T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİK KONOİDİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEHER KURŞUNCU COŞKUN

ARALIK 2018
UŞAK

T.C
UŞAK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİK KONOİDİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEHER KURŞUNCU COŞKUN

UŞAK 2018

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Seher KURŞUNCU COŞKUN

DİK KONOİD'İN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Seher KURŞUNCU COŞKUN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2018

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde, 3 boyutlu öklid uzayında yüzeyler teorisi ile ilgili temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu öklid uzayında dik konoid yüzeyi tanımlandı. Dik konoid yüzeyinin birinci ve ikinci esas formlarının katsayıları bulundu. Birinci ve ikinci temel form katsayıları kullanılarak, dik konoid yüzeyinin Gauss, ortalama, ikinci Gauss ve ikinci ortalama eğrilikleri hesaplandı. Ayrıca dik konoid yüzeyinin eğriliklerine göre dik konoid yüzeyinin açılabilir ve minimal olması için gerek ve yeter şartlar verildi.

Dördüncü bölümde, 3-boyutlu öklid uzayında, dik konoid yüzeyinin Gauss eğriliği K, ikinci Gauss eğriliği K_{II},ortalama eğriliği H ve ikinci ortalama eğirliği H_{II} ve $\{A,B\}=\{K,K_{II},H,H_{II}\}$ olmak üzere $\Phi(A,B)=0$ bağıntısını sağlayan Lineer Weingarten dik konoid yüzeyi sınıflandırıldı. Ayrıca a,b ve c sabit sayılar olmak üzere, $aA+bB=c$ bağıntısını sağlayan dik konoid yüzeyi araştırıldı.

Bilim Kodu : 403.02.01

Anahtar Kelimeler : Dik Konoid, Yüzeyler Teorisi, Gauss eğriliği, Minimal yüzey, Ortalama eğrilik, İkinci Gauss Eğriliği, İkinci Ortalama Eğrilik, Lineer Weingarten Dik Konoid.

Sayfa Adedi : 31

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN

ON THE GEOMETRY OF RIGHT CONOID

(M.Sc. Thesis)

Seher KURSUNCU COSKUN

UNIVERSITY OF USAK
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
December 2018

ABSTRACT

The first chapter is devoted to the introduction section and provides a general knowledge of literature.

In the second chapter, basic concepts for theory of surfaces in Euclidean 3-space are given.

In the third chapter, the surface of right conoid is defined, then the coefficients of the first and the second fundamental forms of right conoid are obtained. By using the coefficients of the first and the second fundamental forms of right conoid; the Gaussian, the second Gaussian, the mean and the second mean curvatures are calculated. Furtheremore, necessary and sufficient conditions for right conoid, being developable (flat) and minimal in terms of the curvatures of right conoid are given.

In the fourth chapter, Weingarten right conoid in Euclidean 3-space that satisfying the condition $\Phi(A,B)=0$ are classified,where a,b and c are constants, the Gaussian curvature K, the second Gaussian curvature K_{II}, the mean curvature H, the second mean curvature H_{II} and $\{A,B\}=\{K,K_{II},H,H_{II}\}$. In addition, Linear Weingarten right conoid in Euclidean 3-space satisfying the condition $aA+bB=c$ are investigated.

Science Code : 403.02.01

Keywords : Right Conoid, Theory of Surfaces, Gaussian Curvature, Minimal Surface, Mean Curvature,The Second Gaussian Curvature, The Second Mean Curvature, Linear Weingarten Right Conoid.

Page Number : 31

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat Kemal KARACAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması, araştırılması, yapılması aşamasında görüş, düşünce, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Murat Kemal KARACAN'a, teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren, sabreden, her koşulda destek olan, hissettirdiği sonsuz güven için sevgili eşim Ali COŞKUN'a, teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\boldsymbol{V}$	Reel vektör uzayı
$\times$	Vektörel çarpım
$\boldsymbol{\alpha}$	Eğri
$\boldsymbol{M}$	Yüzey
$<,>$	Öklid iç çarpımı
$\boldsymbol{K}$	Gauss eğriliği
$\boldsymbol{H}$	Ortalama eğriliği
$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$	Birinci temel formun katsayıları
$\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$	İkinci temel formun katsayıları
$\boldsymbol{S}$	Şekil operatörü
$\boldsymbol{H_{II}}, \boldsymbol{K_{II}}$	İkinci Ortalama ve ikinci Gauss eğrilikleri
$\boldsymbol{E^n}$	n- boyutlu Öklid uzay
$\boldsymbol{E^3}$	3- boyutlu Öklid uzay
$\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}$	Asli eğrilikler

1. GİRİŞ

Bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesiyle oluşturduğu yüzeye regle yüzey denir.

Öklid uzayında bir M yüzeyinin sınıflandırılmasında yüzeyin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K önemli yere sahiptir. Örnek verecek olursak; Gauss eğriliği ,yüzeyin her bir noktasında “0” ise yüzey bir düzlem veya düzlem parçasıdır. Benzer şekilde; ortalama eğrilik , yüzeyin her bir noktasında “0” ise yüzey bir minimal yüzeydir.

Weingarten yüzeyleri yüzey teorisinde çok önemlidir. Yüzeyin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H arasında $W(K,H) = 0$ veya yüzeyin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında $U(k_1,k_2) = 0$ olacak biçimde bir bağıntı varsa yüzeye Weingarten yüzeyi denir. Bu yüzeyler ilk olarak Weingarten tarafından 1861 ve 1863 yıllarında tanımlanmıştır. Weingarten, çalışmalarında bir dönel yüzeye izometrik olan tüm yüzeylerin sınıflarını vererek bu alanda önemli bir ilerleme kaydetmiştir. Bu nedenle sonraki yıllarda sabit Gauss eğrilikli veya sabit ortalama eğrilikli yüzeyler Weingarten yüzeyleri olarak adlandırılmıştır. Sonraki yıllarda Weingarten yüzeylerine ait ilk çalışmalar 1945 de Chen, 1951 de Hopf tarafından yapılmıştır. Daha yakın tarihe bakacak olursak 2003 de Galvez ve 2005 de Kühnel çalışmalara devam etmiştir. Brunt ve Grant ın 1996 yılında yapmış olduğu çalışmada ise Weingarten yüzeylerinin bilgisayar destekli uygulamaları yer almaktadır [3].

