T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA KESİRLİ TÜREVİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAHİDE ÖZEN CANDOĞAN

HAZİRAN 2019
UŞAK

T.C.

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA KESİRLİ TÜREVİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAHİDE ÖZEN CANDOĞAN

UŞAK 2019

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Zahide Özen CANDOĞAN

BETA KESİRLİ TÜREVİ VE UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Zahide Özen CANDOĞAN

UŞAK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Beta kesirli türevi, integrali ve uygulamalarının incelendiği bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

Tezin giriş bölümünde kesirli analiz kavramı tanıtılmış ve konunun tarihçesiyle ilgili bilgi verilmiştir. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve örnekler yer almaktadır. Tezin üçüncü bölümünde beta kesirli türevi, integrali ve özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bazı yeni beta-kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Son olarak da sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Beta-kesirli türevi, beta-kesirli integrali ve eşitsizlikleri

Sayfa Adedi : 54

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Deniz UÇAR

BETA-FRACTIONAL DERIVATIVE AND APPLICATIONS

(M. Sc. Thesis)

Z. Özen CANDOĞAN

UNIVERSITY OF UŞAK

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

This thesis study which consists of beta fractional derivative, integral and their applications, is composed of seven chapters.

In the introduction part of the thesis, the concept of fractional analysis was introduced and information was given about the history of the subject. In the second chapter, basic definitions and examples are given. In the third part of the thesis, beta fractional derivative, beta fractional integral and their properties are examined. In the fourth chapter, some new beta-fractional integral inequalities are obtained. Finally, results and suggestions are given.

Keywords : Beta-fractional derivative, Beta-fractional integral and inequalities

Page Number : fifty four

Adviser : Doç. Dr. Deniz UÇAR

TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu tezin hazırlanması sırasında gerek konu seçimi gerekse uzun çalışma sürecinde desteğini esirgemeyen, kendisine ne zaman danışsam sabırla ve büyük bir ilgiyle elinden gelenin fazlasını sunan ve bilgilerini benimle paylasan her an her konuda manevi desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Deniz UÇAR'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca bana anlayış gösteren, destek olan, hissettirdikleri sonsuz güven, sabır ve manevi destekten dolayı aileme teşekkür ederim.

Zahide Özen CANDOĞAN

Haziran 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

SİMGELER	AÇIKLAMA
$\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x})$	Euler-Gamma fonksiyonu
$\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	Euler-Beta fonksiyonu
$\boldsymbol{I}$	$\mathbb{R}$'de bir aralık
$\boldsymbol{J}^{\alpha}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	$\alpha.$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali
$\boldsymbol{D}^{\alpha}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	Riemann-Liouville türevi
${}_{a}^{C}\boldsymbol{D}_{t}^{\alpha}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})$	Caputo türevi
$\boldsymbol{D}_{0,\sigma,\gamma}^{\alpha}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$	Erdelyi-Kober türevi
$\boldsymbol{D}_{0}^{\alpha}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$	Hadamard türevi
$\boldsymbol{D}_{x}^{\alpha}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$	Riesz türevi
${}_{0}^{A}\boldsymbol{D}_{t}^{\beta}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\big)$	Beta-kesirli türevi
${}_{0}^{A}\boldsymbol{I}_{t}^{\beta}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\big)$	Beta-kesirli integrali
${}_{0}^{A}\boldsymbol{D}_{t}^{n\beta}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\big)$	f fonksiyonunun $n\beta$-türevi

1. GİRİŞ

Türev bir fonksiyonda bağımlı değişkenin (y), bağımsız bir değişkene (x) göre değişim miktarıdır. Türev kavramı ilk olarak 1666 yılında Newton tarafından geliştirilmiştir. Newton ile eş zamanlarda Leibniz de bu konu üzerine araştırmalar yapmaya başlamıştır. Leibniz, aynı zamanda diferansiyel aritmetik ve sonsuz aritmetik konularıyla da ilgilenmiş ve geliştirmiştir. Türev hesabı için kullanılan $\frac{(d^n y)}{(d^n x)}$ ifadesi ilk olarak Leibniz tarafından ortaya atılmıştır.

1695 yılında Leibniz'in L'Hospital'a yazdığı mektupta "bir fonksiyonun tamsayı mertebeden türevleri kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" sorusunu sormuştur. Bundan sonra kesirli türev kavramı ortaya atılmış ve günümüzde bile pek çok bilim insanı bu konuda çalışmalar yapmaktadır. Bu konuda çalışan başlıca bilim insanları; Riemann, Grünwald-Letnikov, Liouville, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Kobel, Erdelyi, Hadamard, Riesz, Laplace, Atangana'dır.

Fizik ve mühendislik problemlerinin modellenmesinde kesirli analizin kullanılmasıyla en uygun sonuçlar elde edilebilir. Tam sayı mertebeden türevlerin kullanılmasıyla yapılan standart matematiksel modellemeler bazı durumlarda özellikle lineer olmayan modellemelerde, istenen sonucu tam olarak ifade etmeyebilir. Günümüzde kesirli mertebeden türevlerle yapılan modellemelerde daha uygun sonuçlar elde edilebildiği görülmektedir. Kesirli türevin kullanılması çoğu zaman avantajlı olsa da dezavantajlı olduğu durumlarla da karşılaşılmaktadır.

Kesirli türevin kullanılmasının avantajlı olduğu durumlardan bazıları şunlardır. Anormal difüzyon olayları çoğunlukla fizik, kimya ve biyoloji bilimleri tarafından incelenmektedir. Anormal difüzyon süreçlerinin incelenmesinde, sabit-mertebeli kesirli türevli difüzyon denklemleri önemli yer tutmaktadır. Ancak sabit-mertebeli kesirli türevli difüzyon denklemleri, homojen olmayan veya heterojen ortam difüzyon süreçleri gibi bazı karmaşık difüzyon süreçlerinin karakterize edilmesi için uygun olmamaktadır. Ayrıca gözenekli ortamlarda difüzyon süreçleri göz önüne alındığında, zamanla ortam yapısı veya dış alan değişirse sabit-mertebeli kesirli türevli difüzyon denklemleri bu durumun modellemesinde kullanılamamaktadır.

Riemann-Liouville kesirli türevinin genişletilmişi olan Jumarie kesirli türev tanımında herhangi bir sürekli fonksiyonun diferensiyellenebilir olması gerekmez. Sabit bir fonksiyonun kesirli türevi sıfıra eşittir ve daha önemlisi üstel fonksiyonlar ve Mittag-Leffler fonksiyonları gibi fonksiyonların orijindeki singüleriteliğini (tekilliği) ortadan kaldırır.

Riemann-Louville kesirli türevinde, keyfi bir fonksiyonun orijinde sürekli olması ve türevlenebilir olması gerekmez. Caputo kesirli türevinin en önemli avantajlarından birisi problemin formüle edilmesinde başlangıç ve sınır değer koşullarını içermesine izin vermesidir. Ayrıca sabit fonksiyonun türevi sıfırdır. Caputo türevi gerçek Dünya problemlerinin modellenmesinde kullanılan en uygun kesirli operatördür.

Her ne kadar kesirli türevlerin büyük avantajları olsa da her durumda uygulanabilir değildir. Riemann-Liouville türevi ile gerçek Dünya olaylarını kesirli diferansiyellerle modellemeye çaşılırken bazı dezavantajlarının olduğu görülür. Sabit bir fonksiyonun Riemann-Liouville türevi sıfır değildir. Ayrıca herhangi bir fonksiyon orijinde sabit ise bu fonksiyonun kesirli türevi orijinde bir singüleriteye sahiptir. Bu dezavantajlar Riemann-Liouville kesirli türevinin uygulama alanlarını daraltır.

