirse,

$$J^{\alpha}(fg)(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}\,d\rho + J^{\alpha}(1)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho)g(\rho)\,d\rho$$

$$\geq J^{\alpha}f(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}g(\rho)\,d\rho + J^{\alpha}g(t)\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\rho)^{\alpha-1}f(\rho)\,d\rho$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizlik düzenlendiğinde,

$$J^{\alpha}(fg)(t)J^{\alpha}(1) + J^{\alpha}(1)J^{\alpha}(fg)(t) \geq J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) + J^{\alpha}g(t)J^{\alpha}f(t)$$

$$2J^{\alpha}(1)J^{\alpha}(fg)(t) \geq 2J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)$$

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{1}{J^{\alpha}(1)}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) \tag{7.4}$$

bulunur. Burada

$$J^{\alpha}(1) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\left.\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\right|_0^t\right] = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

eşitliği sağlandığından (7.4)'te bu eşitlik kullanılırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)$$

istenilen sonuca ulaşılır.

**Teorem 7.2 :** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. $\forall t > 0, \alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için,

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\beta}(fg)(t) + \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J^{\alpha}(fg)(t) \geq J^{\alpha}f(t)J^{\beta}g(t) + J^{\beta}f(t)J^{\alpha}g(t) \tag{7.5}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olduğundan $\tau \geq 0,\ \rho \geq 0$ için,

$$(f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)) \geq 0$$

$$f(\tau)g(\tau)+f(\rho)g(\rho)\geq f(\tau)g(\rho)+f(\rho)g(\tau) \tag{7.6}$$

yazılabilir. (7.6)'nın her iki tarafı $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ile çarpılır, $(0,t)$ aralığında $\tau$'ya göre integrallenirse,

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)g(\tau)d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\rho)g(\rho)d\tau$$
$$\geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)g(\rho)d\tau+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\rho)g(\tau)d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlendiğinde $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1}d\tau=J^{\alpha}(1)$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$J^{\alpha}(fg)(t)+f(\rho)g(\rho)J^{\alpha}(1)\geq g(\rho)J^{\alpha}f(t)+f(\rho)J^{\alpha}g(t) \tag{7.7}$$

bulunur. (7.7)'nin her iki tarafı $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ ile çarpılır, $(0,t)$ aralığında $\rho$'ya göre integrallenirse,

$$J^{\alpha}(fg)(t)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1}\,d\rho+J^{\alpha}(1)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1}f(\rho)g(\rho)\,d\rho$$
$$\geq J^{\alpha}f(t)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1}g(\rho)\,d\rho+J^{\alpha}g(t)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\rho)^{\beta-1}f(\rho)\,d\rho$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J^{\beta}(fg)(t)+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}J^{\alpha}(fg)(t)\geq J^{\alpha}f(t)J^{\beta}g(t)+J^{\alpha}g(t)J^{\beta}f(t)$$

ispat tamamlanır.

**Uyarı 7.3 :** $f$ ve $g$, $[0,\infty)$ aralığında senkronize olmayan iki fonksiyon ise ($\forall x,y\in[0,\infty)$ için $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\leq 0$) (6.1) ve (6.5) eşitsizliklerinin tersi de doğrudur.

**Uyarı 7.4 :** Teorem 7.2'de $\alpha=\beta$ kabul edilirse Teorem 7.1 elde edilir.

**İspat :** Teorem 7.2'de, $\alpha=\beta$ olarak seçilsin.

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha(fg)(t)+\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha(fg)(t)\geq J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)+J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)$$

eşitsizliği düzenlenirse,

$$J^\alpha(fg)(t)\geq\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^\alpha}J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)$$

elde edilir.

**Teorem 7.5 :** $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ , $[0,\infty)$ aralığında artan $n$ pozitif fonksiyon olsun. $\forall t>0,\alpha>0$ için,

$$J^\alpha\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)\geq\left(J^\alpha(1)\right)^{1-n}\prod_{i=1}^{n}J^\alpha f_i(t)$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** İspat tümevarım yöntemiyle yapılacaktır.

$n=1$ iken $\forall t>0,\alpha>0$ için, $J^\alpha(f_1)(t)\geq J^\alpha(f_1)(t)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır.

$n=2$ iken $\forall t>0,\alpha>0$ için, $J^\alpha(f_1f_2)(t)\geq\left(J^\alpha(1)\right)^{-1}J^\alpha(f_1)(t)J^\alpha(f_2)(t)$ eşitsizliğinin sağlandığı (7.1)'den açıktır.