D.W. Yoon 3 boyutlu Öklid uzayında regle yüzeylerin ikinci Gauss eğriliğini, Gauss ve ortalama eğriliklerine bağlı olarak elde etti. Özel olarak helikoid yüzeyi için $K_{II} = 0$ olması için gerek ve yeter şartın yüzeyin minimal olması gerektiğini gösterdi ($H = 0$). Ayrıca $K_{II} = H$ olması için gerek ve yeter şartın $K_{II} = H = 0$ olduğunu gösterdi. Bununla beraber Dik konoid yüzeyinin $K_{II} = 2H$ eşitliğini sağladığını gösterdi [8].

Ayrıca Yoon, 3 boyutlu Minkowski uzayında açılamayan regle yüzeyler için

$$aK_{II} + bH = \text{sabit},\ 2a - b \neq 0$$

$$aH + bK = sabit, a \neq 0$$

$$aK_{II} + bK = sabit, a \neq 0$$

olduğunu gösterdi [9].

Wijard Sodsiri, 3- boyutlu Minkowski uzayında açılamayan regle yüzeyler $K_{II} + H = 0$ ve $aK_{II} + bH = c$, $2a - b \neq 0$ lineer weingarten yüzeyi olduğunu gösterdi. Bununla beraber $aK_{II} + bH + c \neq d$, $2a - b \neq 0$ eşitliğini sağladığını gösterdi. Ayrıca Minkowski 3-uzayında, açılamayan regle yüzeylere örnek olarak Dik konoid yüzeylerini tanımladı. Dik konoid yüzeylerinin Gauss, ikinci Gauss, ortalama ve ikinci ortalama eğriliklerini buldu [10].

Dik Konoid yüzeyi özel bir regle yüzeydir. 3- Boyutlu Öklid uzayında bu konu hakkında çalışma yapılmamıştır

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında, yüzeylerin diferensiyel geometrisi için gerekli olan temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1. Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V 'de

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR$$

$$(\alpha,\beta) \to \langle \alpha,\beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \quad \begin{cases} \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \end{cases}$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanırsa, A afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve E^n ile gösterilir [1].

Tanım 2.2.

$$\begin{aligned} \times : R^3 \times R^3 &\to R^3 \\ (\alpha,\beta) &\to \alpha \times \beta \end{aligned}$$

Şeklinde tanımlı "$\times$" iç işlemine **vektörel çarpım işlemi** denir ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nın **vektörel çarpımı** denir [1].

Teorem 2.1. $\alpha, \beta \in R^3$ olmak üzere

$$\alpha \times \beta = \sum_{i=!}^{n} \det(e_i, \alpha, \beta) e_i$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.3. V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde aşağıdaki aksiyomları ile tanımlanan dönüşüme **iç çarpım** denir. $\langle , \rangle : V \times V \to R$ olmak üzere

(i) Simetri aksiyomu

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle \quad \forall\, \alpha, \beta \in V$$

(ii) Bilineerlik aksiyomu

$$\langle c\alpha, \beta \rangle = c\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, c\beta \rangle \;\; \forall c \in R \;\; \forall\, \alpha, \beta \in V$$

$$\langle\, \alpha_1 + \alpha_2\,, \beta\, \rangle = \langle\, \alpha_1, \beta \rangle = \langle\, \alpha_2, \beta \rangle \quad \forall\; \alpha_1, \alpha_2\,, \beta \in V$$

$$\langle \alpha,\; \beta_1 + \beta_2 \,\rangle = \langle \alpha,\; \beta_1 \rangle = \langle \alpha,\; \beta_2 \rangle \quad \forall\, \alpha,\; \beta_1, \beta_2 \in V$$

(iii) Pozitif tanımlılık aksiyomu

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 \;\; \forall\, \alpha \in V$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \;\; \alpha = \vec{0}$$

[2].

Tanım 2.4. V bir iç çarpım uzayı ve $\alpha \in V$ olsun. α vektörünün normu $\|\alpha\|$ olmak üzere α vektörünün $\frac{1}{\|\alpha\|}$ skaları ile çarpılmışına α'nın **normlanmışı** denir ve $\alpha_0 = \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$ ile gösterilir [2] .

Tanım 2.5. $I \subseteq R$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$$\begin{aligned} \alpha : I &\to E^n \\ t &\to \alpha(t) \end{aligned}$$

şeklindeki α'ya **eğri** denir. $I \subseteq R$ aralığına α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α eğrisinin parametresi denir [1].

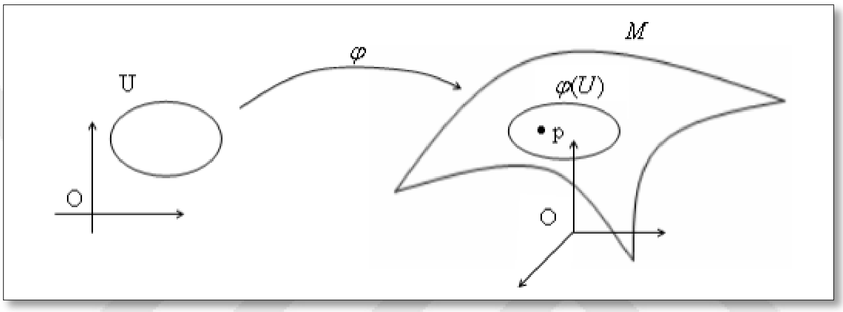
Tanım 2.6. $M \subset R$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\begin{aligned} \|\alpha'\| : I &\to R \\ t &\to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\|\alpha'\|$ fonksiyonuna M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre **skalar hız fonksiyonu** ve $\|\alpha'(t)\|$ reel sayısına da M'nin (I, α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki **skalar hızı** denir [1].

Tanım 2.7. M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer, $\forall x \in I$ için $\|\alpha'(x)\| = 1$ ise M eğrisi α'ya göre **birim hızlı eğri** denir. Bu durumda, eğrinin $x \in I$ parametresine **yay parametresi** adı verilir [1].

Tanım 2.8. U , R^2 uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere, $\varphi : U \to R^3$, düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, R^3 uzayında bir basit yüzey denir. M , R^3 uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, R^3 uzayında bir **yüzey** denir. (Şekil 2.1) [3].



Şekil 2.1 Yüzey

Tanım 2.9. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ boyutlu yüzeye **hiperyüzey** adı verilir [1].

Tanım 2.10. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye **regüler eğri** denir [1].

Tanım 2.11. $M \subset R^3$ regüler bir yüzey için birim normalini U ile gösterirsek

$$U(u, v) = \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|}(u, v) \tag{2.1}$$

şeklindedir ve $(u, v) \in R^3$ noktalarında $M_u \times M_v$ sıfırdan farklıdır [1].

Tanım 2.12. $M : U \to R^3$ bir yüzey ve $E, F, G : U \to R$ de tanımlı olmak üzere,

$$E = \langle M_u, M_u \rangle \tag{2.2}$$

$$F = \langle M_u \, , \, M_v \rangle \tag{2.3}$$

$$G = \langle M_v , \, M_v \rangle \tag{2.4}$$

dir.

