



**TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN GENEL
ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA
TİTREŞİM ANALİZİ**

HAYRULLAH GÜN KADIOĞLU



**T.C.
ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN GENEL ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA
TİTREŞİM ANALİZİ**

HAYRULLAH GÜN KADIOĞLU

**Doç. Dr. M. ÖZGÜR YAYLI
(DANIŞMAN)**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

BURSA-2018

TEZ ONAYI

Hayrullah Gün KADIOĞLU tarafından hazırlanan "Timoshenko Kirişlerinin Genel Elastik Sınır Koşullarında Titreşim Analizi" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çoğunluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. M. Özgür YAYLI

Başkan: Doç. Dr. M. Özgür YAYLI
Uludağ Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye: Prof. Dr. Babür DELİKTAŞ
Uludağ Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Üye: Prof. Dr. Yusuf Cengiz TOKLU
Okan Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.


Prof. Dr. Ali BAYRAM
Enstitü Müdürü

31.11.2018 (Tarih)

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
 - atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
 - kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
 - ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı
- beyan ederim.**

17.01.2018
Hayrullah Gün KADIOĞLU



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN GENEL ELASTİK SINIR KOŞULLARINDA TİTREŞİM ANALİZİ

Hayrullah Gün KADIOĞLU

Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. M. Özgür Yaylı

Bu tez çalışmasında kirişlerin genel elastik sınır koşullarında serbest titreşim analizi Timoshenko kiriş teorisiyle gerçekleştirilmiştir. Timoshenko kiriş teorisi sadece moment değil kesme kuvvetini de hesaba katan bir teoridir. Bu yüzden bu teori Euler Bernoulli kiriş teorisine kıyasla daha doğru sonuçlar verir. Bundan dolayı bu tez çalışmasında Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Problemin çözümünde yer değiştirme fonksiyonu Fourier sinüs serisi olarak seçilmiştir. Benzer şekilde dönme fonksiyonu Fourier kosinüs serisi olarak seçilmiş. Bu fonksiyonlar Fourier katsayılarını hesaplamak için hareket denklemlerinde kullanılmıştır. Daha sonra lineer denklemleri elde etmek için Stokes' dönüşümleri sınır koşullarına dâhil edilmiştir. Bu lineer denklemler kullanılarak bir katsayılar matrisi oluşturulmuştur. Bu katsayılar matrisinin öz değeri açısal frekansları vermiştir. Bu tez çalışmasının sonuçları diğer akademik çalışmalar ile kıyaslanmıştır ve doğruluğu ispat edilmiştir. Ayrıca bulunan sonuçlar bir dizi şekiller ve tablolarda sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Timoshenko kiriş teorisi, Serbest titreşim analizi, Stokes' dönüşümü, Fourier serileri.

2018, ix + 67 sayfa.

ABSTRACT

MSc Thesis

FREE VIBRATION ANALYSIS OF TIMOSHENKO BEAMS WITH GENERAL ELASTIC BOUNDARY CONDITIONS

Hayrullah Gün KADIOĞLU

Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Civil Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. M. Özgür Yaylı

In this thesis study, the free vibration analysis of beams with general elastic boundary conditions has been performed by using Timoshenko beam theory. Timoshenko beam theory is a theory which takes into account not solely bending moment but also shear force. Thus this theory presents more accurate results compared to Euler Bernoulli beam theory. Therefore Timoshenko beam theory has been utilized in this thesis study. In the solution of the problem, displacement function has been chosen as a Fourier sine series. Similarly, rotation function has been chosen as a Fourier cosine series. These functions have been used in the equations of motion to calculate the Fourier coefficients. Then Stokes' transformation has been applied to boundary conditions in order to obtain the linear equations. A coefficients matrix has been consisted of by utilizing the linear systems of equations. The eigenvalues of this coefficients matrix has presented the angular frequencies. Results of this thesis study have been compared with other academic studies and have proved accuracy. Moreover found results have been presented in a series of figures and tables.

Keyword: Timoshenko beam theory, Free vibration analysis, Stokes' transformation, Fourier series.

2018, ix + 67 pages.

TEŐEKKÖR

Öğretim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, beni destekleyen ve bugünlere gelmemde büyük payı olan, çok sevdiğim saygı değer aileme, ilminden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. M. Özgür Yaylı' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

17.01.2018

Hayrullah Gün KADIOĞLU



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGE DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	3
2.1. Konu ile Alakalı Genel Bilgiler.....	6
2.2. Yapılan Kabuller.....	6
2.3. Timoshenko Kiriş Teorisi.....	7
2.3.1. Timoshenko Kirişlerinin Dinamik Denklemleri.....	10
2.3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi ile Örnek Bir Problem.....	12
2.4. Euler Bernoulli Kiriş Teorisi.....	14
2.4.1. Euler Bernoulli Kirişlerinin Hareket Denklemleri.....	16
2.4.2. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi ile Örnek Bir Problem.....	18
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	21
3.1. Fourier Serileri.....	21
3.1.1. Fourier Sinüs Serisi.....	21
3.1.2. Fourier Kosinüs Serisi.....	23
3.1.3. Yer Değiştirme ve Dönme Fonksiyonları İçin Fourier Serilerinin Seçimi.....	24
3.2. Stokes' Dönüşümleri.....	24
3.3. Fourier Katsayılarının Bulunması.....	29
3.4. Dönmeyi ve Çökmeyi Önleyici Yaylara Sahip Kiriş için Çözüm.....	30
3.5. Dönmeyi Engelleseyici Yay ve Sabit Mesnetli Kiriş İçin Çözüm.....	35
3.6. Stokes' Dönüşümleri ile Yapılabilecek Benzer Bir Uygulama.....	38
4. BULGULAR.....	42
4.1. Açısal Frekanslar.....	42
4.2. Kritik Burkulma Yükleri.....	55
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	61
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ.....	67

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
E	Kirişin Elastisite Modülü
G	Kirişin Kayma Modülü
A	Kiriş Kesitinin Alanı
I	Kiriş Kesitinin Eylemsizlik Momenti
L	Kirişin Boyu
h	Kiriş Yüksekliği
J	Newton'un 2. Yasasından Gelen Moment
F _j	Newton'un 2. Yasasından Gelen Kuvvet
ρ	Kirişin Özgül Kütlesi
m	Kirişin Yaylı Kütlesi
M	Moment
V	Kesme Kuvveti
κ_S	Kayma Düzeltme Katsayısı
θ	Dönme Fonksiyonu
φ	Çökme Fonksiyonu
U	Yatay Yer Değiştirme
W	Düşey Yer Değiştirme
t	Zaman
x,y,z	Koordinat Takımları
ω	Açısal Frekans
σ	Gerilme
e	Birim Şekil Değiştirme
k_w	Kayma Düzeltme Katsayısının Tersisi
R	Dönme Rijitliği
D	Çökme Rijitliği
P	Kritik Burkulma Yüğü
d	Kiriş Enkesit Çapı
γ	Küçük Ölçek Etkisi Katsayısı

Kısaltmalar	Açıklama
DTM	Diferansiyel Transformasyon Metodu
EB	Euler Bernoulli Kiriş Teorisi
T	Timoshenko Kiriş Teorisi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Basit kiriş örneği.....	7
Şekil 2.2. Timoshenko kiriş teorisine göre alınan kesitin durumu.....	8
Şekil 2.3. Timoshenko kiriş teorisine için çiziliş kinematik detayı.....	10
Şekil 2.4. Bir konsol kiriş örneği.....	12
Şekil 2.5. Basit kiriş örneği.....	14
Şekil 2.6. Euler Bernoulli kiriş teorisine göre alınan kesitin durumu.....	15
Şekil 2.7. Euler Bernoulli kiriş teorisine için çizilmiş kinematik detay.....	17
Şekil 2.8. Bir konsol kiriş örneği.....	18
Şekil 3.1. Bir karenin kenarları boyunca, çizgi integrali.....	26
Şekil 3.2. Stokes' dönüşümü, çizgisel kapalı alan ve ilgili yüzey modeli.....	26
Şekil 3.3. Dönmeyi ve çökmeyi engelleyici yaylar ile mesnetlenmiş kiriş modeli.....	30
Şekil 3.4. Dönmeyi engelleyici yaylar ve sabit mesnetler ile mesnetlenmiş kiriş modeli.....	35
Şekil 3.5. Normal kuvvet etkisi altında dönmeyi engelleyici yaylar ve sabit mesnetler ile mesnetlenmiş kiriş modeli.....	40
Şekil 4.1. L'ye bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 1. Mod'daki açısal frekansların değişimi.....	44
Şekil 4.2. L'ye bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 2. Mod'daki açısal frekansların değişimi.....	44
Şekil 4.3. L'ye bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 3. Mod'daki açısal frekansların değişimi.....	44
Şekil 4.4. L'ye bağlı basit-basit mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açısal frekanslarının değişimi.....	45
Şekil 4.5. L'ye bağlı basit-ankastre mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açısal frekanslarının değişimi.....	45
Şekil 4.6. L'ye bağlı ankastre-ankastre mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açısal frekanslarının değişimi.....	46
Şekil 4.7. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kiriş.....	46
Şekil 4.8. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin 1. Mod'daki açısal frekanslarının değişimi.....	48
Şekil 4.9. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kiriş 2. Mod'daki açısal frekanslarının değişimi.....	49
Şekil 4.10. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kiriş 3. Mod'daki açısal frekanslarının değişimi.....	49
Şekil 4.11. İki ucu basit mesnet ve dönmeyi engelleyici yaylar ile mesnetlenmiş kiriş modeli.....	50
Şekil 4.12. 1. Mod'a ait rijitliklere göre açısal frekansların değişimi.....	51
Şekil 4.13. 2. Mod'a ait rijitliklere göre açısal frekansların değişimi.....	52
Şekil 4.14. 3. Mod'a ait rijitliklere göre açısal frekansların değişimi.....	53
Şekil 4.15. 4. Mod'a ait rijitliklere göre açısal frekansların değişimi.....	54
Şekil 4.16. 5. Mod'a ait rijitliklere göre açısal frekansların değişimi.....	55
Şekil 4.17. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Euler Bernoulli kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=0$ için.....	57
Şekil 4.18. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Timoshenko kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=0$ için.....	57

Şekil 4.19. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Timoshenko kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=1$ için.....	58
Şekil 4.20. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Timoshenko kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=2$ için.....	58
Şekil 4.21. Ankastre-ankastre mesnetli kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi.	59
Şekil 4.22. Ankastre-basit mesnetli kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi	59
Şekil 4.23. Ankastre-basit mesnetli kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi	60



ÇİZELGE DİZİNİ

Çizelge 4.1. Rijit sınır koşullarındaki kirişlerin, kiriş boyuna bağlı açısız frekanslarının değışimi.....	43
Çizelge 4.2. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin (L=7,5m) yay rijitliğine bağlı farklı modlardaki açısız frekansları.....	47
Çizelge 4.3. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin (L=8m) yay rijitliğine bağlı farklı modlardaki açısız frekansları.....	47
Çizelge 4.4. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin (L=8,5m) yay rijitliğine bağlı farklı modlardaki açısız frekansları.....	48
Çizelge 4.5. 1. Mod'a ait rijitliklere göre açısız frekanslar.....	50
Çizelge 4.6. 2. Mod'a ait rijitliklere göre açısız frekanslar.....	51
Çizelge 4.7. 3. Mod'a ait rijitliklere göre açısız frekanslar.....	52
Çizelge 4.8. 4. Mod'a ait rijitliklere göre açısız frekanslar.....	53
Çizelge 4.9. 5. Mod'a ait rijitliklere göre açısız frekanslar.....	54
Çizelge 4.10. Bu çalışma için basit-basit, ankastre-basit ve ankastre ankastre mesnetleniş kirişleri için L/d ve γ bağlı kritik burkulma yükleri	56
Çizelge 4.11. Basit-basit, ankastre-basit ve ankastre ankastre mesnetleniş kirişleri için L/d ve γ bağlı kritik burkulma yükleri	56
Çizelge 5.1. Bozyiğit ve ark. (2015) yapmış oldukları çalışmadan elde ettikleri farklı mesnetlenme koşulları için buldukları açısız frekanslar ve bu çalışmadan elde edilen açısız frekansların değeri.....	61

1. GİRİŞ

Taşıyıcı sistemlerin, dinamik yükler etkisi altındaki davranışları günümüzde büyük önem arz etmektedir. Öyle ki birçok taşıyıcı sistem bu dinamik analizlere göre modellenmektedir. Dinamik analizlerin en önemli parametreleri; açısal frekanslar ve serbest titreşim periyotlarıdır.

Araştırmacılar kirişler için bu açısal frekans ve serbest titreşim periyotlarını bulmak amacıyla genellikle basit ya da ankastre mesnetleri kullanılarak rijit sınır koşullarında hesaplar yapmıştır. Bozyiğit ve ark. (2015) kirişlerin rijit sınır koşullarında açısal frekanslarını diferansiyel transformasyon metoduyla elde etmiştir. Fakat gerçekte kirişlerin sonsuz rijit, eksenal veya dönel rijit mesnetlenmesi pratik açıdan çok mümkün değildir. Bu nedenle deforme olabilir sınır koşulları için çözümler gerekmektedir. Ancak araştırmalar göstermiştir ki deforme olabilir sınır koşullarında çözümler oldukça kısıtlıdır.

Var olan deforme olabilir sınır koşulları için çözümler çoğunlukla kayma etkilerinin hesaba katılmadığı Euler Bernoulli kiriş teorisi için yapılmıştır. Euler Bernoulli kiriş teorisi tek bir hareket denklemine sahip olduğu için araştırmacıların hesap yapmaları daha kolaydır. Kim ve Kim (2001) Euler Bernoulli kirişlerinin elastik sınır koşullarında açısal frekanslarını Fourier serilerini kullanarak elde etmiştir. Fakat kayma gerilmelerinin, kirişin eğilmeden sonra aldığı şekil olan elastik eğriye etkisinin dikkate alındığı, Euler Bernoulli kiriş teorisinin yetersiz kaldığı yerleri kapatan ve gerçeğe daha yakın sonuçlar veren Timoshenko kiriş teorisi iki tane hareket denklemine sahiptir bu nedenle araştırmacılar bu kiriş teorisini kullanarak hesap yapmakta oldukça zorlanmaktadır.

Lakin bu çalışmada kirişlerin rijit olmayan sınır koşullarında açısal frekansları bulunurken Timoshenko kiriş teorisi kullanılmıştır. Başlangıç olarak yer değiştirme fonksiyonu olarak Fourier sinüs serisi seçilmiştir. Dönme fonksiyonu olarak ise Fourier kosinüs serileri seçilmiştir. Seçilen bu fonksiyonlar problemi yöneten denklemlerde yerine yazılarak; Fourier katsayıları hesaplanmıştır. Modeli kurulan kiriş için Timoshenko kiriş teorisine göre sınır koşulları belirlenmiştir. Kirişin iki ucuna dönmeyi ve çökmeyi engelleyici yaylar konularak ve ikinci bir sınır koşulu yazılarak, iki ucuna

basit mesnet ve dönmeyi engelleyici yaylar konularak bu aşama gerçekleştirilmiştir. Bulunmuş olan Fourier katsayıları ve Stokes' dönüşümüyle elde edilmiş yüksek mertebeden türevler yardımıyla; sonsuz serilerden oluşan lineer denklem takımları elde edilmiştir. Bu denklemler yardımıyla katsayılar matrisi elde edilerek; bir öz değer problem oluşturulmuştur. Katsayılar matrisinin determinantından açısal frekanslar bulunmuştur. Bulunan sonuçlar literatürde bulunan diğer sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

Diğer taraftan Stokes' dönüşümleri ve Fourier serilerinin başka bir uygulaması olarak yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin burkulma analizi de benzer yöntem ile yapılabileceği gösterilmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi, klasik elastisite teorisinin boyut etkisinin hesaba katılmamasından dolayı yetersiz olduğu durumları ortadan kaldırmak için geliştirilmiştir. Eringen (1972) bu boyut etkisinden söz eden ilk araştırmacı olmuştur. Bu teori sayesinde küçük boyutlu yapıları ve parçaları da modelleme imkânı doğmuştur. Nanoteknoloji çalışmalarının artması, yerel olmayan elastisite teorisinin önemini ortaya çıkarmakta ve uygulama alanları gün geçtikçe artmaktadır. Klasik elastisite teorisinde maddenin her bir noktası için denge denklemleri aynı kabul edilir. Büyük ölçekli maddeler için bu durum geçerli olmasına rağmen küçük ölçekli maddelerde farklılıklar gözlenmektedir. Li ve Chou (2003), Chowdhury ve ark. (2010) ve Poncharal ve ark. (1999) atomik simülasyonlar ve deneysel bulgularla, malzemenin nano ve makro ölçekteki mekanik performansında bir küçük ölçek etkisi olduğunu kanıtlamıştır. Maddenin boyutu küçüldükçe iç yapısının da dikkate alınması ve bir noktada gerilme hesaplanırken sadece o noktadaki şekil değiştirmeleri hesaba katmayan diğer tüm noktalardaki şekil değiştirmelerin de bir fonksiyona bağlayarak hesaba katan yerel olmayan elastisite teorisi nano ölçekli çubukların analizinde kullanılmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ARAŞTIRMASI

Euler Bernoulli kiriş teorisinde elastik sınır koşullarına sahip kirişlerin titreşim analiziyle ilgili literatürde birçok çalışma olmasına rağmen, elastik sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin titreşim analizi konusunda pek fazla çalışma yoktur. Araştırmacılar rijit sınır koşulları için kapalı çözümleri rahatlıkla hesaplayabilmektedir. Fakat deforme olabilir sınır koşulları için çözümler oldukça kısıtlıdır.

Literatürde rijit ve elastik sınır koşullarına sahip Timoshenko ve Euler Bernoulli kirişleri için yapılmış bazı çalışmalar bu bölümde sıralanmıştır. Bozyiğit ve ark. (2015) Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini diferansiyel transformasyon metodu ile gerçekleştirmiştir. Koç (2006) Euler Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerini kullanarak basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. Demirdağ ve Yeşilce (2011) tepe noktasında toplanmış kütleyle sahip, dönmeye karşı engelleyici yaylar ile mesnetli Timoshenko kolonlarının serbest titreşim analizini DTM ile yapmıştır. Kocatürk ve Şimşek (2005) elastik mesnetli kirişlerin serbest titreşimini Lagrange denklemleri ve Kuvvet serilerini kullanarak Timoshenko kiriş teorisine incelemiştir. Banerjer (1998) eksenel yükü yüklenmiş Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini dinamik rijitlik metodu ile yapmıştır. Viala ve ark. (2007) eksenel yüklenmiş çatlamış Timoshenko kiriş yapılarının serbest titreşim analizini dinamik rijitlik metodu ile yapmıştır. Demirdağ ve Yeşilce (2008) eksenel yükün, kirişlerce taşınan çok sayıda kütle yay sistemlerine sahip çok açıklıklı Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimi üzerine etkisini araştırmıştır. Zhou (2001) Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak çok açıklıklı Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini yapmıştır. Farghaly (1994) doğal frekans ve kritik burkulma yükü katsayılarını çok açıklıklı Timoshenko kirişleri için incelemiştir. Wang (1997) hareketli bir yük için çok açıklıklı Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini yapmıştır. Rou ve Gupta (2001) sonlu elemanlar metodunu kullanarak dönen Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini yapmıştır. Lin ve Hsiao (2001) d'Alembert ve virtüel iş prensiplerinden faydalanarak analitik bir yöntemle dönen Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini yapmıştır. Kaya (2006) dönen Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini DTM ile yapmıştır. Kaya ve Özdemir (2010) konik biçimdeki dönen Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini DTM ile yapmıştır. Rose (1994) iki parametrelili elastik zemine

oturan Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini analitik yöntem ile incelemiştir. Develi (2007) Winkler zemini ve Vlasov elastik zemini üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir Timoshenko kirişinin serbest titreşim problemlerini araştırmıştır. Yokoyama (1995) iki parametrelili elastik zemine oturan Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizini sonlu elamanlar metodu ile yapmıştır. Yeşilce ve Çatal (2011) elastik zemine oturan değişken kesitli, yarı rijit bağlı Reddy-Bickford kirişlerinin serbest titreşim analizini DTM ile yapmıştır. Kim ve Kim (2001) Euler Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim analizini Fourier serilerini kullanarak yapmıştır. Han ve ark. (1999) kirişlerin serbest titreşim analizini, analitik yöntem ile Euler Bernoulli, Rayleigh, Timoshenko ve kesme teorilerine dayalı incelemiştir. Bağdatlı ve ark. (2011) eksenel ivmelenen iki açıklıklı Euler Bernoulli kirişlerinin titreşimini incelemiştir. Malik ve Dang (1998) DTM 'nu Euler Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim analizini yapabilmek için kullanmıştır. Bert ve Zang (2004) bileşik çubukların eksenel titreşimini DTM ile incelemiştir. Gül ve Aydoğdu (2015) elastik zemin üzerine oturan kirişlerin Euler Benoulli ve Timoshenko kiriş teorisiyle dalga sayısı yönünden titreşimlerini incelemiştir. Yanık ve Yaylı (2015) rijit olmayan sınır koşullarında elastik zemin üzerine oturan bir çubuğun eksenel titreşim analizini Euler Bernoulli kiriş teorisiyle Fourier serilerini kullanarak yapmıştır. Çatal (2008) elastik zemine oturan kirişleri serbest titreşim denklemlerinin çözümünü DTM ile yapmıştır.

