T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÖLÜM GOLDİE BOYUT ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜBRA BAYKAL

EKİM 2018
UŞAK

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÖLÜM GOLDİE BOYUT ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KÜBRA BAYKAL

UŞAK 2018

Kübra BAYKAL tarafından hazırlanan 'Bölüm Goldie Boyut' adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç.Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ ....

Tez Danışmanı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Bölümü Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Deniz UÇAR ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Doç.Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ ....

Matematik Anabilim Dalı, Uşak Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA ....

Matematik Anabilim Dalı, Afyon Kocatepe Üniversitesi

Tarih: 19/10/2018

Bu Çalışma İle Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. İsa Yeşilyurt

....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Kübra BAYKAL

BÖLÜM GOLDİE BOYUT ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra BAYKAL

UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2018

ÖZET

Bu tezde, sonlu bölüm Goldie boyuta sahip modüller incelenmiştir. Özellikle V. Camillo ve C. Faith'in makaleleri detaylı olarak çalışılmıştır. İlk iki bölümde modül kavramı, modül ile ilgili bazı temel tanım ve özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde düzgün modül, Goldie boyut, bölüm Goldie boyut ve CS-modül kavramları derlenmiştir. Dördüncü bölümde artan zincir şartı ile bölüm modülleri sonlu boyutlu modüller için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. Son bölümde bölüm modülleri sonlu boyutlu modüllerin noether modüller ile karakterizasyonu ve bazı uygulamaları verilmiştir.

Bilim Kodu : 403.01.00

Anahtar Kelimeler : Modül, Düzgün modül, Bölüm modül, Goldie boyut, sonlu bölüm Goldie boyut, Noether modül.

Sayfa Adedi : 44

Tez Yöneticisi : Doç.Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ

ON QUOTİENT GOLDİE DİMENSİON

(M.Sc. Thesis)

Kübra BAYKAL

UŞAK UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCIENCE

October 2018

ABSTRACT

In this thesis, we survey quotient finite Goldie dimensional modules. In particular, we study in detail V. Camillo and C. Faith. In the first two section, module concept and basic definitions and properties of modules are given. In the third section we review uniform modules, Goldie dimension, quotient Goldie dimension and CS-modules. In the fourth section and necessary and sufficient conditions for quotient finite dimension modules with assending chain condition are illustrated. In the last section characterization modules with noetherian modules and some applications of them are given.

Science Code : 403.01.00

Key Words : Module, Uniform module, Quotient module, Finite Quotient Goldie dimension, Noetherian module.

Page Number : 44

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca desteğini ve zamanını hiçbir zaman esirgemeyen akademik açıdan gelişmemi, doğru bilimsel araştırma yöntemlerini öğrenmemi sağlayan, objektif yorum ve öğretileriyle ilerlememe yardımcı olan saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Mustafa Kemal BERKTAŞ'a

Ayrıca bu çalışmanın gerçekleşmesinde gerek tez izleme komitesi ve gerekse tez jürisi olarak destek ve önerilerinden dolayı görev almış tüm hocalarıma

Son olarak bu süreç boyunca her türlü sıkıntıyı, zorluğu ve sevinci benimle yaşayan, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme, arkadaşlarıma ve desteğini esirgemeyen eşim Sergen BAYKAL'a

Sonsuz teşekkürler…

Bu tez, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (**TÜBİTAK**) tarafından, **117F270** numaralı proje kapsamında desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
M_R	M birimsel sağ R- modül
${}_RM$	M birimsel sol R-modül
$Mod-R$	birimsel sağ R- modüllerin kategorisi
$\oplus M_i$	M_i modüllerinin direkt toplamı
$\prod M_i$	M_i modüllerinin direkt çarpımı
$A \leq M$	A; M'nin altmodülü
$A \leq_d M$	A; M'nin dik toplananı
$A \leq_C M$	A; M'nin tamamlayanı
$A \ll M$	A; M'nin küçük altmodülü
$A \trianglelefteq M$	A; M'nin büyük altmodülü
$A/_B$	A'nın B'ye bölüm modülü
$Hom_R(M,N)$	M'den N'ye R–modül homomorfizmalarının sınıfı
$End(M_R)$	M modülünün endomorfizma halkası
$Gör(f)$	f fonksiyonunun görüntüsü
$Çek(f)$	f fonksiyonunun çekirdeği

$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}(p^\infty)$	Prüfer P- grup
$J(R)$	R halkasının Jacobson radicali
$SocM$	M modülünün sokulu
$RadM$	M modülünün radikali
$E(A)$	A modülünün injektif bürümü
udim	Goldie boyut

1. GİRİŞ

Modül Teoride daha genel olarak cebirde düzgün modüller ve injektif modüllerin önemi Carl Faith'ın [1], [2] çalışmalarının yayınlanmasının etkisiyle 1960 ve 1970'lerde büyük ölçüde belli oldu. Yalnız bu çalışmalara değil aynı zamanda John von Neumann'ın sürekli geometriler aracılığıyla Kuantum Mekaniğini modelleme girişimi ile ilgili modüllere ve modüllerin çeşitli genellemelerine süre gelen bir ilgi vardı [3].

Modüller ve halkalar için Goldie boyut ilk defa [4], [5] da sunulmuştur. Goldie A.W. bu kavramı boyut olarak adlandırmıştır. Ayrıca Goldie boyut düzgün boyut veya rank olarakta adlandırılmıştır. Herhangi bir modüler latis için Goldie boyut kavramı [6]'da, kategorik versiyonu da yakın zamanda [7] de verilmiştir.

Bu çalışmada V. Camillo ve C. Faith'in sonlu bölüm Goldie boyuta sahip modüller için elde ettikleri [2], [8]'deki sonuçlar ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümü olarak düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerekli modül teorisi ile ilgili temel tanım ve özellikler verilmiştir. Sonuçları anlaşılır hale getirmek ve sınıflandırmak için örnekler verilmiştir. Modül teorisindeki kullanışlı özel altmodüllerden olan büyük (essential), küçük (superflous) altmodüller, sokul, radical, injektif modül, Noether ve Artin modül kavramları incelenmiştir.

Burada belirtilmeyen tanım ve özellikler için [3], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] kaynaklarından yararlanılabilir.

Üçüncü bölümde bir M modülünün düzgün boyut teorisine giriş yapılmıştır. Bu teorinin temel fikri bir M modülünün sıfırdan farklı altmodüllerinin mümkün olduğu kadar büyük bir direkt toplamı bulunmasıyla M modülünün genişliğinin ölçümünü yapmaktır. Bir M modülünün düzgün altmodüllerin direkt toplamı olacak şekilde bir büyük altmodülü vardır. Buradan hareketle Goldie boyut tanımlanmıştır. Bir M modülü için $N_i \neq 0$ düzgün modül olmak üzere $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_k$ büyük altmodülünü düşünürsek M nin Goldie (düzgün) boyutu k olur [17].

R bir halka ve F bir cisim olmak üzere vektör uzayı, bir F cismi üzerinde kurulan yapı iken modül birimli bir R halkası üzerinde kurulur. Yani modül kavramı vektör uzayının çok daha genel hali olarak karşımıza çıkar. Dolayısıyla düzgün (Goldie) boyut, vektör uzaylarında ki boyut kavramının genelleştirilmişidir.

M bir modül olmak üzere eğer M modülünün her homomorfik görüntüsü sonlu Goldie boyuta sahipse M modülüne $sonlu\ bölüm\ Goldie\ boyuta\ sahiptir$ denir [9].

Yine bu bölümde orijini John von Neumann'ın çalışmalarına dayanan CS-modüllerin tanımı ve sonlu Goldie boyut ile ilişkisine değinilmiştir. CS-modüller için detaylı bilgilere [3], [17], [18], [19] çalışmalarından ulaşılabilir.

Dördüncü bölümde V.Camillo tarafından 1977 yılında yayınlanan makale detaylı olarak incelenmiştir [8]. Bir M modülü sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olması için gerek ve yeter koşul M'nin her bölüm modülü sonlu boyutlu sokula sahip olmasıdır ve bir M modülü sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olması için gerek ve yeter koşul her N altmodülünün $N/_T$ maksimal altmodüle sahip olmayacak şekilde bir T sonlu üretilmiş altmodüle sahip olmasıdır.