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

M yüzeyinin Riemann metriği ya da birinci temel formu denir. Buradaki E, F, G; M in birinci temel formunun katsayılarıdır [1].

Tanım 2.13. $M : U \to R^3$ bir yüzey, U yüzeyin birim normali ve $l, m, n : U \to R$ fonksiyonlarını tanımlarsak

$$l = \langle M_{uu} \, , U \rangle \tag{2.5}$$

$$m = \langle M_{uv} \, , U \rangle \tag{2.6}$$

$$n = \langle M_{vv} \, , U \rangle \tag{2.7}$$

dir.

$$II = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2$$

M yüzeyinin ikinci temel formu denir. Buradaki l, m, n; M nin ikinci temel formunun katsayılarıdır [1].

Tanım 2.14. E^n 'in bir hiperyüzeyi M ve M 'nin birim normal vektör alanı U verilsin. E^n 'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için $S(X) = D_X U$ şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde **şekil operatörü** veya M 'nin **Weingarten dönüşümü** denir [1].

Tanım 2.15. M yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları E, F, G ve ikinci temel formunun katsayıları l, m, n olmak üzere yüzeyin şekil operatörü matrisi S

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} Gl - Fm & Em - Fl \\ Gm - Fn & En - Fm \end{vmatrix}$$

şeklindedir [1].

Tanım 2.16. R^3 de regüler bir yüzey M olsun. M yüzeyinin **Gauss eğriliği** K, **Ortalama eğriliği** H ve $K,H:M\rightarrow R$ olmak üzere sırasıyla

$$K(P)=\det(S(P))$$

ve

$$H(P)=\frac{1}{2}iz(S(P))$$

şeklinde tanımlanır [4].

Teorem 2.2. $M:U\rightarrow R^3$ bir regüler yüzey olsun. M in Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği formülleri;

$$K=\frac{l\,n-m^2}{E\,G-F^2} \tag{2.8}$$

ve

$$H=\frac{G\,l+E\,n-2\,F\,m}{2(EG-F^2)} \tag{2.9}$$

dir. l,m,n; M 'in ikinci temel formunun katsayıları ve E,F,G; M 'in birinci temel formunun katsayılarıdır [1].

Teorem 2.3. $M:U\rightarrow R^3$ bir regüler yüzey olsun. M in ikinci Gauss eğriliği ve ikinci ortalama eğriliği formülleri;

$$K_{II}=\frac{1}{(|ln|-m^2)^2}\left(\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}l_{vv}+m_{uv}-\frac{1}{2}n_{uu} & \frac{1}{2}l_u m_u & -\frac{1}{2}l_v\\ m_v-\frac{1}{2}n_u & l & m\\ \frac{1}{2}n_v & m & n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}l_v & \frac{1}{2}n_v\\ \frac{1}{2}l_v & l & m\\ \frac{1}{2}n_u & m & n\end{vmatrix}\right) \tag{2.10}$$

ve

$$H_{II}=H-\frac{1}{2\sqrt{|\det(II)|}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial u_i}\left[\sqrt{|\det(II)|}h_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(ln\sqrt{K}\right)\right] \tag{2.11}$$

dir. Burada $\mathrm{i,j} \in \{1,2\}$ ve h_{ij} ler ikinci temel formun katsayıları yani

$h_{11} = l\ ,\ \ h_{12} = m\ \ , h_{22} = n$ ve u^1, u^2 ise u ve v değişkenleridir [5].

Teorem 2.4. $M \subset R^3$ regüler yüzeyinin, K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği ile asli eğrilikleri k_1 ve k_2 arasında

$$K = k_1 k_2$$

ve

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Sonuç olarak

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

olur. Buradan da

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

ve

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

dır [1].

Tanım 2.17. R^3te regüler bir yüzey M ve M 'nin herhangi bir P noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(P)$ ve $k_2(P)$ olmak üzere $k_1(P) = k_2(P)$ ise, P 'ye M yüzeyinin bir **umbilik noktası** denir [4].

Tanım 2.18. E^{n+1} de bir M hiperyüzeyi üzerindeki bir eğrinin her noktasındaki ivme vektörü M 'ye ortogonal ise bu eğriye **geodezik** adı verilir. Başka bir ifadeyle $M \subset R^3$ bir yüzey ve $\alpha : (a,b) \to M$ bir eğri olsun. α'' ivme vektörünün teğetsel bileşeni yoksa α eğrisine **geodezik** denir [1,4].

Tanım 2.19. $I \subset R$ açık alt aralığı için , R^3 deki bir Π düzleminin içindeki bir eğri

$\gamma: I \subset R \rightarrow \Pi$ ve bu düzlemde γ eğrisini kesmeyen bir doğru l olsun. γ eğrisinin l doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan yüzeye **dönel yüzey** denir. l doğrusuna dönel yüzeyin ekseni, γ eğrisine de **üreteç eğrisi** denir. Yani, bir düzlem eğrisinin, kendini kesmeyen bir doğru (dönme ekseni) etrafında kaymadan dönmesi ile oluşan yüzeye **dönel yüzey** denir.

Üreteç eğrisi $\alpha(u) = \big(u, 0, g(u)\big)$ ve dönme ekseni z olarak alınırsa, u eksenden uzaklığı, v boylamı verilen nokta ve eksenden geçen düzlemle xoz düzlemi arasındaki açıyı göstermek üzere, yüzeyin standart parametrik denklemi,

$$M\ (u, v) = \big(ucosv\ , usinv\ , g(u)\big)$$

ile verilir [3].

Eğer $\alpha(u) = \big(f(u), 0, g(u)\big)$ alınırsa bu eğrinin z ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin standart parametrik denklemi

$$M\ (u, v) = \big(f(u)cosv\ , f(u)sinv\ , g(u)\big)$$

şeklindedir. Burada v , z $-$ekseni etrafında dönme açısıdır. Eğer α birim hızlı bir eğri ise

$$f'^2 + g'^2 = 1$$

dir.

Tanım 2.20. $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin.$\forall\, p \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir [1].

Regle yüzeyi kısaca bir doğrunun bir eğriye dayanarak hareket etmesiyle oluşturduğu yüzey olarak ta tanımlayabiliriz.

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$\alpha : I \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

eğrisi seçilir ve bu eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi adı verilir. M regle yüzeyinin α dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişken bir nokta β ise

$$\beta : R \to M$$

$$v \to \beta(v) = \alpha(t) + va(t)$$

şeklindedir. Burada $\alpha(t) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\right)$ birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Böylece regle yüzey

$$M: I \times R \to E^3$$

$$M(t,v) = \alpha(t) + va(t)$$

dönüşümü ile tanımlanır [6].