Diğer taraftan Eringen (1972), Eringen ve Edelen (1972) ve Eringen (1983) yerel olmayan elastisite teorisini ortaya atmış ve geliştirmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi küçük ölçek etkilerini hesaba katan bir teori olup, cismin bir noktadaki gerilmesi o noktanın şekil değiştirmesine değil o noktanın bulunduğu ortamdaki tüm noktaların şekil değiştirmesine bağlı olduğunu belirtir. Li ve Chou (2003), Chowdhury ve ark. (2010) ve Poncharal ve ark. (1999) atomik simülasyonlar ve deneysel bulgularla, malzemenin nano ve makro ölçekteki mekanik performansında bir küçük ölçek etkisi olduğunu kanıtlamıştır. Yapılan bu çalışmaların mühendislik ve bilim üzerinde uzun vade de yansımaları hissedilmiştir. Öyle ki birçok araştırmacı titreşim, burkulma ve eğilme ile ilgili çalışmalarına yerel olmayan elastisite teorisini eklemiştir. Yaylı ve Çerçevik (2015) çatlamış nano çubukların titreşim analizini rijit olmayan sınır koşullarını için yapmıştır. Yaylı (2014) nano karbon tüplerin rijit olmayan sınır koşullarında titreşim analizini Fourier serilerini kullanarak yapmıştır. Rahmani ve

Pedram (2014) fonksiyonel derecelendirilmiş nano ölçekli yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin titreşim analizini Hamilton prensibini kullanarak analitik olarak yapmıştır. Wang ve ark. (2007) yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin titreşimini analitik olarak incelemiştir. Reddy (2007) kirişlerin eğilmesi, burkulması ve titreşimi gibi konulara, yerel olmayan elastisite teorisini eklemiştir. Benzair ve ark. (2007) sıcaklığın, tek duvarlı nano karbon tüplerin titreşimine etkisini yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisine araştırmıştır. Yang ve ark. (2010) tek duvarlı nano karbon tüplerin lineer olmayan serbest titreşimlerini yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisine incelemiştir. Yanık (2015) nano ölçekli çubukların rijit olmayan sınır şartlarında yerel olmayan Euler Bernoulli teorisine göre titreşim analizini Fourier serilerini kullanarak yapmıştır. Demir ve Civelek (2016) titreşim için yerel olmayan sonlu elemanların formülasyonunu yapmıştır. Wang ve ark. (2006) nano ve mikro ölçekli çubuk ve tüplerin, yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisine burkulma analizini analitik yöntem ile incelemiştir. Artan ve Tepe (2008) yerel olmayan çubukların burkulma analizi için başlangıç değer metodunu kullanmıştır. Ghannadpour ve Mohammadi (2010) nano ve mikro ölçekli çubukların burkulma analizini yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisini temel alarak Chebyshev polinomlarını kullanarak yapmıştır. Setoodeh ve ark. (2011) yerel olmayan elastisite teorisine tek duvarlı karbon nano tüplerin burkulmasını incelemiştir. Thai (2012) burkulma, eğilme, titreşim gibi konulara yerel olmayan elastisite teorisini eklemiştir. Akgöz ve Civelek (2013) şekil değiştirme gradyan elastisitesine dayalı kesiti lineer olarak değişen mikro ölçekli kolonların burkulma analizini yapmıştır. Yaylı (2016) dönmeyi engelleyici yaylar ile mesnetli tek duvarlı nano karbon tüplerin burkulmasını incelemiştir. Kadioğlu ve Yaylı (2017) yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin burkulma analizini Fourier serilerini kullanarak yapmıştır.

2.1. Konu ile Alakalı Genel Bilgiler

Kirişler tek boyutlu taşıyıcı elemanlar olup kesitlerinde kesme kuvveti ve moment taşırlar. Bazı durumlarda normal kuvvette taşıyabilirler. Fakat bu ihmal edilebilecek düzeydedir. Kirişlerin şekil değiştirmelerinde büyük ölçüde moment etkilidir. Fakat kiriş boyunun kiriş yüksekliğine oranı (L/h) küçüldükçe kesme kuvvetinin de şekil değiştirmeye etkisi artmaktadır.

Kirişler ile ilgili mevcut geçerlikte olan ve üniversitelerin mühendislik fakültelerinde okutulan kiriş teorisi Euler Bernoulli kiriş teorisidir. Bu teoriye göre eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan bir kesit eğilmeden sonrada tarafsız eksene dik ve düzlemdir. Buradan eğilmenin sadece moment etkisi ile oluştuğu söylenmektedir.

Diğer taraftan Euler Bernoulli kiriş teorisinin genişletilmiş versiyonu olan Timoshenko kiriş teorisinde ise eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan bir kesit eğilmeden sonra yine düzlem kalır fakat bu sefer tarafsız eksene dik kalmaz. Buradan çıkartılacak sonuç şudur; eğilmeye hem kesme kuvvetinin hem de momentin etkisi mevcuttur. Bilindiği üzere kayma gerilmeleri sabit değildir. Bunun için de Timoshenko kiriş teorisinde bu gerilme dağılımını düzeltmek için bir düzeltme katsayısı (κ_S) mevcuttur.

Yukarıda belirtilmiş olan bilgiler doğrultusunda şu sonuçlara varılabilir:

Timoshenko kiriş teorisi gerçeğe daha yakın biri kiriş teorisidir bu neden ile de Euler Bernoulli kiriş teorisine göre her zaman daha doğru sonuçlar verir. Bu iki teori L/h oranı büyüdükçe verdikleri sonuçlar birbirine yakınlaşmaktadır. Diğer yandan L/h oranı küçüldükçe verdikleri sonuçlar birbirlerinden uzaklaşmaktadır.

2.2. Yapılan Kabuller

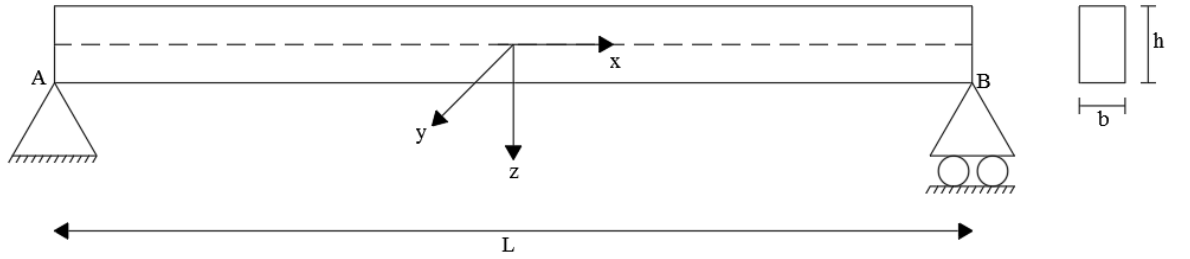
Bu çalışma için şu kabuller yapılmıştır:

Malzeme homojen ve izotropiktir. Malzeme davranışı doğrusal elastiktir. İkinci mertebeye etkiler ihmal edilmiştir. Sönüm etkisi ihmal edilmiştir. Eksenel deformasyon göz önüne alınmamıştır.

2.3. Timoshenko Kiriş Teorisi

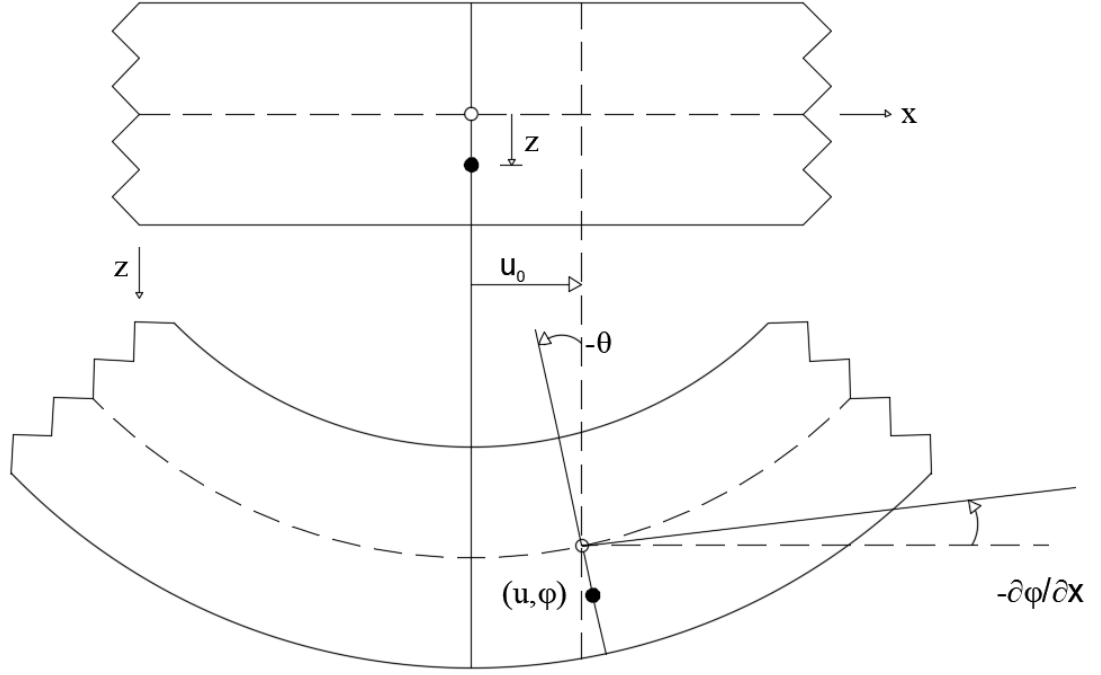
Timoshenko kiriş teorisi kayma etkilerinin de elastik eğriye katan bir teori olup, Euler Bernoulli kiriş teorisinin genişletilmiş versiyonudur denilebilir. Euler Bernoulli kiriş teorisinde, kirişin eğilmeden önce tarafsız eksene dik ve düzlem olan kesiti eğilmeden sonra da yine tarafsız eksene dik ve düzlem kalır. Fakat Timoshenko kiriş teorisinde ise, eğilmeden sonra kirişin kesiti yine düzlem kalır fakat bu sefer tarafsız eksene dik değildir. Çünkü kayma etkilerinin de eğilmeye etkisi dikkate alınmıştır.

Şekil 2.1’ de görüldüğü üzere basit mesnetli bir kirişi aldığımızda buna z yönünde düşey yükler etkilediğinde momentten dolayı σ_{xx} ve kesme kuvvetlerinden dolayı da σ_{xz} oluşacağı görülmektedir.



Şekil 2.1. Basit kiriş örneği

Şekil 2.2’ de görüldüğü üzere tarafsız eksene düşeyde z kadar uzaklıkta çok küçük bir parça aldığımızda ve düşey yüklerin etkisinde eğilmesini incelediğimizde;



Şekil 2.2. Timoshenko kiriş teorisine göre alınan kesitin durumu

yer değiştirme fonksiyonları x ve z doğrultusu için şu şekilde yazılır;

$$U(x, z, t) = u_0 - z\theta(x, t) \quad (2.1)$$

$$W(x, z, t) = \varphi(x, t) \quad (2.2)$$

Burada U fonksiyonu x yönündeki şekil değiştirmeyi, W fonksiyonu ise z yönündeki şekil değiştirmeyi gösterir, u_0 x yönündeki şekil değiştirme olup çok küçük bir değer olduğu için ihmal edilir.

Bulmuş olduğumuz yer değiştirmelerden birim yer değiştirmelere geçilirse;

$$e_{xx} = \partial U / \partial x, \quad (2.3)$$

$$e_{xz} = \partial W / \partial x + \partial U / \partial z, \quad (2.4)$$

yazılır. Buradaki e_{xx} ve e_{xz} , xx ve xz yönündeki birim yer değiştirme fonksiyonlarını gösterir. Buradan;

$$e_{xx} = -z\partial\theta / \partial x, \quad (2.5)$$

$$e_{xz} = \partial\varphi/\partial x - \theta, \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Buradan xx ve xz yönündeki (σ_{xx} ve σ_{xz}) gerilmelerine geçilir;

$$\sigma_{xx} = E e_{xx}, \quad (2.7)$$

$$\sigma_{xz} = \kappa_S G e_{xz}, \quad (2.8)$$

bulunur. Burada E elastisite modülü, G kayma modülü ve κ_S değeri (Timoshenko kiriş teorisinde) kayma düzeltme katsayısıdır. (Kayma gerilmeleri kesit düzleminde sabit olmadığından bu katsayı ile çarpılır) Yukarıdaki denklemler (2.5) ve (2.6) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\sigma_{xx} = -\frac{zE\partial\theta}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{xz} = \kappa_S G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \theta \right), \quad (2.10)$$

bulunur. Gerilmelerden momente geçilir;

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad (2.11)$$

$$M = -\frac{E\partial\theta}{\partial x} \int_A z^2 dA, \quad (2.12)$$

$$I = \int_A z^2 dA, \quad (2.13)$$

$$M = -EI \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad (2.14)$$

bulunur. I atalet momentidir. Diğer gerilmeden kesme kuvvetine geçilir;

$$V = \int_A \sigma_{xz} dA, \quad (2.15)$$

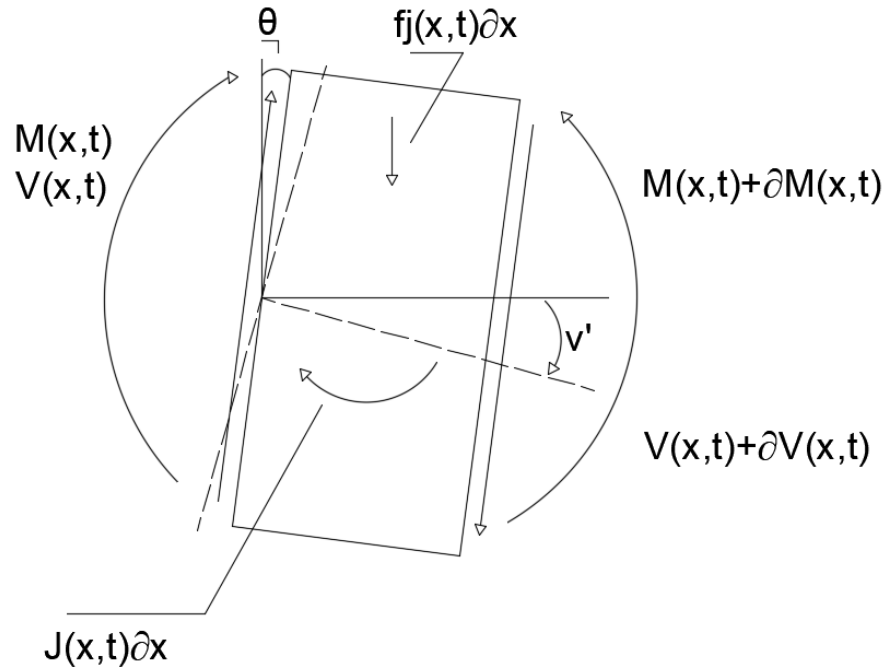
$$V = \kappa_S G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \theta \right) \int_A dA, \quad (2.16)$$

$$V = \kappa_S GA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \theta \right), \quad (2.17)$$

bulunur.

2.3.1. Timoshenko Kirişlerinin Dinamik Denklemleri

Şekil 2.3' de görülen ∂x kadar küçük bir parça için karakteristik dinamik denklemler aşağıdaki gibi moment ve kuvvet denge denklemleri yazılarak elde edilebilir.



Şekil 2.3. Timoshenko kiriş teorisi için çiziliş kinematik detayı

Burada J ve f_j fonksiyonları Newton'un 2. Kanunundan gelmektedir.

$$\sum M = 0, \quad (2.18)$$

$$M - (M + \Delta M) + \frac{1}{2} V \Delta x + \frac{1}{2} (V + \Delta V) \Delta x + J(x,t) \Delta x = 0, \quad (2.19)$$

$$J(x, t) = -\rho I \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.20)$$

$\frac{1}{2} \partial V \partial x$ değeri çok küçük olduğu için ihmal edilir.

$$-\partial M + V \partial x - \rho I \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} \partial x = 0, \quad (2.21)$$

eşitlik ∂x ' e bölünürse ve daha sonra moment ve kesme kuvveti fonksiyonları yerine yazılırsa ilk hareket denklemi aşağıdaki gibi sistematik halde elde edilir.

$$-\frac{\partial M}{\partial x} + V - \rho I \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.22)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \kappa_s GA \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \theta \right) - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (2.23)$$

$$\Sigma V = 0, \quad (2.24)$$

$$(V + \partial V) - V + f_j(x, t) \partial x = 0, \quad (2.25)$$

$$f_j = -\rho A \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.26)$$

$$\partial V - \rho A \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \partial x = 0, \quad (2.27)$$

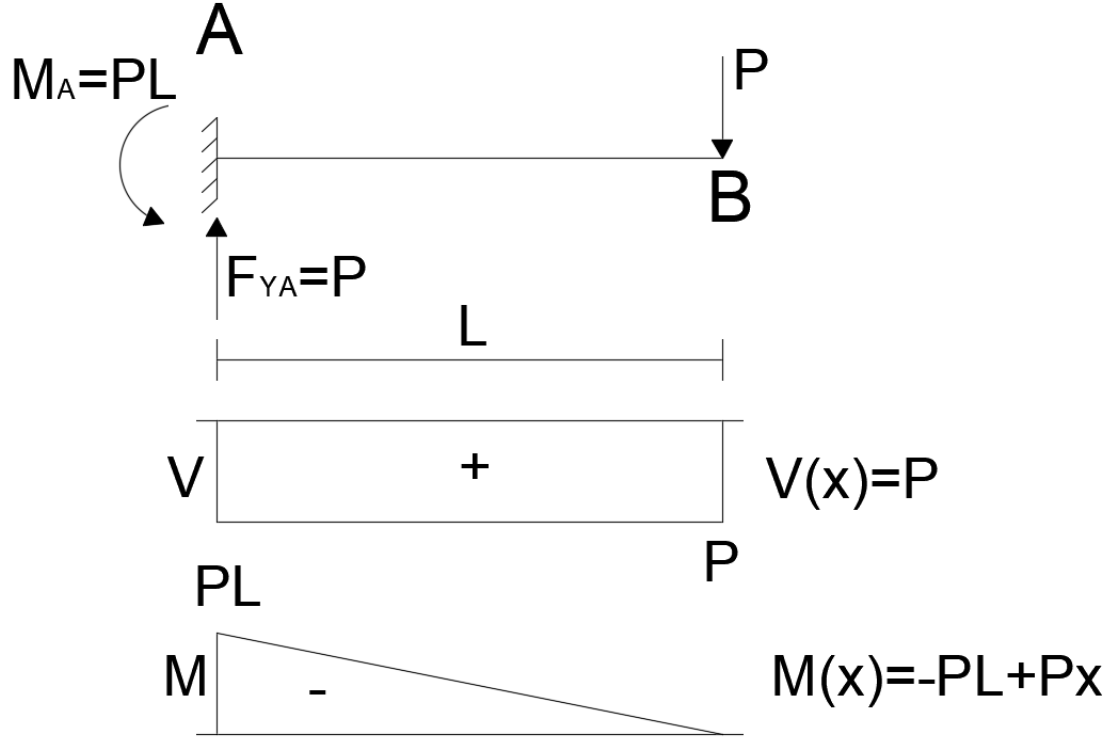
eşitlik ∂x ' e bölünürse ve kesme kuvveti fonksiyonu yerine yazılırsa ikinci hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.28)$$

$$\kappa_s GA \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.29)$$

2.3.2. Timoshenko Kiriş Teorisi ile Örnek Bir Problem

Şekil 2.4’ de P yükü etkisindeki konsol kirişin aşağıda moment ve kesme kuvveti diyagramları verilmiştir. Bu doğrultuda Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak, aşağıda P yükünün etkideği B noktasındaki düşey yer değiştirme hesaplanmıştır.