$k=n-1$ iken $\forall t>0,\alpha>0$ için,

$$J^\alpha\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\geq\left(J^\alpha(1)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}J^\alpha f_i(t)\tag{7.8}$$

eşitsizliği doğru olsun. Bu eşitsizliğinde $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ pozitif artan fonksiyonlar olduğundan $(\prod_{i=1}^{n-1}f_i)(t)$ fonksiyonu da artandır. Teorem 7.1'de, $g(t)=(\prod_{i=1}^{n-1}f_i)(t)$ ve $f(t)=f_n(t)$ kabul edilirse,

$$J^\alpha\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)=J^\alpha(fg)(t)\geq\left(J^\alpha(1)\right)^{-1}J^\alpha\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)J^\alpha f_n(t)$$

yazılabilir. Burada (7.8) eşitsizliği kullanılırsa,

$$J^\alpha\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)=J^\alpha(fg)(t)\geq\left(J^\alpha(1)\right)^{-1}\left(\left(J^\alpha(1)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}J^\alpha f_i(t)\right)J^\alpha f_n(t)$$

elde edilir. Bulunan ifadeler düzenlendiğinde,

$$J^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(t) \geq (J^{\alpha}(1))^{1-n} \prod_{i=1}^{n} J^{\alpha} f_i(t)$$

ispat tamamlanır.

**Teorem 7.6 :** $[0,\infty)$ aralığında tanımlı $f$ artan, $g$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon ve $m \coloneqq inf_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayısı var olsun. $\forall t > 0, \alpha > 0$ için,

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha} f(t) J^{\alpha} g(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^{\alpha} f(t) + mJ^{\alpha}\left(tf(t)\right)$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :** $h(t) \coloneqq g(t) - mt$ fonksiyonunu ele alalım. $h$'nin diferensiyellenebilirliği ve $[0,\infty)$ aralığında artan olduğu açıktır. Teorem 7.1'den,

$$\begin{aligned} J^{\alpha}(fh)(t) &= J^{\alpha}\left(f(g-mt)\right)(t) \geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha} f(t)(J^{\alpha} g(t) - mJ^{\alpha}(t)) \\ &= \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha} f(t) J^{\alpha} g(t) - m\left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha}(t) J^{\alpha} f(t) \end{aligned} \tag{7.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}$$

ve

$$\begin{aligned} J^{\alpha}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1}(t-u)du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[ t\frac{u^{\alpha}}{\alpha} - \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^t \right] \\ &= \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} = \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

eşitlikleri (7.9)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} J^{\alpha}\left(f(g-mt)\right)(t) &\geq \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha} f(t) J^{\alpha} g(t) - m\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}} \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} J^{\alpha} f(t) \\ &= \left(J^{\alpha}(1)\right)^{-1} J^{\alpha} f(t) J^{\alpha} g(t) - \frac{mt}{(\alpha+1)} J^{\alpha} f(t) \end{aligned}$$

bulunur. Fonksiyonlar lineer olduğundan,

$J^\alpha\big(f(g-mt)\big)(t) = J^\alpha(fg)(t) - mJ^\alpha(tf)(t)$ eşitliği sağlanır. O halde bu eşitlik kullanılarak,

$$J^\alpha(fg)(t) \geq \big(J^\alpha(1)\big)^{-1} J^\alpha f(t) J^\alpha g(t) - \frac{mt}{\alpha+1} J^\alpha f(t) + mJ^\alpha\big(tf(t)\big)$$

eşitsizliği yazılabilir ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 7.7 :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında tanımlı iki fonksiyon olsun.

**a)** $f$ azalan, $g$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon ve $M \coloneqq sup_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayısı var olsun. $\forall t > 0, \alpha > 0$ için,

$$J^\alpha(fg)(t) \geq \big(J^\alpha(1)\big)^{-1} J^\alpha f(t) J^\alpha g(t) - \frac{Mt}{\alpha+1} J^\alpha f(t) + MJ^\alpha\big(tf(t)\big)$$

eşitsizliği yazılabilir.

**b)** $f$ ve $g$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon ve $m_1 \coloneqq inf_{t\geq 0} f'(t)$ , $m_2 \coloneqq inf_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayıları var olsun. $\forall t > 0, \alpha > 0$ için,

$$\begin{aligned} J^\alpha(fg)(t) - m_1 J^\alpha tg(t) - m_2 J^\alpha tf(t) + m_1 m_2 J^\alpha t^2 \\ \geq \big(J^\alpha(1)\big)^{-1} (J^\alpha f(t) J^\alpha g(t) - m_1 J^\alpha t J^\alpha g(t) - m_2 J^\alpha t J^\alpha f(t) \\ + m_1 m_2 (J^\alpha t)^2) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**c)** $f$ ve $g$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon ve $M_1 \coloneqq sup_{t\geq 0} f'(t)$ , $M_2 \coloneqq sup_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayıları var olsun. $\forall t > 0, \alpha > 0$ için,

$$\begin{aligned} J^\alpha(fg)(t) - M_1 J^\alpha tg(t) - M_2 J^\alpha tf(t) + M_1 M_2 J^\alpha t^2 \\ \geq \big(J^\alpha(1)\big)^{-1} (J^\alpha f(t) J^\alpha g(t) - M_1 J^\alpha t J^\alpha g(t) - M_2 J^\alpha t J^\alpha f(t) \\ + M_1 M_2 (J^\alpha t)^2) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :**