Tanım 2.21. $M: [0,2\pi] \times (a,b) \to R^3$ yüzeyi

$$M(u,v) = (\varphi(v)cosu\,, \varphi(v)sinu\,, \psi(v)\,)$$

M dönel yüzeyinin standart parametrizasyonu denir [4].

Tanım 2.22. $M(u,v)$ bir yüzey, K ve H 'da sırası ile M 'nin Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere, yüzeyin eğrilikleri

$$\Phi(K,H) = \det\begin{pmatrix} K_u & K_v \\ H_u & H_v \end{pmatrix} = 0$$

Jacobi denklemini sağlıyorsa bu yüzeye $\{K,H\}$-**Weingarten yüzeyi** denir. Buradan Weingarten yüzeyi olması için

$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

denklemini sağlaması gerekir [4].

Tanım 2.23. $M(u,v)$ bir yüzey, K ve H da sırası ile M nin Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere, yüzeyin eğrilikleri

$$aK + bH - c = 0$$

denklemini sağlıyorsa bu yüzeye **Lineer Weingarten yüzeyi** denir [4].

Tanım 2.24. $M \subset R^3$ regüler bir yüzey ve M'ye λ (pozitif ya da negatif olabilir) uzaklıktaki paralel yüzeyi $\overline{M}$ olmak üzere

$$\overline{M}(u,v) = M(u,v) + \lambda U(u,v)$$

şeklindedir. Burada U, M yüzeyinin birim normalidir [4].

Lemma 2.1. $M \subset R^3$ regüler bir yüzey ve M yüzeyine λ birim uzaklıktaki paralel yüzeyi $\overline{M}$ olsun. M yüzeyinin şekil operatörü matrisi S ve $\overline{M}$ yüzeyinin şekil operatörü matrisi $\overline{S}$, asli eğrilikleri $\overline{k}_1$ ve $\overline{k}_2$, Gauss eğriliği $\overline{K}$ ve ortalama eğriliği $\overline{H}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i. $\overline{S} = S(I - \lambda S)^{-1}$

ii. $\overline{k}_i = \dfrac{k_i}{1 - \lambda k_i}$

iii. $\overline{K} = \dfrac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$

iv. $\overline{H} = \dfrac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}$

şeklindedir [4].

Tanım 2.25. $M \subset R^3$ regüler bir yüzey olmak üzere

$$M_u(u_0, v_0) \times M_v(u_0, v_0) = 0$$

sağlayan (u_0, v_0) noktalarına yüzeyin singüler noktaları denir [7].

Örnek 2.1. Birim hızlı düzlemsel

$$\alpha = \big(f(u), 0, g(u)\big) \,,$$
$$(f^{'})^2 + (g^{'})^2 = 1$$

eğrisi z ekseni etrafında döndürülürse, diğer bir deyişle aşağıdaki formun bir parametrizasyonunu kabul ederse, dönel yüzey olarak adlandırılır:

$$M(u,v) = (f(u)\ cosv\ , f(u)\ sinv, g(u)).$$

Bu dönel yüzeyin H ortalama eğrilik fonksiyonunu ve K Gauss eğriliğini inceleyelim.

Sırayla u ve v değişkenlerine göre kısmi türevlerini alalım.

$$M_u(u,v) = (f^{'}cos\ v, f^{'}sin\ v, g')$$

$$M_v(u,v) = (-f\ sinv, fcosv, 0)$$

$$M_{uu}(u,v) = (f^{''}\ cosv, f^{''}\ sinv, g'')$$

$$M_{uv}(u,v) = (-f^{'}sinv, f^{'}cosv, 0)$$

$$M_{vv}(u,v) = (-f\ cosv, -f\ sinv, 0)$$

elde edilir.

Şimdi yüzeyin birim normal vektörünü hesaplayalım. $M_u(u,v)$ ve $M_v(u,v)$eşitliklerine vektörel çarpım uygulanırsa;

$$M_u \times M_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ f^{'}cos\ v & f^{'}sin\ v & g' \\ -f\ sinv & f\ cosv & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-g^{'}fcosv, -g^{'}fsinv, ff')$$

olmak üzere,

$$U = \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|} = \frac{1}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}\ (-g^{'}cosv, -g^{'}sinv, f')$$

şeklinde bulunur.

Şimdi birinci temel formun katsayıları olan E , F , G ifadelerini sırayla hesaplayalım.

$$E = \langle\ M_u, M_u\ \rangle$$

$$= \langle (f' \cos v, f' \sin v, g'), (f' \cos v, f' \sin v, g') \rangle$$

$$= (f')^2 + (g')^2 \ ,$$

$$F = \langle M_u \, , \, M_v \rangle$$

$$= \langle \ (f' \cos v, f' \sin v, g') \ , (-f \ sinv, fcosv, 0) \ \rangle$$

$$= 0 \ ,$$

$$G = \langle M_v, \ M_v \rangle$$

$$= \langle \ (-f \ sinv, fcosv, 0), (-f \ sinv, fcosv, 0) \ \rangle$$

$$= f^2.$$

Şimdi ise ikinci temel formun katsayıları olan l , m , n ifadelerini sırayla hesaplayabiliriz.

$$l = \langle M_{uu} \, , \ U \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \ (f' g'' - f'' g') \ ,$$

$$m = \langle M_{uv} \, , U \rangle$$

$$= \ \langle (-f' sinv, f' cosv, 0) \ , \ \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \ (-g' cosv, -g' sinv, f') \rangle$$

$$= 0 \ ,$$

$$n = \langle M_{vv} \, , U \rangle$$

$$= \langle (-f \ cosv, -f \ sinv, 0), \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \ (-g' cosv, -g' sinv, f') \rangle$$

$$= \frac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}.$$

Birinci ve ikinci temel form katsayılarını (2.8) ve (2.9) denklemlerinde yerine yazıp Teorem 2.6 yardımıyla

$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ ve $k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$ asli eğrilik fonksiyonlarını elde edebiliriz.