Şekil 2.4. Bir konsol kiriş örneği

Timoshenko kirişleri için moment fonksiyonu sağdaki formdadır.

$$M(z) = -EI \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (2.30)$$

Yukarıdaki denklemde $\frac{d\theta}{dx}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{Px}{EI} - \frac{PL}{EI} \quad (2.31)$$

bulunur. $\frac{d\theta}{dx}$ 'in x ' e bağlı bir defa integrali alınır;

$$\theta(x) = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{PLx}{EI} + c_1, \quad (2.32)$$

bulunur. Burada c_1 integral sabitidir. Ankastre mesnette dönme olmayacağından;

$$\theta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0, \quad (2.33)$$

olarak bulunur. Timoshenko kirişlerinde kesme kuvveti fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$V = \frac{AG}{k_w} \left(\frac{d\varphi}{dx} - \theta \right). \quad (2.34)$$

Yukarıdaki fonksiyona, daha önce hesaplanmış olan $\theta(x)$ ve kesme kuvveti fonksiyonu Şekil 2.4'de verildiği üzere yazılıp eşitliği $\frac{k_w}{AG}$ ile çarpıldığında;

$$\frac{Pk_w}{AG} = \frac{d\varphi}{dx} - \left(-\frac{Px^2}{2EI} + \frac{PLx}{EI} \right), \quad (2.35)$$

elde edilir. $\frac{d\varphi}{dx}$ yalnız bırakılırsa;

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{Pk_w}{AG} - \frac{Px^2}{2EI} + \frac{PLx}{EI}, \quad (2.36)$$

bulunur. $\frac{d\varphi}{dx}$ 'in x' e bağlı bir defa integrali alınır;

$$\varphi = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{PLx^2}{2EI} + \frac{Pk_w x}{AG} + a_1, \quad (2.37)$$

bulunur. Burada a_1 integral sabitidir. Ankastre mesnette dönme olmayacağından;

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow a_1 = 0, \quad (2.38)$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonu için $x=L$ yazılırsa konsol kirişin P yükünün etkideği noktadaki düşey yer değiştirmesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi(L) = -\frac{PL^3}{6EI} + \frac{PL^3}{2EI} + \frac{Pk_w L}{AG}, \quad (2.39)$$

$$\varphi(L) = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{Pk_wL}{AG}. \quad (2.40)$$

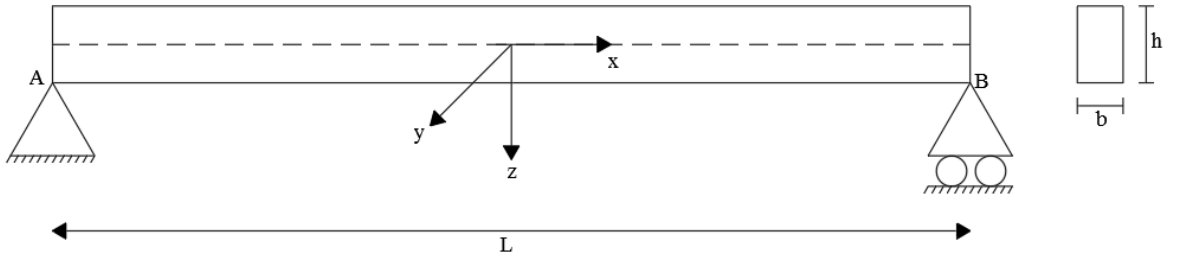
$k_w = 1.2$; $\frac{E}{G} = 2.6$ alındığında ve $\frac{PL^3}{3EI}$ parantezine alınır;

$$\varphi(L) = \frac{PL^3}{3EI} \left(1 + 9.36 \frac{h^2}{L^2} \right), \quad (2.41)$$

bulunur.

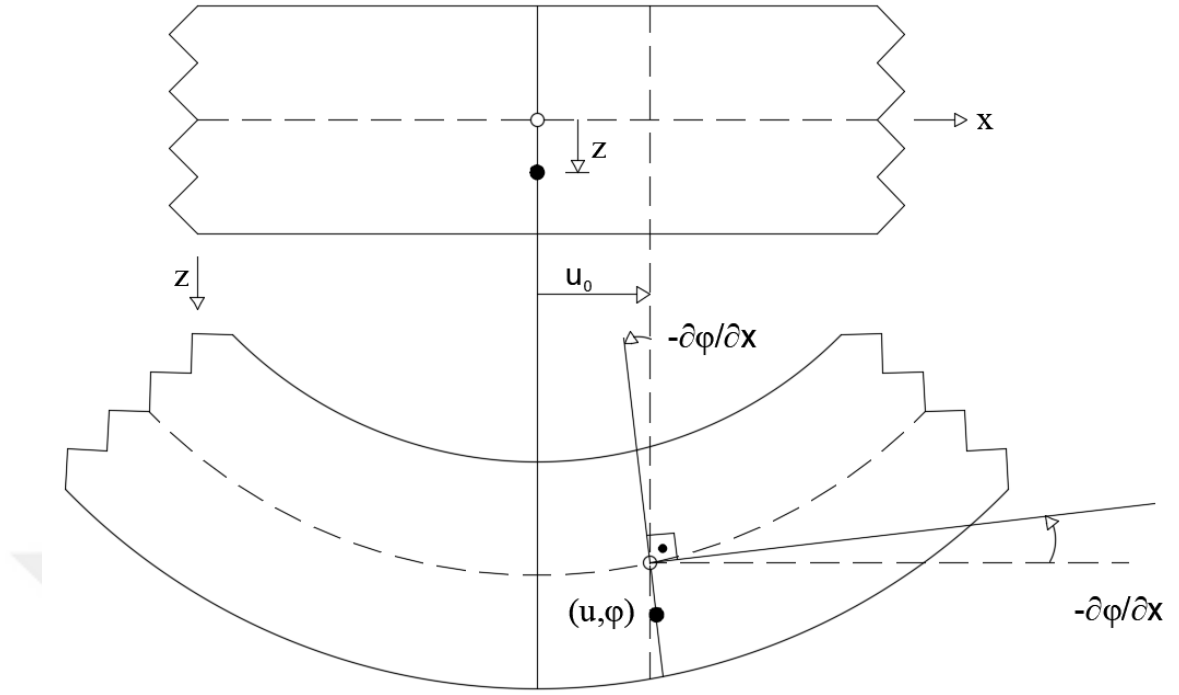
2.4. Euler Bernoulli Kiriş Teorisi

Şekil 2.5’ de görüldüğü üzere basit mesnetli bir kirişi aldığımızda buna z yönünde düşey yükler etkilediğinde momentten dolayı σ_{xx} ve kesme kuvvetlerinden dolayı da σ_{xz} oluşacağı görülmektedir.



Şekil 2.5. Basit kiriş örneği

Şekil 2.6’ de görüldüğü üzere tarafsız eksene düşeyde z kadar uzaklıkta çok küçük bir parça aldığımızda ve düşey yüklerin etkisinde eğilmesini incelediğimizde;



Şekil 2.6. Euler Bernoulli kiriş teorisine göre alınan kesitin durumu

yer değiştirme fonksiyonları x ve z doğrultusu için şu şekilde yazılır;

$$U(x, z, t) = u_0 - \frac{z \partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.42)$$

$$W(x, z, t) = \varphi(x, t). \quad (2.43)$$

Burada U fonksiyonu x yönündeki şekil değiştirmeyi, W fonksiyonu ise z yönündeki şekil değiştirmeyi gösterir, u_0 x yönündeki şekil değiştirme olup çok küçük bir değer olduğu için ihmal edilir.

Bulmuş olduğumuz yer değiştirmelerden birim yer değiştirmelere geçilirse;

$$e_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.44)$$

$$e_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.45)$$

yazılır. Buradaki e_{xx} ve e_{xz} , xx ve xz yönündeki birim yer değiştirme fonksiyonlarını gösterir. Buradan;

$$e_{xx} = -z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2.46)$$

$$e_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (2.47)$$

olarak elde edilir. xx ve xz yönündeki (σ_{xx} ve σ_{xz}) gerilmelerine geçirilirse;

$$\sigma_{xx} = E e_{xx}, \quad (2.48)$$

$$\sigma_{xz} = 0, \quad (2.49)$$

gerilmeler elde edilir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{xx} = -zE \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2.50)$$

Gerilmelerden momente geçilirse;

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA, \quad (2.51)$$

$$M = \int_A -z^2 E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dA, \quad (2.52)$$

$$M = -E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \int_A z^2 dA, \quad (2.53)$$

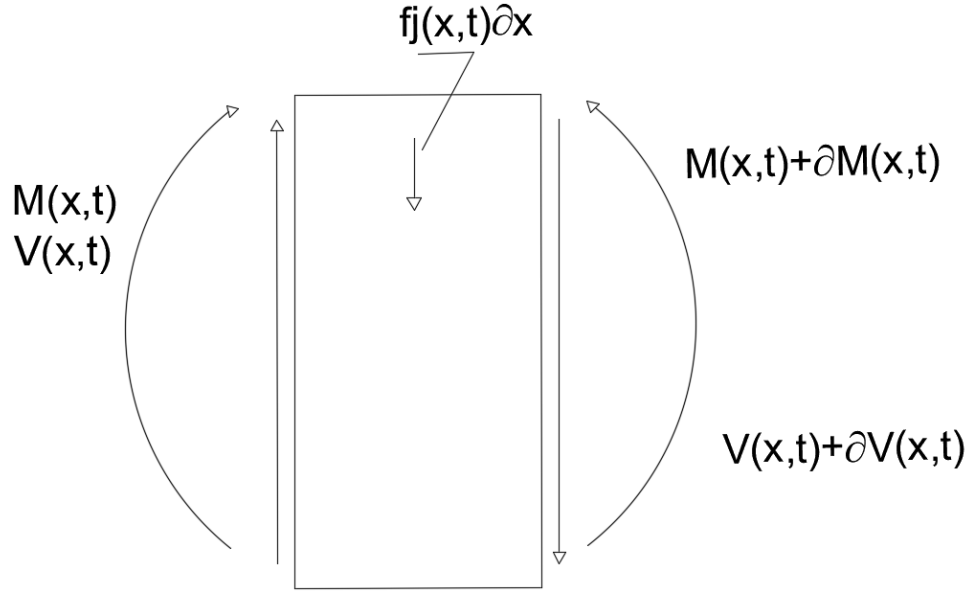
$$I = \int_A z^2 dA, \quad (2.54)$$

$$M = -EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2.55)$$

Bulunur. Burada I atalet momentidir.

2.4.1. Euler Bernoulli Kirişlerinin Hareket Denklemleri

Şekil 2.7 de görülen ∂x kadar küçük bir parça için karakteristik dinamik denklemler şu şekilde yazılabilir;



Şekil 2.7. Euler Bernoulli kiriş teorisi için çizilmiş kinematik detay

$$\sum M = 0, \quad (2.56)$$

$$M - (M + \partial M) + \frac{1}{2} V \partial x + \frac{1}{2} (V + \partial V) \partial x = 0, \quad (2.57)$$

$$M - (M + \partial M) + \frac{1}{2} V \partial x + \frac{1}{2} (V + \partial V) \partial x = 0, \quad (2.58)$$

$$-\partial M + V \partial x = 0, \quad (2.59)$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}. \quad (2.60)$$

Aşağıdaki f_j fonksiyonu Newton'un 2. Kanunundan gelmektedir.

$$\sum V = 0, \quad (2.60)$$

$$(V + \partial V) - V + f_j(x, t) \partial x = 0, \quad (2.61)$$

$$f_j = -\rho A \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2}, \quad (2.62)$$

$$\partial V - \rho A \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} \partial x = 0. \quad (2.63)$$

Yukarıdaki denklemdeki eşitlik ∂x ' e bölünürse ve kesme kuvveti yer değiştirme fonksiyonu olarak yazılırsa;

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \rho A \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.64)$$

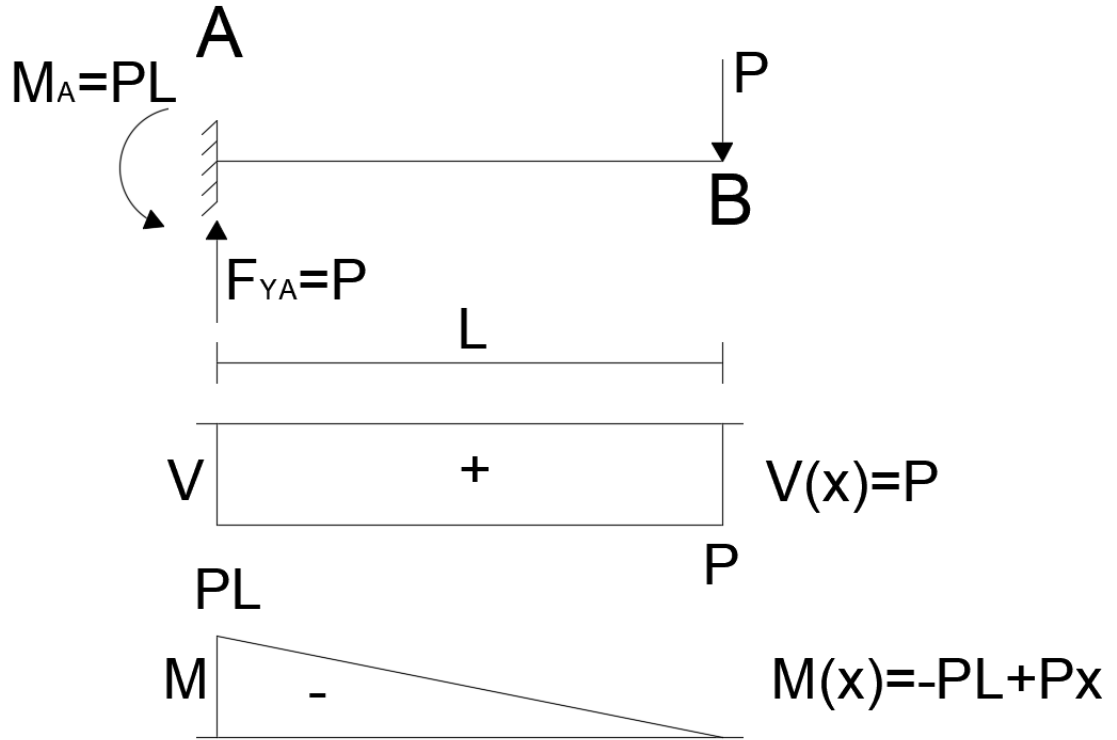
$$V = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad M = -EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (2.65)$$

$$-EI \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \rho A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.66)$$

bulunur.

2.4.2. Euler Bernoulli Kiriş Teorisi ile Örnek Bir Problem

Şekil 2.8’ de P yükü etkisindeki konsol kirişin aşağıda moment ve kesme kuvveti diyagramları verilmiştir. Bu doğrultuda Euler Bernoulli kiriş teorisi kullanılarak, aşağıda P yükünün etkidiği B noktasındaki düşey yer değiştirme hesaplanmıştır.



Şekil 2.8. Bir konsol kiriş örneği

$$M(x) = -EI \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad (2.67)$$

Yukarıdaki denklemden $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ değeri yalnız bırakılırsa;

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{Px}{EI} + \frac{PL}{EI}, \quad (2.68)$$

elde edilir. Bulunan $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ 'in bir defa x' e bağlı integrali alınırsa;

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{PLx}{EI} + c_1, \quad (2.69)$$

elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. Ankastre mesnette dönme olmayacağından;

$$\frac{d\varphi(0)}{dx} = 0 \rightarrow c_1 = 0, \quad (2.70)$$

bulunur. $\frac{d\varphi}{dx}$ 'in x' e göre integrali alınırsa;

$$\varphi = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{PLx^2}{2EI} + c_2, \quad (2.71)$$

elde edilir. Burada c_2 integral sabiti olup, ankastre mesnette düşey yer değiştirme olmayacağından;

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0, \quad (2.72)$$

bulunur. $\varphi(x)$ fonksiyonunda $x=L$ için hesap yapılırsa konsol kirişte P yükünün etkidiği noktadaki düşey yer değiştirme;

$$\varphi(L) = \frac{PL^3}{3EI}, \quad (2.73)$$

olarak bulunur.

Bulunan sonuçlar kıyaslandığında Timoshenko kiriş teorisi kesme kuvvetini de hesaba kattığı için Euler Bernoulli kiriş teorisine göre L/h oranına bağlı olarak kuvvet etkisiyle daha fazla yer değiştirme yapmıştır.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bölüm 2.3.1. de elde edilen dinamik denklemler problemin çözümünde anahtar denklemler olarak kullanılmıştır. Bu denklemler aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\frac{AG}{k_w} \left(\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - m \frac{I}{A} \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} + \frac{AG}{k_w} \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} - \theta(x, t) \right) = 0. \quad (3.2)$$

Yukarıdaki denklemlerde; m kirişin yayılı kütlelerini, A kirişin en kesit alanını, G kirişin yapıldığı malzemenin kayma modülünü, E kirişin yapıldığı malzemenin elastisite modülünü, I kirişin atalet momentini ve k_w kesme düzeltme katsayısını göstermektedir.

3.1. Fourier Serileri

Joseph Fourier (1768-1830) tarafında bulunan Fourier serileri bir metal çubuk veya levhadaki ısı denkleminin çözümü için kullanılmıştır. Fourier serileri periyodik bir fonksiyonu basit dalgalı fonksiyonların toplamına çevirir.

Günümüzde Fourier serileri elektrik mühendisliğinde, titreşim analizlerinde, kuantum mekaniğinde ve ekonomi gibi pek çok alandaki çalışmalarda kullanılmaktadır.