Beşinci bölümde C. Faith tarafından 1999 yılında yayınlanan makale detaylı olarak incelenmiştir [2]. Bu makaledeki temel sonuç; bir M modülünün sonlu bölüm Goldie boyutuna sahip olması ve SDI (subdirectly irreducible) altmodüllerinin artan zincir şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul M modülünün Noether olmasıdır.

Böylece son bölümde sonlu bölüm Goldie boyutlu modüllerin Noether modüller ile karakterizasyonu yapılmış ve ayrıca bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli olan bilinen temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 2.1.1. Birimli bir R halkası ve $(M, +)$ abel grubu için $f: R \times M \to M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(r, m) \in M$ elemanını rm ile göstereceğiz.

Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için

1. $r(m + n) = rm + rn$
2. $(r + s)m = rm + sm$
3. $(rs)m = r(sm)$
4. $1.m = m$

ise M'ye bir birimsel $sol\ R - mod$ül veya $R\ halkası$ üzerinde bir sol modül denir ve $_RM$ ile gösterilir. Benzer koşulları gerçekleyen bir $g: M \times R \to M,\ g(m, r) = mr$ fonksiyonu verilmişse M'ye birimsel sağ R-modül denir ve M_R ile gösterilir [10].

Örneğin; V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ise V, F üzerinde bir modüldür.

Her R halkası kendisi üzerinde hem sol R-modül hem de sağ R-modüldür.

R birimli ve değişmeli bir halka olsun. $R[x]$ polinomlar halkası R- modüldür.

Bileşenleri birimli değişmeli bir R halkasında olan tüm dizilerin kümesi bir R-modüldür.

Tez boyunca bir R halkası üzerinde sol R-modüller kısaca modül olarak ifade edilecektir.

Tanım 2.1.2. M bir modül olsun. M modülünün boş olmayan bir N altkümesi kendi başına modül oluyorsa $N'ye\ M'nin\ bir\ altmod$ülü denir ve $N \leq M$ veya ${}_RN \leq {}_RM$ biçiminde gösterilir [10].

Tanım 2.1.3. M modülünün bir S altkümesini içeren en küçük $< S >$ altmodülüne $S'nin$ $\ddot{u}retti\breve{g}i\ altmod$ül denir. $< S >$ altmodülünün her zaman mevcut olduğu ve S yi içeren tüm altmodüllerin kesişimine eşit olduğu kolayca gösterilir. Ayrıca boş kümeden farklı S altkümesi için S'nin ürettiği $< S >$ altmodülü $r_i \epsilon R,\ s_i \epsilon S$ (i=1,2,..,n) olmak üzere tüm $r_1 s_1 + r_2 s_2 + \cdots + r_n s_n$ şeklinde yazılabilen elemanlardan yani S'nin elemanlarının tüm lineer bileşimlerinden oluşur. $S = \varnothing$ ise $< S >= 0$ dır [10].

Tanım 2.1.4. S, M modülünün sonlu bir altkümesi ve $M =< S >$ ise M ye $sonlu$ $\ddot{u}retilen\ mod$ül denir. M modülünün K ve L altmodüllerinin $K \cap L$ kesişimi de bir altmodüldür. Ancak $K \cup L$ birleşimi altmodül olmayabilir. Bu iki altmodülü içeren en küçük altmodülü $< K \cup L >= \{k + l : k \in K, l \in L\}$ olduğu kolayca görülür. Bu altmodüle $K\ ve\ L\ altmod$$\ddot{u}llerinin\ toplamı$ denir ve $K + L$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.1.5. S, tek elemandan oluşan bir küme yani $S = \{x\}$ ise, $< S >=< x >= Rx = \{rx \mid r \epsilon R\}$ altmodülüne $x'in$ $\ddot{u}retti\breve{g}i\ devirli\ mod$ül denir [10].

Tanım 2.1.6. Kendisinden ve sıfırdan başka altmodülü bulunmayan sıfırdan farklı bir modüle $basit\ mod$ül denir [10].

Önerme 2.1.1. M bir modül olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) M, $M = \sum_{i\in I} S_i$ koşulunu sağlayan basit altmodüllerinin bir $\{S_i\}_{i\in I}$ ailesine sahiptir.
(2) M toplamı M nin kendisi olan basit altmodüllerinin bir ailesine sahiptir.
(3) M nin her altmodülü M nin bir direkt toplananıdır [11, Önerme 3.1].

Tanım 2.1.7. Önerme 2.1.1. deki denk koşullardan herhangi birini sağlayan M modülüne yarı basit modül denir. Kısaca basit altmodüllerin toplamı şeklinde gösterilebilen modüle *yarı basit modül* denir [11].

Önerme 2.1.2. Her basit modül devirlidir [11, Önerme 1.2].

İspat: M bir basit modül olsun. M sıfırdan farklı bir modül olduğundan $0 \neq m \in M$ elemanı mevcuttur. Bu $0 \neq m \in M$ elemanı ile oluşturulan Rm devirli altmodülünü ele alalım. M basit olduğundan $Rm = M$ bulunur. Dolayısıyla M devirlidir.

Önerme 2.1.3. M yarı basit modül olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) M basit altmodüllerin sonlu bir ailesinin direkt toplamıdır.
(2) M sonlu üretilmiştir [11, Önerme 3.2].

Tanım 2.1.8. Bir M modülünün sıfırdan farklı bir altmodülü N olsun. M nin N de içerilen sıfırdan farklı ve N den başka hiçbir altmodülü yoksa N modülüne $minimal\ altmod$ül denir [14].

N nin bir minimal altmodül olması için gerek ve yeter koşul basit altmodül olmasıdır [14].

Tanım 2.1.9. Bir M modülünün bir öz altmodülü N olsun. M'nin N'yi kapsayan N modülünden başka hiçbir öz altmodülü yoksa N'ye bir $maksimal\ altmod$ül denir [14].

Bir modülün birden fazla maksimal altmodülü olabilir. Örneğin; $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülünde her p asal sayısı için $p\mathbb{Z}$ maksimal altmodüldür. Diğer taraftan maksimal altmodülü bulunmayan modüllerde vardır. Bir B modülünün basit olması için gerek ve yeter şart B'nin her altmodülünün maksimal olmasıdır [10].

Önerme 2.1.4. M sonlu üretilmiş bir modül olsun. Bu takdirde M modülünün her altmodülü bir maksimal altmodülde kapsanır [11, Önerme 1.3].

Sonuç 2.1.1. Sıfırdan farklı sonlu üretilmiş her modül bir maksimal altmodüle sahiptir [11, Sonuç 1].

Tanım 2.1.10. M bir modül olsun. M modülünün her U altmodülü için $A \cap U = 0$ olması durumunda $U = 0$ oluyorsa A altmodülüne $M'de\ büyük$ ($essential$) denir ve $A \trianglelefteq M$ ile gösterilir [3].

Lemma 2.1.1. K ve N, bir M modülünün altmodülleri olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $N \trianglelefteq M \Leftrightarrow$ her $0 \neq m \in M$ için $N \cap Rm \neq 0$
2. $K \subset N,\ K \trianglelefteq M \Leftrightarrow K \trianglelefteq N$ ve $N \trianglelefteq M$
3. $N \trianglelefteq M$ ise $N \cap K \trianglelefteq K$ dir.
4. $N \trianglelefteq M$ ve $K \trianglelefteq M$ ise $N \cap K \trianglelefteq M$ dir.
5. $K \subset N$ olsun. Eğer $N/_K \trianglelefteq M/_K$ ise $N \trianglelefteq M$ dir.
6. $N \trianglelefteq M$ ve $m \in M$ ise Nm^{-1}; R nin büyük sol idealidir [3].

Tanım 2.1.11. M bir modül olsun. M modülünün her U altmodülü için $A + U = M$ olması durumunda $U = M$ oluyorsa A altmodülüne $M'de\ küçüktür\ (superfluouse)$ denir ve $A \ll M$ ile gösterilir [14].

Teorem 2.1.1. M bir modül olmak üzere $\{L_i,\ i \in I\}$; M'nin büyük altmodüllerinin bir ailesi ise $\cap\, L_i$; M'nin bir büyük altmodülüdür [12].

Tanım 2.1.12. M bir modül olsun. M'nin basit altmodüllerinin toplamına M'nin sokulu denir ve $SocM$ ile gösterilir. Ayrıca

$$SocM = \sum\{K \leq M \mid K, M'nin\ minimal\ altmodülü\}$$

$$= \cap\, \{L \leq M \mid L, M'nin\ büyük\ altmodülü\}.$$

$SocM$, M nin bir altmodülüdür [3].