Sonuç olarak

$$k_1 = \frac{(-f''g' + f'g'')}{((f')^2 + (g')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$k_2 = \frac{g'}{f((f')^2 + (g')^2)^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde elde edilir. Kabul edelim ki eğri birim hızlı olsun. Bu takdirde

$(f')^2 + (g')^2 = 1$ dir. Böylece

$$k_1 = (-f''g' + f'g'')$$

$$k_2 = \frac{g'}{f} \tag{2.12}$$

bulunur. Şimdi $(f')^2 + (g')^2 = 1$ eşitliğinin her iki tarafının türevini alıp f'' ifadesini yalnız bırakalım.

$$f'f'' + g'g'' = 0$$

$$f'' = -\frac{g'g''}{f'}.$$

Bulduğumuz f'' eşitliğini $k_1 = (-f''g' + f'g'')$ de yerine yazacak olursak, yüzeyin birinci asli eğriliğinde

$$k_1 = -\frac{f''}{g'} \tag{2.13}$$

olarak bulunur. (2.12) ve (2.13) eşitlikleri kullanılarak, dönel yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliği

$$K = -\frac{f''}{f} \tag{2.14}$$

$$H = \frac{(fg')'}{(f^2)'} \tag{2.15}$$

ile verilir.

Artık K nın sabit ve 0 (sıfır) olma durumunu inceleyelim.Eğer $K = 0$ ise (2.14) den

$$-\frac{f''}{f} = 0$$

ve

$$f(u) = c_1 u + c_2$$

şeklinde bulunur. Şimdi K nın sabit olma durumunu inceleyelim. Kabul edelim ki

$K \neq 0$ ve $K < 0$ olsun bu takdirde (2.14) den

$$-\frac{f''}{f} = c \qquad (2.16)$$

ve (2.16) diferensiyel denkleminin çözümü

$$f(u) = c_1 cos\left(u\sqrt{c}\right) + c_2 sin\left(u\sqrt{c}\right)$$

olarak elde edilir.

$K > 0$ ise

$$f(u) = c_1 e^{u\sqrt{c}} + c_2 e^{-u\sqrt{c}}$$

şeklindedir.Şimdi de $H = 0$ olma durumunu inceleyelim.

$$H = \frac{(fg')'}{(f^2)'} = 0$$

$$(fg')' = 0$$

elde edilir. Buradan f ve g' fonksiyonlarının çarpımlarının sabit olması için f ve g' nin de sabit olması gerekir. Yani $f = c_1$ (sabit), $g = c_2 u + c_3$ şeklindedir.

3. DİK (RIGHT) KONOİD

Bu bölümde Dik (Right) Konoid regle yüzeyinin Öklid uzayında tanımı yapılacak. Ayrıca bu yüzeyin birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları hesaplanarak; Gauss eğriliği K, ortalama eğrilik H, ikinci gauss eğriliği K_{II} ve ikinci ortalama eğriliği H_{II} bulunacak ve bu eğrilik fonksiyonlarının yorumları yapılacaktır.

Tanım 3.1. Sabit bir doğruyu dik olarak kesen doğruların bir ailesinin ürettiği yüzeye Dik Konoid yüzeyi denir. Dik Konoid özel bir Regle yüzeydir.

3-boyutlu Öklid uzayında kartezyen koordinat sistemini kullanırsak ve Dik Konoid'in eksenini z alırsak, parametrik denklemi

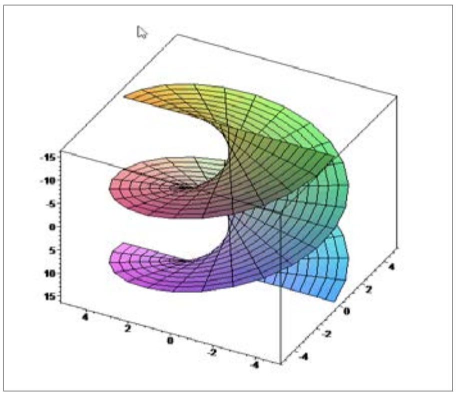
$$M(u,v) = (ucosv, usinv, g(v)) \tag{3.1}$$

şeklindedir. Çeşitli dik konoid yüzeyleri vardır.

1) Helikoid: Parametrik denklemi

$$M(u,v) = (ucosv, usinv, c_1 v + c_2)$$

şeklindedir. Grafiği aşağıdaki gibidir.

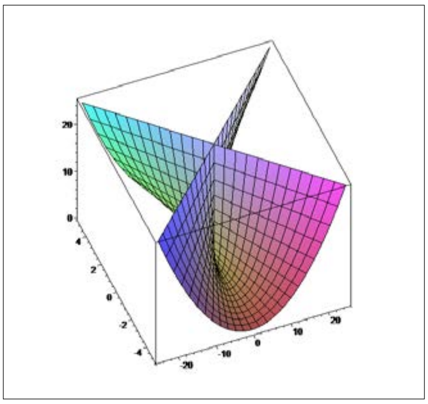


Şekil 3.1. Helikoid

2) Whitney Şemsiyesi (Whitney umbrella): Parametrik denklemi

$$M(u,v)=(uv,v,u^2)$$

şeklindedir. Grafiği aşağıdaki gibidir.

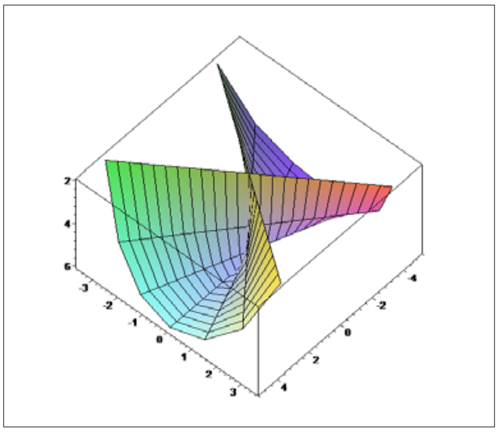


Şekil 3.2. Whitney Şemsiyesi

3) Wallis'in Koniksel Kenarı (Wallis's Conical Edge): Parametrik denklemi

$$M(u,v)=\left(vcosu\,,vsinu\,,c\sqrt{\,a^2-b^2cos^2u}\,\right)$$

ile verilir ve grafiği aşağıdaki gibidir.

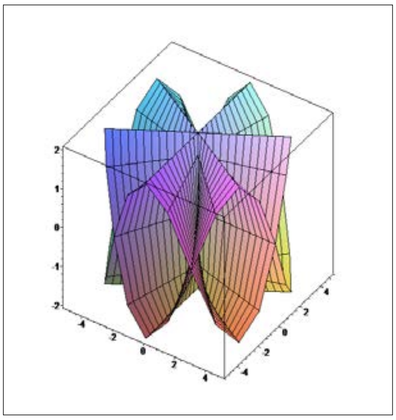


Şekil 3.3. Wallis'in Koniksel Kenarı

4) Plücker Konoidi (Plücker's Conoid): Parametrik denklemi

$$M(u,v)=\big(vcosu\,,vsinu\,,c\ sin(nu)\big)$$

ile verilir ve grafiği aşağıdaki gibidir.