Caputo türevi diferensiyellenebilirlik için büyük şartlar gerektirir. Bir fonksiyonun Caputo kesirli türevini hesaplamak için önce adi türevinin hesaplanması gerekir. Caputo türevleri sadece Riemann-Liouville anlamında birden daha düşük mertebeli kesirli türeve sahip fakat 1.mertebeden türevleri olmayan diferensiyellenebilir fonksiyonlar için tanımlıdır.

Jumarie kesirli türevinde, eğer fonksiyon tanımlı olduğu bölgede sürekli değilse, kesirli türevi yoktur. Örneğin, $\ln(x)$ fonksiyonunun kesirli türevi ya da başka fonksiyonların kesirli türevi hesaplanamaz.

Her ne kadar Weyl kesirli türevi yeraltı sularının keşfinde kullanılsa da hala önemli bir dezavantaja sahiptir. Çünkü Weyl türevleriyle tanımlanan integraller has olmayan integrallerdir ve fonksiyona büyük kısıtlamalar getirilmesini gerektirir. Örneğin sabit bir fonksiyonun Weyl türevi tanımlı değildir. Diğer taraftan Weyl türevleri Riemann-Liouville türevleri ile karşılaştırıldığında formüle edilmesi ve ispatlanması daha zordur.

Değişken mertebeli kesirli türevler temel türev özelliklerini sağlamaz. Hesaplanması imkânsız olmasa da oldukça zordur. Örneğin, $f(x) = \mathrm{x}$ fonksiyonunun değişken mertebeden kesirli türevini hesaplamak bile zordur. Bu türden türevleri içeren diferensiyel denklemlerin analitik metodlarla çözülmesi çok zordur.

2.TEMEL TANIM VE ÖRNEKLER

Bu bölümde, önemli bazı türev ve integral tanımları verilmiştir.

Tanım 2.1 (Gamma Fonksiyonu) : Gamma fonksiyonu $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır. Bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir.

i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 2.2 (Beta Fonksiyonu) : $m, n > 0$ için;

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 (Riemann-Liouville Türevi) : f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlansın.

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.4 (Caputo Türevi) : Caputo kesirli türevi kullanılarak diferensiyel denklemler çözülürken kesirli mertebeden başlangıç koşullarının verilmesi gerekmez. f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlansın.

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} \frac{f^{n}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} $$

İfadesi Caputo türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.5 (Weyl Türevi) : Benzer şekilde yapılan diğer kesirli türev tanımları aşağıdaki gibidir. f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlansın.

$$ D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt $$

İfadesi Weyl türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.6 (Erdelyi-Kober Türevi) : f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlansın. Benzer şekilde,

$$ D_{0,\sigma,\gamma}^{\alpha}\big(f(x)\big) = x^{-\gamma\sigma} \left(\frac{1}{\sigma x^{\sigma-1}} \frac{d}{dx}\right)^{n} x^{\sigma(n+\gamma)} I_{0,\sigma,\gamma+\sigma}(f(x)) $$

İfadesi Erdelyi türevi şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.7 (Hadamard Türevi) : Benzer şekilde, f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlansın.

$$ D_{0}^{\alpha}\big(f(x)\big) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{n} \int_{0}^{x} \left(\log\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{n-\alpha-1} f(t) \frac{dt}{t} $$

İfadesi Hadamard türevi şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.8 (Riesz Türevi) : Benzer şekilde, f fonksiyonu, $(0, \alpha)$ açık aralığında tanımlansın.

$$ D_{x}^{\alpha}\big(f(x)\big) = -\frac{1}{2\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m} \left(\int_{-\infty}^{x} (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)\, dt \right. $$
$$ \left. + \int_{x}^{\infty} (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right) $$

şeklindedir..

Tanım 2.9 (Jumarie) : Jumarie, Riemann türevine basit bir alternatif sundu. Bu türev,

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{f(t)-f(0)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10 (Riemann-Liouville Kesirli İntegrali) : $\alpha \geq 0$ iken α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali $f \in C_{\mu}, (\mu \geq -1)$ olmak üzere, $\alpha > 0$ ve $x > 0$ için,

$$J^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu integral operatörü için $\alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere, yarı-grup özelliği

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(t) = J^{\alpha+\beta}f(t)$$

ve değişme özelliği

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(t) = J^{\beta}J^{\alpha}f(t)$$

sağlanmaktadır. (2.1) eşitliğinde $f(t) = t^{\mu}$ olarak seçilirse $\alpha > 0, \mu > -1$ ve $t > 0$ için, daha sonra kullanılacak olan aşağıdaki eşitlik elde edilebilir.

$$J^{\alpha}t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}t^{\alpha+\mu} \tag{2.2}$$

Tanım 2.11 : α. mertebeden sağdan Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $x > a$ için, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau.$$

α. mertebeden soldan Riemann-Liouville kesirli integrali $\alpha > 0$ ve $x < b$ için aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\tau - x)^{\alpha - 1} f(\tau) d\tau.$$

1. BETA KESİRLİ TÜREVİ, İNTEGRALİ VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde yeni parametreli bir kesirli türev olan beta-kesirli türevi ve temel bazı özellikleri incelenecektir.

Teorem 3.1 :

$$ {}_0^A D_X^\beta\left(f(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(x_0+\varepsilon\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x_0)}{\epsilon} $$

limiti vardır.

İspat : $$ f\left(\left(x_0+\varepsilon\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x_0)\right) $$

fonksiyonunun limiti alınırsa,

$$ \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(x_0+\varepsilon\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0 $$

$$ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(x_0+\varepsilon\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x_0)}{\varepsilon}.\varepsilon $$

$$ = {}_0^A D_X^\beta\left(f(x_0)\right).\varepsilon $$

$$ {}_0^A D_X^\beta\left(f(x_0)\right).0=0 $$

elde edilir. Böylece,

$$ \lim_{\varepsilon\to 0} f\left(\left(x_0+\varepsilon\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(x_0)\right)+f(x_0) $$

$$ = 0+ f(x_0) $$

$$= f(x_0)$$

bulunur. Fakat $x = x_{0+}\varepsilon\left(x_{0+}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$ alınırsa,

$$\varepsilon = \frac{x - x_0}{\left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{\frac{x-x_0}{\left(x_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}\to 0} f(x) = f(x_0)$$

$\left(x_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \neq 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse $\lim_{\boldsymbol{x\to x_0}} \mathrm{f}(x) = f(x_0)$ bulunur ve ispat biter.

Tanım 3.2 : $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to R$ fonksiyonu verilsin. $a \in A$ olsun. Eğer, $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ limiti varsa ve $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasındaki değeri olan $f(a)$ ya eşit ise $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ise $x = a$ noktasında süreklidir.

Tanım 3.3 : $a \in \mathbb{R}$ ve $g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun β-türevi

$${}_0^A D_t^\beta g(t) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{g\left(t + \varepsilon\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - g(t)}{\varepsilon} & , \quad \forall t \geq 0\,, 0 < \beta \leq 1 \\ g(t) & , \quad \forall t \geq 0\,, \beta = 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ve Γ gamma fonksiyonudur.

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-t} dt$$

tanımdaki limit varsa g fonksiyonu β-türevlenebilir denir. $\beta = 1$ olduğunda

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta} g(t) = \frac{d}{dt} g(t) $$

olduğu görülür.

Ayrıca diğer kesirli türevlerden farklı olarak bir fonksiyonun β-türevi 1.mertebeden türev ile benzer şekilde belirli bir mertebeden yerel olarak tanımlanabilir.