Örnek 2.1.1. $\mathbb{Z}_8$={ $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7}$}'in tüm altmodülleri A={$\bar{0}$}, B={$\bar{0},\bar{4}$}, C={$\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6}$} dir. B ve C büyük altmodüllerdir. Böylece B∩C={$\bar{0},\bar{4}$}=B=Soc$\mathbb{Z}_8$ olur.

Örnek 2.1.2. $Soc\mathbb{Z} = 0$ dır. Çünkü $\mathbb{Z}$ nin hiç minimal altmodülü yoktur.

Tanım 2.1.13. M bir modül olsun. M'nin maksimal altmodüllerinin arakesitine M'nin radikali denir ve $RadM$ ile gösterilir.

$$RadM = \sum\{L \leq M \mid L, M'de\ küçük\}$$

$$= \cap\, \{K \leq M \mid K, M'de\ maksimal\}$$

M maksimal altmodüle sahip değilse $RadM = M$ dir [3].

Önerme 2.1.5. M bir modül olsun. M nin sonlu üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $M/_{RadM}$ nin sonlu üretilmiş ve $RadM$ nin M de küçük olmasıdır [12, Theorem 10.4].

Örnek 2.1.3. M sonlu üretilmiş bir modül ise $RadM \neq M$ dır [3]. Çünkü M sonlu üretilmiş ise $RadM \ll M$ olduğundan $RadM \neq M$ dir.

Örnek 2.1.4. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $Rad\mathbb{Z} = 0$ dır. Çünkü $\mathbb{Z}$'nin hiç küçük altmodülü yoktur.

Örnek 2.1.5. ${}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}$ modülünün hiç maksimal altmodülü olmadığından $Rad\,{}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} = 0$ dır.

Tanım 2.1.14. R bir halka olsun. R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine $R\ nin\ Jacobson\ radikali$ denir ve $J(R) = Rad({}_{R}R)$ ile gösterilir [13].

Tanım 2.1.15. M bir modül olsun. $A, B, C \leq M$ ve $B \leq C$ olmak üzere $(A + B) \cap C = (A \cap C) + B$ eşitliğine $Modülarite\ Kuralı$ denir [14].

Tanım 2.1.16. R bir halka, M ve N iki modül olsun. $f: M \to N$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa f ye bir modül homomorfizması denir.

1. Her $m_1, m_2 \in M$ için $f(m_1) + f(m_2) = f(m_1) + f(m_2)$
2. Her $m \in M$ ve $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$ dir.

Eğer f homomorfizması birebir ise f'ye bir monomorfizma denir.

Eğer f homomorfizması örten ise f'ye bir epimorfizma denir.

Eğer f homomorfizması hem birebir hem örten ise f'ye bir izomorfizma denir [14].

Tanım 2.1.17. $f: M \to N$ bir modül homomorfizması olsun

$\{ x \in M : f(x) = 0_N\}$ kümesine f'nin çekirdeği denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir.

$Gör(f) = \{ f(m) : m \in M \}$ kümesine f altında M'nin görüntüsü denir [10].

Tanım 2.1.18. M bir modül ve N, M nin bir altmodülü olsun. $M/_N = \{x + N \mid x \in M\}$ kümesi $\forall x, y \in M$ ve $r \in R$ $için$ $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$ ve $r(x + N) = rx + N$ işlemlerine göre bir modüldür. Bu modüle *bölüm modül* denir [12].

Teorem 2.1.2. (1. İzomorfizma Teoremi)

M ve N modül olmak üzere $f: M \to N$ modül homomorfizması için $Çek(f) = K$ olsun. Bu durumda

$$M/_K \cong f(M)$$

dir [10].

Teorem 2.1.3. (2. İzomorfizma Teoremi)

M bir modül olsun. Bu durumda

$$H \leq M \text{ ve } K \leq M \text{ ise } {}^{H + K}/_K \cong {}^{H}/_{H \cap K}$$

dir [10].

Teorem 2.1.4. (3. İzomorfizma Teoremi)

M bir modül olsun. Bu durumda

$$K \leq L \leq M \text{ ise } {}^{M}\!/_{L} \cong {}^{{}^{M}\!/_{K}}\!/_{{}^{L}\!/_{K}}$$

dir [10].

Önerme 2.1.7. Yarıbasit modüllerin homomorfik görüntüsü de yarıbasittir [11, Önerme 3.5]

İspat: M yarıbasit bir modül ve M' bir modül olmak üzere $\phi : M \to M'$ modül epimorfizması verilsin. M'nin her altmodülü bir direkt toplanandır. Dolayısıyla $Çek(\phi)$, M'nin bir direkt toplanandır. Bu durumda $M = Çek(\phi) \oplus N$ olacak şekilde M'nin bir N direkt toplananı mevcuttur. I.İzomorfizma teoreminden ${}^{M}\!/_{Çek(\phi)} \cong N$ olur. ϕ epimorfizma olduğundan ${}^{M}\!/_{Çek(\phi)} \cong M'$ yani $N \cong M'$ bulunur. Yarı basit modüllerin her altmodülü yarıbasittir gereğince M yarıbasit modülünün N altmodülü de yarıbasittir. Dolayısıyla ona izomorf olan M' modülü de yarıbasittir.

Teorem 2.1.5. (Çarpan Teoremi) $M, M', N \; ve \; N'$ birer modül ve $f: M \to N$ bir modül homomorfizması olsun. Eğer $g: M \to M'$, $Kerg \subseteq Kerf$ olacak şekilde bir epimorfizm ise

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ M' \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

$f = hg$ olacak şekilde bir tek $h: M' \to N$ monomorfizması vardır [12].

Önerme 2.1.5. M ve M' birer modül olmak üzere $f: M \to M'$ içerim monomorfizması olsun. Bu taktirde M modülünün bir M'' genişlemesi ve f içerim monomorfizmasının her $m \in M$ elemanı için $g(m) = f(m)$ olacak şekilde bir $g: M'' \to M'$ genişleme izomorfizması vardır [12].

2.2. İnjektif Modül

Tanım 2.2.1. $M, N\ ve\ K$ modülleri verilsin

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} K$$

modüllerinin bir dizisi olmak üzere $Gör(\phi) \subseteq Çek(\psi)$ ise, bir başka deyişle $\forall m \in M\ \ için\ (\psi\phi)(m) = 0$ oluyorsa bu diziye $kompleks$ denir.

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} K$$

dizisi için $Gör(\phi) = Çek(\psi)$ oluyorsa bu diziye $tam\ dizi$ denir.

Eğer $0 \to M \xrightarrow{\phi} N$ dizisi tam dizi ise, $Çek(\phi) = 0$ olup ϕ bir monomorfizmadır.. Yine $N \xrightarrow{\psi} K \to 0$ dizisi tam dizi ise, $Gör(\psi) = K$ olup ψ bir epimorfizimdir.

$$0 \to M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} K \to 0$$

şeklindeki diziye kısa tam dizi denir.

Bir M modülünün M' altmodülü için $M' \to M$ içerme monomorfizması ve $M \to {}^{M}/_{M'}$ doğal epimorfizması yardımıyla kurulan

$$0 \to M' \to M \to {}^{M}/_{M'} \to 0$$

dizisi tamdır [11].

Teorem 2.2.1. R birimli bir halka ve $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ bir kısa tam dizisi için aşağıdakiler denktir.

1.) $hf = 1_A$ olacak şekilde bir $h: B \to A$ R-modül homomorfizması bulunur.

2.) $Gör(f)$ altmodülü B'nin toplanan terimidir.

3.) $gk = 1_C$ olacak şekilde bir $k: C \to A$ R-modül homomorfizması bulunur. Bu durumda $B \cong A \oplus C$ dir.

Tanım 2.2.2. Teorem 2.1.6. 'da verilen denk koşullardan birini sağlayan bir kısa tam diziye $split$ ($parçalanan$) veya $parçalanan\ kısa\ tam\ dizi$ denir.

Lemma 2.2.1. Bir M modülü için aşağıdakiler denktir

1.) Her $\alpha: M \to B$ monomorfizması parçalanabilirdir.

2.) Her $f: A \to B$ monomorfizması ve her $g: A \to M$ homomorfizması için $f = hg$ olacak şekilde $h: B \to M$ homomofizması vardır.

3.) Her $f: A \to B$ monomorfizması için $Hom(f, 1_M): Hom_R(B, M) \to Hom_R(A, M)$ bir epimorfizmadır [14, Theorem 5.3.1] .