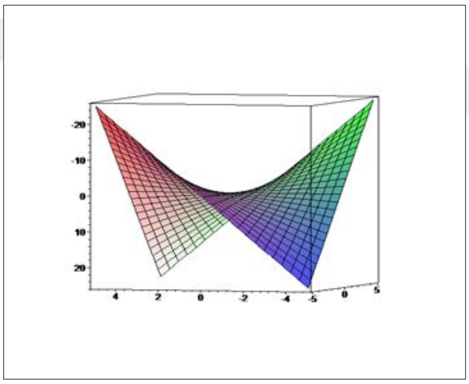


Şekil 3.4. Plücker Konoidi

5) Hiperbolik Paraboloid: Parametrik denklemi

$$M(u,v) = (v, \quad u, \quad uv)$$

ile verilir ve grafiği aşağıdaki gibidir



Şekil 3.5. Hiperbolik Paraboloid

[11].

3.1. Dik (Right) Konoidin Geometrik Özellikleri

Bu bölümde (3.1) ile verilen Dik Konoidin eğriliklerini hesaplayacağız.

(3.1) yüzeyinin u ve v değişkenlerine göre kısmi türevlerini alınırsa,

$$\left.\begin{aligned} M_u(u,v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\ M_v(u,v) &= \left(-u\, sinv, u\, cosv, g'(v)\right) \\ M_{uu}(u,v) &= (\,0,0,0\,) \\ M_{vv}(u,v) &= \left(-u\, cosv, -u\, sinv, g''(v)\right) \\ M_{uv}(u,v) &= (-sinv, cosv, 0) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

elde edilir.

Yüzeyin birim normal vektörü (3.2) denkleminden

$$M_u \times M_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ cosv & sinv & 0 \\ -u\, sinv & u\, cosv & g'(v) \end{vmatrix}$$

$$= \overrightarrow{e_1}\,\left(sinv\, g'(v) - 0.u\, cosv\right) - \overrightarrow{e_2}\left(cosv\, g'(v) - 0.(-u\, sinv)\right) + \overrightarrow{e_3}\left(u\, cosv^2 - (-u\, sinv^2)\right)$$

$$= (\, sinv\, g'(v)\,, -cosv\, g'(v)\,, u\,)$$

ve

$$\|M_u \times M_v\| = \sqrt{sin^2 v\,\left(g'(v)\right)^2 + cos^2 v\,\left(g'(v)\right)^2 \, + \, u^2}$$

$$= \sqrt{\left(g'(v)\right)^2 + u^2}$$

olmak üzere yüzeyin birim normal vektörü

$$U = \frac{1}{\sqrt{\left(g'(v)\right)^2 + u^2}}(\, sinv\, g'(v)\,, -cosv\, g'(v)\,, u\,) \qquad (3.3)$$

şeklinde elde edilir.

Yüzeyin birinci temel form katsayıları , (3.2) denkleminden ,

$$
\begin{aligned}
E &= \langle\, M_u, M_u \,\rangle \\
&= \langle\, (\, cos\ v, sin\ v, 0\,), (\, cos\ v, sin\ v, 0\,)\ \rangle \qquad (3.4) \\
&= 1\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= \langle M_u\ ,\ M_v \rangle \\
&= -u\ sinv\ cosv + u\ sinv\ cosv \qquad (3.5) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G &= \langle M_v,\ M_v \rangle \\
&= u^2 sin^2 v\ +\ u^2 cos^2 v + \left(g^{'}(v)\right)^2 \qquad (3.6) \\
&= \left(g^{'}(v)\right)^2 + u^2
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Yüzeyin ikinci temel formun katsayıları olan $l\ , m\ , n$ ifadelerini ise (3.2) denkleminden ,

$$
\begin{aligned}
l &= \langle M_{uu}\ ,\ U \rangle \\
&= 0 \qquad , \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= \langle M_{uv}\ , U \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(g^{'}(v)\right)^2 + u^2}}\ \left(-sin^2 v\ g^{'}(v) - cos^2 v\ g^{'}(v) + 0\ \right) \\
&= \frac{-g'(v)}{\sqrt{\left(g'(v)\right)^2 + u^2}} \qquad , \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= \langle M_{vv}\ , U \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(g^{'}(v)\right)^2 + u^2}} \left(-u\ sinv\ cosv\ g^{'}(u) + u\ sinv\ cosv\ g^{'}(v) + u\ g^{''}(v)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{u\, g''(v)}{\sqrt{\left(g'(v)\right)^2 + u^2}} \qquad (3.9)$$

şeklinde elde edilir.

Yüzeyin birinci ve ikinci temel form katsayıları (2.8) ve (2.9) da yerine yazılırsa , K Gauss ve H ortalama eğriliği

$$K = -\frac{\left(g'(v)\right)^2}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^2} \qquad (3.10)$$

$$H = \frac{u\, g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3.11)$$

şeklinde bulunur. Dik Konoid yüzeyinin K_{II} ikinci Gauss ve H_{II} ikinci ortalama eğriliği (2.3) teoreminden ,

$$K_{II} = \frac{u g''(v)}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3.12)$$

ve $H_{II} =$

$$-\frac{7 u g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (3.13)$$

şeklinde elde edilir.

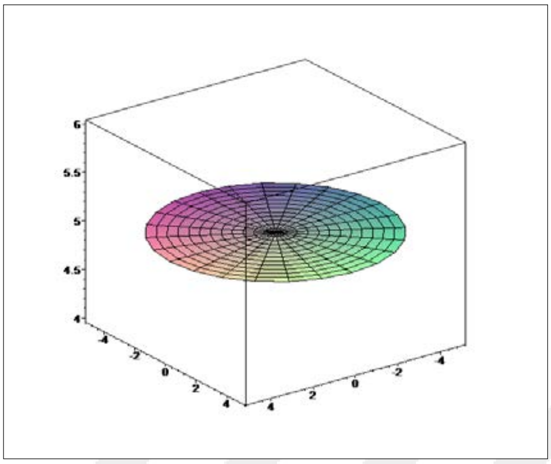
Teorem 3.1.1. $M(u,v) = (u\, cosv, u\, sinv\ , g(v))$ Dik Konoid yüzeyinin flat (düz, açılabilir) olması için $g(v)$ fonksiyonun sabit olması gerekir.