Teorem 3.4 : β-türevi aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. ${}_{0}^{A}D_{t}^{0} g(t) = g(t)$

ii. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{0} g(t)\big(\alpha f(t) + \mu g(t)\big) = \alpha\, {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta} f(t) + \mu\, {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta} g(t) $$

eşitliği sağlanır.

iii. ${}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}(c) = 0, c \in \mathbb{R}$.

iv. $f\ ve\ g$ fonksiyonlarının çarpımının β-türevi,

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big(f(t).g(t)\big) = g(t)\,{}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big(f(t)\big) + f(t)\,{}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big(g(t)\big) $$

şeklindedir.

v. ${}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\left(\frac{1}{f(t)}\right) = -\frac{{}_{0}^{A}D_{t}^{\beta} f(t)}{f^{2}(t)}$

vi. $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilir ve aynı zamanda β-diferensiyellenebilir olsun. g fonksiyonu bu aralıkta diferensiyellenebilir ise,

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big(gof(t)\big) = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t) g'\big(f(t)\big) \text{ şeklindedir.} $$

vii. f fonksiyonunun tersi g fonksiyonu olarak verilsin. Yani $g\big(f(x)\big) = x$ ve $f\big(g(y)\big) = y$ olsun.

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big(gof(t)\big) = {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}(t). $$

viii.

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\left(\frac{1}{f}\right)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{-1}\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f^{-1}(t)}{\varepsilon}. $$

İspat i : Tanımda $\beta=0$ olarak alınırsa istenen kolaylıkla elde edilebilir.

İspat ii :

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{0}g(t)\big(\alpha f(t)+\mu g(t)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\alpha f+\mu g)\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-(\alpha f+\mu g)(t)}{\varepsilon} $$

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left[\alpha f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)+\mu g\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)\right]-[\alpha f(t)+\mu g(t)]}{\varepsilon} $$

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-\alpha f(t)+\mu g\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-\mu g(t)}{\varepsilon} $$

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha\left(f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)\right)}{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu\left(g\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-g(t)\right)}{\varepsilon} $$

$$ =\alpha\,{}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}f(t)+\mu\,{}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}g(t) $$

olduğu görülür.

İspat iii : ${}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{c-c}{\varepsilon}=0$

olduğu kolayca görülebilir.

İspat iv : Tanım gereğince,

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\left((f.g)(t)\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(f.g)\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-(f.g)(t)}{\varepsilon} $$

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)g\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)g(t)}{\varepsilon} $$

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)g\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)g(t)}{\varepsilon} $$

$$ +\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)g(t)-f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)g(t)}{\varepsilon} $$

$f^{*}(t):=f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)$ olarak tanımlanırsa

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left[f^{*}(t)\left(g^{*}(t)\right)-g(t)\right]+g(t)[f^{*}(t)-f(t)]}{\varepsilon} $$

$$ =\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{*}(t)\left(g^{*}(t)\right)-g(t))}{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t)\left(f^{*}(t)\right)-f(t))}{\varepsilon} $$

elde edilir. Sürekli fonksiyonlar için limit özellikleri kullanılarak istenilen kolayca elde edilir.

$$ \lim_{\varepsilon\to 0}f^{*}.\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g^{*}-g}{\varepsilon}=f(t) $$

olduğu görülür.

İspat v : β-kesirli türev tanımından,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{f}\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-\frac{1}{f(t)}}{\varepsilon}$$

ifadesinde $f^{*}(t) \coloneqq f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)$ olarak tanımlanırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{f}\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-\frac{1}{f(t)}}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{f^{*}(t)}-\frac{1}{f(t)}}{\varepsilon}$$

elde edilir. Bu eşitlikte payda eşitlenip düzenlenirse,

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t)-f^{*}(t)}{\varepsilon.f(t)f^{*}(t)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{*}(t)-f(t)}{\varepsilon.f(t)f^{*}(t)}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{*}(t)-f(t)}{\varepsilon}.\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{f(t).f^{*}(t)}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{*}(t)-f(t)}{\varepsilon}.\frac{1}{f^{2}(t)}$$

$$=-\frac{{}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}f(t)}{f^{2}(t)}$$

bulunur ve ispat biter.

İspat vi : Beta-kesirli türevi tanımında,

$$h=\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

olarak seçilirse,

$${}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big((gof)(t)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{(gof)(t+h)-(gof)(t)}{\varepsilon}.\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

elde edilir.

$$(gof)' = g'\big(f(t)\big)f'(t)$$

bileşke fonksiyonun türevinden ,

$$\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}.\lim_{h\to 0}\frac{g(f(t)+h)-g\big(f(t)\big)}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

bulunur. h yerine yazılırsa,

$${}_{0}^{A}D_t^{\beta}\big((gof)(t)\big)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g\left(f(t)+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-g\big(f(t)\big)}{\varepsilon}.\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

$$={}_{0}^{A}D_t^{\beta}\left(g\big(f(t)\big)(t)\right)f'(t)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İspat vii : $f(t)=\mathrm{t}$ seçilirse,

$${}_{0}^{A}D_t^{\beta}\big(f(t)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}-t}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}=\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$$

bulunur. Bileşke fonksiyonun türevi yardımıyla,

$${}_{0}^{\mathrm{A}}\mathrm{D}_{\mathrm{t}}^{\beta}(gof)(t)={}_{0}^{A}D_t^{\beta}g\big(f(t)\big)f'(t)$$

$$Df(t)=\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{2-2\beta}}{Dg\big(f(t)\big)}$$

istenilen elde edilir.

İspat viii :

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{1}{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)}-\dfrac{1}{f(t)}}{\varepsilon}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t)-f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)}{\varepsilon f(t)f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon f(t)f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon}.\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{f(t)f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)}$$

$$=-{}_0^AD_t^\beta\big(f(t)\big).\frac{1}{f^2(t)}=-\frac{{}_0^AD_t^\beta(f(t))}{f^2(t)}.$$

Teorem 3.5 : f fonksiyonu (a,b) açık aralığında β-türevlenebilir olsun.

i.$\forall\ x\in(a,b)$ için ${}_0^AD_t^\beta\big(f(t)\big)>0$ ise f artandır.

ii.$\forall\ x\in(a,b)$ için ${}_0^AD_t^\beta\big(f(t)\big)<0$ ise f azalandır.

iii.$\forall\ x\in(a,b)$ için ${}_0^AD_t^\beta\big(f(t)\big)=0$ ise f sabittir.

İspat i :$\forall\ \ x\in(a,b)$ için ${}_0^AD_t^\beta\big(f(t)\big)$ pozitif olduğundan $t_1>t_2$ için

$$f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) > 0$$

yazılabilir. Her iki tarafın limiti hesaplanırsa;

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2)\right) > \lim_{\varepsilon \to 0} 0$$

$$= f(t_1) - f(t_2) > 0$$

olduğundan f artandır.

İspat ii : $\forall\, x \in (a, b)$ için ${}_0^A D_t^\beta\big(f(t)\big)$ pozitif olduğundan $t_1 < t_2$ için

$$f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) < 0$$

bulunur. Her iki tarafın limiti hesaplanırsa;

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2)\right) < \lim_{\varepsilon \to 0} 0$$

$f(t_1) - f(t_2) < 0$ olduğundan f azalandır.

İspat iii : $\forall\, x \in (a, b)$ için ${}_0^A D_t^\beta\big(f(t)\big)$ pozitif olduğundan $t_1 > t_2$ için

$$f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2) = 0$$

yazılabilir. Her iki tarafın limiti hesaplanırsa;

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(f\left(t_1 + \varepsilon\left(t_2 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_2)\right)$$

$$= f(t_1) - f(t_2) = 0$$

olduğundan f sabittir.