3.1.1. Fourier Sinüs Serisi

Aşağıdaki gibi bir sinüs serisi alıp, bunu $f(x)$ fonksiyonunun tanım fonksiyonu olarak gösterebiliriz. Burada A_n Fourier katsayısıdır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.4)$$

Her iki tarafı $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ile çaptığımızda;

$$f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (3.5)$$

elde edilir. Ve bu iki tarafı $-L \leq x \leq L$ aralığında integralini aldığımızda;

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.6)$$

elde ederiz. Bu eşitlikte toplam sembolü ve sabit değerler aşağıdaki gibi integralin dışına alınabilir. Çeşitli matematiksel işlemlerden sonra;

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.7)$$

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.8)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = L \rightarrow \text{eğer } m = n, \quad (3.9)$$

$$\int_{-L}^L (\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right))^2 dx, \quad (3.10)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-L}^L -2(\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right))^2 dx, \quad (3.11)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-L}^L (-2(\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right))^2 + 1 - 1) dx, \quad (3.12)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-L}^L (\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - 1) dx = L \quad m = 1,2,3 \dots \quad (3.13)$$

$$\int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = A_n L, \quad (3.14)$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad m = 1,2,3 \dots \quad (3.15)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad m = 1,2,3 \dots \quad (3.16)$$

bulunur. Denklem (3.9)'daki fonksiyon yukarıda yapılan adımlar ile neden L ye eşit olduğu ispat edilmiştir. Yukarıda yapılan tüm işlemler A_n Fourier katsayısını $f(x)$ fonksiyonu cinsinden elde etmek için yapılmıştır.

3.1.2. Fourier Kosinüs Serisi

Aşağıdaki gibi bir kosinüs serisi alıp, bunu $f(x)$ fonksiyonunun tanım fonksiyonu gösterebiliriz. Burada B_n Fourier katsayısıdır.

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (3.17)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.18)$$

Her iki tarafı $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ ile çaptığımızda;

$$f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (3.19)$$

elde edilir. Her iki tarafın $-L \leq x \leq L$ aralığında integralini aldığımızda;

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^L \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.20)$$

elde ederiz. Bu eşitlikte toplam sembolü ve sabit değerler aşağıdaki gibi integralin dışına alınabilir.

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.21)$$

$n=m$ ve $m \neq 0$ olduğunda;

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = B_n(L), \quad (3.22)$$

bulunur. Buradan B_n yalnız bırakılırsa;

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.23)$$

bulunur. $n \neq 0$ olduğundan;

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad (3.24)$$

bulunur. Yukarıdaki bu adımlar yine B_n fourier katsayısını $f(x)$ fonksiyonu cinsinden elde etmek için yapılmıştır.

3.1.3. Yer Değiştirme ve Dönme Fonksiyonları İçin Fourier Serilerinin Seçimi

Basit harmonik hareket kabulü yapılırsa; yer değiştirme ve dönme fonksiyonları aşağıdaki gibi Fourier serileriyle gösterilebilir.

$$\varphi(x, t) = \varphi(x) \cdot \cos(\omega t), \quad (3.25)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 \quad x = 0, \quad (3.26)$$

$$\varphi(x) = \varphi_L \quad x = L, \quad (3.27)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin(\alpha_n x)) \quad 0 < x < L, \quad (3.28)$$

$$\theta(x, t) = \theta(x) \cdot \cos(\omega t), \quad (3.29)$$

$$\theta(x) = \theta_0 \quad x = 0, \quad (3.30)$$

$$\theta(x) = \theta_L \quad x = L, \quad (3.31)$$

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(\alpha_n x)) \quad 0 < x < L, \quad (3.32)$$

Burada şu tanım geçerlidir.

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (3.33)$$

3.2. Stokes' Dönüşümleri

Stokes' dönüşümü ismini her ne kadar Gabriel Stokes (1819-1903)den alsada, aslında William Thomson (1824-1907) tarafından bulunmuştur.

Stokes' dönüşümleri, genel bir teoremdir. Yüzey tiplerine ve yüzey sınırlarına bağlıdır. Stokes' dönüşümü yapabilmek için parçalı ve düzgün yüzeyler bulunması gerekir. Düzgün demek, sadece türevlerin sürekli olması demektir. Parçalı olması ise Stokes' dönüşümlerinin birden fazla yüzeylerde kullanılabilmesi anlamına gelir. Stokes' dönüşümünün uygulanabilmesi için, yüzey sınırı kendini kesmeyen, kapalı parçalı, düzgün bir eğri olması gerekmektedir.

Stokes' dönüşümleri, karmaşık yüzey integrallerini, basit eğrisel integrallere dönüştürme de kullanılır.

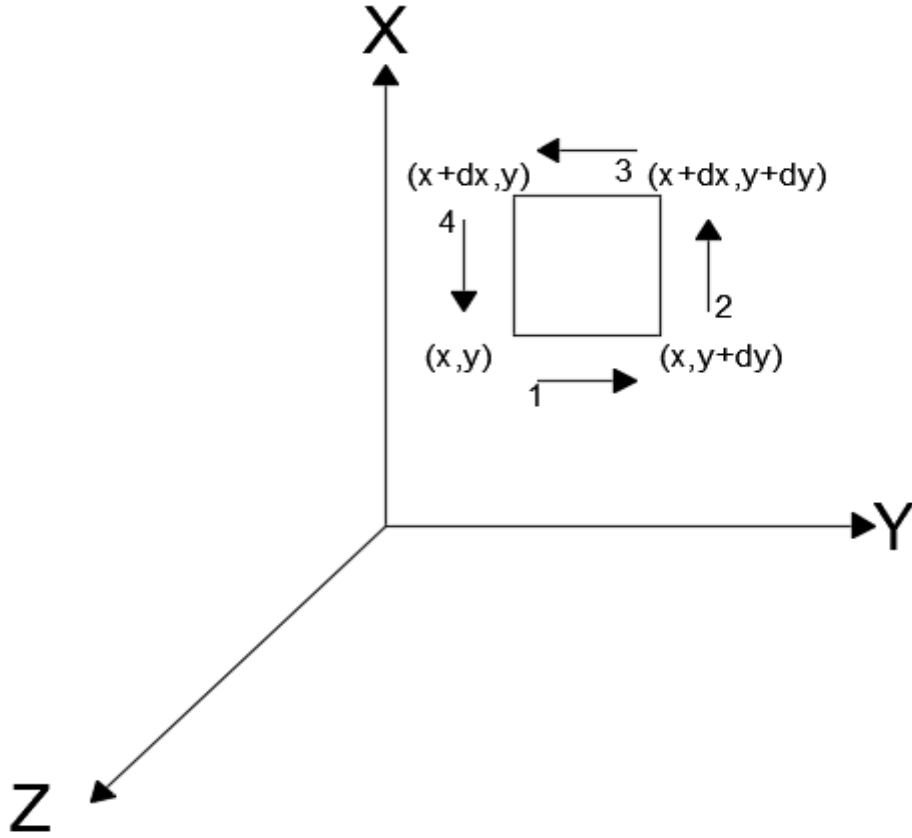
Başka bir tanımda, açık bir yüzey üzerinden bir vektör alanının rotasyonelinin yüzey integrali, aynı yüzeyi çevreleyen kapalı çevre üzerinden alınan vektör alanının çizgisel integraline eşit olduğunu ifade eder.

Bir \vec{F} vektörünün rotasyonelinin bir S alanı üzerinde yüzey integrali, \vec{F} 'in bu alanı sınırlayan $C=\partial S$ kapalı yolu üzerinden çizgisel integraline eşittir.

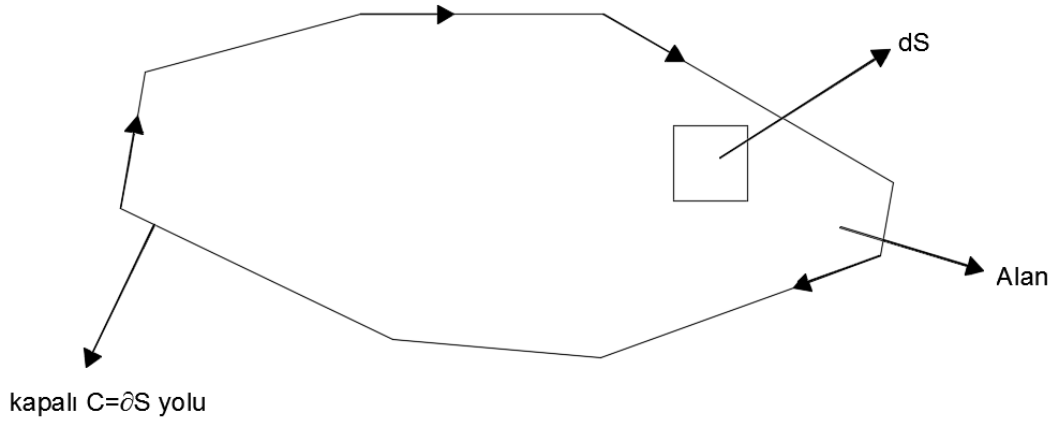
$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) d\vec{S} = \oint_C \vec{F} d\vec{l}, \quad (3.34)$$

burada, \vec{F} vektör, S alan C kapalı yol, $\vec{\nabla}$ nabra operatörü, $\vec{\nabla} \times \vec{F}$: \vec{F} vektör alanının rotasyoneli, nabra operatörü ile \vec{F} vektör alanı arasındaki vektörel çarpım işlemidir.

Bir karenin kenarları boyunca, çizgi integrali Şekil 3.1' de Stokes' dönüşümü, çizgisel kapalı alan ve ilgili yüzey modeli Şekil 3.2' de gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Bir karenin kenarları boyunca, çizgi integrali



Şekil 3.2. Stokes' dönüşümü, çizgisel kapalı alan ve ilgili yüzey modeli

Stokes' dönüşümleri, fizikte ve özellikle elektromanyetizma da çok sık kullanılmaktadır.

Bu çalışmada ise, kurulan modelden görüleceği gibi rijit olmayan sınır koşullarını, problem çözümüne dâhil etmek için matematiksel bir dönüşüm yapılması gereklidir. Bu çalışmada Fourier sinüs serisi, Stokes' dönüşümü ile birlikte kullanılarak hareketli sınır şartları da probleme dâhil edilecektir.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin(\alpha_n x) dx, \quad (3.35)$$

yukarıda Fourier serileri bölümünde belirlenen yer değiştirme fonksiyonunun türevi alınır;

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n A_n \cos(\alpha_n x)), \quad (3.36)$$

elde edilir. Üstteki bu fonksiyon Fourier kosinüs serisi ile gösterilebilir;

$$\varphi'(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(\alpha_n x), \quad (3.37)$$

(3.37) denklemindeki (f_0, f_n) katsayıları aşağıdaki formdadır. Bu katsayılar Fourier serileri bölümünde yapılan benzer işlemler ile elde edilebilir.

$$f_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(x) dx = \frac{2}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)), \quad (3.38)$$

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi'(x) \cos(\alpha_n x) dx \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (3.39)$$

Son olarak kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$f_n = \frac{2}{L} [\varphi(x) \cos(\alpha_n x)]_0^L + \frac{2}{L} [\alpha_n \int_0^L \varphi(x) \sin(\alpha_n x) dx], \quad (3.40)$$

$$f_n = \frac{2}{L} [(-1)^n \varphi(L) - \varphi(0)] + A_n \alpha_n, \quad (3.41)$$

bulunur. Yukarıda gerçekleştirilen işlemler Stokes' dönüşümü olarak bilinmektedir. Daha yüksek mertebeli türevler benzer şekilde bulunabilir. Dördüncü mertebeden türeve kadar olan sonuçlar aşağıda sunulmuştur.

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{(\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right), \quad (3.42)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} = & \frac{(\varphi''_L - \varphi''_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left[\frac{2}{L} (\varphi''_L (-1)^n - \varphi''_0) \right. \\ & \left. - \alpha_n^2 \left(\frac{2}{L} (\varphi_L (-1)^n - \varphi_0) + \alpha_n A_n \right) \right], \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4\varphi(x)}{\partial x^4} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\alpha_n x) \left[\frac{2}{L} (\varphi''_L (-1)^n - \varphi''_0) - \alpha_n^2 \left(\frac{2}{L} (\varphi_L (-1)^n - \varphi_0) \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_n A_n \right) \right] \alpha_n. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Benzer dönüşümler dönme fonksiyonu için de tekrarlanır. Dönme fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\theta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n B_n \sin(\alpha_n x)), \quad (3.46)$$

bulunur. Bu fonksiyonu Fourier kosinüs serisi olarak gösterebilmek için bir kez daha türev alınırsa;

$$\theta''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 B_n \cos(\alpha_n x)), \quad (3.47)$$

bulunur. Yukarıda yer değiştirme fonksiyonu için yapılan işlemlerin benzerleri yapıldığında dönme fonksiyonlarının üçüncü mertebeye kadar olan türevleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = - \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n B_n \sin(\alpha_n x)), \quad (3.48)$$

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = \frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \theta'_L - \theta'_0)}{L} - \alpha_n^2 B_n \right), \quad (3.49)$$

$$\frac{d^3\theta(x)}{dx^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2(\theta'_0 - \theta'_L(-1)^n)}{L} + \alpha_n^2 B_n \right). \quad (3.50)$$

3.3. Fourier Katsayılarının Bulunması

(3.1) ve (3.2) denklemleri içindeki fonksiyonlar aşağıdaki gibi yerine yazılırsa;

$$\frac{AG}{k_w} \left(\frac{d^2\varphi(x) \cos(\omega t)}{dx^2} - \frac{d\theta(x) \cos(\omega t)}{dx} \right) + m\omega^2 \varphi(x) \cos(\omega t) = 0, \quad (3.51)$$

$$EI \frac{d^2\theta(x) \cos(\omega t)}{dx^2} + m \frac{I\omega^2}{A} \theta(x) \cos(\omega t) + \frac{AG}{k_w} \left(\frac{d\varphi(x) \cos(\omega t)}{dx} - \theta(x) \cos(\omega t) \right) = 0, \quad (3.52)$$

bulunur. Yukarıda bulunan denklemler $\cos(\omega t)$ ye bölünürse;

$$\frac{AG}{k_w} \left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \frac{d\theta(x)}{dx} \right) + m\omega^2 \varphi(x) = 0, \quad (3.53)$$

$$EI \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + m \frac{I\omega^2}{A} \theta(x) + \frac{AG}{k_w} \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} - \theta(x) \right) = 0, \quad (3.54)$$

elde edilir. Toplam sembolü dışındaki ifadeleri yok etmek için (3.54) denkleminin x' e bağlı türevi alınırsa;

$$EI \frac{d^3\theta(x)}{dx^3} + m \frac{I\omega^2}{A} \frac{d\theta(x)}{dx} + \frac{AG}{k_w} \left(\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \frac{d\theta(x)}{dx} \right) = 0, \quad (3.55)$$

bulunur. (3.55) ve (3.53) denklemlerindeki fonksiyonlar yerine yazılırsa;

$$\frac{AG}{k_w} \left(-\alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right) + \alpha_n B_n \sin(\alpha_n x) \right) + m\omega^2 A_n \sin(\alpha_n x) = 0, \quad (3.56)$$

$$EI \alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2(\theta'_0 - \theta'_L(-1)^n)}{L} + \alpha_n^2 B_n \right) - m \frac{I\omega^2}{A} \alpha_n B_n \sin(\alpha_n x) + \frac{AG}{k_w} \left(-\alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right) + \alpha_n B_n \sin(\alpha_n x) \right) = 0, \quad (3.57)$$

elde edilir. Bu denklemlerden A_n ve B_n değerleri elde edilir.

$$A_n = (2AGI\alpha_n(-m\omega^2\varphi_0 + AE\alpha_n^2\varphi_0 + (-1)^n m\omega^2\varphi_L + (-1)^{n+1}AE\alpha_n^2\varphi_L - AE\theta'_0 + (-1)^n AE\theta'_L)) / (L(-A^2Gm\omega^2 + Im^2\omega^4k_w - AGIm\omega^2\alpha_n^2 - AEIm\omega^2k_w\alpha_n^2 - A^2GEI\alpha_n^4)), \quad (3.58)$$

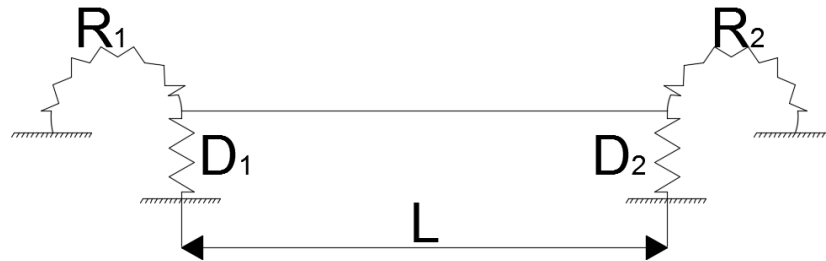
$$B_n = (-2A(-AGm\omega^2\varphi_0 + (-1)^n AGm\omega^2\varphi_L - EIm\omega^2k_w\theta'_0 + AGEI\alpha_n^2\theta'_0 + (-1)^n EIm\omega^2k_w\theta'_L + (-1)^{1+n}AGEI\alpha_n^2\theta'_L)) / (L(-A^2Gm\omega^2 + Im^2\omega^4k_w - AGIm\omega^2\alpha_n^2 - AEIm\omega^2k_w\alpha_n^2 + A^2GEI\alpha_n^4)). \quad (3.59)$$

3.4. Dönmeyi ve Çökmeyi Önleyici Yaylara Sahip Kiriş için Çözüm

Timoshenko kirişine ait eğilme momenti $M(x)$ ve kesme kuvveti $V(x)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılır. Şekil 3.3' de bu bölümde hesabı yapılan kiriş modelinin gösterimi verilmiştir. Bozyiğit ve ark. (2015) aşağıdaki fonksiyonları kullanarak rijit sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin serbest titreşimlerini incelemiştir.

$$M(x) = EI \frac{\partial \theta(x)}{\partial x}, \quad (3.60)$$

$$V(x) = -\frac{AG}{k_w} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \frac{AG}{k_w} \theta(x). \quad (3.61)$$



Şekil 3.3. Dönmeyi ve çökmeyi engelleyici yaylar ile mesnetlenmiş kiriş modeli

(3.60) denklemindeki $M(x)$ moment fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$$R\theta = EI \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (3.62)$$

Yukarıdaki eşitliği bir tarafta toplarsak;

$$R\theta - EI \frac{d\theta(x)}{dx} = 0, \quad (3.63)$$

elde edilir. (3.61) denklemindeki $V(x)$ kesme kuvveti fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$$D\varphi = -\frac{AG}{k_w} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{AG}{k_w} \theta(x). \quad (3.64)$$

Yukarıdaki eşitliği bir tarafta toplarsak;

$$-D\varphi - \frac{AG}{k_w} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{AG}{k_w} \theta(x), \quad (3.65)$$

elde edilir. $\theta(x)$ fonksiyonu denklem (3.54)' den elde edilirse;

$$\theta(x) = \frac{EI \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} + \frac{AG}{k_w} \frac{d\varphi(x)}{dx}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A}}, \quad (3.66)$$

bulunur. Denklem (3.66)' nın içindeki fonksiyonlar yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \left(EI \left(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \theta'_L - \theta'_0)}{L} - \alpha_n^2 B_n \right) \right. \right. \\ & + \frac{AG}{k_w} \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + (\alpha_n A_n) \right) \right) \right) / \left(\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A} \right), \end{aligned} \quad (3.67)$$

bulunur. φ_0 ve φ_L değerleri mesnet şartları gereği bu bölümde sıfır alınamaz. (3.63) ve (3.65) denklemlerindeki fonksiyonlar yerine yazılırsa;

$x=0$, $x=L$ ve $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ durumları için $\sin 0 = \sin(n\pi) = 0$ olduğundan dolayı sinüs değerleri bulunan aşağıdaki iki denkleme bu durumlar dahil edilmemiştir.