**a)** $G(t) \coloneqq g(t) - Mt$ fonksiyonunu ele alalım. $G$'nin diferensiyellenebilirliği ve $[0,\infty)$ aralığında artan olduğu açıktır. Teorem 7.1'den,

$$J^{\alpha}(fG)(t)J^{\alpha}\big(f(g-Mt)\big)(t) \geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}J^{\alpha}f(t)(J^{\alpha}g(t)-MJ^{\alpha}t\,)$$
$$= \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) - M\big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}J^{\alpha}tJ^{\alpha}f(t) \qquad (7.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}$$

ve

$$J^{\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t u^{\alpha-1}(t-u)du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[t\frac{u^{\alpha}}{\alpha} - \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\bigg|_0^t\right]$$
$$= \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} = \frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}$$

eşitlikleri (7.10)'da yerine yazılırsa,

$$J^{\alpha}\big(f(g-Mt)\big)(t) \geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) - M\frac{\Gamma(\alpha+1)}{t^{\alpha}}\frac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}J^{\alpha}f(t)$$
$$= \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) - \frac{Mt}{(\alpha+1)}J^{\alpha}f(t)$$

bulunur. Fonksiyonlar lineer olduğundan,

$J^{\alpha}\big(f(g-Mt)\big)(t) = J^{\alpha}(fg)(t) - MJ^{\alpha}(tf)(t)$ eşitliği sağlanır. O halde bu eşitlik kullanılarak,

$$J^{\alpha}(fg)(t) \geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) - \frac{Mt}{\alpha+1}J^{\alpha}f(t) + MJ^{\alpha}\big(tf(t)\big)$$

yazılabilir ve ispat tamamlanır.

**b)** $F(t) \coloneqq f(t) - m_1 t$ ve $G(t) \coloneqq g(t) - m_2 t$ fonksiyonlarını ele alalım. $F$ ve $G$'nin diferensiyellenebilirliği ve $[0,\infty)$ aralığında artan olduğu açıktır. Teorem 7.1'den,

$$J^{\alpha}(FG)(t) = J^{\alpha}\big((f(t)-m_1t)(g(t)-m_2t)\big)$$
$$\geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}[J^{\alpha}f(t)(J^{\alpha}g(t)-m_2J^{\alpha}t\,) - m_1J^{\alpha}t(J^{\alpha}g(t)-m_2J^{\alpha}t)]$$
$$= \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}\,[J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t) - m_1J^{\alpha}tJ^{\alpha}g(t) - m_2J^{\alpha}tJ^{\alpha}f(t)$$
$$+ m_1m_2(J^{\alpha}t)^2] \qquad (7.11)$$

eşitsizliği sağlanır. Fonksiyonlar lineer olduğundan,

$$J^{\alpha}\big((f(t)-m_1t)(g(t)-m_2t)\big)=J^{\alpha}(fg)(t)-m_1J^{\alpha}tg(t)-m_2J^{\alpha}tf(t)+m_1m_2J^{\alpha}t^2$$

eşitliği sağlanır. Yazılan bu eşitlik (7.11)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}J^{\alpha}(fg)(t)-m_1J^{\alpha}tg(t)-m_2J^{\alpha}tf(t)+m_1m_2J^{\alpha}t^2\\ \geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}\,(J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)-m_1J^{\alpha}tJ^{\alpha}g(t)-m_2J^{\alpha}tJ^{\alpha}f(t)\\ +m_1m_2(J^{\alpha}t)^2)\end{aligned}$$

istenilen sonuca ulaşılır.

**c)** $F(t)\coloneqq f(t)-Mt$ ve $G(t)\coloneqq g(t)-M_2t$ fonksiyonlarını ele alalım. $F$ ve $G$'nin diferensiyellenebilirliği ve $[0,\infty)$ aralığında artan olduğu açıktır. Teorem 7.1'den,

$$\begin{aligned}J^{\alpha}(FG)(t)&=J^{\alpha}\big((f(t)-M_1t)(g(t)-M_2t)\big)\\ &\geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}[J^{\alpha}f(t)(J^{\alpha}g(t)-M_2J^{\alpha}t\,)-M_1J^{\alpha}t(J^{\alpha}g(t)-M_2J^{\alpha}t)]\\ &=\big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}\,[J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)-M_1J^{\alpha}tJ^{\alpha}g(t)-M_2J^{\alpha}tJ^{\alpha}f(t)\\ &\quad+M_1M_2(J^{\alpha}t)^2]\end{aligned}\tag{7.12}$$

eşitsizliği sağlanır. Fonksiyonlar lineer olduğundan,

$$J^{\alpha}\big((f(t)-M_1t)(g(t)-M_2t)\big)=J^{\alpha}(fg)(t)-M_1J^{\alpha}tg(t)-M_2J^{\alpha}tf(t)+M_1M_2J^{\alpha}t^2$$

eşitliği sağlanır. Elde edilen bu eşitlik (7.12)'de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}J^{\alpha}(fg)(t)-M_1J^{\alpha}tg(t)-M_2J^{\alpha}tf(t)+M_1M_2J^{\alpha}t^2\\ \geq \big(J^{\alpha}(1)\big)^{-1}\,(J^{\alpha}f(t)J^{\alpha}g(t)-M_1J^{\alpha}tJ^{\alpha}g(t)-M_2J^{\alpha}tJ^{\alpha}f(t)\\ +M_1M_2(J^{\alpha}t)^2)\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