Teorem 3.6 : $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \geq a$ noktasında β-türevlenebilir. $\beta \in [0,1]$ ise f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.

$$ {}_0^A D_t^\beta\big(f(t_0)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0)}{\varepsilon} $$

yazılabilir.

$$ = \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0) $$

$$ = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0)}{\varepsilon} . \varepsilon $$

$$ {}_0^A D_t^\beta\big(f(t_0)\big). 0 = 0 $$

Ayrıca

$$ = \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - f(t_0) + f(t_0) $$

$$ = f(t_0) - f(t_0) + f(t_0) $$

$$ = f(t_0) $$

yazılabilir.

t = $t_0 + \left(t_0 + \varepsilon\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)$ olarak kabul edelim.

$$ \frac{t - t_0}{\left(t_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}} = \varepsilon $$

olur.

$$=\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(t_0+\varepsilon\left(t_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)$$

$$=\lim_{\frac{t-t_0}{\left(t_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}\to 0} f(t)=f(t_0)$$

$$=\frac{t-t_0}{\left(t_0+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}\neq 0$$

olduğundan

$$=\lim_{t-t_0\to 0} f(t)=f(t_0)$$

$$=\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$$

elde edilir.

Teorem 3.7 : $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu yerel diferensiyellenebilir ise aynı zamanda β-diferensiyellenebilirdir.

İspat : f fonksiyonu diferensiyellenebilir ise $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ limiti vardır.

Buradan,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \tag{3.1}$$

limitinin de varlığı görülebilir.

$\varepsilon=\mathrm{h}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ olarak alınırsa $\mathrm{h}=\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$ bulunur. Bu ifade (3.1) de yerine yazılırsa;

$$= \lim_{\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon} \tag{3.2}$$

elde edilir. $\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \neq 0$ olduğundan (3.2) eşitliğinden,

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

$$= {}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big)$$

olduğu görülür.

Tanım 3.8 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonskiyonu $[a,b]$ de sürekli olsun. f fonksiyonunun 2. mertebeden β-türevi,

$${}_0^A D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{\beta} f(t)\right) \; 0 \leq \beta \leq 1$$

olarak tanımlanır. Genel olarak f fonksiyonunun n. mertebeden β-türevi,

$${}_0^A D_t^{n\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{(n-1)\beta}.\big(f(t)\big)\right), \; 0 \leq \beta \leq 1$$

$$= {}_0^A D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{\beta} f(t)\right)$$

$$= {}_0^A D_t^{\beta}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)+\varepsilon\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)}{\varepsilon}\right)$$

yazılabilir. $h = \varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$ olarak seçilirse,

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\lim\limits_{h\to 0} f\big(t+h+\varepsilon(t+h)\big) - f(t+h)}{\varepsilon} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t+h)-f(t)}{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

$$\frac{\lim\limits_{h\to 0} f\big(t+h+\varepsilon(t+h)\big) - f(t+h)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(t+h+h\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}(t+h) - f(t+h)\right)}{h.\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\left[\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{t+h+h\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}(t+h) - f(t+h)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\right]}{h.\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}}$$

$$D\big(f(t)\big) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+2h)-f(t+h)}{h} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+2h)-f(t+h)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\big(t+h+\epsilon(t+h)\big) - f(t+h)}{\varepsilon} - \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

elde edilir.

Tanım 3.9 : $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonskiyonu $[a,b]$ de sürekli olsun. f fonksiyonunun 2β-türevi,

$${}_0^A D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right), \quad 0 \le \beta \le 1$$

şeklinde tanımlanır.

Genel olarak f fonksiyonunun $n\beta$-türevi

$$ {}_0^A D_t^{n\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{(n-1)\beta}\big(f(t)\big)\right), 0\leq \beta \leq 1 $$

şeklindedir.

Uyarı 3.10: $n\beta$-türevi verilen bir fonksiyon bize fonksiyonun $(n-1)\beta$-türevi hakkında bilgi verir. Bu bağıntı aşağıdaki örnekte görülebilir.

Örnek 3.11 :

$$ {}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f(t)}{\varepsilon} $$

olduğundan $\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} = h$ olsun.

$$ {}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}} $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}.\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}.f'(t) $$

$$ {}_0^A D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right) $$

olduğundan

$$ {}_0^A D_t^{2\beta}\big(f(t)\big) = {}_0^A D_t^{\beta}\left(\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t)\right) $$

elde edilir.

$$ {}_0^A D_t^\beta \big(f(t)g(t)\big) = {}_0^A D_t^\beta \big(f(t)\big)g(t) + f(t)\, {}_0^A D_t^\beta \big(g(t)\big) $$

kullanılarak,

$$ {}_0^A D_t^{2\beta} \left(\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t) \right) = {}_0^A D_t^\beta \left(\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \right) f'(t) $$

$$ + \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} {}_0^A D_t^\beta \big(f'(t)\big) \qquad (3.3) $$

bulunur. (3.3) eşitliği düzenlenirse,

$$ {}_0^A D_t^\beta \left(\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left[\left(t + \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \right)^{1-\beta} - \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \right]}{\varepsilon} $$

elde edilir. $h = \varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}$ olarak seçilirse,

$$ = \lim_{h \to 0} \frac{\left(t + h + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} - \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}{h.\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}} $$

$$ = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} . \lim_{h \to 0} \frac{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} + h\right)^{1-\beta} - \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}{h} $$

$$ \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} . \lim_{h \to 0} \frac{\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)} + h\right)^{1-\beta} - \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}}{h} = \frac{d}{dt}\left[\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \right] $$

$$ = \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} (1-\beta) \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta} $$

$$ {}_0^A D_t^{\beta}\big(f'(t)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f'\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-f'(t)}{\varepsilon} $$

$\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} = k$ olsun. O halde,

$$ = \lim_{k\to 0}\frac{f'(t+k)-f'(t)}{k.\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}} $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\lim_{k\to 0}\frac{f'(t+k)-f'(t)}{k} $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f''(t) $$

bulunur. (3.3) de yerine yazılır.

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\left[(1-\beta)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta} f'(t) + \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f''(t)\right] $$

elde edilir.

Sonuç 3.12 : $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ fonskiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer α≠ β ise

$$ {}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{\alpha}\big(f(t)\big)\right) \neq {}_0^A D_t^{\alpha}\left({}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right) \qquad (3.4) $$

İspat : ${}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big) = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t)$ olduğundan,

${}_0^A D_t^{\alpha}\big(f(t)\big) = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} f'(t)$ ise ${}_0^A D_t^{\beta}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} f'(t)\right]$

$$ = \left[{}_0^A D_t^{\beta}\left(\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\right)\right] f'(t) + \left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\ {}_0^A D_t^{\beta}\big(f'(t)\big) $$

$$= \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}(1-\alpha)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{-\alpha} f'(t) + \left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f''(t)$$

yazılabilir. Tersi de benzer şekilde gösterilebilir.

${}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big) = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t)$ ise

${}_0^A D_t^{\alpha}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} f'(t)\right]$

$$= \left[{}_0^A D_t^{\alpha}\left(\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)\right].f'(t) + \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}.\,{}_0^A D_t^{\alpha}.\big(f'(t)\big)$$

$$= \left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}(1-\beta)\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{-\beta} f'(t) + \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} f''(t)$$

olur ve ispat biter.

Tanım 3.13 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonskiyonu (a,b) açık aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun β $-$integrali,

$${}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big) = \int_0^t \left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x)dx$$

olarak tanımlanır. Bu integral Atangana-beta integrali olarak adlandırılır.

Teorem 3.14 : β-analizinin temel teoremine göre sürekli bir f fonksiyonu için

$${}_0^A D_t^{\beta}\left({}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right) = f(t)$$

sağlanır. f fonksiyonu $\forall\ x\geq a$ için türevlenebilir ise

$${}_0^A I_t^{\beta}\left({}_0^A D_t^{\beta}\big(f(t)\big)\right) = f(t)-f(a)$$

elde edilir.

İspat : f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli ve

$$F(t) = {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)$$

olsun. β-türev tanımından,

$${}_0^A D_t^\beta \left({}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F\left(t + \left(\varepsilon + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right) - F(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{{}_0^A I_t^\beta \left(f\left(t + \left(\varepsilon + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)\right) - {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)}{\varepsilon}$$

$$\varepsilon \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} = h$$

olsun. $\varepsilon \to 0$ ise $h \to 0$ olur.