$$\begin{aligned}
& R(EI(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) (\frac{2((-1)^n \theta'_L - \theta'_0)}{L} \\
& \quad - \alpha_n^2 (-2A(-AGm\omega^2 \varphi_0 + (-1)^n AGm\omega^2 \varphi_L \\
& \quad - EIm\omega^2 k_w \theta'_0 + AGEI\alpha_n^2 \theta'_0 + (-1)^n EIm\omega^2 k_w \theta'_L \\
& \quad + (-1)^{1+n} AGEI\alpha_n^2 \theta'_L)) \\
& \quad / (L(-A^2 Gm\omega^2 + Im^2 \omega^4 k_w - AGIm\omega^2 \alpha_n^2 \\
& \quad - AEIm\omega^2 k_w \alpha_n^2 + A^2 GEI\alpha_n^4)))) + \frac{AG}{k_w} (\frac{(\varphi_L - \varphi_0)}{L} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) (\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} \\
& \quad + (\alpha_n (2AGI\alpha_n (-m\omega^2 \varphi_0 + AE\alpha_n^2 \varphi_0 + (-1)^n m\omega^2 \varphi_L \\
& \quad + (-1)^{n+1} AE\alpha_n^2 \varphi_L - AE\theta'_0 \\
& \quad + (-1)^n AE\theta'_L)) \\
& \quad / (L(-A^2 Gm\omega^2 + Im^2 \omega^4 k_w - AGIm\omega^2 \alpha_n^2 \\
& \quad - AEIm\omega^2 k_w \alpha_n^2 - A^2 GEI\alpha_n^4)))) / (\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A}) \\
& \quad - EI \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
& -D\varphi(x) - \frac{AG}{k_w} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{AG}{k_w} (EI(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) (\frac{2((-1)^n \theta'_L - \theta'_0)}{L} \\
& \quad - \alpha_n^2 (-2A(-AGm\omega^2 \varphi_0 + (-1)^n AGm\omega^2 \varphi_L \\
& \quad - EIm\omega^2 k_w \theta'_0 + AGEI\alpha_n^2 \theta'_0 + (-1)^n EIm\omega^2 k_w \theta'_L \\
& \quad + (-1)^{1+n} AGEI\alpha_n^2 \theta'_L)) \\
& \quad / (L(-A^2 Gm\omega^2 + Im^2 \omega^4 k_w - AGIm\omega^2 \alpha_n^2 \\
& \quad - AEIm\omega^2 k_w \alpha_n^2 + A^2 GEI\alpha_n^4)))) + \frac{AG}{k_w} (\frac{(\varphi_L - \varphi_0)}{L} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) (\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} \\
& \quad + (\alpha_n (2AGI\alpha_n (-m\omega^2 \varphi_0 + AE\alpha_n^2 \varphi_0 + (-1)^n m\omega^2 \varphi_L \\
& \quad + (-1)^{n+1} AE\alpha_n^2 \varphi_L - AE\theta'_0 \\
& \quad + (-1)^n AE\theta'_L)) \\
& \quad / (L(-A^2 Gm\omega^2 + Im^2 \omega^4 k_w - AGIm\omega^2 \alpha_n^2 \\
& \quad - AEIm\omega^2 k_w \alpha_n^2 - A^2 GEI\alpha_n^4)))) / (\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

elde edilir.

Yukarıdaki iki denklem için $x=0$; $\alpha_n=\frac{n\pi}{L}$ ve $x=L$; $\alpha_n=\frac{n\pi}{L}$ yazılıp 4 ayrı denklem elde edilir. Bu denklemler katsayılar matrisi içerisinde gösterilebilir. Bu katsayılar matrisinin determinantı mathematica bilgisayar programı ile hesaplanıp ortaya çıkan karakteristik denklemin kökleri açısal frekansları verecektir.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_L \\ \theta'_0 \\ \theta'_L \end{bmatrix} = 0, \quad (3.70)$$

$$\Phi_{11} \quad (3.71)$$

$$= - \left(\frac{\frac{AG}{k_w L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{2A^2 GL^3 R_1 m \omega^2}{AG(-AEIn^4 \pi^4 + L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (AE n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2) k_w},$$

$$\Phi_{12} \quad (3.72)$$

$$= \left(\frac{\frac{AG}{k_w L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n A^2 GL^3 R_1 m \omega^2}{AG(-AEIn^4 \pi^4 + L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (AE n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2) k_w},$$

$$\Phi_{13} \quad (3.73)$$

$$= -EI - \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_1(-AGn^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2 k_w)}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w},$$

$$\Phi_{14} \quad (3.74)$$

$$= \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_1 (AGn^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2 k_w)}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w},$$

$$\Phi_{21} \quad (3.75)$$

$$= - \left(\frac{\frac{AG}{k_w L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n A^2 GL^3 R_2 m \omega^2}{AG(-AEIn^4 \pi^4 + L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (AE n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2) k_w},$$

$$\Phi_{22} = \left(\frac{\frac{AG}{k_w L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_2 \quad (3.76)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A^2 G L^3 R_2 m \omega^2}{AG(-AEIn^4 \pi^4 + L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (AE n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2) k_w}, \quad (3.77)$$

$$\Phi_{23} = - \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_2$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEIL R_2 (AG n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2 k_w)}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w}, \quad (3.78)$$

$$\Phi_{24} = -EI + \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} \right) R_2$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEIL R_2 (-AG n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2 k_w)}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w}, \quad (3.79)$$

$$\Phi_{31} = -D_1 + \left(\frac{AG}{k_w L} \right) - \frac{\frac{A^2 G^2}{k_w^2 L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AGIL m \omega^2 (AE n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2)}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w}, \quad (3.80)$$

$$\Phi_{32} = - \left(\frac{AG}{k_w L} \right) + \frac{\frac{A^2 G^2}{k_w^2 L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AGIL m \omega^2 (AE n^2 \pi^2 - L^2 m \omega^2)}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w}, \quad (3.81)$$

$$\Phi_{33} = - \frac{\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A^2 GEIL^3 m \omega^2}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w}, \quad (3.82)$$

$$\Phi_{34} = \frac{\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n A^2 GEIL^3 m \omega^2}{AG(AEIn^4 \pi^4 - L^2(AL^2 + In^2 \pi^2)m\omega^2) + IL^2 m \omega^2 (-AE n^2 \pi^2 + L^2 m \omega^2) k_w},$$

$$\Phi_{41} \quad (3.83)$$

$$= \left(\frac{AG}{k_w L} \right) - \frac{\frac{A^2 G^2}{k_w^2 L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{2(-1)^n AGILm\omega^2(AEn^2\pi^2 - L^2m\omega^2)}{AG(AEn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}, \quad (3.84)$$

$$\Phi_{42} = -D_2 - \left(\frac{AG}{k_w L} \right) + \frac{\frac{A^2 G^2}{k_w^2 L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AGILm\omega^2(AEn^2\pi^2 - L^2m\omega^2)}{AG(AEn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}, \quad (3.85)$$

$$\Phi_{43} = -\frac{\frac{EI AG}{L k_w}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n A^2 GEIL^3 m\omega^2}{AG(AEn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}, \quad (3.86)$$

$$\Phi_{44} = \frac{\frac{EI AG}{L k_w}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I}{A} \omega^2} + \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{2A^2 GEIL^3 m\omega^2}{AG(AEn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}.$$

3.5. Dönmeyi Engelleyici Yay ve Sabit Mesnetli Kiriş İçin Çözüm

Şekil 3.4' de bu bölüm için hesabı yapılan kiriş modelinin gösterimi verilmiştir.



Şekil 3.4. Dönmeyi engelleyici yaylar ve sabit mesnetler ile mesnetlenmiş kiriş modeli

Bu bölüm içinde $M(x)$ moment fonksiyonu benzer şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$R\theta = EI \frac{d\theta(x)}{dx}. \quad (3.87)$$

Yukarıdaki eşitliği bir tarafta toplarsak;

$$R\theta - EI \frac{d\theta(x)}{dx} = 0, \quad (3.88)$$

elde edilir. $\theta(x)$ fonksiyonu daha önce bulunduğu gibi aşağıda tekrar verilmiştir.

$$\begin{aligned} \theta(x) = & (EI \left(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \theta'_L - \theta'_0)}{L} - \alpha_n^2 B_n \right) \right) \\ & + \frac{AG}{k_w} \left(\frac{(\varphi_L - \varphi_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} \right. \right. \\ & \left. \left. + (\alpha_n A_n) \right) \right) / \left(\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A} \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$

φ_0 ve φ_L değerleri mesnet şartları gereği sıfırdır. Yani (3.89) denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \theta(x) = & (EI \left(\frac{(\theta'_L - \theta'_0)}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \theta'_L - \theta'_0)}{L} - \alpha_n^2 B_n \right) \right) \\ & + \frac{AG}{k_w} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\alpha_n x) (\alpha_n A_n) \right) \right) / \left(\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A} \right). \end{aligned} \quad (3.90)$$

Moment fonksiyonunun içindeki fonksiyonlar yazılırsa ve $x=0$; $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ değerleri girilirse;

$$\begin{aligned}
& \left(-EI - \left(\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w - m \frac{I\omega^2}{A}}\right) R_1\right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_1(-AGn^2\pi^2 + L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w} \left.\right) \theta'_0 \\
& + \left(\left(\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w - m \frac{I\omega^2}{A}}\right) R_1\right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_1(AGn^2\pi^2 - L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w} \left.\right) \theta'_L \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{3.91}$$

bulunur. Benzer işlemler $x=L$; $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ için tekrarlanırsa;

$$\begin{aligned}
& \left(-\left(\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w - m \frac{I\omega^2}{A}}\right) R_2\right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_2(AGn^2\pi^2 - L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w} \left.\right) \theta'_0 \\
& + \left(-EI + \left(\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w - m \frac{I\omega^2}{A}}\right) R_2\right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_2(-AGn^2\pi^2 + L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w} \left.\right) \theta'_L \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{3.92}$$

bulunur. Bulunan bu iki denklem aşağıdaki gibi katsayılar matrisi formunda gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \theta'_0 \\ \theta'_L \end{bmatrix} = 0, \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} & = -EI - \left(\frac{EI}{L} \frac{AG}{k_w - m \frac{I\omega^2}{A}}\right) R_1 \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_1(-AGn^2\pi^2 + L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w},
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\Phi_{12} = \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A}} \right) R_1 \quad (3.95)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_1 (AGn^2\pi^2 - L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}, \quad (3.96)$$

$$\Phi_{21} = - \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A}} \right) R_2$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n AEILR_2 (AGn^2\pi^2 - L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}, \quad (3.97)$$

$$\Phi_{22} = -EI + \left(\frac{\frac{EI}{L}}{\frac{AG}{k_w} - m \frac{I\omega^2}{A}} \right) R_2$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2AEILR_2(-AGn^2\pi^2 + L^2m\omega^2k_w)}{AG(AEIn^4\pi^4 - L^2(AL^2 + In^2\pi^2)m\omega^2) + IL^2m\omega^2(-AEn^2\pi^2 + L^2m\omega^2)k_w}.$$

Yukarıdaki matrisin farklı rijitliklere göre determinantı alındığında açılmal frekanslar elde edilir.

3.6. Stokes' Dönüşümleri ile Yapılabilecek Benzer Bir Uygulama

Stokes' dönüşümleri ve Fourier serileri kullanılarak benzer bir uygulama bu bölümde yerel olmayan Timoshenko kirişlerinin burkulması için yapılmıştır. Aşağıda Wang ve ark. (2007) yaptıkları çalışmada elde ettikleri anahtar denklemler verilmiştir.

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + \gamma^2 P \frac{d^3\varphi}{dx^3} - \kappa_S GA \left(\theta + \frac{d\varphi}{dx} \right) = 0, \quad (3.98)$$

$$\kappa_S GA \left(\frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) - P \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0. \quad (3.99)$$

Burada E elastisite modülü, I eylemsizlik momenti, G kayma modülü, P kritik burkulma yükü, γ küçük ölçek katsayısı, κ_S kayma düzeltme katsayısıdır. Yukarıdaki bu denklemleri Wang ve ark. (2007) rijit sınır koşullarında kullanmıştır. Bu bölümde ise rijit olmayan sınır koşullarında probleme dâhil edilecektir.

Dönme ve çökme fonksiyonları için Fourier serileri bir önceki bölümde seçildiği gibi alınmıştır. Yapılan Stokes' dönüşümleri bu bölüm içinde aynen geçerlidir.

Denklem (3.98)'deki toplam sembolü dışındaki ifadeleri yok etmek için x ' e bağlı türevi alınırsa;

$$EI \frac{d^3 \theta}{dx^3} + \gamma^2 P \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \kappa_S GA \left(\frac{d\theta}{dx} + \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) = 0, \quad (3.100)$$

elde edilir. Denklem (3.99) ve (3.100) deki fonksiyonlar yerine yazılırsa;

$$EI \left(\frac{2(\theta_0' - \theta_L'(-1)^n)}{L} + \alpha_n^2 B_n \right) \alpha_n \sin(\alpha_n x) - \gamma^2 P \left[\frac{2}{L} (\varphi_L''(-1)^n - \varphi_0'') \right. \quad (3.101)$$

$$\left. - \alpha_n^2 \left(\frac{2}{L} (\varphi_L(-1)^n - \varphi_0) + \alpha_n A_n \right) \right] \alpha_n \sin(\alpha_n x)$$

$$- \kappa_S GA \left(-\alpha_n B_n \sin(\alpha_n x) - \alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right) \right) = 0,$$

$$\kappa_S GA \left(-\alpha_n B_n \sin(\alpha_n x) - \alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right) \right) \quad (3.102)$$

$$+ P \alpha_n \sin(\alpha_n x) \left(\frac{2((-1)^n \varphi_L - \varphi_0)}{L} + \alpha_n A_n \right) = 0,$$

bulunur. Buradan A_n ve B_n değerleri elde edilir.

$$A_n = - \frac{2AG\kappa_S (P\gamma^2 \varphi_0'' + EI\theta_0' + (-1)^{n+1} (P\gamma^2 \varphi_L'' + EI\theta_L'))}{EILP\alpha_n^3 + AGL\kappa_S \alpha_n (P + (-EI + P\gamma^2)\alpha_n^2)}, \quad (3.103)$$

$$B_n = - \frac{2(P - AG\kappa_S) (P\gamma^2 \varphi_0'' + EI\theta_0' + (-1)^{n+1} (P\gamma^2 \varphi_L'' + EI\theta_L'))}{EILP\alpha_n^3 + AGL\kappa_S (P + (-EI + P\gamma^2)\alpha_n^2)}. \quad (3.104)$$

Yerel olmayan Timoshenko kirişi için moment fonksiyonu Wang ve ark. (2007) aşağıdaki gibi elde etmiştir.

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} + P\gamma^2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2}. \quad (3.105)$$

Yukarıdaki moment fonksiyonu denklem (3.103) ve (3.104) de yerine yazılırsa;

$$A_n = - \frac{2AG\kappa_S (M_0 + (-1)^{n+1} (M_L))}{EILP\alpha_n^3 + AGL\kappa_S \alpha_n (P + (-EI + P\gamma^2)\alpha_n^2)}, \quad (3.106)$$

$$B_n = - \frac{2(P - AG\kappa_S) (M_0 + (-1)^{n+1} (M_L))}{EILP\alpha_n^2 + AGL\kappa_S (P + (-EI + P\gamma^2)\alpha_n^2)}, \quad (3.107)$$

bulunur.

Şekil 3.5' de bu bölüm için kullanılan kiriş modeli verilmiştir.



Şekil 3.5. Normal kuvvet etkisi altında dönmeyi engelleyici yaylar ve sabit mesnetler ile mesnetlenmiş kiriş modeli

Şekil 3.5’ de R_1 ve R_2 rijitlikleri P_{cr} ise kritik burkulma yükünü göstermektedir.

Yukarıdaki moment fonksiyonu aşağıdaki formda gösterilebilir.

$$M = \theta R \rightarrow M - \theta R = 0. \quad (3.108)$$

Denklem (3.108)’ deki değerler yerine yazılırsa ve $x=0$, $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ değerleri kullanılırsa;

$$0 = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_1 \left(\frac{2(P - AG\kappa_S)(M_0 + (-1)^{n+1}(M_L))}{EILP\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 + AGL\kappa_S(P + (-EI + P\gamma^2)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2)} \cos \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (3.109)$$

elde edilir. Denklem (3.108)’ deki değerler yerine yazılırsa ve $x=L$; $\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$ değerleri kullanılırsa;

$$0 = M_L + \sum_{n=1}^{\infty} R_2 \left(\frac{2(P - AG\kappa_S)(M_0 + (-1)^{n+1}(M_L))}{EILP\left(\frac{n\pi}{L}\right)^3 + AGL\kappa_S(P + (-EI + P\gamma^2)\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2)} \cos \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (3.110)$$

bulunur. Elde edilen (3.109) ve (3.110) denklemlerinden M_0 ve M_L ’ e bağlı bir öz değer problem oluşturulabilir.

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_L \end{bmatrix} = 0, \quad (3.111)$$

$$\Phi_{11} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2LR_1(P - AG\kappa_S)}{EIP\pi^2 n^2 + AG(PL^2 + \pi^2 n^2(-EI + P\gamma^2))\kappa_S}, \quad (3.112)$$

$$\Phi_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n LR_1 (P - AG\kappa_S)}{EIP\pi^2 n^2 + AG(PL^2 + \pi^2 n^2 (-EI + P\gamma^2))\kappa_S}, \quad (3.113)$$

$$\Phi_{21} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2LR_2 (P - AG\kappa_S)}{EIP\pi^2 n^2 + AG(PL^2 + \pi^2 n^2 (-EI + P\gamma^2))\kappa_S}, \quad (3.114)$$

$$\Phi_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n LR_2 (P - AG\kappa_S)}{EIP\pi^2 n^2 + AG(PL^2 + \pi^2 n^2 (-EI + P\gamma^2))\kappa_S}. \quad (3.115)$$



4. BULGULAR

Bu bölümde farklı mesnetlenme koşullarındaki kirişlerin açısal frekans değerleri çizelgeler ve şekiller ile gösterilmiştir. İlk olarak rijit sınır koşullarına sahip kirişlerin açısal frekanslarının kiriş boyuna bağlı değişimi incelenmiştir. Daha sonra rijitliklerin değişimine bağlı olarak açısal frekansların nasıl değiştiği incelenmiş ve değerlendirilmiştir. Elde edilen bulgular sırasıyla bu bölümde belirtilmiştir.

Diğer taraftan yöntemler bölümünün son alt başlığında incelenen burkulma analizi için de yukarıda belirtilen işlemler benzer şekilde bu bölüm için de uygulanmıştır.

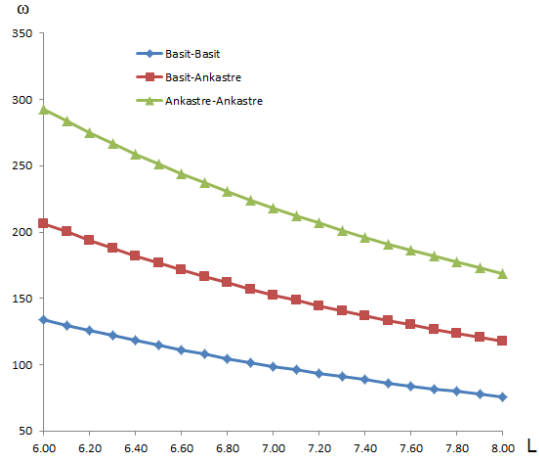
4.1. Açısal Frekanslar

Açısal frekansları bulmak için yöntemler kısmında bulunan öz değer problemine gerekli değerler girilerek Çizelge 4.1' deki değerler elde edilebilir. Burada R (rijitlik) değeri çok küçük alınması durumunda basit mesnet ve çok büyük alınması durumunda ankastre mesnet davranışı olacağı bilinmelidir. Ayrıca bu kiriş modeli için L değişken, $A=0,15 \text{ m}^2$, $m=0,382263 \text{ kN.sn}^2/\text{m}$, $I=0,003125 \text{ m}^4$, $E=300000000 \text{ kN/m}^2$, $G=11538461,54 \text{ kN/m}^2$, $k_w=1,2$ alınmış ve değerler öz değer probleminde girilerek $6 < L < 8$ aralığı için hesaplanan sonuçlar Çizelge 4.1 sunulmuştur.