İspat: Dik Konoid yüzeyinin K Gauss eğriliği sıfır olsun. Bu takdirde (3.10) denkleminden

$\left(g'(v)\right)^2 = 0$ elde edilir. Bu ise $g(v) = c$ (sabit) olmasıdır. Buradan

$$M\ (u,v) = (u\ cosv, u\ sinv\ , c_1)$$

parametrik denklemi elde edilir. Bu ise bir düzlem olup grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.6. Düzlem

Teorem 3.1.2. Dik Konoid yüzeyinin minimal olması için g nin lineer yani $g(v) = c_1 v + c_2$ şeklinde olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $H = 0$ olsun. Bu takdirde (3.11) denkleminden

$$H = \frac{u\, g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \tag{3.14}$$

olmalıdır. (3.14) denkleminin 0 (sıfır) olması için $u\ g''(v) = 0$ olmalıdır.

$u \neq 0$ olduğundan $g''(v) = 0$ elde edilir. $g''(v) = 0$ ise

$$g(v) = c_1 v + c_2$$

elde edilir. O halde yüzeyin denklemi ;

$$M\ (u,v) = (u\ cosv, u\ sinv\ , c_1 v + c_2)$$

elde edilir. Bu ise bir helikoid yüzeyidir. (Şekil 3.1)

Teorem 3.1.3. Yüzeyin ikinci Gauss eğriliği $K_{II} = 0$ olması yani yüzeyin $K_{II} -$ flat (açılabilir) olması için g lineer yani $g(v) = c_1 v + c_2$ şeklinde bir helikoiddir.

İspat: Kabul edelim ki $K_{II} = 0$ olsun. Bu takdirde,

$$K_{II} = \frac{u g''(v)}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ise

$$u\, g''(v) = 0$$

elde edilir. Bu ise ,

$$g(v) = c_1 v + c_2$$

demektir.

Teorem 3.1.4. Yüzeyin ikinci ortalama eğriliği H_{II} =0 olması yani yüzeyin H_{II} -minimal olması için g nin lineer yani $g(v) = c_1 v + c_2$ şeklinde bir helikoiddir.

İspat: Kabul edelim ki H_{II} =0 olsun. Bu durumda,

$$H_{II} = -\frac{7u g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

ise

$$7\, u\, g''(v) = 0$$

sonucu elde edilir. Bu ise,

$$g(v) = c_1 v + c_2$$

demektir.

4. WEİNGARTEN DİK KONOİD

Bu bölümde Dik Konoid yüzeyinin $\{K, H\}$-Weingarten yüzeyi olma şartlarını inceleyeceğiz. Burada $\{A, B\} \in \{K, H, K_{II}, H_{II}\}$ dır. İkinci bölümde K, H, K_{II}, H_{II} Dik konoidin eğrilikleri aşağıdaki gibi bulunmuştu.

$$\left.\begin{aligned} K &= -\frac{\left(g'(v)\right)^2}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^2} \\ H &= \frac{u\,g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ K_{II} &= \frac{ug''(v)}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ H_{II} &= -\frac{7ug''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Şimdi ise sırasıyla

1. $\emptyset(K, H) = 0$ (4.2)

2. $\emptyset(K, K_{II}) = 0$ (4.3)

3. $\emptyset(K, H_{II}) = 0$ (4.4)

4. $\emptyset(H, H_{II}) = 0$ (4.5)

5. $\emptyset(H, K_{II}) = 0$ (4.6)

6. $\emptyset(K_{II}, H_{II}) = 0$ (4.7)

denklemlerini inceleyelim.

Teorem 4.1. K, H , K_{II} , H_{II} sırasıyla Dik Konoidin Gauss, ortalama, ikinci Gauss ve ikinci ortalama eğrilik fonksiyonları olsun. Eğer dik konoid yüzeyi $\{K,H\}$, $\{K,K_{II}\}$, $\{K,H_{II}\}$ -Weingarten yüzeyi ise $g(v)=c_1$ ve $g(v)=c_1v+c_2$ dir.

İspat: (4.2) , (4.3) , (4.4) denklemlerinden (4.1) yardımıyla,

$$\emptyset(K,H)=\emptyset(K,K_{II})=\emptyset(K,H_{II})=0$$

olması için

$$2u^2\left(g'(v)\left(g''(v)\right)^2-\left(g'(v)\right)^2g^{(3)}(v)\right)+\left(g'(v)\right)^3\left(g''(v)\right)^2=0 \tag{4.8}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. (4.8) denkleminin 0 (sıfır) olması için

$$g'(v)\left(\left(g''(v)\right)^2-g'(v)g^{(3)}(v)\right)=0 \tag{4.9}$$

ve

$$\left(g'(v)\right)^3\left(g''(v)\right)^2=0 \tag{4.10}$$

olmalıdır. (4.9) diferensiyel denkleminin çözümünden

$$g(v)=c_1$$

$$g(v)=c_1v+c_2$$

$$g(v)=c_1+c_2e^{c_3v}$$

elde edilir. (4.10) diferensiyel denkleminin çözümünden

$$g(v)=c_1$$

$$g(v)=c_1v+c_2$$

elde edilir. (4.8) denkleminin sıfır olması için (4.9) ve (4.10) denklemlerinin ortak çözümünden;

$$g(v)=c_1$$

$$g(v) = c_1 v + c_2$$

elde edilir. Bu ise Dik Konoid yüzeyinin ya düzlem ya da helikoid olmasıdır.

Teorem 4.2. K , H , K_{II} ve H_{II} sırasıyla Dik Konoid yüzeyinin Gauss , ortalama , ikinci Gauss ve ikinci ortalama eğrilikleri olmak üzere; dik konoid yüzeyi $\{H, H_{II}\}$, $\{H, K_{II}\}$, $\{K_{II}, H_{II}\}$ -Weingarten yüzeyidir.

İspat: Direk hesaplama ile $\emptyset(H, H_{II}) = \emptyset(H, K_{II}) = \emptyset(K_{II}, H_{II}) = 0$ elde edilir.

5. LİNEER WEİNGARTEN DİK KONOİD

Bu bölümde K, H , K_{II} ve H_{II} eğriliklerinin Lineer Weingarten yüzeyi olma şartlarını inceleyeceğiz. (4.1) eşitliklerini kullanarak $a, b, c \in R$ ve K , $H, K_{II}, H_{II} \neq 0$ olmak üzere

$$aA + bB = c \tag{5.1}$$

Lineer Weingarten olma şartını inceleyelim. Burada $\{A, B\} \in \{K , H, K_{II}, H_{II}\}$ yüzeyin eğrilik fonksiyonları için sırasıyla

1. $aK + bH = c$,

2. $aK + bK_{II} = c$,

3. $aH + bK_{II} = c$,

4. $aK + bH_{II} = c$

5. $aH + bH_{II} = c$,

6. $aK_{II} + bH_{II} = c$ denklemlerini inceleyelim.