# 8. ZAMAN SKALASINDA KISMİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde Delta Riemann- Liouville kesirli integrali kullanılarak zaman skalasında senkronize iki fonksiyon olması durumunda Chebyshev fonksiyoneli için bazı yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

$f$ ve $g$, $[a,t]_{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı senkronize integrallenebilen iki fonksiyon olsun. Delta Riemann-Liouville (8.1) fonksiyonunu ele alalım.

$$T(f,g) := \frac{1}{t-a}\int_a^t f(x)g(x)\Delta x - \left(\frac{1}{t-a}\int_a^t f(x)\Delta x\right)\left(\frac{1}{t-a}\int_a^t g(x)\Delta x\right). \tag{8.1}$$

**Teorem 8.1 :** $f$ ve $g$ fonksiyonları $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $\forall t > a$, $\propto \geq 1$, $a \geq 0$ için,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) \geq (h_{\propto}(t,a))^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) \tag{8.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ $ve$ $g$ fonksiyonları $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $\forall \tau, \varphi \geq 0$ için,

$$\big(f(\tau)-f(\varphi)\big)\big(g(\tau)-g(\varphi)\big) \geq 0$$

$$f(\tau)g(\tau) - f(\tau)g(\varphi) - f(\varphi)g(\tau) + f(\varphi)g(\varphi) \geq 0$$

$$f(\tau)g(\tau) + f(\varphi)g(\varphi) \geq f(\tau)g(\varphi) + f(\varphi)g(\tau) \tag{8.3}$$

eşitsizliği yazılabilir. $\forall \tau \epsilon (a,t)$ için, (8.3) eşitsizliğinin her iki tarafı $h_{\propto-1}(t,\sigma(\tau))$ ile çarpılırsa,

$$h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\tau) + h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\varphi)$$
$$\geq h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\varphi) + h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\tau) \tag{8.4}$$

elde edilir. (8.4) eşitsizliği $(a,t)$ aralığında $\tau$'ya göre integrallenirse,

$$\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)\, f(\tau)g(\tau)\Delta\tau + \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\varphi)\Delta\tau$$
$$\geq \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\varphi)\Delta\tau + \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\tau)\Delta\tau$$

bulunur. $f(\varphi)$ , $g(\varphi) ve\ f(\varphi).\, g(\varphi)$, $\tau$'dan bağımsız olduğundan integral dışına alınır ve düzenlenirse,

$$\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)\, f(\tau)g(\tau)\Delta\tau + f(\varphi)g(\varphi)\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)\Delta\tau$$
$$\geq g(\varphi)\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)\Delta\tau + f(\varphi)\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)g(\tau)\Delta\tau$$

elde edilir. Tanım 2.30 ve Tanım 2.32'den,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) + f(\varphi)g(\varphi)(h_{\propto}(t,a)) \geq g(\varphi)K_a^{\propto}f(t) + f(\varphi)K_a^{\propto}g(t) \tag{8.5}$$

yazılabilir. $\varphi \,\epsilon\, (a,t)$ olmak üzere, (8.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $h_{\propto-1}(t,\sigma(\varphi))$ ile çarpılırsa,

$$h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)K_a^{\propto}(fg)(t) + h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)f(\varphi)g(\varphi)\big(h_{\propto}(t,a)\big)$$
$$\geq h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)g(\varphi)K_a^{\propto}f(t) + h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)f(\varphi)K_a^{\propto}g(t) \tag{8.6}$$

bulunur. (8.6) eşitsizliği $(a,t)$ aralığında $\varphi$'ye göre integrallenirse,

$$\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)\; K_a^{\propto}(fg)(t)\Delta\varphi \;+\; \int_a^t h_{\propto-1}(t,\sigma(\varphi))\, f(\varphi)g(\varphi)(h_{\propto}(t,a)\Delta\varphi$$
$$\geq \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)g(\varphi)K_a^{\propto}f(t)\Delta\varphi + \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)f(\varphi)K_a^{\propto}g(t)\,\Delta\varphi$$

elde edilir. $K_a^{\propto}(fg)(t),\; K_a^{\propto}f(t),\; K_a^{\propto}g(t)$ ve $h_{\propto}(t,a)$, $\varphi$'den bağımsız olduğundan integral dışına alınabilir.

$$K_a^{\propto}(fg)(t)\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)\,\Delta\varphi \;+\; (h_{\propto}(t,a)\int_a^t h_{\propto-1}(t,\sigma(\varphi))\, f(\varphi)g(\varphi)\Delta\varphi$$
$$\geq K_a^{\propto}f(t)\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)g(\varphi)\Delta\varphi + K_a^{\propto}g(t)\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)f(\varphi)\,\Delta\varphi$$

Tanım 2.30 ve Tanım 2.32 gereği,

$$K_a^{\propto}(fg)(t)\big(h_{\propto}(t,a)\big) + \big(h_{\propto}(t,a)\big)K_a^{\propto}(fg)(t) \geq K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t) + K_a^{\propto}g(t)K_a^{\propto}f(t)$$

elde edilir.

$$2K_a^{\propto}(fg)(t)\big(h_{\propto}(t,a)\big) \geq 2K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t)$$

$$K_a^{\propto}(fg)(t)\big(h_{\propto}(t,a)\big) \geq K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t)$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) \geq \frac{1}{\big(h_{\propto}(t,a)\big)}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t)$$

bulunur ve teorem ispatlanmış olur.