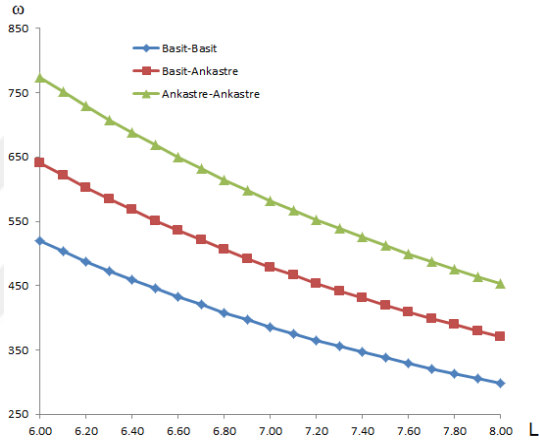
Çizelge 4.1. Rijit sınır koşullarındaki kirişlerin, kiriş boyuna bağlı açılal frekanslarının değışimi

L(m)	Basit-Basit Mesnet			Basit-Ankastre Mesnet			Ankastre-Ankastre Mesnet		
	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)
6,00	134,21	519,55	1113,17	206,61	641,13	1263,93	292,74	773,99	1409,07
6,10	129,89	503,34	1079,88	200,05	621,54	1227,13	283,71	750,96	1369,60
6,20	125,78	487,86	1048,03	193,79	602,83	1191,88	275,08	728,93	1331,72
6,30	121,86	473,09	1017,55	187,82	584,94	1158,08	266,84	707,83	1295,35
6,40	118,12	458,96	988,35	182,12	567,82	1125,68	258,96	687,62	1260,41
6,50	114,55	445,46	960,36	176,67	551,43	1094,58	251,42	668,25	1226,82
6,60	111,13	432,53	933,52	171,47	535,73	1064,72	244,20	649,67	1194,53
6,70	107,87	420,16	907,78	166,49	520,69	1036,05	237,28	631,84	1163,46
6,80	104,75	408,30	883,06	161,72	506,26	1008,49	230,66	614,72	1133,55
6,90	101,76	396,93	859,33	157,15	492,41	981,99	224,30	598,28	1104,76
7,00	98,90	386,03	836,52	152,78	479,12	956,51	218,20	582,47	1077,02
7,10	96,16	375,56	814,59	148,58	466,35	931,98	212,34	567,28	1050,29
7,20	93,53	365,51	793,50	144,55	454,07	908,36	206,71	552,66	1024,51
7,30	91,00	355,86	773,20	140,68	442,28	885,61	201,30	538,59	999,65
7,40	88,58	346,58	753,66	136,97	430,92	863,69	196,10	525,04	975,66
7,50	86,25	337,65	734,84	133,40	420,00	842,56	191,10	511,99	952,51
7,60	84,01	329,06	716,71	129,97	409,48	822,18	186,28	499,41	930,15
7,70	81,86	320,80	699,23	126,67	399,35	802,52	181,64	487,29	908,55
7,80	79,78	312,84	682,37	123,49	389,58	783,54	177,17	475,59	887,67
7,90	77,79	305,17	666,10	120,43	380,17	765,21	172,87	464,31	867,50
8,00	75,87	297,77	650,40	117,52	371,20	747,72	168,74	453,58	848,07

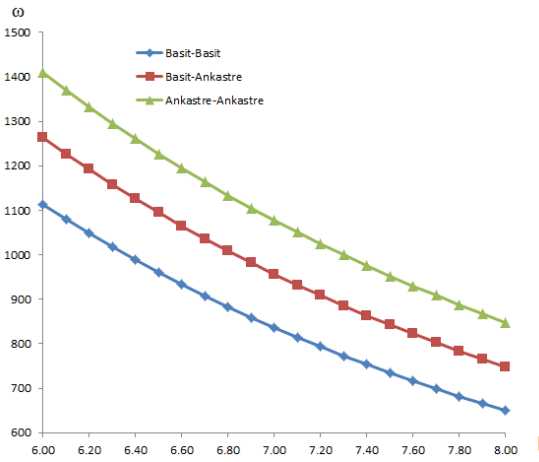
Çizelge 4.1’ de bulunan sonuçlar ile aşağıda, Şekil 4.1’ de 1. Mod’ a ait basit-basit mesnet, ankastre-basit mesnet ve ankastre-ankastre mesnet ile mesnetli kirşin açılal frekans değışimi, Şekil 4.2’ de 2. Mod’ a ait basit-basit mesnet, ankastre-basit mesnet ve ankastre-ankastre mesnet ile mesnetli kirşin açılal frekans değışimi, Şekil 4.3’ de 3. Mod’ a ait basit-basit mesnet, ankastre-basit mesnet ve ankastre-ankastre mesnet ile mesnetli kirşin açılal frekans değışimi grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.1. L'ye bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 1. Mod' daki açısal frekansların değişimi

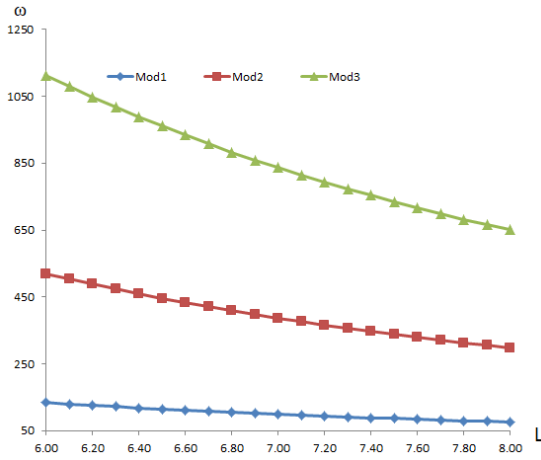


Şekil 4.2. L'ye bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 2. Mod' daki açısal frekansların değişimi

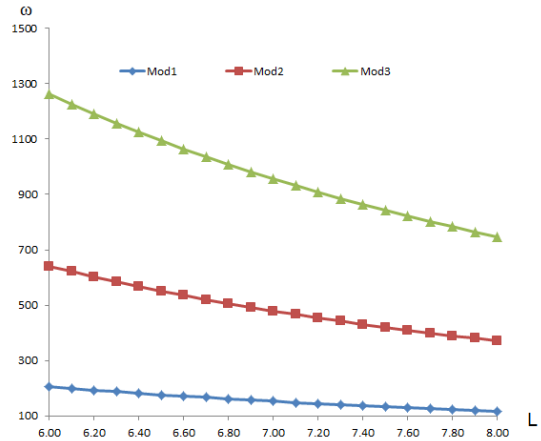


Şekil 4.3. L'ye bağlı farklı mesnetlenme koşullarındaki, 3. Mod' daki açısal frekansların değişimi

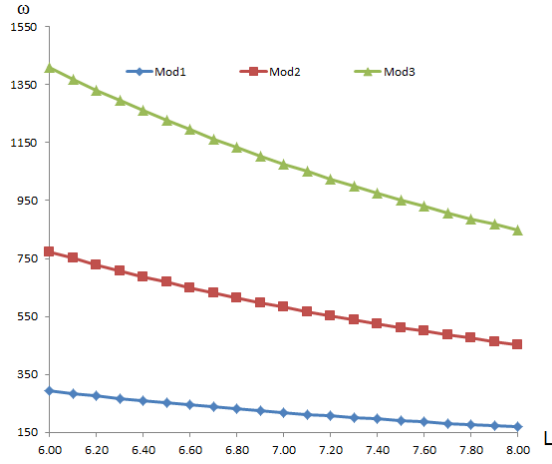
Yukarıdaki şekillerden basit-basit mesnetli kirişin en küçük açılal frekansa, ankastre-ankastre mesnetli kirişin en büyük açılal frekansa sahip olduğu gözlenmiştir. Ayrıca kiriş boyu arttıkça açılal frekansların azaldığı saptanmıştır. Şekil 4.4' de basit-basit mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açılal frekanslarının değışimi, Şekil 4.5' de ankastre-basit mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açılal frekanslarının değışimi, Şekil 4.6' da ankastre-ankastre mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açılal frekanslarının değışimi grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.4. L'ye bağlı basit-basit mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açılal frekanslarının değışimi

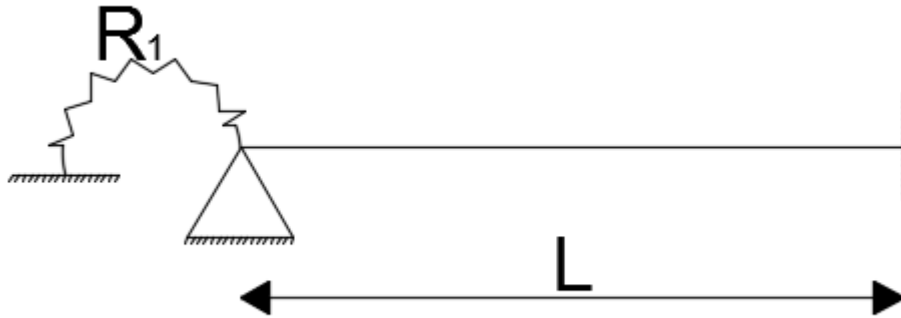


Şekil 4.5. L'ye bağlı basit-ankastre mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açılal frekanslarının değışimi



Şekil 4.6. L'ye bağlı ankastre-ankastre mesnetli kirişin ilk üç moduna ait açısal frekanslarının değişimi

Şekil 4.7' deki kiriş için yöntemler bölümünde çözmüş olduğumuz kirişteki R_2 rijitliğini çok büyük bir değer seçmemiz durumunda aşağıdaki kirişi elde ederiz.



Şekil 4.7. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kiriş

Kiriş modeli için $L=7,5$ m, $A=0,15$ m², $m=0,382263$ kN.sn²/m, $I=0,003125$ m⁴, $E=30000000$ kN/m², $G=11538461,54$ kN/m², $k_w=1,2$ alınması durumunda açısal frekans değerleri aşağıdaki Çizelge 4.2' deki gibi olur.

Çizelge 4.2. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin ($L=7,5m$) yay rijitliğine bağlı farklı modlardaki açılal frekansları

Rijilik R_1	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)
0	133,43	420,10	842,74
1000	134,72	422,47	846,46
3000	136,08	423,74	847,57
5000	137,38	424,97	848,65
7000	138,62	426,18	849,72
9000	139,80	427,36	850,77
11000	140,94	428,51	851,80
13000	142,02	429,63	852,82
15000	143,06	430,73	853,81
17000	144,06	431,80	854,79
19000	145,02	432,84	855,75

Kiriş modeli için $L=8$ m, $A=0,15$ m², $m=0,382263$ kN.sn²/m, $I=0,003125$ m⁴, $E=30000000$ kN/m², $G=11538461,54$ kN/m², $k_w=1,2$ alınması durumunda açılal frekans değerleri aşağıdaki Çizelge 4.3' deki gibi olur.

Çizelge 4.3. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin ($L=8m$) yay rijitliğine bağlı farklı modlardaki açılal frekansları

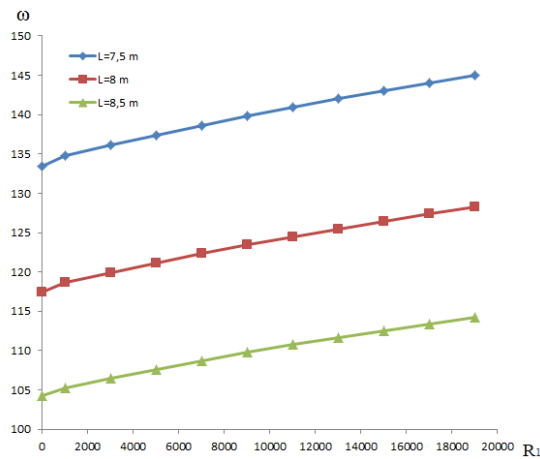
Rijilik R_1	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)
0	117,52	371,20	747,72
1000	118,65	373,22	750,88
3000	119,93	374,42	751,94
5000	121,15	375,58	752,99
7000	122,30	376,72	754,01
9000	123,41	377,83	755,01
11000	124,46	378,91	756,00
13000	125,47	379,96	756,97
15000	126,43	380,99	757,92
17000	127,35	381,99	758,85
19000	128,23	382,96	759,77

Kiriş modeli için $L=8,5$ m, $A=0,15$ m², $m=0,382263$ kN.sn²/m, $I=0,003125$ m⁴, $E=30000000$ kN/m², $G=11538461,54$ kN/m², $k_w=1,2$ alınması durumunda açılal frekans değerleri aşağıdaki Çizelge 4.4' deki gibi olur.

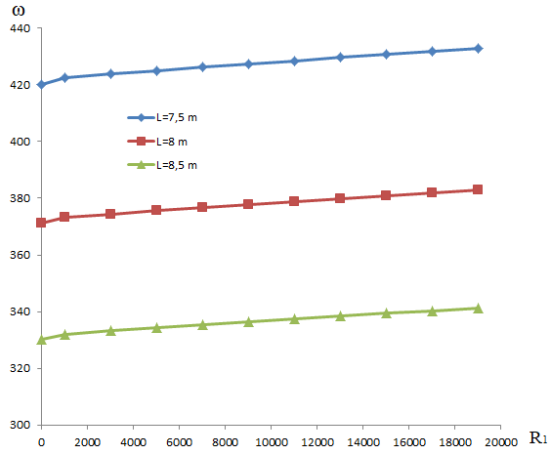
Çizelge 4.4. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin ($L=8,5m$) yay rijitliğine bağlı farklı modlardaki açılal frekansları

Rijilik R_1	1.MOD (ω)	2.MOD (ω)	3.MOD (ω)
0	104,26	330,24	667,57
1000	105,29	332,03	670,38
3000	106,50	333,17	671,40
5000	107,64	334,27	672,40
7000	108,72	335,35	673,38
9000	109,75	336,39	674,35
11000	110,74	337,41	675,29
13000	111,67	338,40	676,21
15000	112,56	339,36	677,12
17000	113,42	340,30	678,01
19000	114,23	341,21	678,88

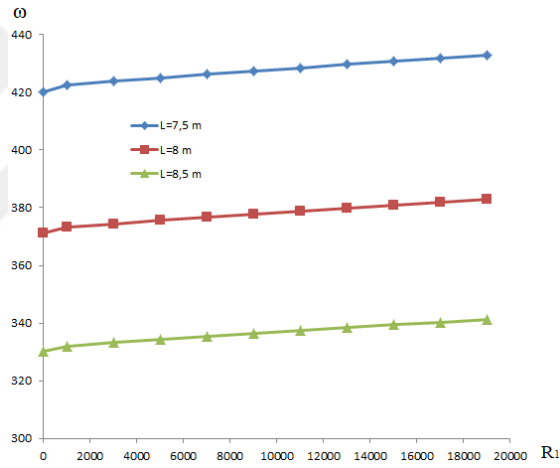
Yukarıda oluşturulan Çizelge 4.2, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4’ de bulunan değerler kullanılarak aşağıda verilen Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10 oluşturulmuştur. Bu şekillerin oluşturulmasının nedeni dönel rijitliğin ve kiriş boyunun açılal frekansı nasıl değiştirdiğini gözlemlemektir. Şekil 4.8, Şekil 4.9 ve Şekil 4.10’a bakıldığında bir önceki şekillerden de görüldüğü üzere kiriş boyu en küçük olan kiriş modelinde açılal frekansların en büyük olduğu, kiriş boyunun en büyük olduğu kiriş modelinde ise açılal frekansların en küçük olduğu görülmüştür. Ayrıca rijitlik arttıkça açılal frekanslarında hangi modda olursa olsun arttığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4.8. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kirişin 1. Mod’ daki açılal frekanslarının değişimi

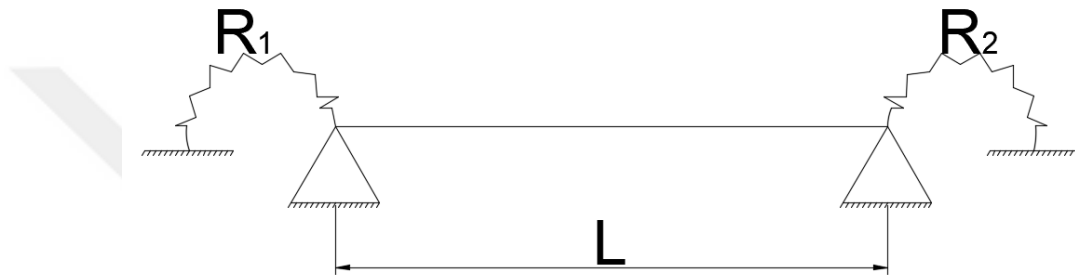


Şekil 4.9. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kiriş 2. Mod' daki açısal frekanslarının değişimi



Şekil 4.10. Bir tarafı dönmeyi engelleyici yay ve sabit mesnet diğer tarafı ankastre mesnet ile mesnetlenmiş kiriş 3. Mod' daki açısal frekanslarının değişimi

Şekil 4.11’ deki kiriş modeli için $L=8$ m, $A=0,15$ m², $m=0,382263$ kN.sn²/m, $I=0,003125$ m⁴, $E=30000000$ kN/m², $G=11538461,54$ kN/m², $k_w=1,2$ alınması durumunda açılal frekans değęerleri rijitliklere bağlı olarak aşağıdaki Çizelge 4.5, Çizelge 4.6, Çizelge 4.7, Çizelge 4.8 ve Çizelge 4.9 elde edilmiştir. Bu çizelgelerden de Şekil 4.12, Şekil 4.13, Şekil 4.14, Şekil 4.15 ve Şekil 4.16 elde edilir. Bu şekil ve çizelgelerden de bir önceki çizelge ve şekillerde görüldüğü gibi rijitlik arttıkça açılal frekansların arttığı tespit edilmiştir. Böylece elde edilen bu çizelgeler ve grafikler bir önceki çıkarımların bir nevi ispatı olmuştur.