Tanım 2.2.3. Lemma 2.2.1. de verilen denk koşullardan birini sağlayan bir M modülüne $injektif\ modül$ denir [14].

Tanım 2.2.4. $f: K \to M$ monomorfizması için $Imf \trianglelefteq M$ ise f ye $büyük\ monomorfizma$ denir [14].

Tanım 2.2.5. I injektif modülüne, $f: M \to I$ büyük monomorfizması ile birlikte M modülünün $injektif\ bürümü$ ($injective\ hull$) denir [10].

Teorem 2.2.2. Her modülün bir injektif bürümü bulunur ve injektif bürüm izomorfizma farkıyla tektir [10, Teorem 10.2]

Lemma 2.2.2. $A \leq B$ ve $E(B)$, B'nin injektif bürümü olsun. Bir $C \leq E(B)$ için $E(B) = E(A) \oplus C$ olacak şekilde A'nın bir $E(A)$ injektif bürümü vardır. Eğer $A \leq B$ büyük altmodül ise $E(A) = E(B)$ dır [13, Problem 1.6.7].

2.3. Noether ve Artin Modüller

Tanım 2.3.1. M bir modül olsun. M'nin altmodüllerinin boştan farklı her Ω ailesi bir maksimal elemana sahipse yani Ω, K altmodülünü kapsayan bir elemanı olmayacak şekilde bir K elemanına sahipse M modülüne altmodülleri için $maksimal\ koşulunu\ sağlar$ denir [11].

Tanım 2.3.2. M bir modül olsun. M'nin altmodüllerinin $K_1 \leq K_2 \leq K_3 \leq \cdots$ şeklinde her bir artan zinciri için öyle $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq m$ koşulunu sağlayan $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $K_n = K_m$ oluyorsa , M modülüne $artan\ zincir\ koşulunu\ sağlar$ denir [11].

Tanım 2.3.3. M modülünün bütün altmodülleri üzerinde artan zincir koşulu (ascending chain condition, ACC) sağlanıyorsa, M modülüne $Noether\ modül$ $(Noetherian)$ denir. Bu durumda M nin her altmodülü sonlu üretilmiştir. Eğer M nin her sonlu üretilmiş altmodülü noether ise M yerel noether (locally noetherian) dır [11].

Önerme 2.3.1. Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

1.) M Noether modüldür.

2.) M'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir.

3.) M'nin altmodüllerinin boş olmayan her altkümesinin bir maksimal elemanı vardır [12].

İspat: $(1) \Rightarrow (3)$ $\mathcal{A}$, M'nin altmodüllerinin boş olmayan bir ailesi olmak üzere $\mathcal{A}$'nın maksimal elemanı olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $L \in \mathcal{A}$ için $\{L' \in \mathcal{A} \mid L' > L\}$ kümesi boştan farklıdır. L' için durum devam ettirilirse M'nin altmodüllerinin bir $L' < L'' < \cdots$ artan ve durmayan zinciri elde edilir. Ancak bu durum M'nin Noether olmasıyla çelişir.

$(3) \Rightarrow (2)$ $K \leq M$ olsun. $K = \sum \mathcal{A}$ olacak şekilde M nin altmodüllerinin $\mathcal{A}$ ailesini göz önüne alalım. $\mathcal{P} = \sum\{F \mid F \leq \mathcal{A}\ sonlu\}$ olsun. $\mathcal{P} \neq \emptyset$ ve hipotezden bir maksimal elemanı vardır. Bu eleman $\sum F$ dir. Buradan açıkça $K = \sum F$ bulunur.

$(2) \Rightarrow (1)$ M'nin her altmodülü sonlu üretilmiş olsun. M'nin altmodüllerinin artan bir $L_1 \leq L_2 \leq \cdots$ zincirini alalım ve $M = \sum_{n\in\mathbb{N}} L_n$ olsun. $\sum_{sonlu} L_n = M$ olacak şekilde bir n vardır. O halde $L_{n+i} = L_n$ olup dizi sonludur. Yani M Noether modüldür [12].

Önerme 2.3.2. $0 \to K \to M \to N \to 0$ sol R-modüllerinin bir kısa tam dizisi olsun. M nin Noether olması için gerek ve yeter koşul K ve N'nin Noether olmasıdır [12].

İspat: (⇒) M Noether olsun. Bu durumda M'nin altmodülü ve bölüm modülü de Noether olur. K, M'nin bir altmodülüne izomorf ve ${}^{M}\!/_{K} \cong N$ olduğundan K ve N Noether olur.

(⇐) K ve N, Noether modüller olsun. M'nin Noether olduğunu gösterelim. $K \leq M$ ve ${}^{M}\!/_{K} = N$ olsun. M'nin altmodüllerinin $L_1 \leq L_2 \leq \cdots \leq L_n \leq \cdots$ dizisini göz önüne alalım. $L_1 + K \leq L_2 + K \leq \cdots \leq L_n + K = L_{n+i} + K$ dizisi için ${}^{M}\!/_{K}$ Noether olduğundan $(i = 1, \dots, n)$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. $L_1 \cap K \leq L_2 \cap K \leq$

$\cdots \leq L_n \cap K = L_{n+i} \cap K,\ (i = 1, \dots, n)$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Böylece, $L_n \leq L_{n+i}$ olduğundan modülarite kuralı gereğince $L_{n+i} = L_{n+i} \cap (L_{n+i} + K) = L_{n+i} \cap (L_n + K) = L_n + (L_{n+i} \cap K) = L_n$ olur. Böylece M, Noether olur.

Tanım 2.3.4. $\mathcal{L}$**,** M modülünün altmodüllerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{L}$'deki her $L_1 \geq L_2 \geq \cdots (i = 1,2, \dots)$ azalan zinciri için $L_{n+i} = L_n$ olacak şekilde bir n varsa $\mathcal{L}$'ye $azalan\ zincir\ koşulunu\ (descending\ chain\ condition)\ sağlar$ denir [12].

Tanım 2.3.5. M'nin bütün altmodüllerinde azalan zincir şartı sağlanıyorsa M modülüne $Artin\ Mod$ül $(Artinian)$ denir [12].

Teorem 2.3.1. $A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ modülünün Noether (Artin) olması için gerek ve yeter koşul R, S ve M modüllerinin Noether (Artin) olmasıdır [16].

3. GOLDİE BOYUT

Bu bölümde düzgün boyut teorisine giriş yapılmıştır. Bu teorinin temel fikri bir M modülünün sıfırdan farklı altmodüllerinin mümkün olduğu kadar büyük bir direkt toplamı bulunmasıyla M modülünün genişliğinin ölçümünü yapmaktır. Büyük altmodüller bu teoride kritik rol oynar. Goldie' nin teorisine göre düzgün boyutu bulmak için; bir M modülü verildiğinde olası en büyük k için $N_i \neq 0$ olmak üzere $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$ altmodülü aranmalıdır. Böyle bir N nin varlığını kabul edersek N, M'nin büyük altmodülü olur ve M nin düzgün boyutu k olur. Düzgün boyut lineer cebirde vektör uzayının boyutunu gösterir. Dolayısıyla modül teoride düzgün (Goldie) boyut, vektör uzaylarında ki boyut kavramının genelleştirilmişidir.

3.1. Düzgün (Uniform) Modül

Tanım 3.1.1. U sıfırdan farklı bir modül olsun. Eğer U'nun sıfırdan farklı her V, W altmodülü için $V \cap W \neq 0$ oluyorsa U'ya bir $düzgün$ $(uniform)$ modül denir [3].

Örnek 3.1.1. Her p asal sayısı ve n doğal sayısı için $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ devirli grupları birer düzgün modüldür [3].

Örnek 3.1.2. $\mathbb{Z}(p^\infty)$ prüfer grubu düzgündür [3].

Örnek 3.1.3. $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ $\mathbb{Z}$-modülünün altmodülleri $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ ve $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{3}\}$ için $\mathbb{Z}_2 \cap \mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}\}$ olduğundan düzgün modül değildir.

Lemma 3.1.1. M sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz bir direkt toplamanı içermeyen sıfırdan farklı bir modül ise, o zaman M; bir düzgün altmodül içerir [3].

Lemma 3.1.2. M sıfırdan farklı altmodülleri bir düzgün altmodül içeren sıfırdan farklı bir modül olsun. O zaman M'nin düzgün altmodüllerinin direkt toplamı olacak şekilde bir N büyük altmodülü vardır [6].