**Teorem 8.2 :** $f$ ve $g$ , $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında iki senkronize fonksiyon olsun. $\forall\, t > a$ , $\propto, \beta \geq 1$ , $a \geq 0$ olmak üzere,

$$h_{\propto}(t,a)K_a^{\beta}(fg)(t) + h_{\beta}(t,a)K_a^{\propto}(fg)(t) \geq K_a^{\propto}f(t)K_a^{\beta}g(t) + K_a^{\propto}g(t)K_a^{\beta}f(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $f$ ve $g$ , $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında iki senkronize fonksiyon ve $\tau, \varphi \geq 0$ olduğundan,

$$(f(\tau) - f(\varphi))(g(\tau) - g(\varphi)) \geq 0$$

$$f(\tau)g(\tau) + f(\varphi)g(\varphi) \geq f(\tau)g(\varphi) + f(\varphi)g(\tau) \tag{8.7}$$

yazılabilir. $\tau \in (a,t)$ için, (8.7) eşitsizliğinin her iki tarafı $h_{\propto-1}(t,\sigma(\tau))$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} &h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\tau) + h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\varphi) \\ &\qquad \geq h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\varphi) + h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\tau) \end{aligned} \tag{8.8}$$

bulunur. (8.8) eşitsizliği, $(a,t)$ aralığında $\tau$'ya göre integrallenirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} &\int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\tau)\Delta\tau + \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\varphi)\Delta\tau \\ &\qquad \geq \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\tau)g(\varphi)\Delta\tau + \int_a^t h_{\propto-1}\big(t,\sigma(\tau)\big)f(\varphi)g(\tau)\Delta\tau. \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) + (fg)(\varphi)\big(h_{\propto}(t,a)\big) \geq g(\varphi)K_a^{\propto}f(t) + f(\varphi)K_a^{\propto}(t) \tag{8.9}$$

bulunur. $\varphi \epsilon (a,t)$ için, (8.9) eşitsizliğinin her iki tarafı $h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} &h_{\beta-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)K_a^{\propto}(fg)(t) + h_{\beta-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)(fg)(\varphi)\big(h_{\propto}(t,a)\big) \\ &\qquad \geq h_{\beta-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)g(\varphi)K_a^{\propto}f(t) + h_{\beta-1}\big(t,\sigma(\varphi)\big)f(\varphi)K_a^{\propto}(t) \end{aligned} \tag{8.10}$$

(8.10) eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $(a,t)$ aralığında $\varphi$'ye göre integrallenirse,

$$\begin{aligned} &\int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))K_a^{\propto}(fg)(t)\Delta\varphi + \int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))(fg)(\varphi)\big(h_{\propto}(t,a)\big)\Delta\varphi \\ &\qquad \geq \int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))g(\varphi)K_a^{\propto}f(t)\Delta\varphi + \int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))f(\varphi)K_a^{\propto}(t)\Delta\varphi \end{aligned}$$

yazılabilir. Düzenlenirse,

$$K_a^{\propto}(fg)(t)\int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))\Delta\varphi+\big(h_{\propto}(t,a)\big)\int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))(fg)(\varphi)\big(h_{\propto}(t,a)\big)\Delta\varphi$$

$$\geq K_a^{\propto}f(t)\int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))g(\varphi)\Delta\varphi+K_a^{\propto}g(t)\int_a^t h_{\beta-1}(t,\sigma(\varphi))f(\varphi)\Delta\varphi$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$K_a^{\propto}(fg)(t)\left(h_\beta(t,a)\right)+\big(h_{\propto}(t,a)\big)K_a^{\beta}(fg)(t)\geq K_a^{\propto}f(t)K_a^{\beta}g(t)+K_a^{\propto}g(t)K_a^{\beta}f(t)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**Teorem 8.3 :** $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı n tane pozitif artan $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ fonksiyonunu ele alalım.$\forall\ t>a$ , $\propto\geq 1$ , $a\geq 0$ olmak üzere,

$$K_a^{\propto}\left(\prod_{i=1}^{n}f_i\right)(t)\geq (h_{\propto}(t,a))^{1-n}\prod_{i=1}^{n}K_a^{\propto}f_i(t)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** İspat için tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$n=1$ ve $\forall\ t>a$ , $\alpha\geq 1$ , $a\geq 0$ için, $K_a^{\propto}(f_1)(t)\geq K_a^{\propto}f_1(t)$ eşitsizliğinin doğruluğu açıktır.