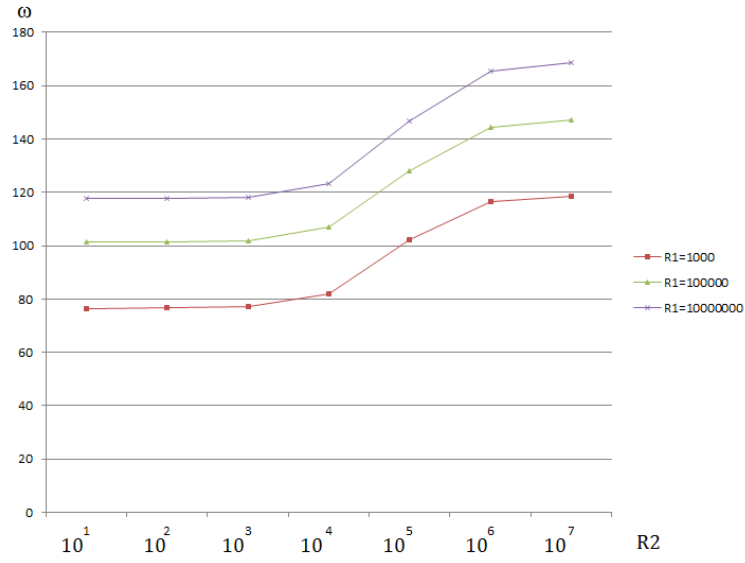


Şekil 4.11. İki ucu basit mesnet ve dönmeyi engelleyici yaylar ile mesnetlenmiş kiriş modeli

1. Mod’ a ait açılal frekansların rijitliklere bağlı değışimi aşağıda Çizelge 4.5 ve Şekil 4.12’ de gösterilmiştir.

Çizelge 4.5. 1. Mod’ a ait rijitliklere göre açılal frekanslar

		R ₁						
		10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
R ₂	10 ¹	75,884	75,942	76,517	81,487	101,288	115,247	117,525
	10 ²	75,942	76,001	76,575	81,554	101,346	115,306	117,585
	10 ³	76,517	76,575	77,149	82,110	101,914	115,898	118,181
	10 ⁴	81,495	81,553	82,119	87,036	106,912	121,134	123,468
	10 ⁵	101,463	101,521	102,089	107,081	128,198	144,139	146,813
	10 ⁶	115,666	115,726	116,318	121,555	144,414	162,427	165,551
	10 ⁷	117,993	118,054	118,651	123,939	147,145	165,569	168,735

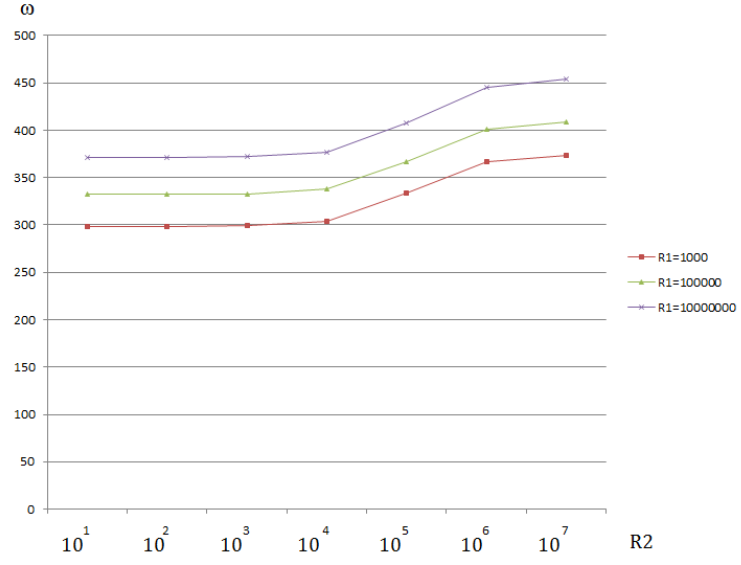


Şekil 4.12. 1. Mod' a ait rijitliklere göre açısıl frekansların değişimi

2. Mod' a ait açısıl frekansların rijitliklere bağlı değişimi aşağıda Çizelge 4.6 ve Şekil 4.13' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.6. 2. Mod' a ait rijitliklere göre açısıl frekanslar

		R ₁						
		10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
R ₂	10 ¹	297,783	297,839	298,392	303,532	332,319	364,625	371,206
	10 ²	297,839	297,895	298,447	303,587	332,373	364,679	371,262
	10 ³	298,392	298,448	299,000	304,135	332,908	365,224	371,811
	10 ⁴	303,542	303,597	304,144	309,241	337,917	370,336	376,965
	10 ⁵	332,649	332,703	333,239	338,299	366,954	400,536	407,529
	10 ⁶	365,807	365,862	366,407	371,517	401,432	437,704	445,422
	10 ⁷	372,612	372,668	373,218	378,372	408,666	445,671	453,584

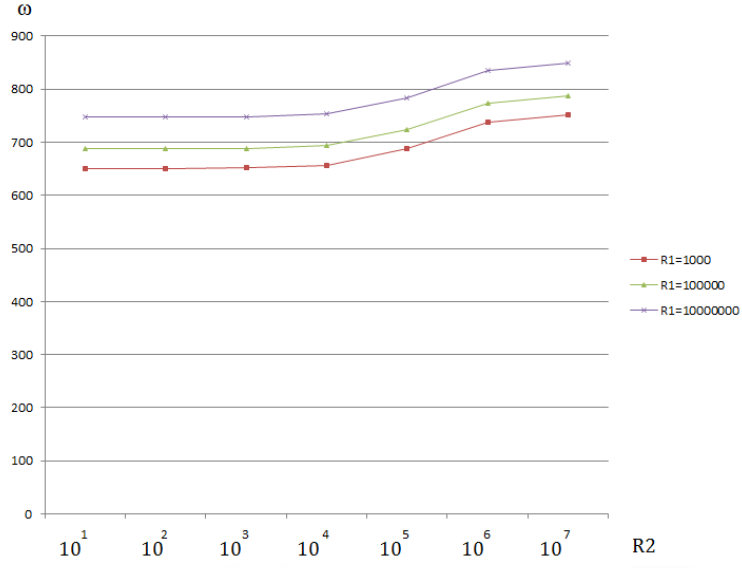


Şekil 4.13. 2. Mod' a ait rijitliklere göre açılal frekansların değışimi

3. Mod' a ait açılal frekansların rijitliklere bağıl değışimi aşağıda Çizelge 4.7 ve Şekil 4.14' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.7. 3. Mod' a ait rijitliklere göre açılal frekanslar

		R ₁						
		10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
R ₂	10 ¹	650,411	650,463	650,978	655,879	687,800	735,925	747,723
	10 ²	650,463	650,515	651,030	655,930	687,849	735,973	747,772
	10 ³	650,978	651,030	651,545	656,441	688,344	736,458	748,257
	10 ⁴	655,888	655,939	656,450	661,317	693,067	741,095	752,896
	10 ⁵	688,219	688,269	688,764	693,476	724,484	772,270	784,162
	10 ⁶	737,996	738,045	738,530	743,158	773,941	822,621	834,969
	10 ⁷	750,343	750,392	750,877	755,510	786,397	835,545	848,071

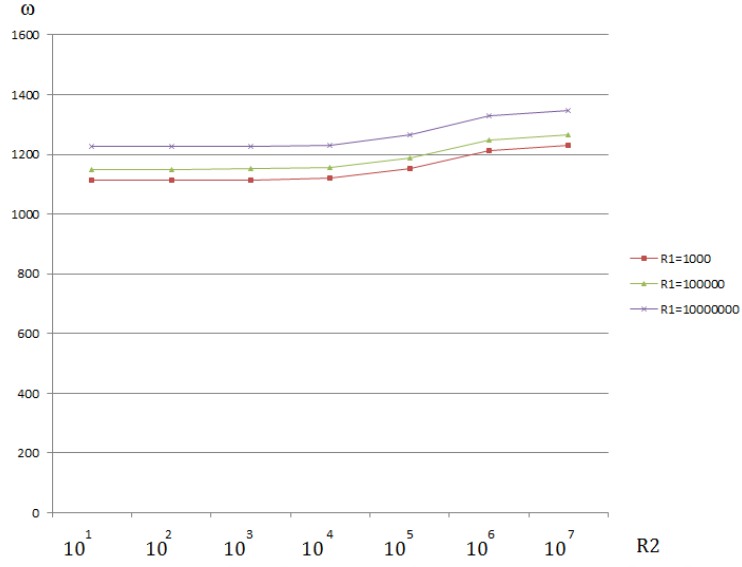


Şekil 4.14.3. Mod' a ait rijitliklere göre açılmal frekansların değışimi

4. Mod' a ait açılmal frekansların rijitliklere bağılı değışimi aşağıda Çizelge 4.8 ve Şekil 4.15' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.8. 4. Mod' a ait rijitliklere göre açılmal frekanslar

		R ₁						
		10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
R ₂	10 ¹	1113,18	1113,23	1113,70	1118,22	1150,14	1208,97	1225,77
	10 ²	1113,23	1113,27	1113,74	1118,26	1150,19	1209,02	1225,82
	10 ³	1113,70	1113,74	1114,11	1118,73	1150,65	1209,48	1226,29
	10 ⁴	1118,22	1118,27	1118,74	1123,25	1155,14	1213,99	1230,82
	10 ⁵	1150,59	1150,64	1151,11	1155,58	1187,34	1246,56	1263,62
	10 ⁶	1211,86	1211,91	1212,38	1216,88	1249,03	1310,06	1327,90
	10 ⁷	1229,66	1229,71	1230,18	1234,71	1267,11	1328,94	1347,10

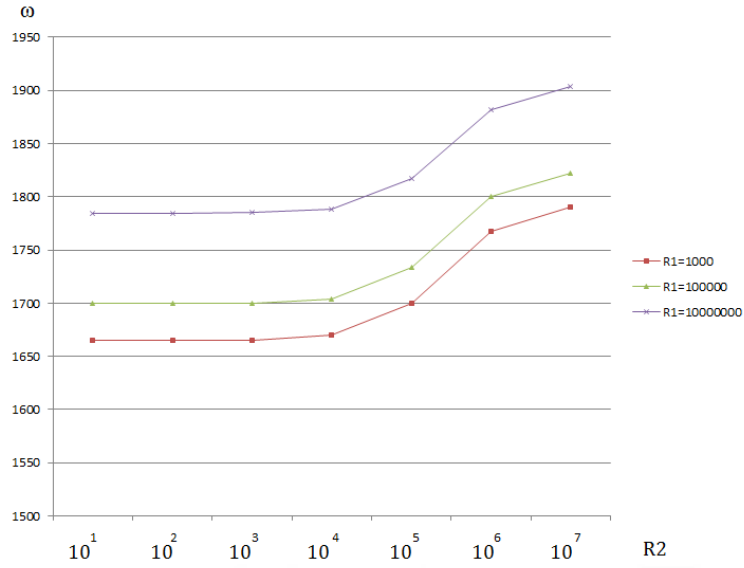


Şekil 4.15. 4. Mod' a ait rijitliklere göre açılmal frekansların değışimi

5. Mod' a ait açılmal frekansların rijitliklere bağılı değışimi aşağıda Çizelge 4.9 ve Şekil 4.16' de gösterilmiştir.

Çizelge 4.9. 5. Mod' a ait rijitliklere göre açılmal frekanslar

		R ₁						
		10 ¹	10 ²	10 ³	10 ⁴	10 ⁵	10 ⁶	10 ⁷
R ₂	10 ¹	1664,57	1664,61	1665,04	1669,13	1699,44	1763,77	1784,58
	10 ²	1664,61	1664,66	1665,08	1669,17	1699,48	1763,81	1784,62
	10 ³	1665,04	1665,08	1665,50	1669,59	1699,89	1764,20	1785,01
	10 ⁴	1669,13	1669,18	1669,60	1673,62	1703,86	1768,01	1788,79
	10 ⁵	1699,89	1699,94	1700,35	1704,32	1733,77	1796,81	1817,35
	10 ⁶	1767,31	1767,35	1767,74	1771,54	1799,86	1861,29	1881,57
	10 ⁷	1789,61	1789,65	1790,04	1793,80	1821,90	1883,08	1903,37



Şekil 4.16. 5. Mod' a ait rijitliklere göre açılal frekansların değışimi

4.2. Kritik Burkulma Yüklere

Aşağıda Çizelge 4.10'da bu çalışmada elde edilen kritik burkulma yükleri verilmiştir. Bu kritik burkulma yükleri hesaplanırken basit mesnet için rijitlik değeri çok küçük, ankastre mesnet içinse rijitlik değeri çok büyük seçilerek elde edilmiştir. Çizelge 4.11'de ise Wang ve ark. (2007) yapmış oldukları çalışmada buldukları sonuçlar yazılmıştır.

Kiriş modeli için $d=1\text{nm}$, $A=\pi^2/4 \text{ nm}^2$, $I=\pi /64 \text{ nm}^4$, $E=1000 \text{ kPa}$, $G=420,168 \text{ kPa}$ alınmıştır. Timoshenko kirişleri için $\kappa_S = 0,9$ Euler Bernoulli kirişleri için $\kappa_S = \infty$ seçilmiştir.

Çizelge 4.10. Bu çalışma için basit-basit, ankastre-basit ve ankastre ankastre mesnetleniş kirişleri için L/d ve γ bağlı kritik burkulma yükleri

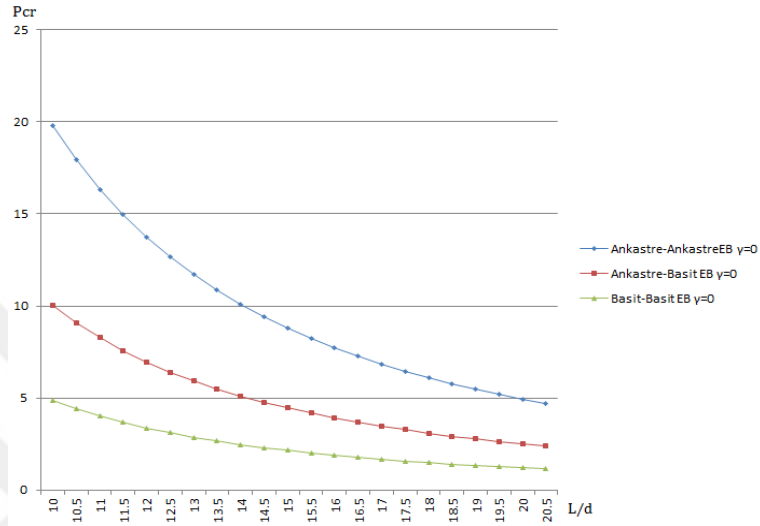
γ (nm)	0		0,5		1		1,5		2	
L/d	T	EB	T	EB	T	EB	T	EB	T	EB
Basit-Basit										
10	4,7670	4,8447	4,6540	4,7281	4,3450	4,4095	3,9121	3,9644	3,4333	3,4735
12	3,3267	3,3644	3,2713	3,3077	3,1156	3,1486	2,8865	2,9149	2,6172	2,6405
14	2,4514	2,4718	2,4212	2,4411	2,3348	2,3533	2,2038	2,2202	2,0432	2,0574
16	1,8805	1,8925	1,8626	1,8744	1,8111	1,8222	1,7313	1,7414	1,6306	1,6396
18	1,4878	1,4953	1,4766	1,4840	1,4440	1,4511	1,3928	1,3993	1,3269	1,3329
Basit-Ankastre										
10	9,6851	10,01	9,2298	9,5258	8,0890	8,3155	6,7074	6,8624	5,4130	5,5135
12	6,7934	6,9525	6,5662	6,7147	5,9675	6,0899	5,1803	5,2723	4,3727	4,4381
14	5,0215	5,1079	4,8963	4,9784	4,5555	4,6685	4,0820	4,1388	3,5643	3,6067
16	3,8599	3,9107	3,7855	3,8343	3,5785	3,6221	3,2796	3,3163	2,9363	2,9656
18	3,0581	3,0899	3,0112	3,0421	2,8788	2,9069	2,6821	2,7066	2,4481	2,4684
Ankastre-Ankastre										
10	18,542	19,777	16,942	17,967	13,458	14,097	10,023	10,373	7,3846	7,5729
12	13,127	13,734	12,304	12,836	10,357	10,731	8,1958	8,4284	6,3426	6,4810
14	9,7591	10,090	9,2970	9,5974	8,1406	8,3700	6,7428	6,8995	5,4361	5,5374
16	7,5298	7,7256	7,2517	7,4332	6,5283	6,6751	5,5977	5,7053	4,6665	4,7410
18	5,9813	6,1042	5,8045	5,9202	5,3316	5,4291	4,6943	4,7696	4,0213	4,0765

Çizelge 4.11. Basit-basit, ankastre-basit ve ankastre ankastre mesnetleniş kirişleri için L/d ve γ bağlı kritik burkulma yükleri

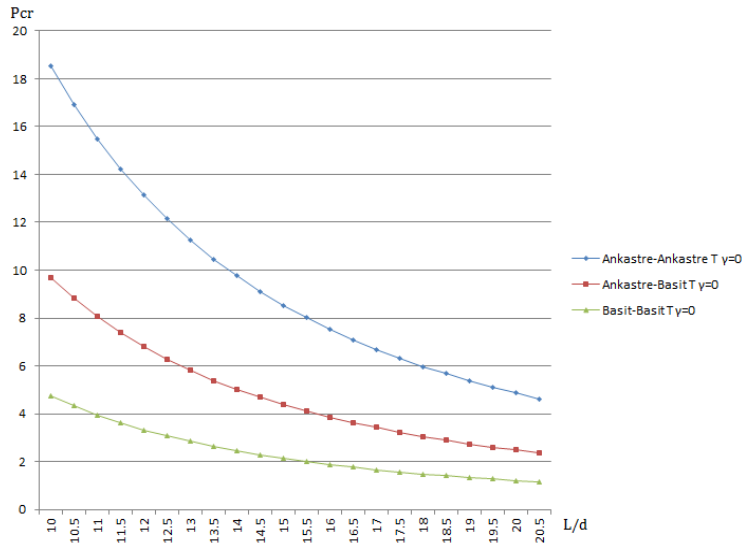
γ (nm)	0		0,5		1		1,5		2	
L/d	T	EB	T	EB	T	EB	T	EB	T	EB
Basit-Basit										
10	4,7670	4,8447	4,6540	4,7281	4,3450	4,4095	3,9121	3,9644	3,4333	3,4735
12	3,3267	3,3644	3,2713	3,3077	3,1156	3,1486	2,8865	2,9149	2,6172	2,6405
14	2,4514	2,4718	2,4212	2,4411	2,3348	2,3533	2,2038	2,2202	2,0432	2,0574
16	1,8805	1,8925	1,8626	1,8744	1,8111	1,8222	1,7313	1,7414	1,6306	1,6396
18	1,4878	1,4953	1,4766	1,4840	1,4440	1,4511	1,3928	1,3993	1,3269	1,3329
Basit-Ankastre										
10	9,5605	9,9155	9,1179	9,4349	8,0055	8,2461	6,6520	6,8151	5,3782	5,4830
12	6,7118	6,8858	6,4904	6,6496	5,9059	6,0363	5,1348	5,2321	4,3410	4,4096
14	4,9638	5,0589	4,8416	4,9297	4,5086	4,5844	4,0448	4,1052	3,5355	3,5811
16	3,8168	3,8715	3,7441	3,7967	3,5418	3,5885	3,2490	3,2880	2,9120	2,9431
18	3,0248	3,0603	2,9789	3,0121	2,8493	2,8795	2,6567	2,6828	2,4270	2,4489
Ankastre-Ankastre										
10	18,192	19,379	16,649	17,638	13,273	13,894	9,9200	10,263	7,3283	7,5137
12	12,874	13,458	12,082	12,594	10,199	10,562	8,0964	8,3233	6,2829	6,4187
14	9,5687	9,8872	9,1240	9,4132	8,0077	8,2296	6,6514	6,8038	5,3765	5,4756
16	7,3818	7,5699	7,1143	7,2889	6,4168	6,5585	5,5155	5,6199	4,6092	4,6819
18	5,8631	5,9811	5,6931	5,8043	5,2375	5,3315	4,6212	4,6942	3,9675	4,0212

Çizelge 4.10 ve Çizelge 4.11’ deki EB ve T simgeleri, Euler Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin kısaltmasıdır.