Lemma 3.1.3. Her bir U_λ; M'nin düzgün altmodülü olmak üzere M; $\bigoplus U_\lambda$ formunda bir büyük altmodüle sahip olan bir modül olsun. M'nin bir N altmodülünün büyük olması için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in \Lambda$ için $N \cap U_\lambda \neq 0$ olmasıdır [3].

Lemma 3.1.4. Her bir U_i, M'nin düzgün altmodülü olmak üzere M; $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ formunda bir büyük altmodüle sahip olsun. Bu durumda

1.) M'nin herhangi sıfırdan farklı altmodüllerinin toplamı en fazla n toplanana sahiptir.

2.) Her bir V_i düzgün modül olmak üzere, $V_1 \oplus \dots \oplus V_k \trianglelefteq M$ ise $n = k$ dır.

Özetle, sıfırdan farklı bir M modülünün sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz direkt toplamını içermemesi için gerek ve yeter koşul $U_i \subseteq M$ olmak üzere $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ formunda bir büyük altmodüle sahip olacak şekilde bir n tamsayısının var olmasıdır. M modülü için değişmez olan bu n tamsayısına $düzgün$ $(Goldie) boyut$ denir [3].

3.2. Düzgün (Goldie, Uniform) Boyut

Tanım 3.2.1. Bir M modülünün n tane düzgün altmodülün direkt toplamı olarak yazılan bir V büyük altmodülü varsa M'nin $düzgün\ boyutu\ n$ dir denir ve $udimM = n$ ile gösterilir. Düzgün boyut için $'Goldie\ boyut'$ ismi de kullanılır. Diğer taraftan n tamsayısı yoksa $udimM = \infty$ yazılır. $udimM = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $M = 0$ olmasıdır. $udimM = 1$ olması için gerek ve yeter koşul M'nin düzgün modül olmasıdır [17].

Önerme 3.2.1. Bir M modülünün Goldie boyutu n olsun. Bu durumda sıfırdan farklı herhangi altmodüllerinin $N = N_1 \oplus ... \oplus N_k \subseteq M$ direkt toplamında $k \leq n$ tane toplanan vardır [17].

Önerme 3.2.2. Bir M modülünün Goldie boyutunun sonsuz olması için gerek ve yeter koşul M sıfırdan farklı altmodüllerinin sonsuz bir direkt toplamını içermesidir [17].

Sonuç 3.2.1. Eğer M_R bir noether veya artin modül ise M modülünün Goldie boyutu sonludur [17].

İspat: Zincir şartları M'de sıfırdan farklı altmodüllerin sonsuz toplamının varlığına imkan tanımaz.

Örnek 3.2.1. Sonlu Goldie boyutlu bir modülün noether yada artin olmadığına bir örnek verelim [18].

Bir $\mathbb{Z}$-modül olan $\mathbb{Q}$ düzgündür bundan dolayı $udim\mathbb{Q} = 1$ dir. Fakat $\mathbb{Q}$'da $\mathbb{Z} \subset \frac{1}{2}\mathbb{Z} \subset \frac{1}{4}\mathbb{Z} \subset \cdots$ sonsuz azalan zinciri ve $\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset \cdots$ sonsuz artan zinciri var olduğundan $\mathbb{Q}$ noether ve artin değildir [18].

Lemma 3.2.1. N, bir M modülünün altmodülü olsun.

(1) Eğer $N \trianglelefteq M$ ise o zaman M sonlu Goldie boyuta sahip olması için gerek ve yeter koşul N'nin sonlu Goldie boyuta sahip olmasıdır ve bu durumda $udimM = udimN$'dir. Tersine; eğer M sonlu Goldie boyuta sahip ve $udimM = udimN$ ise $N \trianglelefteq M$ dir.

(2) Eğer $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ ise o zaman $udimM = udim\, M_1 + \cdots + udimM_k$ dır.

(3) N ve M/N sonlu Goldie boyuta sahip olsun. Bu durumda M'de sonlu Goldie boyuta sahiptir ve $udimM \leq udimN + udim\, {}^{M}/_{N}$

(4) M sonlu Goldie boyuta sahip olsun. O zaman her $f: M \to M$ monomorfizması için $Imf \trianglelefteq M$ dir [3].

Lemma 3.2.2. Bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

1.) $udim(M) = n$

2.) $H_1 \oplus \ldots \oplus H_n \trianglelefteq M$ olacak şekilde M nin düzgün altmodüllerinin $H_1, \ldots, H_n$ bağımsız bir dizisi vardır.

3.) Her bir E_i ayrıştırılamaz injektif modül olmak üzere $E(M) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n\, dir$ [12].

3.3. Bölüm Goldie Boyut

Tanım 3.3.1. M bir modül olmak üzere eğer M modülünün her homomorfik görüntüsü sonlu Goldie boyuta sahipse M modülüne $sonlu\ bölüm\ Goldie\ boyuta\ sahiptir$ denir [9].

Lemma 3.3.1. N, bir M modülünün altmodülü olsun. Eğer N ve $M/_N$ modülleri sonlu bölüm Goldie boyuta sahip ise M de sonlu bölüm Goldie boyuta sahiptir [9].

İspat: P; M'nin herhangi bir altmodülü olmak üzere $M/_P$'nin sonlu Goldie boyutuna sahip olduğunu göstermeliyiz. $N \leq M,\ P \leq M$ olduğundan $N \leq N + P \leq M$ ve $\frac{N+P}{N} \leq \frac{M}{N}$ olur. $\frac{M}{N}$ sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olduğu için 3. İzomorfizma Teoremi gereğince $\frac{M}{N+P}$ sonlu Goldie boyutuna sahiptir. Lemma 3.2.2 den, dim $\left(\frac{M}{N+P}\right) = n$ ise $E\left(\frac{M}{N+P}\right) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ olacak şekilde $E_1, \ldots, E_n$ injektif modülleri vardır ve $f: M \to E\left(\frac{M}{N+P}\right) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ bir homomorfizmadır. Buradan $M \to \frac{M}{N+P} \to E\left(\frac{M}{N+P}\right) = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ dizisi tamdır ve $Kerf = N + P$ dir.

N bölüm Goldie boyuta sahip olduğundan $\frac{N}{N \cap P}$ sonlu Goldie boyuta sahiptir. 2. İzomorfizma Teoremi gereği $\frac{N+P}{P} \cong \frac{N}{N \cap P}$ ve buradan $\frac{N+P}{P}$ de sonlu Goldie boyuta sahip olur. $\frac{N+P}{P}$ sonlu Goldie boyutlu ise Lemma 3.2.2 den $E\left(\frac{N+P}{N}\right) = E_{n+1} \oplus \ldots \oplus E_m$ olacak şekilde $E_{n+1}, \ldots, E_m$ injektif modülleri vardır ve $g: N + P \to E\left(\frac{N+P}{N}\right) = E_{n+1} \oplus \ldots \oplus E_m$ bir homomorfizmadır. Böylece $N + P \to \frac{N+P}{P} \to E\left(\frac{N+P}{N}\right) = E_{n+1} \oplus \ldots \oplus E_m$ bir tam dizi ve $Kerg = P$ dir.

g homomorfizmasını $h: M \to E_{n+1} \oplus \ldots \oplus E_m$ ye genişletelim. O zaman $(N + P) \cap Kerh = P$ dir. Şimdi $(f, h): M \to E_1 \oplus \ldots \oplus E_n \oplus E_{n+1} \oplus \ldots \oplus E_m$ homomorfizmasını düşünelim. $Ker(f, h) = Kerf \cap Kerh = (N + P) \cap Kerh = P$ dir. Şimdi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "(f{,}h)"] \arrow[d, "\eta"'] & E(M) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n \oplus E_{n+1} \oplus \dots \oplus E_m \\ M' = \frac{M}{P} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramını düşünelim. η bir epimorfizma ve $Ker\eta \subseteq Ker(f,h)$ olduğundan, Çarpan Teoremi sonucu tek bir $\alpha: \frac{M}{P} \to E(M)$ monomorfizması vardır. Buradan $\frac{M}{P}$ sonlu Goldie boyuta sahiptir.

Sonuç 3.3.1. Sonlu bölüm Goldie boyuta sahip modüllerin sonlu sayıdaki direkt toplamı da sonlu bölüm Goldie boyuta sahiptir [9].