Teorem 5.1. $\{K, H\}$ - Lineer Weingarten dik konoid yüzeyi yoktur.

İspat: K ve H eğriliklerini (5.1) de yerine yazarsak,

$$-\frac{a\left(g'(v)\right)^2}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^2} + \frac{bu\, g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} - c = 0$$

$$2a\left(g'(v)\right)^2 + 2c\left(u^2 + \left(g'(v)\right)^2\right)^2 - bu\sqrt{u^2 + \left(g'(v)\right)^2}g''(v) \ = 0 \qquad (5.2)$$

elde edilir. (5.2) denkleminin 0 (sıfır) olması için,

$$2a\left(g'(v)\right)^2 = 0 \qquad (5.3)$$

$$-bu\sqrt{u^2 + \left(g'(v)\right)^2}g''(v) \ = 0 \qquad (5.4)$$

$$2c\left(u^2 + \left(g'(v)\right)^2\right)^2 = 0 \qquad (5.5)$$

olması gerekir. (5.3) , (5.4) , (5.5) denklemlerinin aynı anda sıfır olması

$a = b = c = 0$ şartıyla gerçekleşir. Bu ise Lineer Weingarten kabulümüz ile çelişir.

Teorem 5.2. $\{K, K_{II}\}$ - Lineer Weingarten dik konoid yüzeyi yoktur.

İspat: K ve K_{II} eğriliklerini (5.1) de yerine yazarsak,

$$-\frac{a\left(g'(v)\right)^2}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^2} + \frac{bu\, g''(v)}{\left(\left(g'(v)\right)^2 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}} - c = 0$$

$$ag'(v)^2 + c(u^2 + g'(v)^2)^2 - bu\sqrt{u^2 + g'(v)^2}g''(v) \ = 0$$

$$a\left(g'(v)\right)^2 + c\left(u^2 + \left(g'(v)\right)^2\right)^2 - bu\sqrt{u^2 + \left(g'(v)\right)^2}g''(v) \ = 0 \qquad (5.6)$$

elde edilir. (4.6) denkleminin 0 (sıfır) olması için,

$$a\left(g'(v)\right)^2 = 0 \qquad (5.7)$$

$$-bu\sqrt{u^2 + \left(g'(v)\right)^2}g''(v) = 0 \qquad (5.8)$$

$$c\left(u^2+\left(g'(v)\right)^2\right)^2=0 \tag{5.9}$$

olması gerekir. (5.7) , (5.8) , (5.9) denklemlerinin aynı anda sıfır olması

$a=b=c=0$ şartıyla gerçekleşir. Bu ise Lineer Weingarten kabulümüz ile çelişir.

Teorem 5.3. K , H, K_{II} , H_{II} dik konoidin sırasıyla Gauss, ortalama, ikinci Gauss ve ikinci ortalama eğrilikleri olsun. Bu takdirde Lineer Weingarten dik konoid ise aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$H-\frac{1}{2}K_{II}=0 \quad \left(a=1, b=-\frac{1}{2}, c=0\ dır\right)$$

$$H+7H_{II}=0 \quad (a=1, b=7, c=0\ dır)$$

$$-7K_{II}-\frac{1}{2}H_{II}=0 \quad \left(a=-7, b=-\frac{1}{2}, c=0\ dır\right)$$

$$H_{II}+14K_{II}=0 \quad (a=1, b=14, c=0\ dır)$$

$$K-7H_{II}=0 \quad (a=1, b=-7, c=0\ dır)$$

İspat: $H-\frac{1}{2}K_{II}=0\ bağıntısını$ ispat edelim.

(4.1) denkleminden H ve K_{II} eğriliklerini yazabiliriz.

$$H-\frac{1}{2}K_{II}=\frac{u\,g''(v)}{2\left(\left(g'(v)\right)^2+u^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2}\frac{ug''(v)}{\left(\left(g'(v)\right)^2+u^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$H-\frac{1}{2}K_{II}=0$$

Görüldüğü üzere $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=0\ dır$ Diğer eşitlikler de benzer şekilde ispatlanır.

KAYNAKÇA

[1] Hacısalihoğlu, H. H**. ,** "Differensiyel Geometri" , *İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları*, Mat. No:2, Malatya, 1983.

[2] Hacısalihoğlu, H. H. "Lineer Cebir I. Cilt", *Ankara Üniversitesi Yayınları*, Ankara, 147-165 (2000).

[3] Sevil A. , 2010, "3-Boyutlu Öklid ve 3-Boyutlu Minkowski Uzaylarında Gauss Dönüşümü Noktasal 1-Tipli Olan Dönel Yüzeyler Üzerine" , Yüksek Lisans Tezi, *Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Kırıkkale, 1-5.

[4] Gray, A. "Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, *CRC Press*, Boca Raton, Florida, 1998.

[5] Dillen F., Sodsiri W., 2005, "Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space" , *Journal of Geom*etry 83 , 10-21.

[6] Demirtop Ekiz V. ,2005, "Konoidal Regle Yüzeyler Üzerine" , Yüksek Lisans Tezi, *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü* , Samsun, 3.

[7] Es H., Karacan M.K., Yaylı Y., 2000, "Singüler Points of Tubular Surface", *AMS Subject Classification:* 53A04,53A05.

[8] Yoon W. D. , 2007, "On Non-Developable Ruled Surfaces in Euclidean 3-spaces" , *Indian J. Pure appl. Math.* , 38 (4) : 281-290.

[9] Yoon W. D. , Kim Y.H., 2004, "Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces", *Journal of Geometry and Physics* 49: 89-100.

[10] Sodsiri W. , 2003 , " Ruled Linear Weingarten Surfaces In Minkowski 3-Space " *Soochow Journal of Mathematics* , Volume 29, No.4, pp. 435-443.

[11] Velimirovic L.S., Stankovic M.S. , Radivojevic G., 2002,"Modeling Conoid Surfaces", *UDC,*514.772.35(045), 692.1/.6.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Kurşuncu Coşkun, Seher

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 20.09.1986 Çal

Medeni hali : Evli

e-mail : seherkursuncu@hotmail.com

Eğitim

Tezsiz Yüksek Lisans : Muğla Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü – Ofm Alanlar Eğitimi (2008-2009)

Lisans : Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü (2004 - 2008)

İş Deneyimi

2013- …… : Uşak Alper Günbayram Anadolu Lisesi , Matematik Öğretmeni

2010 - 2013: Uşak Ulubey Ümmü Baykan Anadolu İmam Hatip Lisesi, Matematik Öğretmeni

2009 /Eylül – 2010/ Ocak : Iğdır Ticaret Meslek Lisesi , Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil: İngilizce