$n=2$ ve $\forall\ t>a$ , $\propto\geq 1$ , $a\geq 0$ için, Teorem 8.1 gereği,

$$K_a^{\propto}\left(\prod_{i=1}^{2}f_i\right)(t)\geq \big(h_{\propto}(t,a)\big)^{-1}\prod_{i=1}^{2}K_a^{\propto}f_i(t)$$

$$K_a^{\propto}(f_1f_2)(t)\geq \frac{1}{h_{\propto}(t,a)}K_a^{\propto}f_1(t)K_a^{\propto}f_2(t)$$

elde edilir. Tümevarım hipotezi gereği $n-1$ için eşitsizliğin doğru olduğu kabul edilip $n$ için doğruluğu gösterilmelidir.

$$K_a^{\propto}\left(\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right)(t)\geq \big(h_{\propto}(t,a)\big)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}K_a^{\propto}f_i(t)\qquad(8.11)$$

eşitsizliği sağlansın. O halde $K_a^{\propto}(\prod_{i=1}^{n}f_i)(t)\geq (h_{\propto}(t,a))^{1-n}\prod_{i=1}^{n}K_a^{\propto}f_i(t)$ eşitsizliği gösterilmelidir.

$(f_i)_{i=1,\dots,n}$ pozitif artan fonksiyonlar olduğundan $(\prod_{i=1}^{n-1}f_i)\,(t)$ fonksiyonu da artandır. Buradan Teorem 8.1'de, $g=\prod_{i=1}^{n-1}f_i$ , $f=f_n$ kabul edilirse,

$$\prod_{i=1}^{n}f_i=\prod_{i=1}^{n-1}f_if_n=fg$$

eşitliği sağlanır. (8.11) eşitsizliğinin her iki tarafı $\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}(f_n)(t)$ ile çarpılırsa,

$$\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}(f_n)(t)K_a^{\propto}(\prod_{i=1}^{n-1}f_i)(t)\geq\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{2-n}\prod_{i=1}^{n-1}K_a^{\propto}f_i(t)K_a^{\propto}(f_n)(t)$$

elde edilir. Düzenlenirse,

$$\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}(f_n)(t)K_a^{\propto}(\prod_{i=1}^{n-1}f_i)(t)\geq\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{1-n}\prod_{i=1}^{n}K_a^{\propto}f_i(t)$$

bulunur. Böylece,

$$K_a^{\propto}(\prod_{i=1}^{n}f_i)(t)\geq\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{1-n}\prod_{i=1}^{n}K_a^{\propto}f_i(t)$$

sonucuna ulaşılır.

**Teorem 8.4 :** $f$ ve $g$ , $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı iki fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonu artan, $g$ fonksiyonu türevlenebilir ve $m\coloneqq inf_{t\geq 0}g'(t)$ reel sayısının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall t>a$ , $\propto\geq 1$ , $a\geq 0$ için,

$$\begin{aligned}K_a^{\propto}(fg)(t)\geq&\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t)-m\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}(t)\\&+mK_a^{\propto}\left(tf(t)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat :** $k(t)\coloneqq g(t)-mt$ fonksiyonunu ele alalım. $k$'nin diferensiyellenebilir olduğu ve $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında artan olduğu açıktır. Teorem 8.3'ten,

$$\begin{aligned}K_a^{\propto}(kf)(t)=K_a^{\propto}\left((g-mt\,)f\right)(t)&\geq\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}k(t)\\&=\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}(g-mt\,)(t)\end{aligned}$$

yazılabilir. Lineerlikten,

$$\begin{aligned}K_a^{\propto}(fg)(t)-mK_a^{\propto}(tf)(t)&\geq\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)(K_a^{\propto}g(t)-mK_a^{\propto}t)\\&=\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t)-m\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}t\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeler düzenlenirse,

$$K_a^{\propto}(fg)(t)\geq\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}g(t)-m\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}K_a^{\propto}f(t)K_a^{\propto}t+mK_a^{\propto}(tf)(t)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

**Sonuç 8.5 :** $f$ ve $g$ , $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı iki fonksiyon olsun.

**a)** $f$ azalan , $g$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $M := sup_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayısı var olsun. Bu durumda $\forall t > a$ , $\propto\geq 1$ , $a \geq 0$ için,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - M\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t + M K_a^{\propto}(tf(t))$$

yazılabilir.

**b)** $f$ ve $g$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon ve $m_1 \coloneqq inf_{t\geq 0} f'(t)$ , $m_2 \coloneqq inf_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayıları var olsun. $\forall t > a$ , $\propto\geq 1$ , $a \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} &K_a^{\propto}(fg)(t) - m_2 K_a^{\propto}\big(tf(t)\big) - m_1 K_a^{\propto}\big(tg(t)\big) + m_1 m_2 K_a^{\propto} t^2 \\ &\qquad \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}[K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - m_2 K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto}(t) - m_1 K_a^{\propto}(t) K_a^{\propto} g(t) \\ &\qquad + m_1 m_2 (K_a^{\propto} t)^2] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**c)** $f$ ve $g$ diferensiyellenebilir iki fonksiyon $M_1 \coloneqq sup_{t\geq 0} f'(t)$ , $M_2 \coloneqq sup_{t\geq 0} g'(t)$ reel sayıları var olsun. $\forall t > a$ , $\propto\geq 1$ , $a \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} &K_a^{\propto}(fg)(t) - M_2 K_a^{\propto}\big(tf(t)\big) - M_1 K_a^{\propto}\big(tg(t)\big) + M_1 M_2 K_a^{\propto} t^2 \\ &\qquad \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1}[K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - M_2 K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto}(t) - M_1 K_a^{\propto}(t) K_a^{\propto} g(t) \\ &\qquad + M_1 M_2 (K_a^{\propto} t)^2] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