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_a^{t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x).dx - \int_a^t \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x)dx}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{t+h} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x)dx - \int_a^t \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(x)dx}{h\left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}}$$

bulunur ve ispat biter.

Teorem 3.15 : f reel değerli fonksiyonu sürekli ve (a, b) aralığında β −integrallenebilir olsun. O halde

$${}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) = f(c)(b-a)h(a, b)$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır.

İspat : Uç değer teoremi gereğince,

$$f(N) = minf(t)_{t\in(a,b)} \leq f(t) \leq f(M) = maxf(t)_{t\in(a,b)}$$

olacak şekilde N ve M reel sayıları bulunabilir. Yukarıdaki eşitsizliğin β-integrali hesaplanırsa,

$$\int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(N)dt \leq \int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(t)dt \leq \int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(M)dt$$

$$= f(N)\int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} dt \leq \int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(t)dt \leq f(M)\int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} dt$$

$$I_1 = \int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} dt = \left.\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}\right|_a^b$$

$$= \frac{\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} - \frac{\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}$$

$$I_2 = \int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} dt = \left.\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}}{\beta+1}\right|_a^b = \frac{\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} - \frac{\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}$$

$$f(N)\frac{\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} \leq \int_a^b \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} dt \leq f(M)\frac{\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta} \qquad (3.5)$$

elde edilir. Kolaylık olması için,

$$I(a,b) = \frac{\left(b+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}-\left(a+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta}$$

seçilir ve (3.4) eşitsizliği düzenlenirse,

$$f(N) \leq \frac{1}{I(a,b)} \int_{a}^{b} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(t)dt \leq F(M)$$

başlangıç değer teoremi gereğince,

$$\frac{1}{I(a,b)} \int_{a}^{b} \left(t + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(t)dt = f(c)$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ reel sayısı vardır. Buradan,

$$= \frac{1}{I(a,b)} {}_{a}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)\big) = f(c)$$

$$h(a,b) = \frac{1}{I(a,b)(b-a)}$$

$${}_{a}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)\big) = f(c)\, h(a,b)(b-a)$$

bulunur, ispat biter.

Bu bölümde β-kısmi kesirli türevi bazı özellikleri tanımlanacaktır.

Tanım 3.16 : f, x ve y gibi iki değişkenli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun x değişkenine göre β-türevi

$${}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\big(f(x,y)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}, y\right) - f(x,y)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.17 : x, y iki boyutlu Öklid uzayında Kartezyen koordinat sistemini ve i, j, baz vektörleri olsun. $F = Ui + Vj$ sürekli türevlenebilir vektör alanının β-diverjansı

$$div^{\beta} F = {}_{0}^{A}\nabla^{\beta}(F) = {}_{0}^{A}\Delta_{x}^{\beta}(U) + {}_{0}^{A}\Delta_{y}^{\beta}(U)$$

skaler değerli fonksiyondur.

F ‘in (α, β)-diverjansı,

$$div^{\beta,\alpha} F = {}_{0}^{A}\nabla^{\beta,\alpha}(F) = {}_{0}^{A}\Delta_{x}^{\beta}(U) + {}_{0}^{A}\Delta_{y}^{\alpha}(U)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.18 : x, y iki boyutlu Öklid uzayında Kartezyen koordinat sistemini ve i, j baz vektörleri olsun. $F = Ui + Vj$ sürekli türevlenebilir vektör alanının β −gradienti

$$grad^{\beta} F = {}_{0}^{A}\nabla^{\beta} f = {}_{0}^{A}\Delta_{x}^{\beta}\big(f(x,y)\big)i + {}_{0}^{A}\Delta_{y}^{\beta}\big(f(x,y)\big)j$$

vektör alanına eşittir. f fonksiyonunun (β, α)-gradiyantı,

$$grad^{\beta,\alpha} f = {}_{0}^{A}\nabla^{\beta,\alpha} f = {}_{0}^{A}\Delta_{x}^{\beta}(f)i + {}_{0}^{A}\Delta_{y}^{\alpha}(f)j$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.19 : İki boyutlu bir f fonksiyonunun β-Laplace operatörü,

$${}_{0}^{A}\Delta^{\beta} f = \frac{\partial^{2} f(x,y)}{\partial x^{2\beta}} + \frac{\partial^{2} f(x,y)}{\partial y^{2\beta}} + \cdots$$

şeklinde tanımlansın.

f fonksiyonunun (β, α)-Laplace operatörü

$${}_{0}^{A}\Delta^{\beta,\alpha} f = \frac{\partial^{2\beta} f(x,y)}{\partial x^{2\beta}} + \frac{\partial^{2\alpha} f(x,y)}{\partial y^{2\alpha}}$$

şeklindedir.

Tanım 3.20 : Kartezyen koordinatlarda, sürekli bir F vektör alanının β −gradienti i, j, k birim vektörler olmak üzere,

$$[Fx, Fy, Fz] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} & \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} & \frac{\partial^\beta}{\partial z^\beta} \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^\beta Fz}{\partial y^\beta} - \frac{\partial^\beta Fy}{\partial z^\beta}\right) i + \left(\frac{\partial^\beta Fx}{\partial^\beta z} - \frac{\partial^\beta Fz}{\partial^\beta x}\right) j + \left(\frac{\partial^\beta Fy}{\partial x^\beta} - \frac{\partial^\beta Fx}{\partial y^\beta}\right) k$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.21 : (Clairaut Teoremi) $f(x,y)$ fonksiyonu $\partial x^\beta\left[\partial y^\alpha\left(f(x,y)\right)\right]$ ve $\partial y^\alpha\left[\partial x^\beta\left(f(x,y)\right)\right]$ türevlerinin var ve $D \subset R_2$ de sürekli ve olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\partial x^\beta\left[\partial y^\alpha\left(f(x,y)\right)\right] = \partial y^\alpha\left[\partial x^\beta\left(f(x,y)\right)\right]$$

İspat :

$$\partial x^\beta\left[\partial y^\alpha\left(f(x,y)\right)\right] = \partial x^\beta\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(x, y + \varepsilon\left(y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\right) - f(x,y)}{\varepsilon}\right]$$

$$\varepsilon\left(y + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\alpha} = k$$

olarak seçilsin.

$$= \partial x^\beta\left[\partial y^\alpha\left(f(x,y)\right)\right] = \partial x^\beta\left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x,y)}{k\left(y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}}\right]$$

$\varepsilon\left(y + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\alpha} = k, \quad \varepsilon \to 0\ ,\ k \to 0$ olsun.

$$\varepsilon = k\left(y + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\alpha-1}$$

$$=\partial x^{\beta}\left[\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\lim_{k\to 0}\frac{(x,y+k)-f(x,y)}{k}\right]$$

$$=\partial x^{\beta}\left[\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$=\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\ \partial x^{\beta}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]$$

$$=\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}\left(x+\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta},y\right)-\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{\varepsilon}\right]$$

$$\varepsilon\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}=l$$

olarak seçilsin. $\varepsilon\to 0, l\to 0$ olduğundan,

$$=\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\left[\lim_{l\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}f(x+l,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{l\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}}\right]$$

$$=\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\left[\lim_{l\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+l,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{l}\right]$$

$$=\left(y+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$$

f sürekli olduğundan kısmi türevlerin Clauiraunt gereği,

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

olduğu bilinmektedir. Bu ifadeler yerine yazılırsa,

$$\partial x^{\beta}\left[\partial y^{\alpha}\big(f(x,y)\big)\right] = \left(y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\right]$$

$$= \left(y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \left[\lim_{l \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\left(\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}, y\right) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{l}\right]$$

$$\left(y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha} = k$$

olarak seçilirse,

$$= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \partial y^{\alpha} \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]$$

elde edilir.

$$= \left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta} \partial y^{\alpha} \left[\lim_{l \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+k,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{k}\right]$$

$$= \partial y^{\alpha} \left[\frac{f\left(x + \varepsilon\left(x + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}, y\right) - f(x,y)}{\varepsilon}\right]$$

$$= \partial y^{\alpha}\left[\partial x^{\beta}\big(f(x,y)\big)\right]$$

bulunur ve ispat biter.