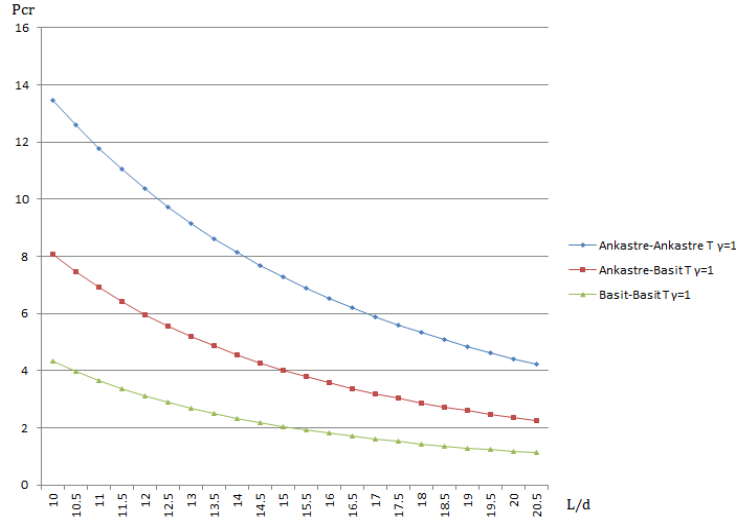
Çizelge 4.10’ daki değerler kullanılarak aşağıda verilen Şekil 4.17, Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20 oluşturulmuştur.



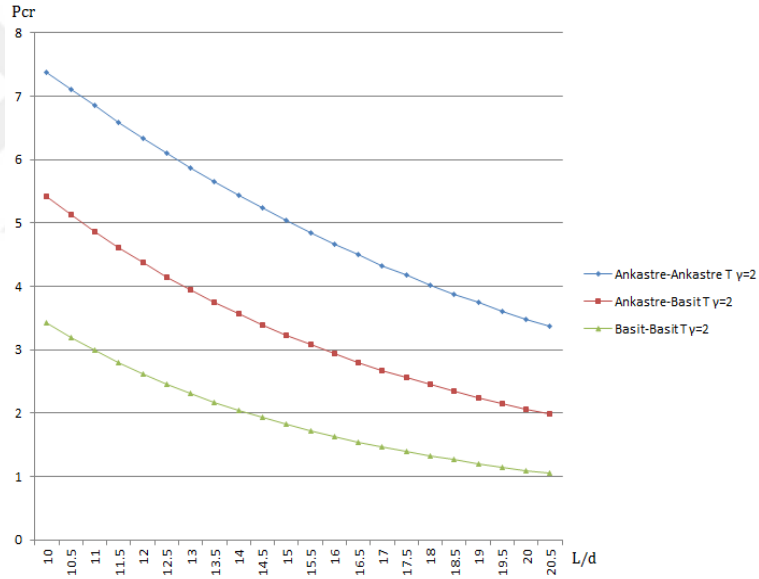
Şekil 4.17. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Euler Bernoulli kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=0$ için



Şekil 4.18. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Timoshenko kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=0$ için

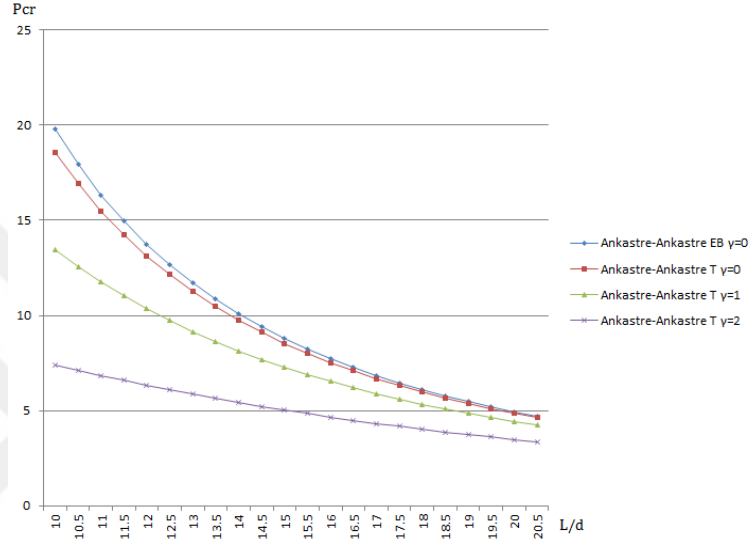


Şekil 4.19. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Timoshenko kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=1$ için

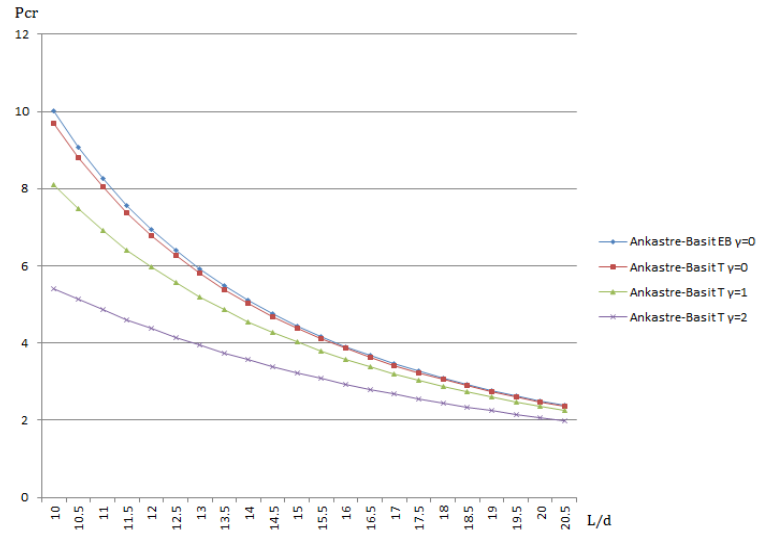


Şekil 4.20. Farklı mesnetlenme koşullarındaki Timoshenko kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi $\gamma=2$ için

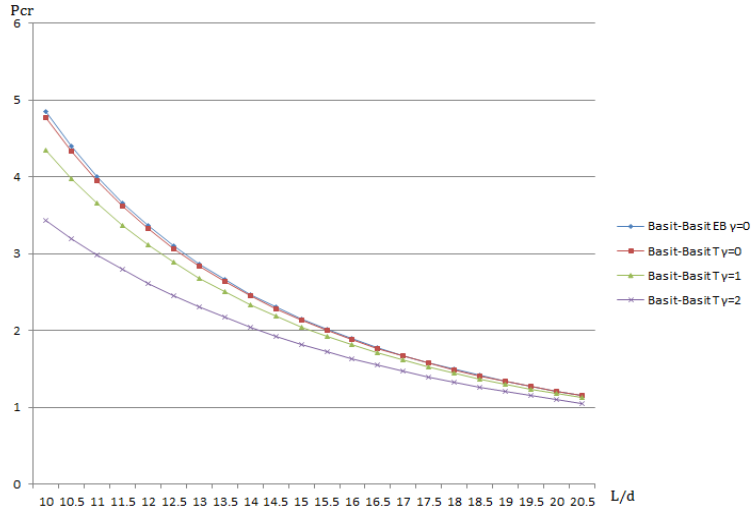
Çizelge 4.10' daki değerler kullanılarak aşağıda verilen Şekil 4.21 ve Şekil 4.22 grafiksel olarak oluşturulmuştur. Bu şekiller ve yukarıdaki Şekil 4.17, Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20 Timoshenko ve Euler Bernoulli kiriş teorilerinin kritik burkulma yüklerinin L/d oranında nasıl değiştiği, mesnetlenme koşulları ve küçük ölçek katsayısının (γ) kritik burkulma yükünü nasıl etkilediğini gözlemlemek için oluşturulmuştur.



Şekil 4.21. Ankastre-ankastre mesnetli kirişlerin kritik burkulma yükünün değişimi



Şekil 4.22. Ankastre-basit mesnetli kirişlerin kritik burkulma yükünün değişimi



Şekil 4.23. Ankastre-basit mesnetli kirişlerinin kritik burkulma yükünün değişimi

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde kritik burkulma yüklerinin, en büyük değeri ankastre ankastre mesnetli kirişte, en küçük değeri basit basit mesnetli kirişte bulunmuştur. Ayrıca Timosheko kirişi kayma etkilerini de göz önüne alması nedeniyle Euler Bernoulli kiriş teorisine göre daha küçük sonuçlar vermiştir. Bölüm 2’ de bahsedildiği üzere L/d oranı arttıkça, şekillerden Timoshenko ve Euler Bernoulli kirişlerinin sonuçları birbirine yakınlaştığı L/d oranı azaldıkça sonuçların birbirinden uzaklaştığı görülmüştür. Ayrıca γ (küçük ölçek katsayısı) arttıkça kritik burkulma yüklerinin azaldığı görülür.

Bunun dışında elde edilen sonuçlar literatürde yapılan çalışmalar ile kıyaslanırsa bulunan sonuçların literatürde yapılmış çalışmalarda bulunan sonuçlara oldukça yakın olduğu görülmüştür. Bu nedenle de bu çalışmada kullanılan yöntemin doğruluğu ispat edilmiştir. Ayrıca bu yöntemin diğer yöntemlerden bir farkı da rijit olmayan sınır koşulları içinde hesap yapılabilmesine imkan vermesidir. Bu nedenle yapılan bu çalışma ilerde yapılacak çalışmalara referans olacağı düşünülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Yöntemler bölümünde iki ucu yaylı ve iki ucu basit mesnetli kiriş için bulunan denklemlerdeki rijitlik değeri (R) çok büyük alınması durumunda kiriş ankastre mesnetli gibi davranacaktır. Çok küçük alınması durumunda da basit mesnetli gibi davranacaktır.

Çizelge 5.1' i oluşturmak için $L=8m$, $A=0,15m^2$, $m=0,382263kN.sn^2/m$, $I=0,003125m^4$, $E=30000000kN/m^2$, $G=11538461,54kN/m^2$, $k_w=1,2$ alınmıştır.

Yukarıda verilen değerler katsayılar matrisinde yerine yazılıp çözüldüğünde açıl frekanslar elde edilir.

Çizelge 5.1. Bozyiğit ve ark. (2015) yapmış oldukları çalışmadan elde ettikleri farklı mesnetlenme koşulları için buldukları açıl frekanslar ve bu çalışmadan elde edilen açıl frekansların değeri

Sınır koşulları									
Ankastre-Ankastre				Ankastre-Basit			Basit-Basit		
Yöntemler	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
Analitik	168,62	449,98	847,58	117,48	371,08	747,49	75,87	297,77	650,40
DTM	168,62	449,98	847,58	117,48	371,08	747,79	75,87	297,77	650,40
Sap2000	168,90	452,70	847,58	117,62	373,29	756,37	75,98	299,48	658,17
Bu çalışma	168,74	453,58	848,07	117,52	371,20	747,72	75,87	297,77	650,40

Bu çalışmada çeşitli rijit olmayan sınır koşullarına sahip Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizi Fourier serileri kullanılarak yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürde yapılan sonuçlar ile kıyaslandığında bulunan sonuçların Çizelge 5.1' de de görüldüğü üzere birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu da, bu çalışmada kullanılan yöntemin doğruluğunu göstermektedir. Ayrıca, bu çalışma rijit olmayan sınır koşulları için de hesap yapılabilmesini sağlamaktadır. Tek bir katsayılar matrisi ile her sınır koşulunda kirişler için açıl frekanslar hesaplanabilir. Bu yönden de bu çalışmada bulunan sonuçlar mühendislik açısından fayda sağlamanın yanında bundan sonra yapılacak olan çalışmalar içinde referans olacaktır.

Diğer taraftan bu yöntemin dezavantajı ise Fourier serilerinin herhangi bir sınır koşulunu sağlamak için yapılan Stokes' dönüşümleri çok fazla terim kullanılmasını gerektirmektedir. Bu nedenle kullanılan bilgisayar programlarında hesaplama yapmak çok zaman almaktadır. Ancak gelişen teknoloji ile ileride bu sorun tamamen ortadan kalkabilir. Bu çalışmada 200 terim kullanılarak gerekli hassasiyet elde edilmiştir.



KAYNAKLAR

Akgoz, B., Civalek, Ö. 2013. Buckling analysis of linearly tapered micro-columns based on strain gradient elasticity. *Structural Engineering and Mechanics*, 48(2): 195-205.

Artan R., Tepe A. 2008. The initial values method for buckling of nonlocal bars with application in nanotechnology. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 27(3): 469-477.

Bağdatli, S. M., Özkaya, E., Öz, H. R. 2011. Dynamics of axially accelerating beams with an intermediate support. *Journal of Vibration and Acoustics*, 133(3): 031013.

Banerjee, J. R. 1998. Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method. *Computres & Structures*, 69: 197-208.

Benzair, A., Tounsi, A., Besseghier, A., Heireche, H., Moulay, N., Boumia, L. 2008. The thermal effect on vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 41(22): 1-10.

Bert, C. W., Zeng, H. 2004. Analysis of axial vibration of compound bars by differential transformation method. *Journal of Sound and Vibration*, 275(3): 641-647.

Bozyiğit, B., Çatal, S., Çatal, H. H. 2015. Timoshenko kirişlerinin serbest titreşim analizinin diferansiyel transformasyon metodu ile incelenmesi. 3. Türkiye Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı, 14-16 Ekim 2015, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Catal, S. 2008. Solution of free vibration equations of beam on elastic soil by using differential transform method. *Applied Mathematical Modelling*, 32(9): 1744-1757.

Chowdhury, R., Adhikari, S., Wang, C. W., Scarpa, F. 2010. A molecular mechanics approach for the vibration of single walled carbon nanotubes. *Comput. Mater. Sci.*, 48: 730-735.

Demir, Ç., Civalek, Ö. 2016. Nonlocal finite element formulation for vibration. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 8(2): 109-117.

Demirdag, O., Yesilce, Y. 2011. Solution of free vibration equation of elastically supported Timoshenko columns with a tip mass by differential transform method. *Advances in Engineering Software*, 42(10): 860-867.

De Rosa, M. A. 1995. Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Computers & Structures*, 57(1): 151-156.

Develi, A. G. 2007. Elastik zemin üzerine oturan Timoshenko kirişlerinde titreşim problemi. *Yüksek Lisans Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul.

- Eringen, A. C. 1972.** Nonlocal polar elastic continua. *International Journal of Engineering Science*, 10: 1-16.
- Eringen, A. C. 1983.** On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *J. Appl. Phys.*, 54: 4703–4710.
- Eringen, A. C., Edelen, D. G. B. 1972.** On nonlocal elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 10: 233–48.
- Farghaly, S. H. 1994.** Vibration and stability analysis Timoshenko beams with discontinuities in cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 174: 591-605.
- Ghannadpour, S. A. M., Mohammadi, B. 2010.** Buckling analysis of micro-and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory using Chebyshev polynomials. *Advanced Materials Research*, 123: 619-622.
- Gül, U., Aydoğdu, M. 2015.** Elastik zemin üzerinde oturan Timoshenko kirişlerinde dalga yayını. Uluslararası Katılımlı 17. Makina Teorisi Sempozyumu, 14-17 Haziran 2015, İzmir.
- Han, S. M., Benaroya, H., Wei, T. 1999.** Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5): 935-988.
- Kadioğlu, H., Yaylı, M . Ö. 2017.** Buckling Analysis of Non-Local Timoshenko Beams by Using Fourier Series. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 9 (4): 89-99.
- Kaya, M. O. 2006.** Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 78(3): 194-203.
- Kim, H. K., Kim, M. S. 2001.** Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series. *Journal of Sound and Vibration*, 245(5): 771-784.
- Kocatürk, T., Şimşek, M. 2005.** Free vibration analysis of elastically supported Timoshenko beams. *Sigma*, 3: 79-93.
- Koç, Y. 2006.** Euler Bernoulli ve Timoshenko teorileri kullanılarak basit mesnetli kirişlerin serbest titreşimlerinin incelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi*, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, İstanbul.
- Li, C. Y., Chou, T. W. 2003.** A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *Int. J. Solids Struct.*, 40: 2487-2499.
- Lin, S. C., Hsiao, K. M. 2001** Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 240(2): 303-322.
- Malik, M., Dang, H. H. 1998.** Vibration analysis of continuous systems by differential transformation. *Applied Mathematics and Computation*, 96(1): 17-26.

- Ozdemir, O. O., Kaya, M. O. 2010.** Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM. *Meccanica*, 45(1): 33-42.
- Poncharal, P., Wang, Z. L., Ugarte, D., Heer, W. A. D. 1999.** Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes. *Science*, 283: 1513-1516.
- Rahmani, O., Pedram, O. 2014.** Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory. *International Journal of Engineering Science*, 77: 55-70.
- Rao, S. S., Gupta, R. S. 2001.** Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 242(1): 103-124.
- Reddy, J. N. 2007.** Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2): 288-307.
- Setoodeh, A.R., Khosrownejad, M., Malekzadeh, P. 2011.** Exact nonlocal solution for post buckling of single-walled carbon nanotubes. *Physica E*, 43: 1730-1737.
- Thai, H.T. 2012.** A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams. *Int. J. Eng. Sci.*, 52: 56-64.
- Viola, E., Ricci, P., Aliabadi, M. H. 2007.** Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 304(1): 124-153.
- Yang, J., Ke, L. L., Kitipornchai, S. 2010.** Nonlinear free vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(5): 1727-1735.
- Yanık, F. 2015.** Nano ölçekli çubukların rijit olmayan sınır şartlarında yerel olmayan elastisite teorisine göre titreşim analizleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Bilecik.
- Yanık, F., Yaylı, M. Ö. 2015.** Rijit Olmayan Sınır Koşullarında Elastik Zemine Oturan Bir Çubuğun Eksenel Titreşim Analizi. *Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 2(1): 35-44.
- Yaylı, M. Ö. 2014.** On the axial vibration of carbon nanotubes with different boundary conditions. *Micro & Nano Letters*, 9(11): 807-811.
- Yaylı M. Ö. 2016.** Buckling Analysis of a Rotationally Restrained Single Walled Carbon Nanotube Embedded In An Elastic Medium Using Nonlocal Elasticity. *Int. J. Eng. Appl. Sci.*, 8(2): 40-50.
- Yaylı, M. Ö., Çerçevik A. E. 2015.** Axial vibration analysis of cracked nanorods with arbitrary boundary conditions. *Journal of Vibroengineering*, 17(6): 2907-2921.

Yesilce, Y., Catal, H. H. 2011. Solution of free vibration equations of semi-rigid connected Reddy-Bickford beams resting on elastic soil using the differential transform method. *Archive of Applied Mechanics*, 81(2), 199-213.

Yesilce, Y., Demirdag, O. 2008. Effect of axial force on free vibration of Timoshenko multi-span beam carrying multiple spring-mass systems. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50(6): 995-1003.

Yokoyama, T. 1996. Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Computers & Structures*, 61(6): 995-1007.

Zhou, D. 2001. Free vibration of multi-span Timoshenko beams using static Timoshenko beam functions. *Journal of Sound and Vibration*, 241: 725-734.

Wang, C. M., Zhang, Y. Y., He, X. Q. 2007. Vibration of nonlocal Timoshenko beams. *Nanotechnology*, 18(10): 1-9.

Wang, C. M., Zhang, Y. Y., Ramesh, S. S., Kitipornchai, S., 2006. Buckling analysis of micro-and nano-rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 17: 3904-3909.

Wang, R.T. 1997. Vibration of multi-span Timoshenko beams to a moving force. *Journal of Sound and Vibration*, 207(5): 731-742.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Hayrullah Gün Kadioğlu
Doğum Yeri ve Tarihi : Nilüfer/13.01.1993
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Bursa Cem Sultan Lisesi (2006-2010)
Lisans : Yıldız Teknik Üniversitesi (2010-2015)
Yüksek Lisans : Uludağ Üniversitesi (2016-

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Volkan Özmen İnşaat Ltd. şti. (2015-2016)

İletişim : hyrllh_1113@hotmail.com

Yayınlar :

Kadioğlu, H., Yaylı, M . Ö. 2017. Buckling Analysis of Non-Local Timoshenko Beams by Using Fourier Series. *International Journal Of Engineering & Applied Sciences*, 9 (4): 89-99.