**İspat :**

**a)** $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı azalan ve diferensiyellenebilir $G(t) \coloneqq g(t) - Mt$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall t > a$ , $\propto\geq 1$ , $a \geq 0$ için Teorem 8.1 gereği aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$K_a^{\propto}(Gf)(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} G(t) K_a^{\propto} f(t).$$

Böylece,

$$K_a^{\propto}((g - Mt)f(t)) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto}(g - Mt)(t)$$

elde edilir. Lineerlikten,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) - MK_a^{\propto}\big(tf(t)\big) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t)\big(K_a^{\propto} g(t) - MK_a^{\propto}(t)\big)$$
$$= \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - M\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t$$

yazılabilir. İfade düzenlenirse,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - M\left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t + MK_a^{\propto}\big(tf(t)\big)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

**b)** $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı artan ve diferensiyellenebilir $F(t) \coloneqq f(t) - m_1 t$ ve $G(t) \coloneqq g(t) - m_2 t$ fonksiyonlarını ele alalım. $\forall t > a$ , $\propto \geq 1$ , $a \geq 0$ için, Teorem 8.1 gereği,

$$K_a^{\propto}(FG)(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} F(t) K_a^{\propto} G(t)$$

yazılabilir. Buradan $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonları yerine yazılırsa,

$$K_a^{\propto}((f(t) - m_1 t)(g(t) - m_2 t))(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto}(f(t) - m_1 t) K_a^{\propto}(g(t) - m_2 t)$$

elde edilir. Lineerlik kullanılırsa,

$$K_a^{\propto}((fg)(t) - m_2 t f(t) - m_1 t g(t) + m_1 m_2 t^2)$$
$$\geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} [K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - m_2 K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t - m_1 K_a^{\propto} g(t) K_a^{\propto} t$$
$$+ m_1 m_2 (K_a^{\propto} t)^2]$$

yazılabilir. İfade düzenlenirse,

$$K_a^{\propto}(fg)(t) - m_2 K_a^{\propto} t f(t) - m_1 K_a^{\propto} t g(t) + m_1 m_2 K_a^{\propto} t^2$$
$$\geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} [K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - m_2 K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t - m_1 K_a^{\propto} g(t) K_a^{\propto} t$$
$$+ m_1 m_2 (K_a^{\propto} t)^2]$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

**c)** $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı artan ve diferensiyellenebilir $F(t) \coloneqq f(t) - M_1 t$ ,

$G(t) \coloneqq g(t) - M_2 t$ fonksiyonlarını ele alalım. $\forall t > a$, $\propto \geq 1$, $a \geq 0$ için, Teorem 8.1 gereği,

$$K_a^{\propto}(FG)(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto} F(t) K_a^{\propto} G(t)$$

yazılabilir, $F(t)$ ve $G(t)$ fonksiyonları yerine yazılırsa,

$$K_a^{\propto}((f(t) - M_1 t)(g(t) - M_2 t))(t) \geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} K_a^{\propto}(f(t) - M_1 t) K_a^{\propto}(g(t) - M_2 t)$$

elde edilir. Burada lineerlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} K_a^{\propto}((fg)(t) - M_2 t f(t) - M_1 t g(t) + M_1 M_2 t^2) \\ &\geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} [K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - M_2 K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t - M_1 K_a^{\propto} g(t) K_a^{\propto} t \\ &+ M_1 M_2 (K_a^{\propto} t)^2] \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} K_a^{\propto}(fg)(t) - M_2 K_a^{\propto} t f(t) - M_1 K_a^{\propto} t g(t) + M_1 M_2 K_a^{\propto} t^2 \\ &\geq \left(h_{\propto}(t,a)\right)^{-1} [K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} g(t) - M_2 K_a^{\propto} f(t) K_a^{\propto} t - M_1 K_a^{\propto} g(t) K_a^{\propto} t \\ &+ M_1 M_2 (K_a^{\propto} t)^2] \end{aligned}$$

elde edilir.

# 9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde bazı önemli türden kesirli integral eşitsizlikleri incelenmiş ve zaman skalasına genişletilmiştir. Bu çalışma ile eşitsizliklerin kesikli veya sürekli analizde ayrı ayrı incelenmesine gerek kalmamıştır.