4.BAZI YENİ BETA-KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde senkronize iki fonksiyon için β −kesirli integrali kullanılarak bazı yeni eşitsizlikler incelenmiştir.

Teorem 4.1: f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $\forall t > 0,\ \beta > 0$ için

$$ {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^\beta\big(g(t)\big)\right] $$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : f ve g fonksiyonları senkronize olduğundan $\forall\ \tau \geq 0$, $\rho \geq 0$ için,

$$ \big(f(\tau)-f(\rho)\big)\big(g(\tau)-g(\rho)\big) \geq 0 $$

$$ f(\tau)g(\tau) - f(\tau)g(\rho) - f(\rho)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq 0 $$

$$ f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\tau)g(\rho) + f(\rho)g(\tau) $$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ ile çarpılırsa 0'dan t'ye integrallenirse,

$$ = \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\tau) + \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\rho) $$

$$ \geq \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\rho) + \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\tau) $$

$$ = \int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\tau)d\tau + \int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\rho)d\tau $$

$$ \geq \int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\tau)g(\rho)d\tau + \int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} f(\rho)g(\tau)d\tau $$

$$ {}_0^A I_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) + f(\rho)g(\rho)\int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau \geq g(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^\beta g(t) $$

elde edilir.

$$\int_0^t \left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\tau = \frac{1}{\beta}\left(\tau+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}\Bigg|_0^t = \frac{1}{\beta}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta} - \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}$$

$$= \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\big((t.\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1\big)$$

$$= {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big) + \frac{f(\rho)g(\rho)}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\left[(t.\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1\right] \geq\ g(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta} f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta} g(t)$$

veya

$$= {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big) + f(\rho)g(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta}(1) \geq f(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta} f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta} g(t).$$

Burada eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ ile çarpılıp 0'dan t'ye integrallenirse,

$$= \left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big) + \frac{f(\rho)g(\rho)}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\left[(t.\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1\right]\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$$

$$\geq \left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} g(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta} f(t) + f(\rho)\,{}_0^A I_t^{\beta} g(t)\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$$

$$= {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big)\int_0^t \left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\rho + {}_0^A I_t^{\beta}(1)\int_0^t f(\rho)g(\rho)\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} dg$$

$$\geq {}_0^A I_t^{\beta} f(t)\int_0^t \left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} g(\rho)d\rho + I_t^{\beta}\, g(t)\int_0^t f(\rho)\left(\rho+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} d\,\rho$$

$$= {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big)\,{}_0^A I_t^{\beta}(1) + {}_0^A I_t^{\beta}(1)\,{}_0^A I_t^{\beta} f(t)g(t) \geq {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^{\beta} g(t) + {}_0^A I_t^{\beta} g(t)\,{}_0^A I_t^{\beta} f(t)$$

$$= 2\,{}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big)\,{}_0^A I_t^{\beta}(1) \geq 2\,{}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^{\beta} g(t)$$

$$= {}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)}\left[{}_0^A I_t^{\beta}\big(f(t)\big)\,{}_0^A I_t^{\beta} g(t)\right]$$

bulunur ve ispat biter.

Teorem 4.2 : f ve g fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında senkronize iki fonksiyon olsun. $\forall\ t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ için

$$
{}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big).\,{}_0^AI_t^\alpha(1) + {}_0^AI_t^\beta(1)\,{}_0^AI_t^\alpha\Big(f(t)\big(g(t)\big)\Big)
$$
$$
\geq {}_0^AI_t^\beta\big(g(t)\big)\,{}_0^AI_t^\alpha\big(f(t)\big) + {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)\big).\,{}_0^AI_t^\alpha\big(g(t)\big)
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat : Teorem 4.1 ispatına benzer şekilde f ve g senkronize iki fonksiyon olduğundan,

$$
f(\tau)g(\tau) + f(\rho)g(\rho) \geq f(\rho)g(\tau) + f(\tau)g(\rho)
$$

yazılabilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1}$ ile çarpılır ve 0'dan t'ye $\tau'ya$ göre integrallenirse,

$$
{}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big) + f(\rho)g(\rho)\,{}_0^AI_t^\alpha(1) \geq f(\rho)\,{}_0^AI_t^\beta\Big(g(t) + g(\rho)\,{}_0^AI_t^\beta f(t)\Big) \quad (3.5)
$$

elde edilir. (3.5) eşitsizliğinin her iki tarafı $\left(g + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve 0'dan t'ye ρ'ye göre integrallenirse,

$$
= {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big)\int_0^t \left(g + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1} dg + {}_0^AI_t^\beta\,(1)\int_0^t \left(g + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1} f(\rho)g(\rho)dg
$$
$$
\geq {}_0^AI_t^\beta\left(g(t)\int_0^t \left(g + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1} f(\rho)dg\right.
$$
$$
\left. + {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)\big)\int_0^t \left(g + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha-1} g(\rho)dg\right)
$$

$$
= {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)g(t)\big).\,{}_0^AI_t^\alpha(1) + {}_0^AI_t^\beta(1)\,{}_0^AI_t^\alpha\Big(f(t)\big(g(t)\big)\Big)
$$
$$
\geq {}_0^AI_t^\beta\big(g(t)\big)\,{}_0^AI_t^\alpha\big(f(t)\big) + {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)\big).\,{}_0^AI_t^\alpha\big(g(t)\big)
$$

bulunur ve ispat biter.

Uyarı 4.3 : Teorem 4.2 de $\alpha = \beta$ seçilirse,

$$ {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)g(t)\big).\, {}_0^A I_t^\alpha(1) + {}_0^A I_t^\beta(1) {}_0^A I_t^\alpha \Big(f(t)\big(g(t)\big)\Big) $$
$$ \geq {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) {}_0^A I_t^\alpha \big(f(t)\big) + {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big).\, {}_0^A I_t^\alpha \big(g(t)\big) $$

Eşitsizliği,

$$ {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} \Big[{}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) \Big] $$

eşitsizliğine dönüşür.

Uyarı 4.4 : Eğer f ve g fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında asimetrik fonksiyonlar ve

$$ {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)} \Big[{}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big) {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) \Big] $$

ve

$$ {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)g(t)\big).\, {}_0^A I_t^\alpha(1) + {}_0^A I_t^\beta(1) {}_0^A I_t^\alpha \Big(f(t)\big(g(t)\big)\Big) $$
$$ \geq {}_0^A I_t^\beta \big(g(t)\big) {}_0^A I_t^\alpha \big(f(t)\big) + {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big).\, {}_0^A I_t^\alpha \big(g(t)\big) $$

eşitsizlikleri yön değiştirir. $\Big(\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \leq 0\Big)$

Teorem 4.5 : f_i , $i = 1,2, \dots, n$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında pozitif artan fonksiyonlar olsun. Herhangi $t > 0$, $\beta > 0$ için

$$ {}_0^A I_t^\beta \left(\prod_{i=0}^{n} fi \right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_0^A I_t^\beta(1)\right)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} \left({}_0^A I_t^\beta fi \right)(t) $$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat : Teoremin ispatı için tümevarım yöntemi kullanalım.

$n = 1$ seçilirse $\forall\ t > 0$, β> 0 için

$$ {}_0^A I_t^\beta f_1(t) \geq {}_0^A I_t^\beta f_1(t) $$

eşitsizliği sağlanır.