İspat: $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots, \mathrm{M}_\mathrm{n}$ sonlu bölüm Goldie boyuta sahip modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun.

$$0 \to M_1 \to M_1 \oplus M_2 \to M_2 \to 0$$

dizisi tamdır.

Burada M_1 ve M_2 sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olduğundan $M_1 \oplus M_2$ sonlu bölüm Goldie boyuta sahiptir. Tümevarımla M' nin sonlu Goldie boyuta sahip olduğu görülür.

Örnek 3.3.1. p bir asal sayı olmak üzere $M = \mathbb{Z}/_{p^r\mathbb{Z}}$ $(r \geq 1)$ modülü düzgün olduğu için $udimM = 1$ olur.

Daha genel olarak $M = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$ $(m > 0)$ olsun. M'nin Goldie boyutu, m sayısının farklı asal bölenlerinin sayısına eşittir. Çünkü $M = \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_m$ modülünün m'nin farklı asal bölenlerinin sayısı kadar düzgün altmodülü vardır. Bu düzgün altmodüllerin direkt toplamı M'nin büyük altmodülü olur [17]. Örneğin; $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_6$, 6 sayısının asal bölenleri 2 ve 3 tür. Yani 6$\mathbb{Z}$ nin 2 tane düzgün altmodülü vardır. Bunlar $U_1 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ ve $U_2 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ dir. $U_1 \oplus U_2 \trianglelefteq \mathbb{Z}_6$ olduğu için $udimM = 2$ olur.

Örnek 3.3.2. M_R sonlu üretilmiş bir modül (noether olanları dışında) iken M'nin Goldie boyutu sonlu olmak zorunda değildir [17].

Örneğin; $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ...$ ideallerinin sonsuz direkt toplamını içeren $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ...$ üzerindeki bir modül $(1,1, ...)$ elemanı tarafından üretilen devirli modüldür. Yani sonlu üretilmiştir. Fakat $udim(R_R) = \infty$ dır [17].

Örnek 3.3.3. $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde $\mathbb{Z}$ modülünün bölüm modülü için $M = {}^{\mathbb{Z}}/_{p_1 ... p_k\mathbb{Z}} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{p_1\mathbb{Z}} \oplus ... \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{p_k\mathbb{Z}}$ $için$ $p_1, ..., p_k$ farklı asal sayıları olmak üzere M, k tane düzgün modülün direkt toplamına izomorftur. Böylece $udimM = k$ olur [17].

Örnek 3.3.4. $\mathbb{Z}$ üzerinde $M = \mathbb{Z}$ ve $N = p_1 ... p_k\mathbb{Z}$ $,p_i$ farklı asallar olmak üzere $\bar{M} := {}^{M}/_{N} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{p_1\mathbb{Z}} \oplus ... \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{p_k\mathbb{Z}}$ şeklinde tanımlansın. $M \to \bar{M}$ örten dönüşümünün var olması $udimM \geq udim\bar{M}$ olmasını gerektirmez. $\bar{M}$ modülünün Goldie boyutu k dır. Buna karşılık $udimM = 1$ dir. Daha da ilginci; $udim\mathbb{Q} = 1$, $udim\mathbb{Z} = 1$ fakat $udim\,{}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}} = \infty$ olur. Kısacası bir modülün bölüm modülünün Goldie boyutu, modülün Goldie boyutundan küçük olmak zorunda değildir [17].

Örnek 3.3.5. $\mathbb{Z}$ halkası üzerinde

$$0 \to {}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}} \to {}^{\mathbb{Z}}/_{p^2\mathbb{Z}} \to {}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}} \to 0$$

kısa tam dizisini düşünelim. Buradaki modüllerin Goldie boyutları 1 dir [17].

Örnek 3.3.6. M bir modül olmak üzere $M \oplus N \cong M$ iken $N = 0$ ise M *Dedekind sonludur* denir. Goldie boyutu sonlu olan herhangi bir M modülü Dedekind sonludur. Gerçekten $M \oplus N \cong M$ olduğunu farzedelim. Buradan $udimM = udim(M \oplus N) = udim\, M + udimN$ dir. M'nin Goldie boyutu sonlu olduğu için $udimN = 0$ olur. Bundan dolayı $N = 0$ olur. Yani M Dedekind sonludur [18].

Örnek 3.3.7. Bölüm modülü sonlu olmayan, sonlu Goldie boyutlu bir M_R modül örneği verelim. U sonsuz boyuta sahip ve V sonlu boyuta sahip bir K cismi üzerinde sağ vektör uzayları olsun. $H = Hom_k(U, V)$ ve $R = \begin{pmatrix} k & H \\ 0 & k \end{pmatrix}$ aşikar halka olsun. $M \coloneqq U \oplus V$, $(u\,, v)\begin{pmatrix} a & h \\ 0 & b \end{pmatrix} = (\,ua\,, h(u) + vb)$ işlemine göre M, R üzerinde bir sağ modül olsun. $0 \neq u \in U$ için $h(u) \neq 0$ olacak şekilde $h \in H$ vardır ve bundan dolayı $(u\,, v)\begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, V de sıfırdan farklı bir elemandır. Bundan dolayı V altmodülü M_R de büyüktür. Teorem 3.2.1 gereği $udimM = udimV$ olur. Fakat bölüm modül $M/_N = U \oplus V/_V \cong U$ sonsuz boyuta sahiptir [18].

3.4. CS – Modüller

Tanım 3.4.1. M bir modül ve K, M modülünün bir altmodülü olsun. Eğer K, M modülünde bir büyük genişlemeye sahip değilse başka bir deyişle L; M'nin bir altmodülü olmak üzere K; L'de büyük iken $K = L$ oluyorsa K; *M modülünde kapalıdır* denir [3].

Tanım 3.4.2. M bir modül ve L, M modülünün bir altmodülü olsun. $K \cap L = 0$ özelliğine göre maksimal olan bir K altmodülüne $L\ nin\ (M'deki)\ tamamlayanı\ (komplementi)$ denir [19].

Tanım 3.4.3. M bir modül ve K, M modülünün bir altmodülü olsun. Eğer K, M modülünde herhangi bir altmodülün tamamlayanı ise $K'ya\ (M'de)\ bir\ tamamlayan$ denir ve $K \leq_C M$ İle gösterilir. $0, M \leq_C M$ olduğu açıktır [19].

.

Tanım 3.4.4. M bir modül olsun. Eğer M'nin her K tamamlayan altmodülü M'de bir direkt toplanan oluyorsa $M'ye\ CS - modül\ (extending)$ denir. Bu tanıma denk koşullardan biri M'nin her N altmodülünün M'nin bir direkt toplananında büyük olmasıdır [19].

Örnek 3.4.1. Her yarıbasit modül CS-modüldür. Çünkü yarıbasit modüllerin her altmodülü bir direkt toplanandır [3].

Örnek 3.4.2. Her düzgün modül bir CS-modüldür. Çünkü sıfırdan farklı her altmodülü CS-modüldür [3].

Örnek 3.4.3. İnjektif modüller CS-modüldür [3].

Örnek 3.4.4. Sonlu ranka sahip modüller CS-modüldür. CS-modülün her altmodülü CS olmayabilir. Örneğin; M; CS olmayan bir modül ve $E(M)$'de M'nin injektif bürümü olsun. Bu durumda, $M \leq E(M)$ olup $E(M)$, CS-modüldür [18].

Lemma 3.4.1. M CS-modül ve N, M'nin bir direkt toplananı olsun. Bu durumda N, CS-modüldür [19].

Önerme 3.4.2. F serbest değişmeli grup bir $\mathbb{Z}$-modül olarak CS-modüldür ancak ve ancak F sonlu ranka sahiptir [18].

İspat: ($\Leftarrow$) Eğer F sonlu ranka sahip ise M modülü CS-modüldür. Şimdi F'nin rankının sonsuz olduğunu farzedelim ve $\{ e_1, e_2, \ldots \} \cup B$, F'nin bir bazı olsun.

$$f: F \to \mathbb{Q}\ ,\ f(B) = 0 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } f(e_n) = {}^{1}\!/_{n}$$

Şeklinde tanımlanan bir homomorfizm olsun. $K := Kerf \leq F$ kapalı altmodülü olsun. $K \leq_e L \leq F$ ise her $l \in L$ için $ml \in K$, $m \geq 1$ ve bundan dolayı $0 = f(ml) = mf(l)$, $f(l) = 0$ dır. Bu $K = L$ olduğunu gösterir. K kapalı altmodülü F nin bir direkt toplananı olmayabilir.