Tezde Riemann-Liouville kesirli integrali kullanılarak incelenen eşitsizlikler, Caputo, Hadamard, Comformable, Beta ve Riesz gibi farklı kesirli integral tanımları kullanılarak genişletilebilir. Bulunacak olan bu eşitsizlikler zaman skalası teorisi yardımıyla daha da birleştirilip genelleştirilebilir.

## 10. KAYNAKLAR

[1] Hardy, G. H., Littlewood, J.E., Pólya G.,1942, “Inequalities, 2nd edition”, *Cambridge University Press*, Cambridge.

[2] Beckenbach, E. F., Bellman, R., 1961, “Inequalities”, *Springer-Verlag,* Berlin, Heidelberg.

[3] Mitrinoviç, D.S., 1970, “Analytic inequalities”, *Springer-Verlag,* Berlin, Heidelberg, New York.

[4] Mitrinoviç, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., 1993, “Mathematics and its applications series; volume:61”, *Kluwer Academic Publishers,* Dordrecht, Boston.

[5] Pecaric, J. E., 1987, “Convex functions: inequalities”, *Serbocroatian,* Beograd.

[6] Katugampola, U. N., 2011, “New approach to a generalized fractional integral”, *Appl Math Comput,* 218: 860-865.

[7] Orlicz, W., 1961, “A note on modular spaces-I”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 9: 157-162.

[8] Mohamed, J., Donal, O., Bessem, S., 2016, “On Hermite-Hadamard type inequalities via generalized fractional integrals”, *Turkish Journal of Mathematics*, 40: 1221-1230.

[9] Dragomir, S. S. and Agarwal, R. P., 1988, “Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula”, *Appl Math. Lett.,* 11(5): 91-95.

[10] Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldız, H., Başak, N., 2013, “Hermite-Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities”, *Math Comput. Modell.,* 57: 2403-2407.

[11] Mohamed, J., Bessem, S., 2016, “On Hermite-Hadamard type inequalities via fractional integrals of a function with respect to another function”, *J. Nonlinear Sci. Appl.,* 9: 1252-1260.

[12] Çetin, Y., Özdemir, M. E., Kavurmaci Önalan, H., 2017, “Fractional integral inequalities via s-convex functions”, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 5(1): 18-22.

[13]Kırmacı, U. S., Bakula, M. K., Özdemir, M. E. and Pečarić J., 2007, “Hadamard-type inequalities for s-convex functions”, *Appl. Math. Comput.,* 193: 26-35.

[14] Set, E., Sarikaya, M. Z., Özdemir, M. E. and Yıldırım, H., 2004, “The Hadamard’s inequality for some convex functions via fractional integrals and related results”, *Jour. of Appl. Math., Statis. Infor.*, 10 (2): 69-83.

[15] Noor, M. A., Noor, K. I., Safdar, F., 2017, “Generalized geometrically convex functions and inequalities”, *Journal of Inequalities and Applications,* 2017: 202.

[16] Belarbi, S., Dahmani, Z., 2009, “On some new fractional integral inequalities”, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* 10(3): 86-90.

[17] Katugampola, U. N., 2015, “Mellin transforms of generalized fractional integrals and derivatives”, *Appl Math Comput* 257: 566-580.

[18] Hadamard J., 1893, “Étude sur les propriétés des fonctions entiéres et en particulier d’une fonction condiédrée par Riemann”, *J. Math. Pure Appl.,* 58: 171-216.

[19] Dragomir, S. S., Fitzpatrick, S., 1999, “The Hadamard.s inequality for s-convex functions in the second sense”, *Demonstratio Math.,* 32(4): 687-696.

[20]Özdemir, M. E., Dragomir, S. S. and Yıldız, Ç., 2013, “The Hadamard’s inequality for convex function via fractional integrals”, *Acta Math. Sci*., 33B (5): 1293-1299.

[21] Dragomir, S. S., Pearce, E. M., 2000, “EEM: Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications”, *Victoria University*, Australia, 252-288.

[22] Latif, M. A., 2014, “MA: New Hermite-Hadamard type integral inequalities for the GA-convex functions with applications”, *Analysis* 34(4): 379-389.

[23] Chebyshev, P. L., 1882, “Sur les expressions approximatives des integrales definies par les autres prises entre les mêmes limites”, *Proc. Math. Soc. Charkov,* 2: 93-98.

[24] Anastassiou, G. A., 2010, “Principles of delta fractional calculus on time scales and inequalities”, *Mathematical and Computer Modelling*, 52: 556-566.

## 11. ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler**

| | |
|---|---|
| Soyadı Adı : | AKINCALI Ayşegül |
| Uyruğu : | T.C. |
| Doğum Tarihi ve Yeri : | 01.09.1988 Uşak |
| Medeni Hali : | Evli |
| Telefon : | 0537 466 76 30 |
| e-mail : | aysegul.akincali@gmail.com |

| **Eğitim Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet Tarihi** |
|---|---|---|
| Lisans | Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü | 2012 |
| Lise | İzzettin Çalışlar Lisesi /Uşak | 2006 |

**Yabancı Dil**

İngilizce

**Yayınlar**

-

**Hobiler**

Sinema, Kitap, Bilgisayar, Matematik