$n = 2$ için Teorem 4.1 kullanılırsa,

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(f_1 f_2)(t) \geq \frac{1}{{}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(1)}\, {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f_1(t)\big) {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f_2(t)\big) $$

yazılabilir.

$n = k - 1$ için

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\left(\prod_{i=0}^{n} fi\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(1)\right)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n}\left({}_{0}^{A}I_{t}^{\beta} fi\right)(t) $$

eşitsizliği yardımıyla,

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\left(\prod_{i=1}^{k-1} fi\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(1)\right)^{k-2}} \prod_{i=1}^{k-1}\left({}_{0}^{A}I_{t}^{\beta} fi\right)(t) $$

doğru olsun. $f_{i\,,}\ i = 1,2, \dots, n$ fonksiyonları pozitif artan fonksiyon olduğundan $\left(\prod_{i=1}^{k-1} fi\right)(t)$ fonksiyonu da pozitif artandır.

$$ \left(\prod_{i=1}^{k-1} fi\right)(t) = g(t) $$

ve

$$ f_n(t) = f(t) $$

seçilirse,

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)g(t)\big) \geq \frac{1}{{}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(1)} \left[{}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)\big) {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(g(t)\big)\right] $$

yardımıyla,

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\left(\prod_{i=1}^{n} fi\right)(t) = {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(g.f) \geq \frac{1}{{}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(1)}\, {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(g(t)\big).\, {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}\big(f(t)\big) $$

bulunur.

$$ {}_0^AI_t^\beta\left(\prod_{i=1}^{k-1} fi\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_0^AI_t^\beta(1)\right)^{k-2}}\prod_{i=1}^{k-1}\left({}_0^AI_t^\beta fi\right)(t) $$

kullanılarak,

$$ {}_0^AI_t^\beta\left(\prod_{i=1}^{n} fi\right)(t) \geq \frac{1}{{}_0^AI_t^\beta(1)}\frac{1}{\left({}_0^AI_t^\beta(1)\right)^{k-2}}\prod_{i=1}^{k-1}\left({}_0^AI_t^\beta fi\right)(t)\ {}_0^AI_t^\beta\big(f(t)\big) $$

elde edilir ve düzenlenirse

$$ {}_0^AI_t^\beta\left(\prod_{i=1}^{n} fi\right)(t) \geq \frac{1}{\left({}_0^AI_t^\beta(1)\right)^{k-1}}\prod_{i=1}^{k}\ {}_0^AI_t^\beta\big(fi(t)\big) $$

bulunur ve ispat sona erer.

Teorem 4.6 : $[0,\infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları verilsin. f artan, g türevlenebilir olsun ve $m :=_{t\geq 0} inf\, g'(t)$ reel sayısı verilsin. Bu durumda ∀ $t > 0$, β> 0 için

$$ \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\frac{1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^\beta}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^\beta(t\Gamma(\beta+1)-1)+1\right] $$

ifade edilir.

İspat : h$(t) := g(t) - mt$ fonksiyonunu göz önüne alınsın. $h'(t) = g'(t) - m \geq 0$ olduğunda h fonksiyonu artandır ve $[0,\infty)$ aralığında türevlenebilirdir. Teorem 4.1 kullanılarak,

$$ {}_0^AI_t^\beta[(g(t)-mt).f(t)] \geq \frac{1}{{}_0^AI_t^\beta(1)}\left[{}_0^AI_t^\beta(g(t)-mt){}_0^AI_t^\beta f(t)\right] $$

$$ \geq \frac{{}_0^AI_t^\beta f(t)}{{}_0^AI_t^\beta(1)}\left[{}_0^AI_t^\beta\big(g(t)\big) - m{}_0^AI_t^\beta(t)\right] $$

$$ \geq \frac{{}_0^AI_t^\beta f(t)}{{}_0^AI_t^\beta(1)}{}_0^AI_t^\beta\big(g(t)\big) - m\frac{{}_0^AI_t^\beta f(t)}{{}_0^AI_t^\beta(1)}{}_0^AI_t^\beta(t) $$

$$ {}_0^A I_t^\beta(t) = \int_0^t \left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta-1} x.dx = \int_{t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}}^{\frac{1}{\Gamma(\beta)}} u^{\beta-1}\left(u-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)du $$

$$ = \int_{t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}}^{\frac{1}{\Gamma(\beta)}} \left(u^\beta - \frac{u^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right)du = \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{u^\beta}{\beta\Gamma(\beta)} $$

$$ = \frac{\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\left(x+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta\Gamma(\beta)}\Bigg|_0^t $$

$$ = \frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} - \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)^{\beta+1}} + \frac{1}{\Gamma(\beta)^\beta\Gamma(\beta+1)}\right) $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta \left[\frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)}{\beta+1} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right] - \frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right) $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta \left[\frac{t}{\beta+1} + \frac{1}{\Gamma(\beta)(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\right] - \frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\left[\frac{\beta-\beta-1}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right] $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta \left[\frac{t\beta\Gamma(\beta)+\beta-\beta-1}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right] - \frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\left(\frac{-1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right) $$

$$ = \left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta \left[\frac{t\beta\Gamma(\beta)-1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right] - \frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\left(\frac{-1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\right) $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta (t\Gamma(\beta+1)-1) + \frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\right] $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\beta+2)}\frac{1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\left[\left(t\Gamma(\beta+1)\right)^\beta\left(t\Gamma(\beta-1)\right)+1\right] $$

bulunur.

Sonuç 4.7 : $[0,\infty)$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları verilsin.

i. f fonksiyonu azalan, g fonksiyonu türevlenebilir ve $M:=sup_{t\geq 0}g'(t)$ şeklinde bir M reel sayısını göz önüne alalım. $\forall\ t>0\ ,\ \beta>0$ için,

$$
{}_0^A I_t^\beta(f,g)(t) \geq \left({}_0^A I_t^\beta(1)\right)^{-1} {}_0^A I_t^\beta\left(f(t)\right){}_0^A I_t^\beta g(t) - \frac{Mt}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta\left(f(t)\right){}_0^A I_t^\beta(t)
$$

$$
+ M\,{}_0^A I_t^\beta\left(tf(t)\right)
$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat i : (A) $\mathrm{G}(t) \coloneqq g(t) - Mt$ fonksiyonunu ele alalım. G fonksiyonu diferensiyellenebilir ve

$$
G'(t) \coloneqq g'(t) - Mt \leq 0
$$

olduğundan $[0,\infty)$ aralığında azalandır. Teorem 4.1 yardımıyla,

$$
{}_0^A I_t^\beta(f,G)(t) = {}_0^A I_t^\beta\left(f(t)(g(t)-Mt)\right)
$$

$$
\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\left[{}_0^A I_t^\beta\left(f(t)\right).\,{}_0^A I_t^\beta(g(t)-Mt)\right]
$$

$$
\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta\left(f(t)\right){}_0^A I_t^\beta g(t) - \frac{M}{{}_0^A I_t^\beta(1)}\,{}_0^A I_t^\beta f(t)\,{}_0^A I_t^\beta t
$$

eşitsizliği elde edilir.