($\Rightarrow$) Diğer taraftan $F \cong K \oplus ({}^{F}\!/_{K}) \cong K \oplus \mathbb{Q}$ mümkün değildir. Çünkü $\mathbb{Q}$ serbest modül değildir. Bundan dolayı F, bir CS-modül değildir [18].

Lemma 3.4.2. M, her maksimal düzgün altmodülü bir direkt toplanan olan modül olsun. Bu durumda $K \leq_C M$ ve K'nın Goldie boyutu sonlu ise K, M'nin bir direkt toplananıdır [19].

İspat: U, K'nın bir maksimal düzgün altmodülü olsun. Buradan U, M'ninde bir maksimal düzgün altmodülüdür. $M = U \oplus U'$ olacak şekilde bir $U' \leq M$ olsun. Böylece $K = U \oplus (K \cap U')$ dir. Öyleyse $K \cap U' \leq_C M$ dir. $K \cap U'$ nin Goldie boyutunun K nın Goldie boyutundan küçük olduğu açıktır. Tümevarımla $K \cap U'$ altmodülü M'nin ve böylece U''nün bir direkt toplananıdır. Buradan K, M'nin bir direkt toplananıdır.

Sonuç 3.4.1. M sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda M'nin CS-modül olması için gerek ve yeter koşul her maksimal düzgün altmodülünün bir direkt toplanan olmasıdır [19].

4. SONLU BÖLÜM GOLDİE BOYUTLU MODÜLLER VE ARTAN ZİNCİR ŞARTI

Şimdi Goldie boyut hakkında bir modülün boyutunun başka çeşit ölçümlerine değinelim.

Bu bölümde Goldie boyut kavramı örnekleriyle incelenmiş ve [8] deki temel sonuçlar detaylı olarak incelenmiştir.

M bir modül ve N, M'nin bir altmodülü olsun. Eğer N, M'nin iki öz altmodülünün kesişimi şeklinde yazılamıyorsa N, M'de $indirgenemeyen$ $(irreducible)$ denir. Bu bölümün amacı indirgenemeyen altmodüllerin sonlu kesişimi olarak yazılabilen altmodüllere sahip modülleri çalışmaktır. Bu modüllerin önemi bölüm modülleri sonlu Goldie boyutludur.

Lemma 4.1. Bir M modülü sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olması için gerek ve yeter koşul M'nin her bölüm modülü sonlu boyutlu sokula sahip olmasıdır [8].

İspat: M bir modül, K herhangi bir altmodül olsun. M sonlu bölüm Goldie boyutlu olduğunda ${}^{M}/_{K}$ sonlu boyutludur. $soc({}^{M}/_{K})$, ${}^{M}/_{K}$'nın altmodülü olduğu için sonlu boyutlu olur.

Tersine; M'nin her bölüm modülü sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olduğunu göstermeliyiz. Buna denk olarak bölüm modülleri sonsuz boyutlu olan bir M modülünün her bölüm modülü sonsuz boyutlu sokula sahiptir. Öyleyse; $udim\frac{M}{N} = \infty$ ve her $i \in I$ için L_i, $\frac{M}{N}$ nin büyük altmodülü olsun. $\frac{M}{N}$ sonsuz boyutlu ise Lemma 3.2.1 (1) den L_i sonsuz boyutludur. Yani $udimL_i = \infty$ olur. Teorem 2.1.2 den $\cap L_i \trianglelefteq M$ olur.

Buradan Teorem 2.1.1 sonucu $udim \cap L_i = udimM$ olur. $soc\frac{M}{L} = \cap L_i$olacağından $udim(soc\frac{M}{L}) = \infty$ olur.

Teorem 4.1. Bir M modülü sonlu bölüm Goldie boyuta sahip olması için gerek ve yeter koşul her N altmodülünün $N/_T$ maksimal altmodüle sahip olmayacak şekilde bir T sonlu üretilmiş altmodüle sahip olmasıdır [8].

İspat: Her $N \subset M$ için daima bir T bulunabiliyorsa M bir sonsuz direkt toplamını içeren bölüm modülüne sahip olmaz. Kabul edelim ki $M/_K$ sonsuz direkt toplam olan bir altmodüle sahip olsun. O zaman Lemma 4.1 den $M/_{K'}$ basit modüllerin bir sonsuz direkt toplamı olacak şekilde bir K'vardır. $S/_{K'}$ bu sonsuz direkt toplam olmak üzere $K' \subset S \subset M$ olsun. Hipotezden; sonlu üretilmiş altmodül T yi seçelim öyle ki $S/_T$ maksimal altmodüle sahip olmasın. Buradan $S/_{T+K'}$ maksimal altmodüle sahip değildir. Fakat 3. İzomorfizma Teoremi gereği $S/_{T+K'}$, $S/_{K'}$ yarı basit modülünün bir homomorfik görüntüsü olduğundan $S/_{T+K'}$ yarıbasittir.(Önerme 2.1.4)

Sonuç 2.1.1 gereğince sıfırdan farklı sonlu üretilmiş her modül bir maksimal altmodüle sahiptir ve eğer $S/_{T+K'}$ sıfır değilse maksimal altmodüle sahiptir. O halde sıfır olmak zorunda ve $S = T + K'$, $T \cong S/_{K'}$ olur. $S/_{K'}$ sonsuz direkt toplam idi. Bu ise bir çelişkidir. M sonlu boyutlu bölüm grubuna sahiptir. Böylece M sonlu bölüm Goldie boyutludur.

Diğer taraftan bir $N \leq M$ alalım öyle ki N'nin içerdiği her sonlu üretilmiş altmodül T için $N/_T$ bir maksimal altmodüle sahip olsun. $A/_T$, $N/_T$ 'nin bir maksimal altmodülü olsun. Öyleyse A, N'nin bir maksimal altmodülü olur. Buradan $T \leq A \leq N$ olur.

$M_1, \dots, M_n$ bu A altmodülünün maksimal altmodülleri olsun. O zaman $T \leq \cap M_i \leq A \leq N$ olur. $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i = B$ ve ${}^{N}\!/_{B} = \bar{N}$ diyelim. Buradan $\bar{N} = {}^{N}\!/_{B} = {}^{N}\!/_{\cap M_i} = \bigcap_{i=1}^{k} M_i \oplus \bigcap_{i=k+1}^{\infty} M_i$ dir. O halde $\bar{0} \subset \bigcap_{i=2}^{\infty} M_i \subset \bigcap_{i=3}^{\infty} M_i \subset \cdots$, $\bar{N}$'nin direkt toplananlarının artan zinciridir.

$\bar{N}$, keyfi uzunlukta direk toplamlara sahip olduğundan sonsuz boyutludur. ${}^{N}\!/_{B}$'nin boyutu sonsuz olduğu için ${}^{M}\!/_{B}$'nin boyutu sonsuzdur. Öyleyse M sonlu bölüm Goldie boyutlu değildir.

Önerme 4.1. M bir sonlu üretilmiş modül olsun. M'nin bütün devirli altmodülleri sonlu boyutlu ise M de sonlu boyutludur [8].

İspat: M modülünün injektif bürümü $E(M)$ ile gösterilsin. M; $\{m_1, \dots, m_r\}$ tarafından üretilsin. Öyleyse $m_1R \leq M$ dir. Lemma 2.2.2 den $E(M) = E(m_1R) \oplus K_1$ olacak biçimde m_1R nin bir $E(m_1R)$ injektif bürümü vardır. Buradaki K_1 injektif olduğundan Lemma 2.2.2 gereği $K_1 = E(k_1R) \oplus K_2$ olur. Aynı işleme devam edilirse $E(M)$, sonlu boyutlu devirli modüllerin injektif bürümlerinin sonlu bir direkt toplamı olarak yazılır. Yani $E(M)$ sonlu boyutludur. Bundan dolayı M sonlu boyutludur.

5. SONLU BÖLÜM GOLDİE BOYUTLU MODÜLLERİN NOETHER MODÜLLER İLE KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde [2] makalesi detaylı olarak incelenmiştir.

Tanım 5.1. M bir modül ve I, M’nin bir altmodülü olsun. Eğer M’nin I’yı içeren altmodüllerinin kesişimi V için $V \neq I$ ise I’ya (subdirectly irreducible) SDI denir. Buna denk olarak $V/_I$, $M/_I$’nın basit büyük sokuludur [2].