$$
{}_0^A I_t^\beta(1) = \frac{1}{\beta}\left[\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta - \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^\beta\right]
$$

$$
= \frac{1}{\beta}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^\beta - 1}{\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\right]
$$

$$
= \frac{1}{\beta\left(\Gamma(\beta)\right)^\beta}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^\beta - 1\right]
$$

$$ {}_{0}^{A}I_{t}^{\beta}(t) = \frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{\beta}}{\beta\Gamma(\beta)} - \frac{1}{(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}} + \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}} $$

$$ = \frac{1}{\beta+1}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1}-1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\right] + \frac{1}{\beta}\left[\frac{1-(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\right] $$

$$ = \frac{1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\frac{1}{\beta+1}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1}-1\right] + \frac{1}{\beta}\left[1-(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\right]\right] $$

$$ = \frac{1}{\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\frac{1}{\beta+1}(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} - \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\beta(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} + 1 - (\beta+1)(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[\beta(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta+1} + 1 - (\beta+1)(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta t\Gamma(\beta)+1) - (\beta+1) + 1\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta(t\Gamma(\beta)+\beta-\beta-1)+1)\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta t\Gamma(\beta)-1)+1\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta(\beta+1)\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta+1}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}(\beta\Gamma(\beta)-1)+1\right] $$

$$ = \frac{1}{\beta\big(\Gamma(\beta)\big)^{\beta}}\left[(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1\right] $$

$$ = \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\beta\Gamma(\beta)-(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}+1}{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1}\right] $$

$$ = \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}\left[\frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}\beta\Gamma(\beta)}{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1} - 1\right] $$

$$= \frac{\beta}{(\beta+1)} \frac{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}}{(t\Gamma(\beta)+1)^{\beta}-1} - \frac{1}{(\beta+1)\Gamma(\beta)}$$

elde edilir.

ii. f ve g diferensiyellenebilir iki fonksiyon ve $m_1 \coloneqq inf_{t\geq 0} f'(t)$, $m_2 \coloneqq inf_{t\geq 0} g'(t)$ olsun. O halde,

$${}_0^A I_t^{\beta}\left[\left(f(t)-m_1(t)\right)\left(g(t)-m_2(t)\right)\right]=$$

$$\frac{1}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)}\Big[{}_0^A I_t^{\beta} f(t) {}_0^A I_t^{\beta} g(t) - m_2 {}_0^A I_t^{\beta}\left(f(t)\right) {}_0^A I_t^{\beta} f(t) - m_1 {}_0^A I_t^{\beta}(t) {}_0^A I_t^{\beta} g(t)$$
$$+ m_1 m_2 \left({}_0^A I_t^{\beta}(t)\right)^2\Big]$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat ii :

$$\mathrm{F}(t) \coloneqq f(t) - m_1(t) \text{ ve } \mathrm{G}(t) \coloneqq g(t) - m_2(t)$$

fonksiyonları tanımlansın. $\mathrm{F}(t)$ ve $\mathrm{G}(t)$ fonksiyonları türevlenebilir olduğundan

$$\mathrm{F}'(t) \coloneqq f'(t) - m_1(t) \geq 0, \ \mathrm{G}'(t) \coloneqq g'(t) - m_2(t) \geq 0$$

$[0,\infty)$ aralığında $\mathrm{F}(t)$ ve $\mathrm{G}(t)$ fonksiyonları artandır.

$${}_0^A I_t^{\beta}\left[\left(f(t)-m_1(t)\right)\left(g(t)-m_2(t)\right)\right]$$
$$= {}_0^A I_t^{\beta} f(t) g(t) - m_2 {}_0^A I_t^{\beta}\left(f(t)t\right) - m_1 {}_0^A I_t^{\beta}\left(g(t)t\right) + m_1 m_2 \left({}_0^A I_t^{\beta}(t)\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)} {}_0^A I_t^{\beta} f(t) {}_0^A I_t^{\beta} g(t) - \frac{m_2}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)} {}_0^A I_t^{\beta}\left(f(t)\right) {}_0^A I_t^{\beta} f(t) - \frac{m_1}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)} {}_0^A I_t^{\beta}(t) {}_0^A I_t^{\beta} g(t)$$
$$+ \frac{m_1 m_2}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)} \left({}_0^A I_t^{\beta}(t)\right)^2$$

$$\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^{\beta}(1)}\Big[{}_0^A I_t^{\beta} f(t) {}_0^A I_t^{\beta} g(t) - m_2 {}_0^A I_t^{\beta}\left(f(t)\right) {}_0^A I_t^{\beta} f(t) - m_1 {}_0^A I_t^{\beta}(t) {}_0^A I_t^{\beta} g(t)$$
$$+ m_1 m_2 \left({}_0^A I_t^{\beta}(t)\right)^2\Big]$$

yazılır.

(A) f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve $M_1 \coloneqq sup_{t\geq 0} f'(t)$ ve $M_2 \coloneqq sup_{t\geq 0} g'(t)$ olsun. O halde

F(t) ve G(t) fonksiyonları türevlenebilir olduğundan

F$'(t) \coloneqq f'(t) - M_1(t) \geq 0$, G$'(t) \coloneqq g'(t) - M_2(t) \geq 0$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

$$
\begin{aligned}
&{}_0^A I_t^\beta\big[\big(f(t) - M_1(t)\big)\big(g(t) - M_2(t)\big)\big] \\
&\qquad = {}_0^A I_t^\beta f(t)g(t) - M_2\, {}_0^A I_t^\beta (f(t)t) - M_1\, {}_0^A I_t^\beta (g(t)t) + M_1 M_2 \left({}_0^A I_t^\beta (t)\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta (1)}\, {}_0^A I_t^\beta f(t)\, {}_0^A I_t^\beta g(t) - \frac{M_2}{{}_0^A I_t^\beta (1)}\, {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)\, {}_0^A I_t^\beta f(t) - \frac{M_1}{{}_0^A I_t^\beta (1)}\, {}_0^A I_t^\beta (t)\, {}_0^A I_t^\beta g(t) \\
&\qquad + \frac{M_1 M_2}{{}_0^A I_t^\beta (1)} \left({}_0^A I_t^\beta (t)\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{{}_0^A I_t^\beta (1)} \Big[{}_0^A I_t^\beta f(t)\, {}_0^A I_t^\beta g(t) - M_2\, {}_0^A I_t^\beta \big(f(t)\big)\, {}_0^A I_t^\beta f(t) - M\, {}_0^A I_t^\beta (t)\, {}_0^A I_t^\beta g(t) \\
&\qquad + M_1 M_2 \left({}_0^A I_t^\beta (t)\right)^2\Big]
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında çeşitli türden kesirli türev ve integralleri tanımlanmıştır. Beta-kesirli türev ve integralleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Beta-kesirli türev kullanılarak yeni ve önemli bazı kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. İyi bilinen bazı eşitsizlikler yeni bir kesirli operatör olan beta-kesirli türev ve integrali yardımıyla genişletilerek daha ayrıntılı araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Atangana, A.,2016, “Derivative with a new parameter”, *Institute for Groundwater Studies*, University of the Free State, Bloemfontein, South Africa.

[2] Beckenbach, E. F., Bellman, R., 1961, “Inequalities”, *Springer-Verlag,* Berlin, Heidelberg.

[3] Hardy, G. H., Littlewood, J.E., Pólya G.,1942, “Inequalities, 2nd edition”, *Cambridge University Press*, Cambridge.

[4] Mitrinoviç, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., 1993, “Mathematics and its applications series; volume:61”, *Kluwer Academic Publishers,* Dordrecht, Boston.

[5] Belarbi, S. And Dahmani, Z., 2009, “On some new fractional integral requalities”, *Journel inequalities in püre and applied mathematics*, 10, (3): 1-5.

[6] Atangana, A. And Goufo E. F. D., 2014. “*Extension of Matched Asymptotic Method to Fractional Boundary Layers Problems*”, Mathematical Problems in Engineering, 2014, 1-7

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı Adı :	CANDOĞAN Zahide Özen
Uyruğu :	T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri :	14.11.1989 Uşak
Medeni Hali :	Bekar
Telefon :	05067242154
e-mail :	ozencandogan@hotmail.com

Eğitim Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Uşak Üniversitesi / Matematik Bölümü	2014
Lise	Uşak Lisesi /Uşak	2008

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

İş Deneyimi

2016-Halen Uşak Özel Seçkin Grup Temel Lisesi

Hobiler

Sinema, Resim, Bilgisayar, Matematik