Teorem 5.1. (Birkoff ’un Teoremi) Eğer M bir modül ve N, M’den farklı bir altmodül ise $M/_N$’nin altmodüllerinin her x elemanı için M’nin x’i içermeyen $N \subseteq N_X$ maksimal altmodülü vardır. Ayrıca N_X ; SDI dır ve N; N_X altmodüllerinin kesişimidir [20].

Önerme 5.1. Bir M modülünün noether olması için gerek ve yeter koşul M’nin her homomorfik görüntüsünün sonlu düzgün boyutlu bir maksimal modül olmasıdır [3].

Teorem 5.2. M modülünün noether olması için gerek ve yeter koşul M sonlu bölüm Goldie boyutlu olması ve SDI altmodüllerinin artan zincir şartını sağlamasıdır [2].

İspat: Gerek şart Önerme 5.1. den açıktır. M noether ise M’nin bölüm modülleri sonlu boyutludur.

Yeter şart için M'nin noether olmadığını kabul edelim. Eğer M sonlu bölüm Goldie boyutlu ise Teorem 4.1 gereği her altmodül A için sonlu üretilmiş bir altmodül S vardır. Öyle ki $\frac{A}{S}$ maksimal altmodüle sahip değildir. Yani $rad\left(\frac{A}{S}\right) = \frac{A}{S}$ dir.

M noether olmadığından $A \neq S$ seçebiliriz. Çünkü M'nin her A altmodülü sonlu üretilmiş olmak zorunda değildir. $x \in A/_S$ seçelim ve B, A'nın x'i içermeyen bir altmodülü ve $S \subseteq B$ maksimal altmodülü olsun. Burada $x \notin B$ dir. Birkoff'un Teoreminden S, B altmodüllerinin kesişimidir ve B, SDI dır.

Bu işlemleri M modülünde tekrar edelim. B sonlu üretilmiş altmodül idi. $B_1 = B + xR \supseteq B$, A'nın x_1'i içermeyen altmodülü olsun. Buradan $x_1 \notin B_1$ dir. B, B_1 altmodüllerinin kesişimidir ve B_1 , SDI dır. Tümevarımla, SDI altmodüllerinin sonsuz artan zincirini elde ederiz. Bu sonuç kabul ile çelişir. O halde M noetherdir.

Örnek 5.1. M bir modül olsun. M'nin altmodüllerinin kümesi kapsama bağıntısına göre bir zincir ise M'ye bir zincir modül denir. Bu durumda M'nin her I altmodülü indirgenemez olur. Yani $I \subset A$ ve $I \subset B$ altmodülleri için $A \cap B \neq I$. Buna denk olarak $M/_I$ düzgündür. O halde $M/_I$' nın Goldie boyutu 1 dir [2].

Örnek 5.2. Birkhoff'un Teoremine göre M'nin kendisinden farklı her I altmodülü SDI altmodüllerinin bir kesişimidir. Yani $x \in M/_I$ ve $x \notin I_x$ olacak şekilde $I_x \supset I$ maksimal altmodülü vardır. Buradaki I_x, SDI dır ve I; $I_x$lerin kesişimidir. Zincir modül tanımından $I_1 \supset I_2$ iki modül arasında bir SDI altmodülü vardır. Böylece M'nin SDI altmodüllerinin artan zincir şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul M'nin Noether olmasıdır [2].

Örnek 5.3. R bir halka ve $S \subseteq R$ bir cisim olsun öyle ki $dim_S R = \infty$. $T = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & S \end{pmatrix}$ üst üçgensel matris halkasını alalım. Teorem 2.3.1'den T sol artindir fakat sağ noether değildir. Şimdi $udim({}_T T) = 2$ ve $udim(T_T) = \infty$ olduğunu gösterelim. $1 < i < \infty$ olmak üzere $\oplus V_i$, R_S sağ S-modülünün sıfırdan farklı S-altmodüllerinin sonsuz bir direkt toplamı olsun. T, her $\begin{pmatrix} 0 & V_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sıfırdan farklı sağ idealinin $\oplus \begin{pmatrix} 0 & V_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sonsuz direkt toplamını içerir. Bundan dolayı $udim(T_T) = \infty$ olur. T'nin Jacobson radikali $J(T) = rad(T) = \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\frac{T}{radT} \cong \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \cong R \times S$ dir. $T \to R \times S$ projeksiyon dönüşümü aracılığıyla R ve S üzerine T, R_T ve S_T iki basit sağ modüle sahiptir.

$$T_T \to S_T\ ,\ \begin{pmatrix} r & r' \\ 0 & s \end{pmatrix} \longmapsto s$$

Projeksiyon dönüşümü çekirdeği $m = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olan bir T-epimorfizmdir. Buradaki toplananlar T'nin her iki sol ideali R sağ T-modülüne izomorf olduğu kolayca görülür. Bundan dolayı eğer $m \leq_e {}_T T$ olduğunu gösterebilirsek $udim({}_T T) = 2$ olduğunu söyleriz. Her $\begin{pmatrix} r & r' \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $s \neq 0$ için $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & r' \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in m \backslash \{0\}$ olduğu için Lemma 2.1.1 den $m \leq_e {}_T T$ olur. O halde $udim({}_T T) = 2$ dir [18].

KAYNAKLAR

[1] Faith C. , 1967, ‘Lectures on injective modules and quotient rings’, Springer LNM 49.

[2] Faith C. , 1999, ‘Quotient Finite Dimensional Modules With ACC on Subdirectly İrreducible Submodules are Noetherian’, Communications in Algebra, 27.4, 1807-1810.

[3] Dung N.V. , Huynh D.V. , Smith P.F. , Wisbauer R. , 1994, ‘Extending Modules’, Pitman Research Notes in Mathematics Series, New York, NY 10158, first published.

[4] Goldie A.W. ,1960, ‘Semi-prime rings with maximum condition’, Proc London Math. Soc. (3) 10, 201-220.

[5] Goldie A.W. ,1958, ‘The structure of prime rings under ascending chain conditions’, Proc London Math. Soc. (3) 8, 589-608.

[6] Grzeszczuk P. and Puczylowski E.R. , 1984, ‘On Goldie and dual Goldie dimensions’, Pure Appl. Algebra 31, 47-54.

[7] Berktaş M.K. , 2015, ‘On objects with a semilocal endomorphism rings in finitely accessible additive categories’, Agebras and Representation Theory, 18: 1389-1393.

[8] Camillo V.P. , 1977, ‘Modules Whose Quotients Have Finite Goldie Dimension’, Pasific Journal of Mathematics, Vol.69, No.2.

[9] Facchini A. , Herbera D., 2005, ‘Local Morphisms and Modules With a Semilocal Endomorphism Ring’ , Algebras and Representation Theory, Springer Science.

[10] Alizade R. ,1999, ‘Homoloji Cebire Giriş’, Yaşar University, January

[11] Pancar A. , Nişancı Türkmen B. 2014. ‘İnjektif Modüllere Giriş’, Pegem Akademi, Ankara.

[12] Anderson F. W. , Fuller K.R. 1992. ‘Rings and Categories of Modules’. Graduate Texts in Math. , No:13, Springer Verlag, New York.

[13] Robert W. 1991 ‘Foundations of Module and Ring Theory’, Gordon and Breach Science Publishers, Phildelphie.

[14] Kasch, F. 1982. ‘Modules and Rings’ Academic Press, London Mathematical Society Monograph no:17.

[15] Tercan A. , Kara Y. 2015. ‘Modül ve Halka Teori Latis Teorik Yaklaşımlar’ , Efil Yayınevi, Ankara, sayfa 36, Problem 1.6.7.

[16] Lam T.Y. 1942. ‘ A First Course in Noncommutative Rings’, Springer Verlag, New York.

[17] Lam T.Y. 1998. ‘Lectures on Modules and Rings’. Graduate Texts in Math. , No:13, Springer Verlag, New York.

[18] Lam T.Y. 2000 ‘Exercises in Modules and Rings’, Springer Verlag, New York

[19] Yaşar R., 2015, ‘PI-Extending Modüllerin Dik Toplananları üzerine’, Doktora tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hacettepe Üniversitesi.

[20] Faith C. , 2004, ‘Rings and Things and a Fine Array Twentieth Century Associative Algebra’ , Mathematical Surveys and Monographs, Volume 65.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BAYKAL, Kübra
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 29.08.1992 Uşak
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 545 275 33 92
e-mail	: ayvaz.kubra@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ege Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2015
Lise	Uşak Lisesi	2010

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Kitap okumak, Bilgisayar teknolojileri, Yüzme